**Klausurvorbereitung**

**Theorie**

**Statistik**

* **Lehre von Verfahren und Methoden zur Gewinnung, Erfassung, Analyse, Charakterisierung, Abbildung, Nachbildung und Beurteilung von beobachtbaren Daten über die Wirklichkeit** (Empirie
* **systematische Zusammenstellung von Zahlen und Daten zur Beschreibung von Zuständen, Entwicklungen und Phänomen**

**Beschreibende Statistik**

* **sammelt Daten bei allen Untersuchungseinheiten**, über die man Informationen erhalten will
* empirische Daten **durch Tabellen, Kennzahlen, (Maßzahlen oder Parameter) und Grafiken**
* **Beurteilung von Daten basierend auf Stichproben**
* Dient der Daten-Beobachtung / Datenbeurteilung
* **Konzentration auf das Wesentliche**

**Schließende Statistik**

* **Schluss von einer Teilmenge (Stichprobenergebnissen) auf das Eigenschaften der Grundgesamtheit (GG)**
* **Grund für Stichproben: enorme Größe der GG**
* **Stichprobe: Auswahl einer Teilmenge aus der GG** zu der Informationen gesammelt werden sollen
* **Datenbeurteilung (Analyse) durch Schlüsse auf Basis unvollständiger Daten**
* Dient dem **Beweis oder der Widerlegung von Hypothesen, die sich auf GG beziehen**
* Basiert auf Wahrscheinlichkeitsrechnung

**Auswahlverfahren zur Stichprobe oder Umfang zur Stichprobe?**

* Das **Auswahlverfahren zur Erhebung der Stichproben und Bestimmung des Stichprobenumfangs ist wichtiger als der Stichprobenumfang.**
* **Auswahlverfahren**: **Art und Weise, wie Elemente der Stichprobe zweckmäßig ausgewählt werden**
* Auswahlverfahren bestimmt Stichprobenumfang.
* **schlechte Auswahl zur Stichprobe liefert unabhängig vom Stichprobenumfang keine brauchbaren Erkenntnisse über die GG** (Stichprobe ist „verzerrt“ bzw. „nicht repräsentativ

**willkürliche Auswahl**

* **unkontrollierte Aufnahme eines Elements aus der GG in die Stichprobe**
* **kein Auswahlplan**
* **Interviewer sind frei in der Auswahl ihrer Interviewpartner**.

**zufällige Auswahl (Random-Auswahl)**

* **Zufallsgesteuert**
* **jedes Element aus GG gelangt mit gleicher Wahrscheinlichkeit** **in die Stichprobe**
* **Voraussetzung: Liste/Datei zu allen Elementen der GG**
* **ermöglicht Berechnung von Stichprobenfehler** (durch Wahrscheinlichkeitsrechnung)
* **Einfache Zufallsstichprobe**:
  + **Jede Stichprobe hat dieselbe Chance ausgewählt zu werden**
* **Geschichtete Zufallsstichprobe**
  + **Elemente der GG werden in Gruppen** (Schichten) **eingeteilt** (ein Element gehört genau zu einer Gruppe (Schicht))
  + **nach Gruppierung werden einfache Zufallsstichproben aus jeder Gruppe genommen**
* **Klumpenstichprobe**
  + **Einfache Zufallsauswahl aus zusammengefassten Elementen (Klumpen, Cluster)**
  + Stichprobe wird aus allen Elementen der bestimmten Cluster genommen

**Quota-Auswahl**

* **bewusstes Auswahlverfahren**
* ausgewählte **Quotierungsmerkmale sollen in der Stichprobe dieselbe Verteilung wie in der Grundgesamtheit** erreichen.
* **Quotenpläne** **für ausgewählte Merkmale (Geschlecht, Alter, Beruf)** **ermöglichen dieselbe Verteilung in der Stichprobe wie in der GG**
* Verteilung der Quotierungsmerkmale in der GG muss bekannt sein

**TED-Umfrage im Fernsehen**

* **willkürliche Auswahl**
* **kein Auswahlplan**   
  (jeder Zuschauer kann an Umfrage einmal, mehrmals oder nicht teilnehmen

**Klassierung von Daten**

**Warum „bis unter“ zum Wertebereich bei klassierten Daten?**

„bis unter“

* **ermöglicht eindeutige Klassierung bei diskreten metrischen Merkmalen**
* **vermeidet Überschneidungen bei den Merkmalsausprägungen**   
  (Klassen 100 bis 200 € und 200 bis 300 € beinhalten beide einen Umsatz von 200,00 €)
* **vermeidet Lücken bei den Merkmalsausprägungen**   
  (Klassen 100 bis 199 € und 200 bis 300 beinhalten keinen Umsatz zwischen 199,01 und 199,99 €)

**Probleme bei Klassierung von Daten**

* **Zielkonflikt: Übersichtlichkeit vs. Informationsverlust**
* **Berechnung von exakten statistischen Kennzahlen** (z.B. **Mittelwerte**) ist bei klassierten Daten **nicht möglich**   
  **Mittelwerte, Quantile sind bei klassierten Daten nur Näherungswerte**
* **Näherungswerte können nur unter bestimmten Annahmen** (z.B. Gleichverteilung) **berechnet** werden

**offenen Randklassen**

* besitzen **keine Klassenuntergrenze** (z. B. „bis unter 50 kg“) oder **keine Klassenobergrenze** (z. B. „120 kg und schwerer“)
* **Berechnung von Klassenbreite und Klassenmitte nicht möglich**

**Berechnung der Klassenbreite bi für die Klasse „150 b.u. 180 cm“**

* **Klassenbreite bi** = **xk – xk-1** = **180 – 150 = 30 cm**

**Berechnung der Klassenmitte mi für die Klasse „150 b.u. 180 cm“**

* Klassenmitte **mi = (xk + xk-1) ½** = (180 + 150) / 2 = 330 / 2 = 165 cm

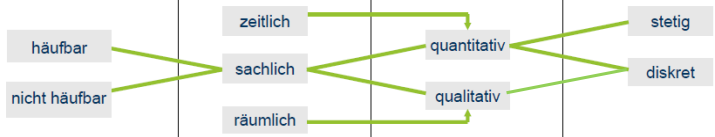
**Entscheidungen bei Klassierung**

* Anzahl der Klassen
* proportionale Klassenbreite bei allen Werten (alle gleich oder unterschiedliche Klassenbreite)
* obere oder untere Randklasse („bis unter 50 kg“, „120 kg und schwerer“
* Klassenobergrenzen / Klassenuntergrenzen

**Histogramm**

* **flächenproportionale Darstellung der Häufigkeiten von klassierten Daten**
* **x-Achse muss Skala mit geordneten Werten und gleichen Abständen zwischen den Werten** (z. B. 200, 400, 600, 800) sein
* **Rechtecke liegen auf x-Achse nebeneinander** (ohne Abstände)
* **Rechteckbreite = Klassenbreite bi**   
  (bei Klasse „150 b.u. 180“ wird die Rechteckbreite zwischen den Werten 150- 180 auf der x-Achse gezeichnet)
* **Rechteckhöhe** = absolute Klassenhäufigkeit hi / Klassenbreite bi 🡆 **hi / bi**

**Merkmale** **Merkmalstypen**



**Merkmale** sind

* **häufbar**
* **nicht häufbar**

**Merkmale** werden

* **zeitlich**
* **sachlich**
* **räumlich**

**abgegrenzt**

**Merkmale** haben **Merkmalstyp**

* **qualitativ**
* **quantitativ**

**Qualitative Merkmale = nicht metrische Merkmale**

* **Nicht metrische Skalen**
* **lassen sich nicht mit Zahlen messen**
* **sind immer diskret** (**haben nur eine abzählbare Menge möglicher Merkmalswerte**)
* **Codierung und Rangordnung möglich**
* **Keine Rechenoperationen** mit den Merkmalsausprägungen zulässig
* **Skalenniveau: Nominalskala und Ordinalskala (Rangskala)**  
  **Beispiele:**  
  Geschlecht (Nominalskala)  
  Güteklasse (Rangskala)  
  Umsatzklasse (Rangskala)  
  Wohnort (Nominalskala)  
  Kundenzufriedenheit, gemessen auf einer Skala von „1 = sehr zufrieden“ bis „5 = sehr unzufrieden“ (Rangskala)  
  Beruf (Nominalskala)  
  Steuerklasse (Rangskala)  
  Einkommensklasse (Rangskala)

**Skalenniveau: nicht metrische Skalen**

* **bei qualitativen Merkmalen**
* Keine Rechenoperationen zulässig
* nur Vergleichsoperationen zulässig = ≠ < >
* **Nominalskala**
* **Ordinalskala ( = Rangskala)**

|  |  |
| --- | --- |
| **Nominalskala** | **qualitatives Merkmal**  **nicht metrische Skala mit diskreten Merkmalen**  **diskret:**  **abzählbare Menge möglicher Merkmalsausprägungen**  Merkmal „Familienstand“ hat z. B. 3 Merkmalsausprägungen: „ledig“, „verheiratet“, „geschieden“) |
| * endliche Menge, * unterliegen keiner logischen Rangfolge * Zuordnung von Zahlen ist nur Kodierung der Merkmalsausprägungen * Daten sind nicht vergleichbar * nur Vergleichsoperationen =, ≠ möglich * **Gleichwertigkeit (Steuerklasse I** ≠ Steuerklasse IV |
| **Beispiele:**  Geschlecht, Familienstand, Steuerklasse, Postleitzahl,  Rechtsform eines Unternehmens, Wohnort, Beruf |

|  |  |
| --- | --- |
| **Ordinalskala** **(Rangskala)** | **qualitatives Merkmal**  **nicht metrische Skala mit diskreten Merkmalen**  **diskret:**  **abzählbare Menge der Merkmalsausprägungen**  Merkmal „Konfektionsgröße“ hat 3 Merkmalsausprägungen: „“M“, „L“, „XL“) |
| * endliche Menge von Ausprägungen, * hat Rangmerkmal (natürliche Rangfolge der Daten möglich) * **Anordnung, Rangfolge** * Ordnungsprinzip ist die Stärke/Grad der Intensität * Abstände zwischen den Ausprägungen können nicht interpretiert werden * Daten sind vergleichbar (z. B. Konfektionsgrößen XXL > XL > L) * **nur Vergleichsoperationen =, ≠, <, > möglich** |
| **Beispiele**  Punkte in einer Spieletabelle:  **1. Platz 20 Punkte, 2. Platz 10 Punkte**  natürliche Rangfolge durch die Punkte 🡆 keine Aussage zum Abstand zwischen 1. Und 2. Platz möglich   (1. Platz hat die doppelte Punktanzahl, jedoch muss das Team   auf dem 1. Platz nicht doppelt so gut sein  Konfektionsgröße  Schulnoten / Klausurnoten  Windstärke  Umsatzklasse eines Unternehmens  Bewertungsskala (zur Kundenzufriedenheit)  Einkommensklasse |

**Quantitative Merkmale = metrische Merkmale**

* **alle** **quantitativen Merkmale sind metrisch**!
* **Metrische Skalen sind Kardinalskalen (endliche (abzählbare) Anzahl (Menge) der Elemente)**
* Unterscheidung in
  + **stetige Merkmale**
    - **Menge der Merkmalsausprägungen überabzählbar**
    - **Intervall der reellen Zahlen** (weitere **Zwischenwerte zwischen 2 Ausprägungen**)   
      **Beispiele  
      Gewicht  
      Alter (wenn nicht Alter als ganzzahliger Wert in Jahren 🡆 dann ist es diskret)  
      Fahrzeit**
  + **diskrete Merkmale**
    - **Menge der Merkmalsausprägungen ist endlich bzw. abzählbar**   
      (i.d.R. **ganze Zahlen**)   
      **Beispiele**Kinderzahl  
      Sitzplätze  
      monatliches Gehalt

**Skalenniveau: metrische Skalen**

* **bei quantitativen Merkmalen**
* **Rechenoperationen sind zulässig (+ - \* /)**
* Skala **hat Maßeinheit und Nullpunkt**(muss kein natürlicher Nullpunkt sein   
  (z. B. Temperatur in °C ist Intervallskala 🡆 hat Nullpunkt, aber keinen natürlichen Nullpunkt)
* Metrische Skalen (Kardinalskalen) **können auf alle statistische Verfahren angewandt** werden
* **Intervallskala**
* **Verhältnisskala (Ratioskala)**
* **Absolutskala**

z. B.

**Häufigkeiten,**

**arithmetisches Mittel**,

**Streuungsmaße** wie:

Standardabweichung,

Varianz,

Spannweite

* Metrische Skalen (Kardinalskalen) **sind abwärtskompatibel**
  + jedes Verfahren, dass auf niedrigem Skalenniveau angewandt werden kann, darf auch auf höherem Skalenniveau angewandt werden

z. B. darf Median-Berechnung zu einer Ordinalskala auch auf einer  
 Kardinalskala (Intervallskala) angewandt werden

|  |  |
| --- | --- |
| **Intervallskala** | **quantitatives Merkmal**  **metrische Skala mit diskreten oder stetigen Merkmalen**  **diskret:**  **abzählbare Menge der Merkmalsausprägungen**  Merkmal „Kinderanzahl“ hat die drei Merkmalsausprägungen „1“, „2“, „3 und mehr“  **stetig:**  **Intervall reeller Zahlen** (weitere **Zwischenwerte zwischen 2 Ausprägungen**)  Merkmal „Temperatur in °C“ kann zwischen den Temperaturwerten auf der Skala weitere Zwischenwerte haben. |
| * **kein natürlicher Nullpunk**t **natürlicher Nullpunkt** ist **von Natur** aus gegeben und **nicht veränderbar**. Zur Einordnung der Skala die Frage stellen **Wie wurde der natürliche Nullpunkt bestimmt?  (natürlich oder willkürlich vom Menschen)** **nicht natürlicher (willkürlicher) Nullpunkt ist z. B. °C** es könnte auch jeder beliebiger anderer Punkt als 0°C sein **natürlicher Nullpunkt durch physikalische Größen** (z. B. Gramm) **oder durch logische Annahmen** * **Ausprägungen können auch Wert < 0 haben** * **gleichgroße Intervalle zwischen den Ausprägungen** (z. B. **Temperaturskala °C** enthält gleich große Intervalle von 1°C) * **gleichgroße Intervallabstände sind interpretierbar  (Temperatur in °C)** * **Reihenfolgen** und **quantifizierbare Abstände** möglich * **Differenzbildung** möglich (6°C – 2°C = 12°C – 8°C) * Daten können **unendlich viele Ausprägungen im Intervall** annehmen * **keine Verhältnisbildung möglich** * **Vergleichsoperationen =, ≠, <, > und Rechenoperation +, - möglich** * **keine Multiplikation oder Division  (da keine Verhältnisbildung möglich)** |
| **Beispiele**  Längendifferenzen, Temperatur in °C, IQ, Geburtsjahr    Diese Merkmale haben keinen natürlichen Null-Punkt   Einige dieser Merkmale können Werte < 0 haben  gleichgroße Intervalle, keine sinnvolle Verhältnisbildung möglich  (ausgenommen Temp. in ° C)  Mensch mit IQ 130 ist nicht doppelt so schlau wie Mensch mit IQ 65  Geb.-Jahr 1970 ist nicht 1,5 mal größer als Geb.-Jahr 1300 |

|  |  |
| --- | --- |
| **Verhältnisskala  (Ratioskala)** | **quantitatives Merkmal**  **metrische Skala mit diskreten oder stetigen Merkmalen**  **diskret:**  **abzählbare Menge der Merkmalsausprägungen**  Merkmal „Umsatz“ hat die drei Merkmalsausprägungen „10 Tsd“, „20 Tsd.“, „30 Tsd. und mehr“  **stetig:**  **Intervall reeller Zahlen** (weitere **Zwischenwerte zwischen 2 Ausprägungen**)  Merkmal „Temperatur in K“ kann zwischen den Temperaturwerten auf der Skala weitere Zwischenwerte haben. |
| * **natürlicher Nullpunk**t **natürlicher Nullpunkt** ist **von Natur** aus gegeben und **nicht veränderbar**. Zur Einordnung der Skala die Frage stellen **Wie wurde der natürliche Nullpunkt bestimmt?  (natürlich oder willkürlich vom Menschen)** **natürlicher Nullpunkt ist z. B. Temperatur in K natürlicher Nullpunkt durch physikalische Größen** (z. B. Gramm) **oder durch logische Annahmen** * **Werte der Verhältnisskala sind immer ≥ 0** * **Verhältnisbildung** (Quotientenbildung) möglich **Quotienten der gemessenen Werte werden verglichen** * **Vergleichsoperationen =, ≠, <, > und Rechenoperation +, -, \*, : möglich** * **Multiplikation oder Division möglich (da Verhältnisbildung möglich)** |
| **Beispiele**  Temperatur in °K, Körpergröße, Gewicht, Umsatz, Einkommen,  Geschwindigkeit, Preis, Länge, Breite, Alter, Klausur-Punkte    all diese Merkmale können nur Werte ≥ 0 haben  zu all diesen Merkmalen ist Verhältnisbildung möglich   (2faches Einkommen, Gewicht, Umsatz, Preis, Alter … |

|  |  |
| --- | --- |
| **Absolutskala** | **quantitatives Merkmal**  **metrische Skala mit diskreten oder stetigen Merkmalen**  **diskret:**  **abzählbare Menge der Merkmalsausprägungen**  Merkmal „Einwohnerzahl“ hat die drei Merkmalsausprägungen „10 Tsd“, „20 Tsd.“, „30 Tsd. und mehr“  **stetig:**  **Intervall reeller Zahlen** (weitere **Zwischenwerte zwischen 2 Ausprägungen**)  Merkmal „Anzahl der Beschäftigten“ kann zwischen den Werten auf der Skala weitere Zwischenwerte haben. |
| * **natürlicher Nullpunk**t **natürlicher Nullpunkt** ist **von Natur** aus gegeben und **nicht veränderbar**. Zur Einordnung der Skala die Frage stellen **Wie wurde der natürliche Nullpunkt bestimmt?  (natürlich oder willkürlich vom Menschen)** **natürlicher Nullpunkt ist z. B. Temperatur in K natürlicher Nullpunkt durch physikalische Größen** (z. B. Gramm) **oder durch logische Annahmen** * **Werte der Absolutskala sind immer ≥ 0** * prinzipiell wie Verhältnisskala, nur mit ganzzahligen Werten * alles, was ganzzahlig zählbar ist * Anzahl und Stückzahl, Häufigkeiten * **Verhältnisbildung** (Quotientenbildung) möglich **Quotienten der gemessenen Werte werden verglichen** * **Vergleichsoperationen =, ≠, <, > und Rechenoperation +, -, \*, : möglich** * **Multiplikation oder Division möglich (da Verhältnisbildung möglich)** |
| **Beispiele**  Einwohneranzahl, Beschäftigtenanzahl  Klausur-Punkte (wenn nur ganze Punkte vergeben werden)   all diese Merkmale können nur Werte ≥ 0 haben  zu all diesen Merkmalen ist Verhältnisbildung möglich   (3fache Anzahl der Beschäftigten, 100 Punkte sind doppelt soviel wie   50 Punkte … |

**Grundgesamtheit**

* die **Menge aller möglichen Erhebungseinheiten**

**Stichprobe**

* eine **n-elementige Teilmenge der Grundgesamtheit mit N Elementen** (**Merkmalsträgern**)

**Merkmal**

* **relevante Eigenschaften der Merkmalsträger**
* Statistische Variable  
  **Beispiele**:  
  Familienstand  
  Alter  
  Größe  
  Gewicht  
  Umsatz  
  Einkommen

**Merkmalsausprägung**

* **mögliche Ausformungen eines Merkmals**
* **Merkmalswerte (Variablenwerte) / Beobachtungswerte in einer Werteliste**  
  Beispiele:  
  {„ledig, verheiratet, geschieden“}  
  {„zufrieden“, „eher unzufrieden“, „unzufrieden“}  
  {„1 Std.“, 2 Std.“, „3 Std.“}  
  {10.000, 20.000, 30.000 }

**Merkmalsträger**

* **Einzelnes Objekt einer statistischen Untersuchung, Träger der Informationen  
  Untersuchungseinheit, Erhebungseinheit**   
  Beispiele:  
  Menschen  
  Kunden

**Merkmalswerte**

* **einzelner Messwert / Beobachtungswert (Ergebnis) aus Merkmalsausprägungen** (Werteliste)  
  **Beispiele:**  
  „ledig“ aus den Merkmalsausprägungen {„ledig, verheiratet, geschieden“}  
  „zufrieden“ aus den Merkmalsausprägungen {„zufrieden“, „eher unzufrieden“, „unzufrieden“}

**Statistische Masse**

* **Menge aller Merkmalsträger**, die
  + **mit dem Untersuchungsziel in Verbindung** stehen,
  + **mindestens eine übereinstimmende Eigenschaft** haben,
  + sich exakt **sachlich, räumlich, zeitlich abgrenzen lassen**

**Häufigkeiten und Häufigkeitsverteilungen**

**Datendokumentation**

* Formen der Datendokumentation
* Einzelwerte (Einzelbeobachtungen)
  + ungeordnete Reihe
    - Urliste
    - Rohdaten
    - Primärdaten
  + erzeugt INPUT-Blase

**Urliste**

* direktes Ergebnis einer Datenerhebung
* Daten der Urliste müssen aufbereitet werden

**Vorteile:**

* enthält alle Beobachtungswerte
* keine Auslassungen
* keine Übertragungsfehler
* keine verlorene Information

**Nachteile:**

* sehr großer unübersichtlich und nicht auswertbarere Datenbestand
* unkorrigierten Urliste kann offensichtliche Fehler (Zahlendreher, unplausible Daten) enthalten

**Aufbereitung der Daten einer Urliste**

* **durch Häufigkeitsverteilungen**

**Häufigkeitsverteilungen für nicht klassierte Daten**

1. **Sortieren der Daten** 
   * **geordnete Reihe** nach irgendeiner Ordnung ( z. B. **alphabetische Ordnung der Merkmalsträger oder Größenordnung der Merkmalsausprägung**)
2. **Verdichten der sortierten Daten auf Merkmalsausprägungen und zählen wie oft diese vorkommen** 
   * **Häufigkeitsverteilung:** **geordnete Menge von Wertepaaren (Merkmalsausprägung und zugehörige Häufigkeit)**
3. **Darstellung der sortierten Häufigkeitsverteilungen nach Merkmalsausprägungen in Häufigkeitstabelle**

**Häufigkeitsverteilungen für klassierte Daten**

1. **Einteilung der Werte in Klassen** (klassierte Daten )
   * keine Sortierung erforderlich
2. **Verdichten der klassierten Daten** 
   * **Häufigkeitsverteilung für klassierte Daten** (klassierte Verteilung)
3. **Darstellung der klassierten Daten in Häufigkeitstabelle für klassierte Daten**

**absolute Häufigkeit**

* **Anzahl** des Auftretens einer bestimmten **Merkmalsausprägung**

**relative Häufigkeit**

* **Verhältnis der absoluten Häufigkeit zur Summe der Einzelhäufigkeiten** (n)

**Summenhäufigkeiten**

* **nur für Rangmerkmale und metrische Merkmale** sinnvoll
* **absolute Summenhäufigkeit** (**absolute kumulierte Häufigkeit**)  
  **H(xi) = h(x1) + h(x1) + … + h(xi) 🡆 ∑h(xi) = n**
* **relative Summenhäufigkeit** (**relative kumulierte Häufigkeit**)  
  **F(xi) = f(x1) + f(x1) + … + f(xi) 🡆 ∑f(xi) = 1**

**Übung:**

**Häufigkeitsverteilung zum Wohnort**

Merkmal: Wohnort

Merkmalsträger: befragte Menschen

Merkmalsausprägungen: „A“, „B“, „C“, „D“, „k. A.“

Merkmalswert: z. B. ist „A“ ein Merkmalswert zu genannten Ausprägungen

Grundgesamtheit: alle Antworten

Stichprobe: in die Statistik einfließende Antworten

Statistische Masse: alle befragten Menschen

**Antworten**:

**B** **C** **A** **B** **C** **B B B** **A A** **D** **k.A.** **A** **B B** **A** **k.A**. **A** **B B** (k.A. = keine Antwort)

* Verdichten der Häufigkeitsverteilung und Darstellen in einer Häufigkeitstabelle

Ablauf

1. Tabelle mit Merkmalsausprägungen „A“, „B“, „C“, „D“, „k. A.“ erstellen
2. Antworten zählen und in die Spalte zur absoluten Häufigkeit eintragen
3. Summe zur absoluten Häufigkeit bilden
4. relative Häufigkeit in Tabelle eintragen
5. wenn gefragt, absolute und relative Summenhäufigkeit in Tabelle eintragen

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Wohnort  xI | absolute Häufigkeit  h(xi) | absolute  Summenhäufigkeit  H(xi) | relative Häufigkeit  f(xi) | relative  Summenhäufigkeit  F(xi) | relative Häufigkeit  f(xi)  zu gültigen Antworten |
| **A** | 6 | 6 | 0,30 | 0,30 | 0,333 |
| **B** | 9 | 15 | 0,45 | 0,75 | 0,500 |
| **C** | 2 | 17 | 0,10 | 0,85 | 0,111 |
| **D** | 1 | 18 | 0,05 | 0,90 | 0,056 |
| **k. A.** | 2 | 20 | 0,10 | 1,00 |  |
| **SUMME** | **20** |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |

Hinweis:

gültige Antworten = 18 (Antworten, die nicht „k. A“ beinhalten.

**Empirische Verteilungsfunktion F(x)**

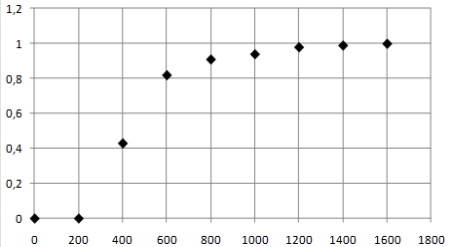
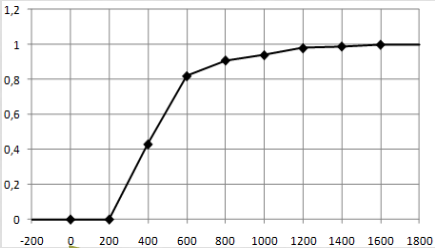
* **enthält** die **gesamte Information der Daten**
* nur ursprüngliche Reihenfolge geht verloren
* **ist** (relative) **Summenhäufigkeitskurve**
* gibt für jede reelle Zahl x den **Anteil der Merkmalsträger** an, für die das Merkmal X einen (Ausprägungs)-Wert xi annimmt, der kleiner oder gleich x ist

**relative Summenfunktion / Verteilungsfunktion F(x)**

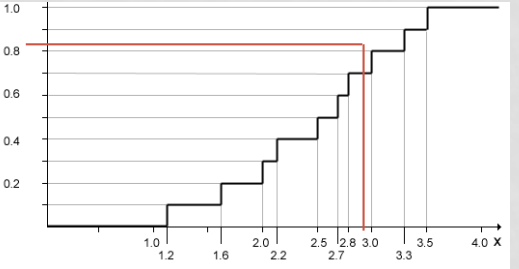
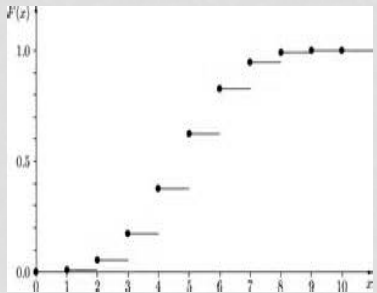
* **Wertebereich: 0 ≤ F(x) ≤ 1**
* **F(x) steigt oder ist konstant** (ist monoton nichtfallend)
* F(x) ist eine **Treppenfunktion mit Sprungstellen bei x1 , x2 , ..., xi**
* Die **Größe der Sprünge** beträgt **fi = F(xi ) - F(xi-1 )**  
  F(xi ): Wert aus letzter Summenfunktion,   
  F(xi-1 ): Wert aus vorausgehender Summenfunktion

**theoretische Verteilung ist „idealisierte“ Verteilung**

**Empirische Verteilungsfunktion bei klassierten Daten**



Die Sprünge beginnen bei der oberen Klassengrenze



Interpretation zum Wert „3.0“ auf der x-Achse:

0,8 = 80% der Merkmalsträger (Untersuchungseinheiten) haben einen Notendurchschnitt ≤ 3,0

* **y-Achse** enthält die **Werte zur relativen Summenfunktion f(xi)**
* **x-Achse enthält die Werte zu xi**
* **Wichtig in der Anwendung:** **Achsenbeschriftung f(xi) für y-Achse und xi für x-Achse nicht vergessen!**

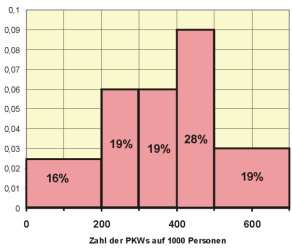
**Diagramme (grafische Darstellung) zur Häufigkeitsverteilung**

**Wahlentscheidung:**

* **Form der grafischen Darstellung**
* **Achsenmaßstab**
* **Evtl. nur Ausschnitt darstellen**; Achtung: Manipulationen (optische Täuschung) möglich  
  Diagramm richtig interpretieren, d. h. relative Häufigkeit ermitteln und Diagramm hierzu interpretieren

**typische Darstellungsformen:**

* **Säulendiagramm**
  + **höhenproportionale Darstellungsform einer Häufigkeitsverteilung**
  + **x-Achse**: **vertikale, nicht aneinandergrenzende Säulen** (mit beliebiger Breite) **für Beobachtungswert (Merkmalswert) xi**
  + **y-Achse: absolute oder relative Häufigkeit pro xi-Wert**
  + **für wenige Ausprägungen**
* **Stabdiagramm / Liniendiagramm**
  + **wie Säulendiagramm** nur mit schmalen bzw. sehr schmalen Säulen
* **Balkendiagramm**
  + **wie Säulendiagramm** nur mit horizontalen Balken (transporniert)
  + **x-Achse**: **absolute oder relative Häufigkeit pro xi-Wert**
  + **y-Achse: horizontale, nicht aneinandergrenzende Balken** **für Beobachtungswert (Merkmalswert) xi**
  + sehr gut zur **Darstellung von Rangfolgen** geeignet
* **Kreisdiagramm**
  + jeder Kreissektor enthält einen Teilwert
  + gesamter Kreis = Summenhäufigkeit
  + max. 7 Teilwerte
  + xi-Werte im Uhrzeigersinn der Größe nach sortieren
  + für die Darstellung von diskreten Daten (besonders für Nominal und Ordinalskalen)
* **Histogramm (nur bei klassierten Daten)**
  + **flächenproportionale Darstellung der Häufigkeiten von klassierten Daten**
  + **x-Achse: geordnete Werten mit gleichen Abständen zwischen den Werten**   
    (z. B. 200, 400, 600, 800)
  + **Rechtecke liegen auf x-Achse nebeneinander** (ohne Abstände)
  + **Rechteckbreite = Klassenbreite bi**   
    (bei Klasse „150 b.u. 180“ wird die Rechteckbreite zwischen den Werten 150- 180 auf der x-Achse gezeichnet)
  + **y-Achse = Rechteckhöhe** = absolute **Klassenhäufigkeit** hi / **Klassenbreite** bi 🡆 **hi / bi**
  + **absolutes Histogramm**: **Summe der Flächeninhalte aller Rechtecke** = **Summe der Einzelhäufigkeiten (**n)



|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Klasse | Anzahl PKW / 1000 Personen  xi | Anzahl der Länder  h(xi) | Anteil der  Länder  f(xi) | Klassen-  breite  bi | Rechteck-  höhe  ri = hi / bi |
| 1 | 0 b. u. 200 | 5 | 0,1563 | 200 | 0,025 |
| 2 | 200 b. u. 300 | 6 | 0,1875 | 100 | 0,060 |
| 3 | 300 b. u. 400 | 6 | 0,1875 | 100 | 0,060 |
| 4 | 400 b. u. 500 | 9 | 0,2812 | 100 | 0,090 |
| 5 | 500 b. u. 700 | 6 | 0,1875 | 200 | 0,030 |
| SUMME |  | 32 |  |  |  |

**Hinweis:**

* die **Skala auf der X-Achse muss geordnete Werte mit gleichem Abstand** haben   
  (im Bsp. 200, 400, 600, 800)
* **letzter Skalenwert auf x-Achse ≥ Summe zu allen Klassenbreiten**   
  (im Bsp. 200 + 100 + 100 + 100 + 200 ≥ 700)
* Aber: **Rechtecke = Klassenbreite**   
  (im Bsp. 200, 100, 100, 100, 200)

**Lageparameter (Lokationsmaße)**

* **beschreiben** die **“Lage”** der Elemente **der Grundgesamtheit / Stichprobe** **bezüglich der Messskala**

**allgemeine Lageparameter**

**Allgemeine Mittelwerte:**

* **Modus (Modalwert) x̅D**
* **Median x̅Z**
* **arithmetisches Mittel x̅**
* **Quantil x̃p**

**Modus (Modalwert) x̅D**

* + die am **häufigsten auftretende Merkmalsausprägung (maximale Häufigkeit)**.
  + **hauptsächlich für nominale Merkmale, aber auch andere diskrete Merkmalstypen**
  + bei **klassierten Daten: Klassenmitte der Klasse mit den größten Häufigkeiten 🡆 Modalklasse   
    Klassenmitte** ½ \* (k + k-1) = ½ \* (Klassenobergrenze + Klassenuntergrenze)  
    Bsp. Klasse **„200 b. u. 300“** = **½ \* (300 + 200) = ½ \* 500 = 250**
  + **mehrere Modalwerte**, wenn es **mehrere Merkmalsausprägungen mit der gleichen maximalen Häufigkeit** gibt (Multimodale Verteilungen)  
    **x̅D1, x̅D2, x̅D3,**

**Median x̅Z**

* + sehr **robustes Lokationsmaß** 🡆 **wenig anfällig gegen Datenausreißer**
  + Median beschreibt die Verteilung besser als Mittelwert ( Ausreißer haben auf Median keinen Einfluss)
  + **Wert in der Mitte der geordneten Reihe** **Wichtig:** **Werte müssen geordnet sein**
  + **Mindestens 50% der Werte liegen links und mindestens 50% rechts des Medians** (ggf. Median mit eingerechnet).
  + für ordinale und metrische Merkmale
  + für **gerade Werte von n**  
      
    Bsp.  
    n = 14 (Summe der Einzelhäufigkeiten)  
      
    1, x2, x3, x4, x5, x6, **x7**, **x8**, x9, x10, x11, x12, x13, x14  
      
    wenn   
    x7 = 45 (7. Element in den Ausprägungen) und   
    x8 = 20 (8. Element in den Ausprägungen)  
      
    **x̅Z** = ½ \* (45 + 20) = ½ \* 65 = 32,5
  + **bei ordinal skalierten Werten** (z. B. **Zeugnisnoten**) **müssen bei geradem n die Merkmalswerte zu den betreffenden Ausprägungen identisch sein**  
    1 2 **3 3** 4 5 Median wird aus 3. und 4 Element ermittelt und hat den Wert 3  
     ½ \* (3 + 3) ) 3  
      
    1 2 **3 4** 5 6 🡆 es existiert **kein Median, da es keine Note 3,5 gibt**
  + für **ungerade Werte von n**Bsp.  
    n = 13 (Summe der Einzelhäufigkeiten)  
      
    1, x2, x3, x4, x5, x6, **x7**, x8, x9, x10, x11, x12, x13  
      
    wenn   
    x7 = 45   
    **x̅Z** = 45
* **Median bei klassierten Daten**
* **Median für metrische Daten in Klassen ist Näherungswert**   
  (**exakte Merkmalsausprägung des Medians nicht bestimmbar, da Verteilung in den Klassen unbekannt** (Klassenbreite bezieht sich auf ein Intervall (von/bis), es ist unbekannt, wie die Ausprägungen verteilt sind
* Annahme: Beobachtungswerte sind in den Klassen gleich verteilt
* **Achtung!! Fehler im Näherungswert möglich**

k = Einfallsklasse 🡆 Klasse mit F(x) ≥ 50% (relativer Summenhäufigkeit ≥ 0,5)

xk-1 = Untergrenze der Einfallsklasse

xk = Obergrenze der Einfallsklasse

Fk-1 = relative Summenhäufigkeit der Klasse, die unterhalb der Einfallsklasse liegt   
 (Anteilswert

fk = relative Häufigkeit der Einfallsklasse (Anteilswert)

Bsp.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Klassen-Nr.  i | Größen-  klasse  xi | hi | fi | Fi |  |
| 1 | 100 b. u. 150 | 40 | 0,4 | **0,4** |  |
| 2 | **150 b. u. 170** | 40 | **0,4** | 0,8 | Einfallsklasse k |
| 3 | 170 b. u. 200 | 20 | 0,2 | 1,0 |  |
| **Summen** |  | **100** | **1,0** |  |  |

**arithmetisches Mittel x̅ (Mittelwert, oder Durchschnitt)**

* **für beliebige metrische Merkmale**
* **nur für quantitative Merkmale** sinnvoll
* **empfindlich gegen Ausreißer** (Vorsicht bei **schiefen Verteilungen!**)

**Summe der Abweichungen der Einzelwerte vom arithmetischen Mittel = 0**  
 Bsp. 3, 5, 7 = ∑ = 15 🡆 x̅ = 5 🡆 (3 – 5) + (5 – 5) + (7 – 5) = 0

**arithmetisches Mittel aus Häufigkeitstabellen**

**absolute Häufigkeit relative Häufigkeit**

hi absolute Häufigkeit

fi releative Häufigkeit

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | hi | xi \* hi | fi = hi / n | xi \* fxi |
| 10 | **10** | 100 | **0,17** | 1,70 |
| 15 | **20** | 300 | **0,33** | 4,95 |
| 25 | **30** | 750 | **0,50** | 12,5 |
| **SUMMEN** | **n = 60** | **1150** | **1,0** | **19,15** |
|  |  | **x̅ = 1150 / 60 = 19,16** |  | **x̅ = 19,15** |

**n = Summe der Einzelhäufigkeiten**

**arithmetisches Mittel bei klassierten Daten**

* Näherungswert, da Verteilung in den Klassen unbekannt
* Annahme: Beobachtungswerte liegen jeweils in der Klassenmitte

**absolute Häufigkeit relative Häufigkeit**

hi absolute Häufigkeit

fi releative Häufigkeit

mi Klassenmitte = ½ \* ( ki + ki-1 )

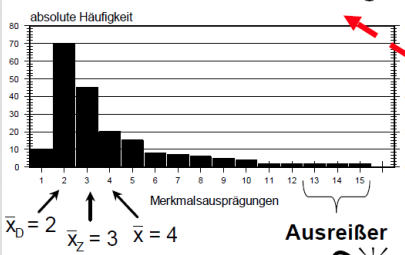
|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Klassennr.  i | Körpergewicht  (kg)  xi | **hi** | **mi** | mi \* hi | **fi = hi / n** | mi \* fi |
| 1 | 41 - 50 | **20** | **45,5** | 910,0 | **0,40** | 18,2 |
| 2 | 51 - 60 | **15** | **55,5** | 832,5 | **0,30** | 16,65 |
| 3 | 61 - 70 | **10** | **65,5** | 655,0 | **0,20** | 13,1 |
| 4 | 71 - 80 | **4** | **75,5** | 302,0 | **0,08** | 6,04 |
| 5 | 81 - 90 | **1** | **85,5** | 85,5 | **0,02** | 1,71 |
| **SUMMEN** | | **n = 50** |  | **2785,0** | **1,0** | **55,7** |
|  | |  |  | **x̅ = 2785 / 50 = 55,70** |  | **x̅ = 55,7** |

**Neigung / Schiefe**

**rechtsschiefe** (linkssteile) **Häufigkeitsverteilung**

x̅D < **x̅Z < x̅**

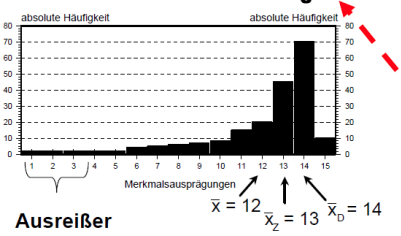
Modus < **Median < Mittelwert**



**linksschiefe** (rechtssteile) **Häufigkeitsverteilung**

x̅D > **x̅Z > x̅**

Modus > **Median > Mittelwert**



**unimodale symmetrische Häufigkeitsverteilung**:

x̅D ≈ x̅Z ≈ < x̅

Modus ≈ Median ≈ arithmetisches Mittel

**x̅D Modus = Wert zur Ausprägung mit der größten Häufigkeit** (maximale Häufigkeit)

**x̅Z Zentralwert = Mindestens 50% der Werte liegen links rechts des Medians**

**x̅ Mittelwert**

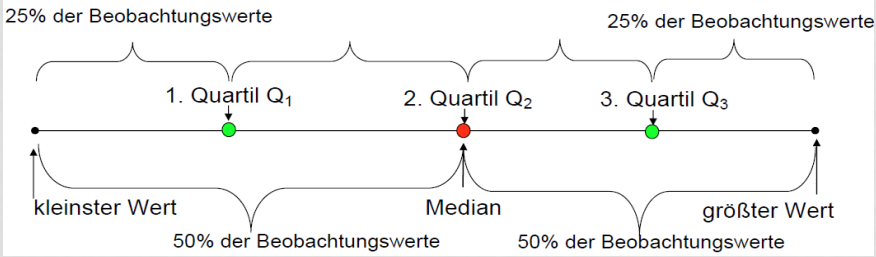
**Quantile**

* **Lagemaß**
* **teilen Verteilung in Abschnitte gleicher Häufigkeit**

**Q1, Q3 = 25%-Quantil = Quartil**

**Q2 = 50%-Quantil = Median**

**5-Punkte-Zusammenfassung der geordneten statistischen Reihe**



* Median teilt einen nach Größe sortierten Datensatz in der Mitte
* links und rechts vom Median liegen gleich viele Beobachtungswerte
* Unterteilung der linken und rechten Hälfte nach gleicher Vorschrift wie beim Median

🡆 4 gleich große Bereiche, die in 3 Quartils aufgeteilt werden.   
 **25%** aller geordneten Beobachtungswerte sind **kleiner als das 1. Quartil.**   
 **50%** aller geordneten Beobachtungswerte sind **kleiner als das 2. Quartil**.   
 **75%** aller geordneten Beobachtungswerte sind **kleiner als das 3. Quartil.**

**Streuungsparameter**

* keine Information über Daten-Streuung in den Lageparametern
* arithmetische Mittel x̅ und Median (Zentralwert) x̅Z verdecken oft Ungleichheiten in der Streuung
* Durchschnittsberechnung ist nicht immer sinnvoll 🡆 Durchschnitt kann nicht immer alles beschreiben
* Streuungsparameter beschreiben die Daten-Streuung

**erforderliche Eigenschaften an die Kennzahl zur Messung der Streuung**

* **geeigneten Lageparameter (Bezugspunkt) wählen, um den die Werte streuen**
* **alle Beobachtungswerte werden berücksichtigt**
* **Streuung = 0: alle Werte sind gleich** 🡆 Streuungsparameter = 0
* je **größer die Streuung**, **umso größer der Streuungsparameter**
* Streuungsparameter ist unabhängig von der Anzahl der Beobachtungswerte n

**Inter-Quartilsabstand IQR**

* **Streuungsmaß**
* **von Ausreißern unabhängig**
* umfasst **50% der Verteilung** 🡆 **Differenz zwischen oberem und dem unterem Quartil**   
  **Q3 -Q1**
* **Breite des mittleren Bereichs an, in dem ca. 50% aller Werte liegen**
* **Abstand zwischen Q1 und Q3-Quartil**

Bsp.

**Hinweis: X-Elemente müssen sortiert sein (hier nach Größe aufsteigend) !**

**Falls w in der Klausur auf ungeordnete Werte berechnet werden soll, zuerst die X-Werte sortieren!**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | **Q1 = ½ \* (x6/2 + x6/2+1)**  **Q1 = ½ \* (x3 + x4)** | | | | **x̅**  **Q2 = x(n + 1)/2**  **Q2 = x(13 + 1)/2**  **Q2 = x14** | | | **Q3 = ½ \* (x7+3 + x7+4)**  **Q3 = ½ \* (x10 + x11)** | | | |  |
| Schüler-Nr  (Element-Nr)  i | 1 | 2 | **3** | **4** | 5 | **6** | **7** | 8 | 9 | **10** | **11** | 12 | 13 |
| Größe (m)  xi | 1,60 | 1,67 | **1,67** | **1,68** | 1,68 | 1,70 | **1,70** | 1,72 | 1,73 | **1,75** | **1,76** | 1,78 | 1,84 |
|  | | |  | **Inter-Quartilsabstand IQR** | | | | | | |  |  | |

**Q1 = ½ \* (1,67 + 1,68) = 1,675**

Q2 = 1,7

**Q3 = ½ \* (1,75 + 1,76) = 1,755**

**Inter-Quartilsabstand IQR = 1,755 – 1,675 = 0,08**

**Spannweite w**

* für **ordinale und metrische Merkmale**
* **Ausdehnung der Werte (Breite des Streubereichs einer Häufigkeitsverteilung)**
* **Gesamtbreite**, in dem alle Werte liegen
* **Vom kleinsten und größten Wert abhängig**

**w = xmax – xmin**

Bsp.

**Hinweis: X-Elemente müssen sortiert sein (hier nach Größe aufsteigend) !**

**Falls w in der Klausur auf ungeordnete Werte berechnet werden soll, zuerst die X-Werte sortieren!**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Schüler-Nr  (Element-Nr)  i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| Größe (m)  xi | 1,60 | 1,67 | 1,67 | 1,68 | 1,68 | 1,70 | 1,70 | 1,72 | 1,73 | 1,75 | 1,76 | 1,78 | 1,84 |
| Spannweite w | **1,60** |  | | | | | | | | | | | **1,84** |

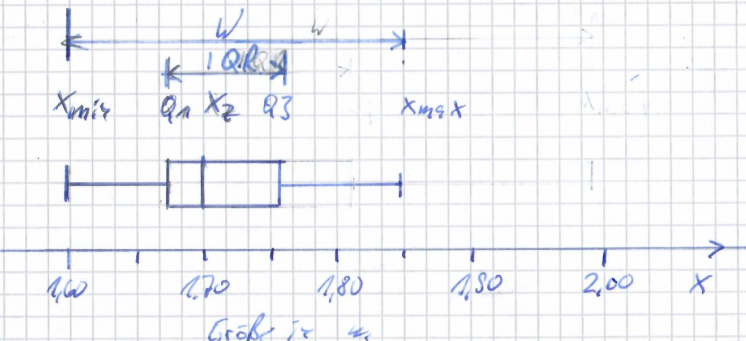
**w = xmax – xmin = 1,84 – 1,60 = 0,24**

**Boxplot**

* **grafische Darstellung** zur 5-Punkte-Zusammenfassung
* **5 Punkte** im Diagramm:

1. **Minimum**
2. **Q1-Quartil**
3. **Median / Zentralwert (Q2-Quartil)**
4. **Q3-Quartil**
5. **Minimum**

* Informationen aus dem Boxplot
  + **Lokalisation (Lage des Median)**
  + Streuungsmaße:
    - **Spannweite** = Ausdehnung des Boxplots (Differenz w = xmax – xmin)
    - **Quartilsabstand** = Ausdehnung der Box (Differenz IQR = Q3 – Q1 )
  + **Schiefe: Vergleich der beiden Hälften der Box oder Längen der Whisker**)
  + **Ausreißer**



**Varianz s²**

* **arithmetische Mittel der Abweichungsquadrate**
* wichtiger Streuungsparameter
* **nur für metrische Merkmale**
* **Mittelwert und Varianz** bzw. Standardabweichung **hängen eng zusammen**
* **Ausgangswert für die Streuungsparameter**:
  + **Standardabweichung s**
  + **Variationskoeffizient**
* **Bezugspunkt** ist das **arithmetische Mittel x̅**
* **Summe der quadratischen Abweichungen ∑(x – x̅)²**

**n Summe der absoluten Häufigkeiten**

xi Merkmalsausprägung

Bsp.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| i |  | xi | x̅ = 18 / 4 = 4,5 | (xi – x̅)² |
| 1 | 5 | 4,5 | 0,25 |
| 2 | 2 | 4,5 | 6,25 |
| 3 | 8 | 4,5 | 12,25 |
| 4 | 3 | 4,5 | 2,25 |
| **n = 4** | **∑** | **18** | **-** | **21,56** |

**Varianz s² aus Häufigkeitstabellen**

hi absolute Häufigkeit der Ausprägung i

**n Summe der absoluten Häufigkeiten**

xi Merkmalsausprägung

Bsp.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | **xi** | **hi** | Hi | fi | Fi | xi \* hi | **x̅ = ∑(xi \* hi) / n**  **x̅ 164 / 50**  **x̅ = 3,28** | (xi – x̅)² \* hi | (xi – x̅)² \* fi |
| **1** | **1** | **5** | 5 | 0,10 | 0,10 | 5 | **3,28** | 25,99 | 0,520 |
| **2** | **2** | **8** | 13 | 0,16 | 0,26 | 16 | **3,28** | 13,11 | 0,262 |
| **3** | **3** | **14** | 27 | 0,28 | 0,54 | 42 | **3,28** | 1,10 | 0,022 |
| **4** | **4** | **16** | 43 | 0,32 | 0,86 | 64 | **3,28** | 8,29 | 0,166 |
| **5** | **5** | **5** | 48 | 0,10 | 0,96 | 25 | **3,28** | 14,79 | 0,295 |
| **6** | **6** | **2** | 50 | 0,04 | 1,00 | 12 | **3,28** | 14,80 | 0,296 |
| **∑** | | **n = 50** |  |  |  | **164** | **-** | **78,08** | **1,561** |

**Varianz s² aus Häufigkeitstabellen bei klassierten Daten**

hi absolute Häufigkeit der i-ten Klasse

**n Summe der absoluten Häufigkeiten**

mi Klassenmitte der i-ten Klasse

Bsp.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | Größe in cm  Klasse xi | **hi** | **mi** = ½ (hki + hki+1) | mi \* hi | x̅ = ∑(mi \* hi) / n  x̅ = 4970 / 30  **x̅ = 165,67** | (mi – x̅)² \* hi |
| 1 | 150 b. u. 160 | **9** | **155** | 1395 | **165,67** | 1024,64 |
| 2 | 160 b. u. 170 | **12** | **165** | 1980 | **165,67** | 5,39 |
| 3 | 170 b. u. 180 | **7** | **175** | 1225 | **165,67** | 609,34 |
| 4 | 180 b. u. 190 | **2** | **185** | 370 | **165,67** | 747,30 |
| **∑** | | **n = 30** |  | **4970** |  | **2386,67** |

**Standardabweichung S**

* **Stärke der Aussagekraft zum arithmetischen Mittel** (Mittelwert) **x̅**
* **kleine Standardabweichung** = Beobachtungswerte nahe am Mittelwert (kleine Streuung).
* **große Standardabweichung = Beobachtungswerte sind weit um den Mittelwert gestreut**
* bei normalverteilten Daten liegen ca. 95% der Beobachtungswerte im Intervall [x̅ - 2s, x̅ + 2s]

s² Varianz

Bsp.

8,91

**Varianzkoeffizient v**

s Standardabweichung

x̅ arithmetisches Mittel (Mittelwert)

Bsp.

**Korrelation und Regression**

**Analyse mehrerer Merkmale**

* in empirischen Analysen werden **i. d. R. mehrere Merkmale gemessen**, z.B. X, Y, Z
* **univariate Analyse:** wenn **Merkmale einzeln ausgewertet** werden
* **multivariate Analyse:** wenn **mehrere Merkmale gemeinsam ausgewertet** werden

**Analyse von Zusammenhängen**

* **Teilgebiet der multivariaten Statistik** (mehrere **Merkmale** werden **gleichzeitig untersucht**)
* Fragestellungen:
  + Besteht ein Zusammenhang bzw. eine Abhängigkeit zwischen Merkmalen (Variablen)?
  + Wie stark ist dieser Zusammenhang / die Abhängigkeit?
  + Wie lässt sich die Stärke (die Intensität) des Zusammenhangs bzw. die Abhängigkeit zwischen mehreren Merkmalen messen?
  + Lässt sich der Zusammenhang darstellen?
  + Lassen sich die beobachteten Werte einer Variable X durch die Werte einer oder mehrerer anderen Variablen Y (Y1 , Y2 , …) näherungsweise bestimmen?

**Zusammenhangsanalyse (Korrelationsanalyse / Interdependenzanalyse)**

* **Untersuchung der Wechselwirkung zwischen den Variablen untereinander**
* **Zusammenhangsmaß (Assoziationsmaß)**: **Stärke und Richtung eines Zusammenhangs**
* **Korrelationskoeffizient** ist das **Zusammenhangsmaß in der Korrelationsanalyse**-1 ≤ rxy ≤ +1
* **Grafische Darstellung** mittels **Streudiagramm**
* **Zusammenhangsanalyse (Korrelationsanalyse)** **zwischen metrischen Merkmalen X und Y**
  + prüft, ob ein **linearer Zusammenhang** zwischen den Variablen **besteht**
  + **wie stark der lineare Zusammenhang** ist.
* **Kontingenzanalyse (Assoziationsanalyse)**
* ist **Zusammenhangsanalyse (Korrelationsanalyse), die auf Kontingenztabelle** (Häufigkeitstabelle) **basiert**
* **Je größer der Unterschied zwischen den Häufigkeiten**, **umso** **stärker** ist der **Zusammenhang** / die **Abhängigkeit** zwischen den Merkmalen

**Zusammenhangsanalyse bei nicht metrischen Merkmalen**

**Rangkorrelationskoeffizient nach Spearmann**

* **Maß zur Stärke des Zusammenhangs** zweier **ordinalskalierter Merkmale (**Rangmerkmale)
* Spearmansche Rangkorrelationskoeffizient **nutzt Ränge statt Beobachtungswerte**
* **Spezialfall des Pearsons Korrelationskoeffizient:** **Daten werden vor Berechnung des Korrelationskoeffizient in Ränge konvertiert**
* benötigt **keine Annahme, zu einer linearen Beziehung zwischen den Variablen**
* **robust gegenüber Ausreißern**

**Kontingenzkoeffizient C**

* Maß zur **Stärke des Zusammenhangs zweier nominaler oder ordinaler Merkmale**
* basiert auf **Vergleich von ermittelten Häufigkeiten mit zu den Merkmalen erwarteten Häufigkeiten**
* **Anwendung bei beliebig großen Kreuztabellen**

**0 ≤ C ≤ 1**

**Phi-Koeffizient (Vierfelder-Korrelationskoeffizient)**

* **Stärke des Zusammenhangs zweier dichotomer Merkmale**
* **basiert auf Kontingenztafel** (enthält **gemeinsame Häufigkeitsverteilung der Merkmale**)

**Analyse von Abhängigkeiten zwischen zwei metrischen Merkmalen X und Y**

* gerichteter Zusammenhang zwischen zwei (oder mehreren) Merkmalen
* Unterscheidung in
  + **unabhängige Merkmale** (Variablen = **Regressor** = **Einflussgröße X**) und
  + **abhängige Merkmale** (Variablen = **Regressand** =  **Zielgröße Y)**

**Abhängigkeitsanalyse (Regressionsanalyse / Dependenzanalyse )**

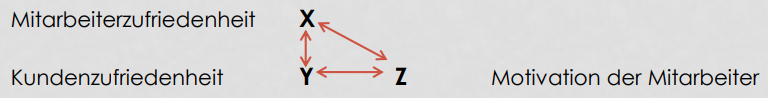
* Abhängigkeitsmaß wird über Regressionsfunktion ŷ = a + b \* x ermittelt

ŷ abhängige Variable (Regressand = Zielgröße)  
 a erster Regressionskoeffizient  
 b zweiter Regressionskoeffizient  
 x unabhängige Variable (Regressor = Einflussgröße)

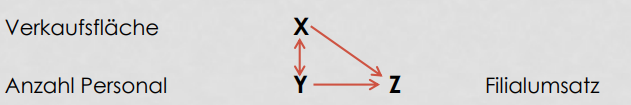
* **Grafische Darstellung** mittels **Streudiagramm** und **Regressionsgerade**

**Multivariate Analysemethoden (gemeinsame Analyse zu mehreren Merkmalen)**

**Zusammenhangsanalyse (Korrelationsanalyse / Interdependenzanalyse)**



**Abhängigkeitsanalyse (Regressionsanalyse) / Dependenzanalyse**



**Streudiagramm**

* **graphische Darstellung von Wertepaaren zweier Merkmale** (**unabhängige Variable X** (= **Einflussgröße**) und **abhängige Variable Y** (= **Zielgröße**))
* **Kreuzpunkte zu den Wertepaaren** werden in kartesisches Koordinatensystem eingetragen 🡆 ergibt **Punktwolke**
* Lage und Form der **Punktwolke geben Hinweis auf Stärke und Richtung des Zusammenhangs** .
* **erste Hinweise über mögliche Abhängigkeit zwischen den Merkmalen**

**Korrelation (Zusammenhangsanalyse zwischen 2 metrischen Merkmalen X und Y)**

* Ist **linearer (gerichteter) Zusammenhang**
* Ist **zahlenmäßiger statistischer Zusammenhang zwischen zwei metrischen Merkmalen** X und Y
* **nur bei** **metrischen Merkmalen**
* **Positive Korrelation: beide Merkmale X und Y entwickeln sich gleichförmig:**
* bei höheren Werten von X hat auch Y höhere Werte
* **wenn Werte von X steigen, steigen auch die Werte von Y**
* **Negative Korrelation: beide Merkmale X und Y entwickeln sich gegenläufig**
* bei höheren Werten von X hat Y niedrigere Werte
* **wenn Werte von X steigen, fallen die Werte von Y**
* **Kausaler Zusammenhang**: zwischen zwei Merkmalen X und Y existiert ein **Ursache-Wirkungs-Beziehung**
  + **Veränderung eines abhängigen Merkmals Y ist auf Veränderung des unabhängigen Merkmals X zurückzuführen**
  + **Korrelation** sagt **nichts über den kausalen Zusammenhang** und **nichts über die Kausalitätsrichtung** aus.  
      
    **Korrelation ≠ Kausalität**
* Korrelation ist für Kausalität notwendig
  + **nicht jede Korrelation ist** ein **kausaler Zusammenhang**, aber
  + **jeder kausale Zusammenhang basiert auf einer Korrelation**

**Korrelationskoeffizient rx,y nach Pearson**

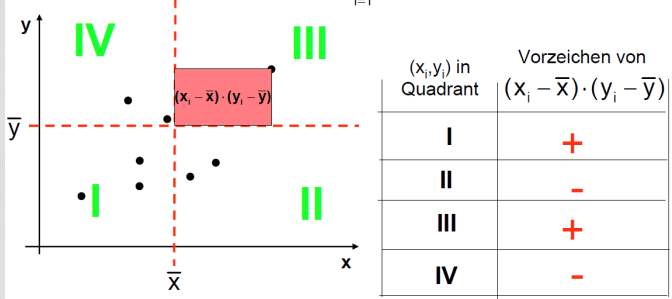
* **Korrelationskoeffizient rx,y -1 ≤ rxy ≤ +1**
* **dimensionsloses Maß** (statistische Kennzahl) **für Grad des linearen Zusammenhangs**
* **Stärke und Richtung des linearen Zusammenhangs**
* für **2 mind. intervallskalierte Merkmale** X und Y mit **positiver Kovarianz cov(x,y) und positiver Standardabweichung s** für 2 Merkmale

* **Korrelationskoeffizient r > 0: Positiver Zusammenhang**
  + **hohe Werte in einem Merkmal** (Variablen) **X** gemeinsam **mit hohen Werten in einem anderen Merkma**l (Variablen) **Y**
* **Korrelationskoeffizient r < 0: Negativer Zusammenhang**
  + **hohe Werte in einem Merkmal** (Variablen) **X mit niedrigen Werten in einem anderen Merkmal** (Variablen) **Y**
* **Korrelationskoeffizient r = +1: extrem starker positiver Zusammenhang**
  + selten
  + Punktewolke liegt auf einer Geraden mit positiver Steigung (links unten nach rechts oben)
* **Korrelationskoeffizient r = -1: extrem starker negativer Zusammenhang**
* selten
* Punktewolke liegt auf einer Geraden mit negativer Steigung (von links oben nach rechts unten)
* **Korrelationskoeffizient r = 0: kein Zusammenhang**

**Kovarianz cov(x,y)**

oder

* informiert über gemeinsame Variabilität der Merkmale X und Y.
  + Ist **Zusammenhang positiv, ist auch Kovarianz positiv**
  + Ist **Zusammenhang negativ, ist auch Kovarianz negativ**
  + **kein linearer Zusammenhang**, dann liegt **Kovarianz nahe 0**



Bsp.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Filiale Nr.  i |  | Verkaufs-  fläche  (1000 m²)  xi | Umsatz  (Mio EUR)  yi | xi² | yi² | x \* y |
| 1 |  | 3 | 30 | 9 | 900 | 90 |
| 2 |  | 2 | 10 | 4 | 100 | 20 |
| 3 |  | 6 | 40 | 36 | 1600 | 240 |
| 4 |  | 5 | 20 | 25 | 400 | 100 |
| **n = 4** | **∑** | **16** | **100** | **74** | **3000** | **450** |
| **x̅ = 4 x̅² = 16** | | | | | | | |
| **y̅ = 25 y̅² = 625** | | | | | | | |

**Interpretation des Korrelationskoeffizienten**

**-1 bis -0,8 „starke“ negative** Korrelation,

**-0,8 bis -0,5 „mittlere“ negative** Korrelation

**-0,5 bis 0 „schwache“ negative** Korrelation

**0 keine** Korrelation

**0 bis 0,5 „schwache“ positiv**e Korrelation

**0,5 bis 0,8 „mittlere“ positive** Korrelation

**0,8 bis 1 „starke“ positive** Korrelation

Im Bsp. liegt eine mittlere positive Korrelation (rx,y = 0,707) vor.

**Regressionsanalyse (Abhängigkeitsanalyse / Dependenzanalyse) für gerichteten Zusammenhang**

**Regressionsanalyse** (für gerichteten Zusammenhang)

* ist **Abhängigkeitsanalyse zwischen 2 Merkmalen** (unabhängige Variable X, und abhängige Variable Y)
* **basiert auf Regressionsfunktion ŷ = a + b \* x** (ermittelt Abhängigkeitsmaß)

**einfache Regressionsanalyse**

* **2 metrische Größen:** 
  + **Zielgröße Y** ist Regressand (**abhängig**es Merkmal)
  + **Einflussgröße X** ist Regressor (**unabhängig**es Merkmal)
  + **zum Erstellen eines Vorhersagemodells**
  + **Quantifizierung** der **Stärke des Zusammenhangs**
  + **ermittelt xj, die keinen Zusammenhang mit y** haben
  + ermittelt **Teilmengen xi , … , xj , die redundante Information über y** enthalten.

**multiple Regressionsanalyse**

* **Verallgemeinerung der einfachen linearen Regression mit k Regressoren**   
  (welche die abhängige Variable Y erklären)
* mit **mehreren Einflussgrößen X1, X2, … Xk und einer Zielgröße Y**.
* Zweck:
  + zum Erstellen eines Vorhersagemodells,
  + Quantifizierung der Stärke des Zusammenhangs

**Regressionsfunktion**

**Voraussetzungen**

* X und Y sind quantitative Merkmale
* X → Y (Zusammenhang X → Y)

**ŷ = a + b \* x**

**Vorbereitung**

1. Überprüfung, ob Abhängigkeitsanalyse sinnvoll
2. Datenerhebung für X und Y
3. **Daten-Visualisierung im Streudiagramm** (qualitative Abhängigkeitsanalyse)
4. Auswahl Funktionstyp (hier: Beschränkung auf lineare Funktion)
5. **Berechnung der Regressionsfunktion** (nach Methode der kleinsten Quadrate)

**Bestimmung der Regressionsfunktion ŷ = a + b\*x nach der Methode der kleinsten Quadrate:**

* **OSL** 🡆 **Methode der kleinsten Quadrate**
* Regressionskoeffizienten a und b (Kurvenparameter) so bestimmen, dass Summe der quadratischen Abweichungen (Residuen **ui = (y – ŷ)²** ) von der Kurve zu den beobachteten Punkten minimal ist:

**Regressionskoeffizient a**

Formel im Nenner ist in beiden Gleichungen identisch

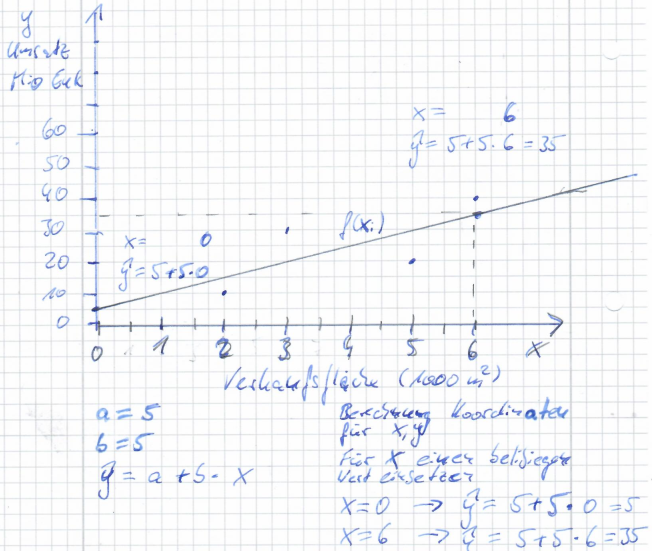
**Regressionskoeffizient b**

Bsp.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Filiale Nr.  i |  | Verkaufs-  fläche  (1000 m²)  xi | Umsatz  (Mio EUR)  yi | xi² | yi² | x \* y |
| 1 |  | 3 | 30 | 9 | 900 | 90 |
| 2 |  | 2 | 10 | 4 | 100 | 20 |
| 3 |  | 6 | 40 | 36 | 1600 | 240 |
| 4 |  | 5 | 20 | 25 | 400 | 100 |
| **n = 4** | **∑** | **16** | **100** | **74** | **3000** | **450** |
| **y̅ = 25 (100 : 4)** | | | | | | |

**Formel im Nenner ist in beiden Gleichungen identisch**

**Streudiagramm mit Regressionsgeraden Residuum ui zum Beispiel**



**Interpretation der Regressionsfunktion**

**Fragen für die Schätzung:**

* **Lohnt sich eine Erweiterung der Verkaufsfläche um 1.000 qm**?
* **Wie stark ist der Zusammenhang zwischen** Verkaufsfläche (**Einflussfaktor** (unabhängige Variable / Regressor) X) **und** Umsatz (**Zielgröße** (abhängige Variable / Regressand Y)?
* **Wie stark ist der Umsatz von der Verkaufsfläche abhängig**?
  + **Wie gut erklärt Regressionsfunktion die Abhängigkeit zwischen Umsatz und Verkaufsfläche**? (🡆 **Erklärungskraft des Modells**)

Für die Antwort wird ein Gütemaß (Bestimmtheitsmaß R² in %) benötigt

* Gütemaß der linearen Regression für die Schätzung der Parameter
* Erklärungskraft des Modells
* Wie gut ist die „goodness of fit“ (Anpassungsgüte)
* **Wie gut beschreibt die Regressionsfunktion die Abhängigkeit**
* **Wie gut erklärt die unabhängige Variable X die Varianz der unabhängigen Variable Y**
* wie gut erklärt die Varianz in den Verkaufsflächen die Variant (Unterschiede) bei den Filialumsätzen?
* 0% ≤ R² ≤ 100% (0% unbrauchbares Modell, 100% perfekte Modellanpassung)

**Prognosewerte und Residuen**

* **Zerlegung der Gesamtabweichung** **(yi – y̅)**
  + **unerklärte Abweichung** **(yi – ŷi)**
  + **erklärte Abweichung** **(ŷi – y̅I)**
* **Gesamtabweichung**  **(yi – y̅)**

**Differenz aus yi und Mittelwert y̅**

* **unerklärte Abweichung** (Residuum) **(yi – ŷi)   
  Differenz aus yi und Regressionsgeraden (Residuum ui)**  
  Regressionsgerade: yi – ŷi   
  Differenz aus yi und Regressionsfunktion   
  **ui = yi – ŷi = yi – ( a + b \* x)**
* **erklärte Abweichung** **(ŷi – y̅I)**

Differenz aus Regressionsgeraden und Mittelwert x̅

(**a + b \* x) – y̅**

Gesamtabweichung unerkl. Abweichung + erkl. Abweichung

**(yi – y̅) = (yi – ŷi) + (ŷi – y̅I)**

Interpretation der Abweichungszerlegung anhand des Ausprägungswerts yi = 40

Ausprägungswert yi = 40

Ausprägungswert xi = 6

Mittelwert y̅ = 25

Regressionskoeffizient a = 5

Regressionskoeffizient b = 5

Regressionsfunktion ŷi = 5 + 5 \* 6 = 35

Residuum ui = yi - ŷi

Gesamtabweichung unerkl. Abweichung + erkl. Abweichung

40 – 25 = (40 – 35) + (35 – 25)

15 = 5 + 10

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | | | | | | | | **a = 5**  b = 5 |
| Filiale Nr.  i |  | Verkaufs-  fläche  (1000 m²)  xi | Umsatz  (Mio EUR)  yi | xi² | yi² | x \* y | ŷi = **a** + **b \* x**  ŷi = **5** + **5 \* x** | |
| 1 |  | 3 | 30 | 9 | 900 | 90 | **20** | |
| 2 |  | 2 | 10 | 4 | 100 | 20 | **15** | |
| 3 |  | 6 | 40 | 36 | 1600 | 240 | **35** | |
| 4 |  | 5 | 20 | 25 | 400 | 100 | **30** | |
| **n = 4** | **∑** | **16** | **100** | **74** | **3000** | **450** | **100** | |
|  | | | | **ŷ̅i = 25** 100 / 4 | | | | |

**Varianz der Residuen**

**Bestimmtheitsmaß R²**

* **Gütemaß der linearen Regression**
* **Anteil der Varianz der abhängigen Variable Y, der durch die Varianz der unabhängigen Variable X erklärt wird**   
  (wie gut erklärt die unabhängige Variable X die Varianz der abhängigen Variable Y)
* Bei **einfacher linearer Regression** (**eine unabhängige Variable X** ):  
  **R² = (rxy)²** (Korrelationskoeffizienten)
* **Verhältnis aus Streuung der Prognosewerte ŷ und der Gesamtstreuung der y-Werte**
* nutzt das Konzept der Varianzzerlegung
  + Zerlegung der Varianz des abhängigen Merkmals Y in erklärte und nicht erklärte Varianz (Residualvarianz)

Bsp.

x = Verkaufsfläche

y = Umsatz

rXY = 0,707

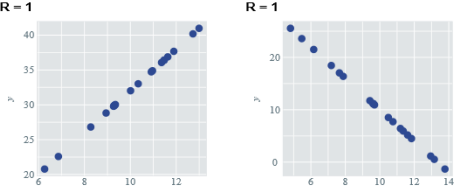
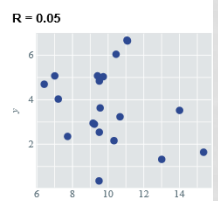
R2 = 0,707² = 0,50 = 50 %

50% der Varianz in den Umsätzen (Umsatzvarianz) lassen sich durch Varianz der Verkaufsflächen erklären. die übrigen 50% sind durch andere Einflussfaktoren zu erklären.

**Bestimmtheitsmaß R² anhand des Streudiagramms ableiten**

Je dichter die Datenpunkte im Streudiagramm auf einer Linie liegen, desto höher ist R².

Streuen die Datenpunkte ohne Zusammenhang im Raum, liegt das R² nahe 0.



**Probleme in der linearen Regression und Korrelation**

* Nur lineare Zusammenhänge
* Ausreißer (einzelne Fälle) können Regression und Korrelation stark beeinflussen

**Eine statistische Größe bildet die Menge der statistischen Einheiten in die Menge der Realisierungsmöglichkeiten ab**.

*Eine statistische Größe ist eine Funktion, die jeder statistischen Einheit in einer gegebenen Population oder Stichprobe eine numerische Wertzuweisung zuordnet. Die statistischen Einheiten könnten beispielsweise Personen, Haushalte, Unternehmen oder andere Entitäten sein, während die Realisierungsmöglichkeiten die verschiedenen Ausprägungen oder Werte sind, die die statistische Größe annehmen kann.*

**Man spricht vom Prinzip der Flächentreue, wenn bei der grafischen Darstellung von absoluten Häufigkeiten gruppierter Daten (im Histogramm) eines Blockes proportional der dazustellenden absoluten Häufigkeiten ist.**

**Eine statistische festgestellte Korrelation kann ein Hinweis auf eine kausale Beziehung zwischen den betrachteten Variablen sein.**

**Das Bestimmtheitsmaß ist der Anteil der durch die exogene (unabhängige) Variable erklärten Varianz der abhängigen Variablen Y an ihrer Gesamtvarianz.**

**Eine latente Variable ist eine Variable ohne direkten empirischen Bezug.**

**Bei einem gegebenen Datensatz xi (i = 1, …, n) wurde für das arithmetische Mittel NULL ermittelt (x̅ = 0)**

**Für die Varianz des Datensatzes xi (i = 1, …, n) gilt: s² ≥ 0**

**Jede quadratische Abweichung kann nicht negativ sein kann. Die Varianz berechnet den Durchschnitt der quadrierten Abweichungen . Die Varianz ist immer größer oder gleich null s² ≥ 0**

**Eine Varianz von null bedeutet, alle Beobachtungen = x̅ 🡆 bedeutet keine Streuung = alle Datenpunkte sind identisch**

**Welcher der Begriffe wird als „convenience sample“ bezeichnet?**

**Auswahl aufs Geratewohl**

**Welche der Aussagen die Regressionsrechnung betreffend ist korrekt?**

**Das Bestimmheitsmaß R2 ist der Anteil der durch die exogene Variable X erklärte Varianz der abhängigen Variablen Y an ihrer Gesamtvarianz**

**Welcher Parameter hat einen Einfluss auf die Größe des Standardfehlers (Standardabweichung) des Mittelwertes?**

* **Varianz der Grundgesamtheit**

**Ein statistisches Maß ist "robust", wenn es von Ausreißern nicht besonders beeinflusst wird.**

**Der Standardfehler beschreibt die Streuung in einer Stichprobe**

**kleine Standardabweichung 🡆 alle Beobachtungswerte liegen nahe am Mittelwert (kleine Streuung).**

**große Standardabweichung 🡆 Beobachtungswerte sind weit um den Mittelwert gestreut.**

**Welche der Aussagen ist FALSCH?**

* **Der Absolutbetrag der Kovarianz ist stets kleiner oder gleich 1.**

**Welche der Aussagen ist RICHTIG?**

* **Die Korrelation ist ein Maß für den linearen Zusammenhang.**
* **Ist die Kovarianz zweier Zufallsvariablen gleich Null, so auch die Kovarianz.**

**Kovarianz**

**cov(x,y)**

* informiert über gemeinsame Variabilität der Merkmale X und Y.
  + Ist **Zusammenhang positiv, ist auch Kovarianz positiv**
  + Ist **Zusammenhang negativ, ist auch Kovarianz negativ**
  + **kein linearer Zusammenhang**, dann liegt **Kovarianz nahe 0**
* **Wenn der Korrelationskoeffizient nahe bei 1 liegt, dann liegt der größte Teil der Beobachtungspaare annähernd auf eine Gerade**

**Für beliebige Mengen A und B gilt: A ist Teilmenge von B und B ist Teilmenge von A.**

**Welche der folgenden Behauptungen ist FALSCH?**

* **A ist Teilmenge von A × A (kartesisches Produkt)**

**Für beliebige Mengen A und B gilt: A ist Teilmenge von B und B ist Teilmenge von A. Welche der folgenden Behauptungen ist RICHTIG?**

* **A × B = B × A**
* **B \ A ist die leere Menge ᴓ**
* **A = B**

**Welche der Aussagen über einen Boxplot ist korrekt?**

* **Die Länge der Box beim Boxplot ist gleich dem Quartilsabstand.**

**Ereignis:**

**Ziehen von einer grauen Socke aus einer Kiste mit schwarzen, grauen und gestreiften Socken.**

**Gegenereignis:**

**Aus einer Kiste mit schwarzen, grauen und gestreiften Socken keine gaue Socke ziehen**

**Das Komplementärereignis das Ereignis, das eintritt, wenn das Ereignis nicht eintritt.**

**Das Gegenereignis umfasst alle Möglichkeiten, die nicht das Ereignis sind.**

Gegeben seien die **Grundmenge ω={−2,−1,0,1,2,3,4,5,6,7} sowie die Mengen A={0,1,2} und B={1,2,3}.** Führen Sie bitte die folgenden Mengenoperationen durch:

**A∪B**

**{0, 1, 2, 3}**

**A∩B**

**{ 1, 2}**

**A∖B**

**{0}**

Menge in A aber NICHT in B enthalten (B – A)

**BC**

**{−2,−1,0,4,5,6,7}**

Menge aller Ereignisse, die nicht in B enthalten sind (Komplement von B in Bezug auf A)

**(AC ∩ BC )**

**{−2,−1, 4,5,6,7}**

🡆 Schnittmenge zu AC (A ohne B) UND BC (B ohne A)

**Nebenrechnung**:

AC Menge aller Ereignisse, die nicht in A enthalten sind (Komplement von A in Bezug auf B)

{−2,−1, 3,4,5,6,7}

BC Menge aller Ereignisse, die nicht in B enthalten sind (Komplement von B in Bezug auf A)

{−2,−1,0,4,5,6,7}

**geschichtete Stichprobe (Geschichtete Zufallsstichprobe)**

**Es wird nach einer definierten Zerlegung der Grundgesamtheit in Schichten aus jeder Schicht eine Zufallsstichprobe gezogen.**

**Bei einer (unimodalen) symmetrischen Verteilung sind Median (XZ) und Modus (XD) und arithmetisches Mittel ungefähr gleich groß**

**Dennoch können für eine unimodale symmetrische Verteilung Median und Modus unterschiedliche Werte annehmen.**

**unimodal = es existiert nur ein Modalwert = eine Ausprägung (Beobachtungswerte) mit der maximalen Häufigkeit**

**Bei einer (bimodalen) unsymmetrischen Verteilung sind arithmetisches Mittel und Median unterschiedlich**

**bimodal = es existieren mehrere Ausprägungen (Beobachtungswerte) mit derselben maximalen Häufigkeit = mehrere Modalwerte**

**Welche Skalierung haben Merkmale „Sehstärke in Dioptrien“ und „Brillenmarken“?**

**„Sehstärke in Dioptrien“ = Ordinalskala**

**„Brillenmarken“ = Nominalskala**

**Korrelationanalyse (Interdependenzanalyse) sagt nichts über den kausalen Zusammenhang und nichts über die Kausalitätsrichtung aus.**

**Positive Korrelation: beide Merkmale entwickeln sich gleichförmig**

**Negative Korrelation: beide Merkmale X und Y entwickeln sich gegenläufig**

**Auf wie viele Arten können 7 Fahrräder an 7 Personen verliehen werden (1 Fahrrad pro Person)?**

**ohne Reihenfolge ohne Zurücklegen** = KoW 🡆

n = 7 🡆 7 Fahrräder,

k = 1 🡆 jeweils 1 Person, an die das Fahrrad verliehen wird.

Da sich nach jedem Verleihen die Anzahl der Fahrräder um 1 verringert, ergibt sich

**Kerstin fädelt 1 schwarze, 2 rote, 3 blaue und 4 weiße Perlen auf eine Schnur. Auf wie viele Arten kann sie ihre Kette gestalten?**

**Permutation mit Wiederholung = Anordnung k-Elemente**

Verwendung der k-Elemente: 1. Element n1-mal, 2. Element n2-mal, das 3 Element n3-mal, das vierte Element n4-mal

Es gibt 1, 2, 3, 4 Perlen, die der Reihe nach aufgefädelt werden (Anordnung der k-Elemente)

Formel für Permutation mit Wiederholung

**Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit der gezeichneten Drehscheibe das Wort MEIS zu erzielen?**

n = 12

M 1x = **1/12**

E 4x = **4/12**

I 1x = **1/12**

S 3x = **3/12**

= 1/12 \* 4/12 \* **1/12** \* 3/12= **1/1728**

Bei Treffen einer mehrfachen Auswahl mit m1 Möglichkeiten für die 1. Auswahl, m2 Möglichkeiten für die 2. Auswahl, m3 Möglichkeiten für die 3. Auswahl usw.

**Können alle Möglichkeiten beliebig kombiniert werden ist die Gesamtzahl aller möglichen Fälle (keine disjunktiven Mengen)**

**m1 \* m2 \* m3 \* …**

**Zwei Glücksräder drehen sich gleichzeitig. wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei den Glücksrädern gleichzeitig „grün“ erscheint?**



|E|1 = 1/3

|E|2 = 5/8

P(A) = 1/3 \* 5/8 = 5/24

**In einer Urne befinden sich 20 Kugeln mit Zahlen 1 bis 20. Es wird eine Kugel gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gezogene Kugel durch 4 teilbar ist?**

n = 20

k = 20 / 4 = 5 **5 Kugeln die durch 4 teilbar sind = 5/20 = 25%**

Aus **vier Buchstaben des Wortes „Schulzeit“** **wird ein neues Wort** gebildet.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält es **nur Konsonanten**?

***Keine Permutation!***

*Permutation mit Wiederholung (Anordnung der k-Elemente) nur, wenn die Anzahl der Möglichkeiten durch Vertauschungen ermittelt werden soll.*

n = 9 Buchstaben im Stichprobenraum

k = 4 Buchstaben in der Lösung

Ereignismenge Ω

ohne Reihenfolge ohne Zurücklegen: KoW

Elementarmenge |E|

n = 6 Konsonanten

k = 4 Buchstaben in der Lösung

ohne Reihenfolge ohne Zurücklegen: KoW

Wahrscheinlichkeit P(A)

Permutation mit Wiederholung (Anordnung der k-Elemente) **nur bei Ermittlung der Anzahl der Möglichkeiten: „Wie groß ist die Anzahl… „**

Permutation bei Anordnung der k-Elemente (Reihenfolge)

Werden bei einer Anordnung mit den k Elementen einer Menge das 1. Element n1-mal, das 2. Element n2-mal usw. verwendet, wird diese Anordnung eine Permutation mit Wiederholung.

**Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, in drei Würfen mind. eine 6 zu würfeln?**

**über Komplementärereignis**

Die Wahrscheinlichkeit eine 6 (oder eine andere Zahl) zu würfeln, **liegt pro Wurf** bei

Die Gegenwahrscheinlichkeit KEINE 6 (oder eine andere Zahl) zu würfeln, **liegt pro Wurf** bei

3 Würfe =

P(keine 6 in 3 Würfen) =

sind von 1 zu subtrahieren

(1 = bedeutet sichere Wahrscheinlichkeit)

P(mind. eine 6 in 3 Würfen) = 1-

**Eine Kiste enthält 3 rote, 4 blaue und 5 grüne Bälle.**

**Es werden gleichzeitig 3 Bälle gezogen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Bälle die gleiche Farbe haben?**

n = 12, k =3

**ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen**

KoW = Binomialkoeffizient

Ereignisraum Ω

Elementarereignis E

**zu jeder Farbe die Menge über Binomialkoeffizient ermitteln und addieren**

**Warum Addition?: alle 3 Farben sind gefragt = Vereinigungsmenge = Addition**

Wahrscheinlichkeit P

**Eine Kiste enthält 3 rote, 4 blaue und 5 grüne Bälle.**

**Es werden 3 Bälle nacheinander gezogen und wieder zurückgelegt.**

**Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Bälle unterschiedliche Farben haben?**

n = 12, k =3

**mit Reihenfolge mit Zurücklegen**

VmW = nk

**Ereignisraum Ω**

Ω = 123 = 1728

**Elementarereignis E**

**unterschiedliche Farben = beliebige Kombi aller Möglichkeiten: Gesamtzahl aller möglichen Fälle**

**m1 \* m2 \* m3**

3 \* 4 \* 5 = 60

**Wahrscheinlichkeit P**

**4-Felder-Tafel**

Tabelle, mit verschiedenen Kombinationen der Ereignisse in vier Feldern

True Positive (TP):

tatsächliche Bedingung positiv UND Testergebnis positiv

False Positive (FP):

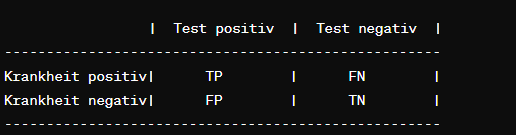
tatsächliche Bedingung negativ, aber Testergebnis positiv

True Negative (TN):

tatsächliche Bedingung negativ UND Testergebnis negativ

False Negative (FN):

tatsächliche Bedingung positiv, aber Testergebnis negativ (Typ-II-Fehler)



51% sind Frauen. 2% der Frauen und 7% der Männer leiden an einer Krankheit. Mit welcher Wahrscheinlichkeit leidet eine zufällig ausgewählte Person an dieser Krankheit?

Nutzen Sie die 4-Felder-Tafel.

Frauen: 51%

krank: 2% der Frauen, 2 \* 51% = 1% der statistischen Masse

gesund: 98% der Frauen, = 50 % der statistischen Masse

Männer 49%

krank: 7% der Männer, 7 \* 49% = 3,40 % der statistischen Masse

gesund: 93% der Männer, 93 \* 49% = 45,60 % der statistischen Masse

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Frauen | Männer |
| krank | 1 % | 3,40 % |
| gesund | 50 % | 45,60 % |
| **SUMMEN** | **51 %** | **49 %** |
|  |  |  |

Mit welcher Wahrscheinlichkeit leidet eine zufällig ausgewählte Person an dieser Krankheit?

Mit Wahrscheinlichkeit von 4,4% leidet eine zufällig ausgewählte Person an dieser Krankheit.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine zufällig ausgewählte Person eine Frau, die an dieser Krankheit leidet?

Mit Wahrscheinlichkeit von 1% ist eine zufällig ausgewählte Person, die an dieser Krankheit leidet, eine Frau.

**Ist es sinnvoll, bei einem nominal skalierten Merkmal eine Verteilungsfunktion (F(x) – also die relative Summenhäufigkeit) anzugeben?**

*Eine Verteilungsfunktion bei nominal skalierten Merkmalen ist nicht sinnvoll, da nominal skalierte Merkmale Kategorien oder Bezeichnungen (z. B. Semesterzahl) sind und keine natürliche Reihenfolge oder Rangfolge haben. nominal skalierte Merkmale sind qualitative und können nur mit gleich oder ungleich interpretiert werden. Nominal skalierte Merkmale enthalten keine nummerischen Werte, auf denen Rechenoperationen ausgeführt werden können. Die Zuordnung von Zahlen zu den Merkmalen ist lediglich eine Kodierung der Ausprägungen.*

**Histogramm**:

**x-Achse = Klassenbreite bi = (xk – xk-1)**

**y-Achse = Rechteckhöhe ri = hi / bi**‘

**Für Histogramm** werden

* **absolute Häufigkeit hi ODER relative Häufigkeit fi** und
* **Klassenbreite bi=(xk – xk-1)**

benötigt

Wenn Histogramm vorgegeben und dazu die Häufigkeiten ermittelt werden sollen, so sind in der Häufigkeitstabelle

* xi die Klassen (z. B. „10,2 bis unter 10,6“),
* absolute Häufigkeit,
* absolute Summenhäufigkeit,
* relative Häufigkeit,
* relative Summenhäufigkeit

einzutragen.

**absolute Häufigkeit oder relative Häufigkeit sind aus dem Histogramm zu berechnen   
hi = ri (y-Achse) \* bi (x-Achse)**

Um die Auswirkung der Regelstudienzeit zu demonstrieren, wurden die Studienzeiten von 200 Wirtschaftsingenieuren erhoben, die in den vergangenen vier Semestern ihr Studium erfolgreich abgeschlossen haben. Es ergaben sich folgende (fiktive) Daten:

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Merkmal** | **Merkmalsausprägung** | | | | | |
| **Semesterzahl** | **10** | **11** | **12** | **13** | **14** | **15** |
| relative Häufigkeiten | 0,1 | 0,1 | 0,4 | 0,2 | 0,15 | 0,05 |

Wie heißt die statistische Größe (Merkmal) und wie ist es skaliert?

Da statistische Merkmal ist Semesterzahl, die Merkmal s-Ausprägung sind die Beobachtungswerte (10, 11, 12, 13, 14, 15)

Das Merkmal ist absolut skaliert (Absolutskala). Dabei handelt es sich um ein quantitatives, metrisch und diskret skaliertes Merkmal.

Bestimmen Sie die absoluten Häufigkeiten (Häufigkeitstabelle)

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| i | xi  Semesterzahl | h(xi) |
| 1 | 10 | 20 |
| 2 | 11 | 20 |
| 3 | 12 | 80 |
| 4 | 13 | 40 |
| 5 | 14 | 30 |
| 6 | 15 | 10 |
|  | **∑** | **200** |

Bestimmen Sie die absoluten und relativen kumulierten Häufigkeiten.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| i | xi  Semesterzahl | h(xi) | H(xi) | f(xi) | F(xi) |
| 1 | 10 | 20 | 20 | 0,1 | 0,1 |
| 2 | 11 | 20 | 40 | 0,1 | 0,2 |
| 3 | 12 | 80 | 120 | 0,4 | 0,6 |
| 4 | 13 | 40 | 160 | 0,2 | 0,8 |
| 5 | 14 | 30 | 190 | 0,15 | 0,95 |
| 6 | 15 | 10 | 200 | 0,05 | 1,00 |
|  | **∑** | **200** |  | **1** |  |

Wie viele Semester benötigen die 10% schnellsten Studenten?

10% der schnellsten Studenten benötigen höchstens 10 Semester.

Wie viele Semester mindestens benötigen die 80% langsamsten Studenten?

80% der langsamsten Studenten benötigen 4 oder weniger Semester.

Geben Sie die Semesterzahl an, die genau 20% der Studenten benötigen

205 der Studenten benötigen höchstens 11 oder weniger Semester.

In folgender Aufgabe wird das Merkmal ”Semesterzahl” mit den Merkmalsausprägungen:

”klein” (weniger als 12 Semester)

”mittel” (genau 12 Semester)

”groß” (mehr als 12 Semester)

betrachtet

Welche Skalierung liegt vor?

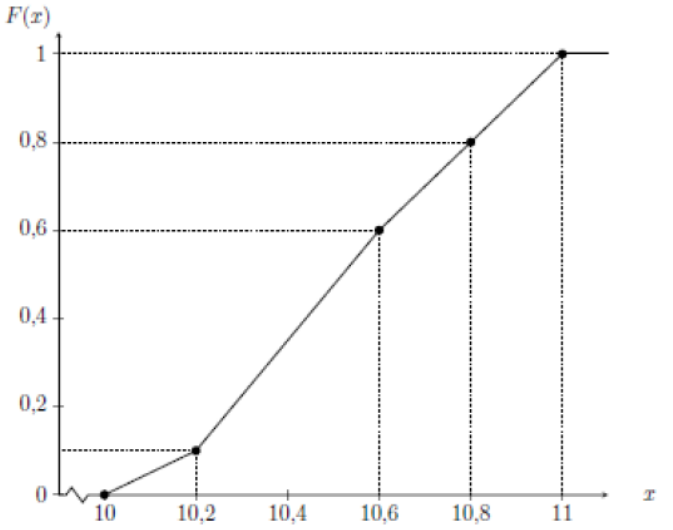
Ordinalskala (Rangmerkmal)

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| i | xi  Semesterzahl | h(xi) | H(xi) |
| 1 | klein  (weniger als 12 Semester) | 40 | 40 |
| 2 | mittel  (genau 12 Semester) | 80 | 120 |
| 3 | groß  (mehr als 12 Semester) | 80 | 200 |
|  | ∑ | 200 |  |

Ist es sinnvoll, bei einem nominal skalierten Merkmal eine Verteilungsfunktion (F(x) – also die relative Summenhäufigkeit) anzugeben?

Eine Verteilungsfunktion bei nominal skalierten Merkmalen ist nicht sinnvoll, da die Merkmale nicht sinnvoll interpretiert werden können. Nominal skalierte Merkmale sind Kategorien oder Bezeichnungen (z. B. Semesterzahl) und haben keine natürliche Reihenfolge oder Rangfolge. Diese können nur mit gleich oder ungleich interpretiert werden. Nominal skalierte Merkmale sind nicht metrisch Merkmale, auf denen Rechenoperationen ausgeführt werden können. Die Zuordnung von Zahlen zu den Merkmalen ist lediglich eine Kodierung der Ausprägungen.

Ein Sportverein hat sich in seiner Leichtathletikabteilung einen Schwerpunkt in der Förderung des 100-Meter-Laufs gesetzt. Nach einem Jahr intensivsten Trainings wurden die Zeiten der 20 Läufer des Vereins gemessen. Dabei ergab sich folgende Verteilungsfunktion



Zeichnen Sie das zur Verteilungsfunktion gehörende Histogramm

**Histogramm**:

**x-Achse = Klassenbreite bi = (xk – xk-1)**

**y-Achse = Rechteckhöhe ri = hi / bi**‘

**Für Histogramm** werden

* **absolute Häufigkeit hi ODER relative Häufigkeit fi** und
* **Klassenbreite bi=(xk – xk-1)**

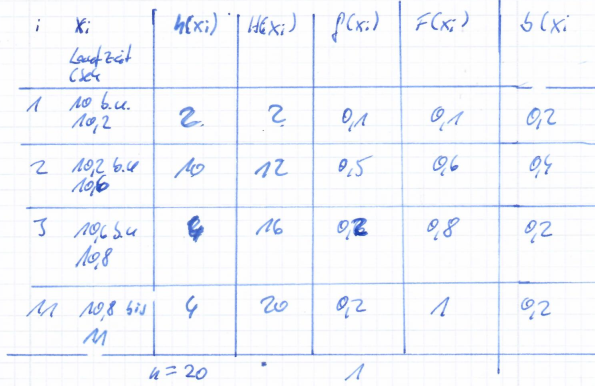
benötigt

Wenn Histogramm vorgegeben und dazu die Häufigkeiten ermittelt werden sollen, so sind in der Häufigkeitstabelle

* xi die Klassen (z. B. „10,2 bis unter 10,6“),
* absolute Häufigkeit,
* absolute Summenhäufigkeit,
* relative Häufigkeit,
* relative Summenhäufigkeit

einzutragen.

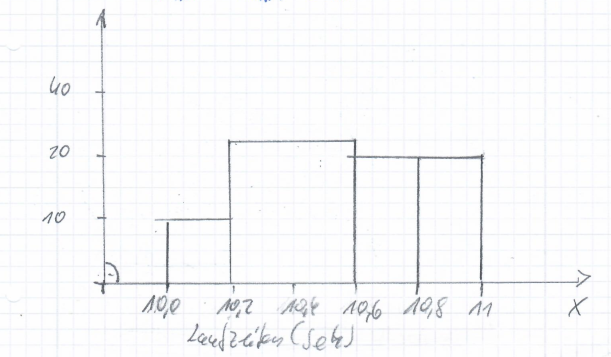
**absolute Häufigkeit oder relative Häufigkeit sind aus dem Histogramm zu berechnen   
hi = ri (y-Achse) \* bi (x-Achse)**



**x-Achse = Klassenbreite bi = (xk – xk-1)**

**y-Achse = Rechteckhöhe ri = hi / bi**‘

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi  Laufzeit (Sek) | bi  (xki – xki-1) | fi = hi / n | Fi | hi = fi \* n | Hi | ri = hi / bi | einfache Rechnung  durch verschieb der Null |
| 10 b. u. 10,2 | 0,2 | 0,1 | 0,1 | 2 | 2 | 2 / 0,2 = 10 | 20 / 2 = 10 |
| 10,2 b. u. 10,6 | 0,4 | 0,5 | 0,6 | 10 | 12 | 10 / 0,4 = 25 | 100 / 4 = 25 |
| 10,6 b. u. 10,8 | 0,2 | 0,2 | 0,8 | 4 | 16 | 4 / 0,2 = 20 | 40 / 2 = 20 |
| 10,8 bis 11 | 0,2 | 0,2 | 1,00 | 4 | 20 | 4 / 0,2 = 20 | 40 / 2 = 20 |
|  |  | 1 |  | n = 20 |  |  |  |



**Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit einem Messer geht durch Metalldetektor geht und ein Warnton ausgelöst wird, liegt bei 0,995.**

**Die Wahrscheinlichkeit, dass fälschlicherweise ein Warnton ausgegeben wird, liegt bei 0,01.**

**Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit einem Messer durch Metalldetektor geht (absichtlich oder unabsichtlich) beträgt 0,002.**

**Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Person ein Messer trägt, wenn der Metalldetektor einen Warnton ausgibt?**

**Definieren Sie zuerst hierzu geeignete Ereignisse und geben Sie deren Wahrscheinlichkeit wieder.**

P( truePositive) = 0,995 Warnton bei Person mit Messer

P (falsePositive) = 0,01 Warnton bei Person ohne Messer

P (falseNegative) = 0,002 kein Warnton bei Person mit Messer

P (trueNegative) = 0,998 kein Warnton bei Person ohne Messer

**Gegeben seien die Grundmenge ω={−2,−1,0,1,2,3,4,5,6,7} sowie die Mengen A={0,1,2} und B={1,2,3}. Führen Sie bitte die folgenden Mengenoperationen durch:**

A⋃B

Vereinigungsmenge

{0,1,2,3}

A⋂B

Schnittmenge

{1,2}

A\B

Differenzmenge („A – B“

{0}

BC

Komplement B in Bezug auf A (Ereignismenge ohne B)

{−2,−1,0,4,5,6,7}

(AC⋂BC)

Schnittmenge zu

Komplement A in Bezug auf B (Ereignismenge ohne A) und

Komplement B in Bezug auf A (Ereignismenge ohne B)

{−2,−1,4,5,6,7}

**Ein Mini-Bällebad enthält 3 rote, 4 blaue und 5 grüne Bälle.**

**Sie greifen blind hinein.**

**a) Sie ziehen 3 Bälle gleichzeitig. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Bälle die gleiche Farbe haben?**

**b) Sie ziehen 3 Bälle nacheinander und legen diese wieder zurück. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Bälle unterschiedliche Farben haben**

a)

3 Bälle gleichzeitig ziehen

gesucht: P(alleBälleGleicheFarbe)

ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen 🡆 KoW 🡆

n = 12

k = 3 3 gezogene Bälle

krot = 3

kblau = 4

kgrün = 5

Addition, da Vereinigungsmenge zu allen   
 Elementarmengen (rot, grün, blau)

oder

Es werden 3 Bälle gezogen.

Nach jedem Zug befindet sich ein Ball aus der Gesamtmenge und ein Ball von einer Farbe weniger im Bällebad.

**z. B. alles rote** Bälle

1. Zug: 3 rote / 12 Gesamt

2. Zug: 2 rote / 11 Gesamt

3. Zug: 1 rote / 11 Gesamt

Kombinationen zu jeder Farbe werden multipliziert und die jeweiligen Kombis addiert.

1. Zug 2. Zug 3. Zug

3 rote, 2 rote, 1 roter

1. Zug 2. Zug 3. Zug

4 blaue 3 blaue 2 blaue

1. Zug 2. Zug 3. Zug

5 grüne 5 grüne 3 grüne

b)

3 Bälle nacheinander, mit Zurücklegen

gesucht: P(alleBälleVerschiedeneFarben)

mit Reihenfolge, mit Zurücklegen 🡆 VmW 🡆 nk

n = 12

k = 3

mögliche Fälle

|Ω| = 12³ = 1728

günstige Fälle

n = 12

krot = 3

kblau = 4

kgrün = 5

einfacher

Für die Ereignismenge |E| wird die Anzahl der Bälle für jede Farbe multipliziert:

3 rote \* 4 blaue \* 5 grüne

|E| = 3 \* 4 \* 5 = 60

oder

51% sind Frauen. 2% der Frauen und 7% der Männer leiden an einer Krankheit.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit leidet eine zufällig ausgewählte Person an dieser Krankheit?

b) Eine zufällig ausgewählte Person leidet an dieser Krankheit. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist es eine Frau?

Nutzen Sie die 4-Felder-Tafel.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Frauen  51% | Männer  49% |
| Krankheit | 2 \* 51% = 1% | 7 \* 49% = 3,43% |
| keine Krankheit | 51% - 1% = 50% | 49%- 3,43% = 45,57% |
| SUMMEN | 51% | 49% |

a) Eine zufällig ausgewählte Person leidet mit einer Wahrscheinlichkeit von 4,43% an der Krankheit

b) Mit einer Wahrscheinlichkeit von 1% ist eine an der Krankheit leidende Person weiblich.

**In einer Kindertöpferei wurden 100 Tonfiguren frisch gefertigt.**

**Erfahrungsgemäß sind 20% davon fehlerhaft. Vier Figuren wurden zufällig entnommen.**

a)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die **vier Figuren fehlerfrei** sind?

20% fehlerhaft 🡆 80% fehlerfrei

n = 100

k = 80, 79, 78, 77

ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen 🡆 KoW

**= 40%**

b)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den vier entnommenen Figuren **genau drei fehlerfrei sind**?

ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen 🡆 KoW 🡆 Binomialkoeffizient 🡆

c)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den vier entnommenen Figuren **höchstens drei fehlerfrei sind**?

d)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass von den vier entnommenen Figuren mindestens drei fehlerfrei sind?

In einem Skigebiet in der Wintersaison sind viermal so viele Touristen wie Einheimische.

Touristen tragen außerhalb der Ski-Piste zu 60% eine Ski-Jacke, Einheimische nur zu 20%

a)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebige Person in dem Ort keine Ski-Jacke hat?

viermal so viele Touristen wie Einheimische

Gesamtanteil = 4 (Touristen) + 1 (Einheimische) = 5 = 5/5 🡆 100%

P(B)

P(Touristen) = 4/5 = **0,8**

P(Einheimische) 1/5 = **0,2**

P(A)

P(keine Ski-Jacke | Tourist) 1 – 0,6 = **0,4**

P(keine Ski-Jacke | Einheimische) 1 – 0,2 = **0,8**

**Satz der totalen Wahrscheinlichkeit**

P(A) = P(A|B) \* P(B) + P(A|B̅ ) \* P(B̅)

P(A) = (0,8 \* 0,4) + (0,2 \* 0,8)

P(A) = 0,48

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine beliebige Person keine Ski-Jacke trägt, liegt bei 48%

b)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass wenn jemand ohne Ski-Jacke nach dem Weg fragt, derjenige ein Einheimische ist?

**Satz von Bayes**

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Einheimischer keine Ski-Jacke trägt, liegt bei 33,3%

**In einer Urne befinden sich 4 rote und 6 blaue Kugeln.**

**Eine Kugel wird zufällig entnommen.**

**Falls sie blau ist, wird sie zurückgelegt. Falls sie rot ist, wird sie nicht zurückgelegt.**

**Berechne die Wahrscheinlichkeiten**

**a)**

**Die Wahrscheinlichkeit im ersten Zug eine blaue und im zweiten Zug eine rote Kugel zu erhalten**

**b)**

**Die Wahrscheinlichkeit, zwei blaue Kugeln zu ziehen**

**c)**

**Die Wahrscheinlichkeit, zwei rote Kugeln zu ziehen**

bedingte Wahrscheinlichkeit

erste Kugel ist blau

P(blaueImErstenZug) = 6 / 10

P(blaueImZweitenZug) = 6 / 10

P(roteimErstenZug) = 4 / 10

P(roteImZweitenZug) = 4 / 10

erste Kugel ist rot

P(blaueImErstenZug) = 6 / 10

P(blaueImZweitenZug) = 6 / 9

P(roteimErstenZug) = 4 / 10

P(roteImZweitenZug) = 3 / 9

a)

P(ersteBlauZweiteRot) = 6/10\*4/10 = 0,24

b)

Zwei blaue Kugeln

P(zweiBlaueKugeln) = 6/10\*6/10 + 6/10 \* 6/9 = 0,76

c)

P(zweiRoteKugeln) = 4/10\*4/10 + 4/10\*3/9 = 0,29

**In einem E-Mail-Programm existieren folgende Wahrscheinlichkeiten:**

**1.) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Spam-Mail eingeht, beträgt 50%**

**2.) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine E-Mail das Wort „Viagra“ enthält, wenn bekannt ist, dass diese E-Mail Spam ist, beträgt 5%.**

**3.) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine E-Mail das Wort „Viagra“ enthält, wenn bekannt ist, dass diese E-Mail kein Spam ist, beträgt 0,01%.**

Definieren sie entsprechende Ereignisse und geben Sie damit die beschriebenen Wahrscheinlichkeiten 1 bis 3 an.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine eingehende E-Mail als Spam klassifiziert wird, wenn bekannt ist, dass das Wort „Viagra“ enthalten ist.

P(B) = P(SpamPositiv) = 0,5

P(B̅) = P(SpamNegativ) = 0,5

P(A|B) = P(ViagraPositiv|SpamPositiv) = 0,05

P(A|B̅) = P(ViagraPositiv|SpamNegativ) = 0,0001

2 Bedingungen (Voraussetzungen): E-Mail == „Spam“ UND Wort „Viagra

Daher **Satz von Bayes**:

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine E-Mail das Wort „Viagra“ enthält und diese E-Mail als Spam-Mail erkannt wurde, beträgt 99,8%

P(A) P(B) P(C)

**Von 24 Schülern einer Klasse spielen 15 Volleyball, 15 Handball und 10 Basketball, 5 Schüler spielen Volleyball und Basketball, 7 Handball und Basketball, 3 spielen nur Handball und 4 betreiben alle Sportarten.**

**Beantworten Sie folgende Fragen mit Hilfe der geeigneten Formeln aus dem Bereich Mengenlehre und zeichnen Sie das Venn-Diagramm.**

A ≔ Schüler die Volleyball spielen

B ≔ Schüler die Handball spielen

C ≔ Schüler die Basketball spielen

A = 15 Volleyball

B = 15 Handball

C = 10 Basketball

A ⋂ C = 5 Volleyball und Basketball

B ⋂ C = 7 Handball und Basketball

B \ ( A ⋂ C) = 3 nur Handball

A ⋂ B ⋂ C = 4 Volleyball, Handball und Basketball

Wie viele Schüler spielen nur Volleyball (A)?

P(nurVolleyball) = A \ ( (A ⋂ C) \ (A ⋂ B ⋂ C) ) + ( (B ⋂ C) \ (A ⋂ B ⋂ C) ) )

P(nurVolleyball) = 15 – ( (5 – 4) + (7 – 4) ) = 15 – 4 = 11

Wie viele Schüler spielen nur Basketball?

P(nurBasketball) = C \ ( (A ⋂ C) \ (A ⋂ B ⋂ C) ) + ( (B ⋂ C) \ (A ⋂ B ⋂ C) ) )

P(nurBasketball) = 10 – ( (5 – 4) + (7 – 4) ) = 6

Wie viele Schüler spielen Volleyball und Handball?

P(Volleyball und Handball) = (A ⋂ B ⋂ C) \ ( ( (B ⋂ C) + A ⋂ C

Wie viele Schüler spielen keine der drei Sportarten?

P(keineSportart) = 24 \ ( ( (A ⋂ C ) \ (A ⋂ B ⋂ C) ) + ( (B ⋂ C) \ (A ⋂ B ⋂ C) + ( (B \ ( A ⋂ C) ) )

P(keineSportart) = 24 – ( (5 – 4) + (7 – 4 – 3) ) =

**Wichtige Regeln**

**Siebformel (Schlüsselwörter: „Anzahl“ „Wie viele“)**

Wenn die Anzahl / Menge zu 2 oder 3 vorgegebenen Mengen ermittelt werden soll

Bsp.

Studenten , die verschiedenen Kurse belegen

Sportler, die verschiedenen Sportarten belegen

3 Parteien a 7 Mitglieder, die einen Ausschuss mit 6 Mitgliedern belegen

Augenzahl 5 in 3 Würfen

**bei 2 vorgegebenen Mengen**

A ⋃ B = A + B – (A ⋂ B)

Augenzahl 5 in 3 Würfen

**bei 3 vorgegebenen Mengen**

A ⋃ B ⋃ C = A + B – (A ⋂ B) - (A ⋂ C) - (B ⋂ C) + (A ⋂ B ⋂ C)

Studenten , mit verschiedenen Kursen

25 Studies gesamt: 14 Bio, 10 Geo, 5 Bio und Geo, 6 Bio und Chemie, 1 Geo und Chemie, 2 alle 3 Kurse, Wieviel studieren Chemie?

**25 = 14 + 10 + C – 5 – 6 -1 +2 25 auf der linken Seite der Gleichung nicht vergessen!**

25 = 14 + 10 + C – 5 – 6 -1 +2 | -C | -25 | \*-1

C = 25 – 14 -10 + 5 + 6 +1 -2

C = 1 + 12 – 2

C = 11

**bedingte Wahrscheinlichkeit**

im Baumdiagramm (W-Graph) ist die Bedingung B die erste Bedingung, Bedingung A ist die zweite (letzte) Bedingung im Graph

Bsp.

Zahlungsverhalten Frau – pünktlich, schleppend, nie Mann – pünktlich, schleppend, nie

P(B) P(A|B) P(B) P(A|B)

**nach einer Bedingung – Satz der totalen Wahrscheinlichkeit**

P(A) = P(A|B) \* P(B) + P(A|B̅) \* P(B̅)

**nach zwei Bedingungen – Satz von Bayes**

**Multiplikationsregel bei mehrfacher beliebig kombinierbarer Auswahl**

mit m1 Möglichkeiten für die 1. Auswahl, m2 Möglichkeiten für die 2. Auswahl, m3 für die 3. Auswahl

Wenn keine weiteren Bedingungen für die Auswahl bestehen

z. B. Kekspackungen

20 Kekspackungen, davon sind 5 zweite Wahl, 3 Kekspackungen werden entnommen

**gleichzeitige Entnahme**

**ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen** 🡆 KoW =  **(Binomialkoeffizient)**

**a)**

**Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält die Stichprobe genau eine beschädigte Packung**

**n = 20 n2 = 5**

**k = 3**

**mögliche Fälle**

**günstige Fälle**

**WICHTIG für |E|**

**beliebig kombinierbarere Auswahl 🡆 Möglichkeiten m1, m2 … werden multipliziert**

**gleichzeitige Entnahme**

**ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen** **🡆** KoW =  **(Binomialkoeffizient)**

Die gefragte Anzahl zum gefragten Ereignis wird dem dazu passenden Gegenereignis zugeordnet

**🡆**  gefragt: genau 1 beschädigte Packung aus 5 Packungen mit 2. Wahl (n2)

**Eselsbrücke:** gefragt: 1 schlechte Packung aus 5 schlechten Packungen

Diese wird mit dem um die zweite n-Menge (Menge zur zweiten Wahl = 5) reduzierte Gesamtanzahl und der Differenz aus gefragten Menge und der in der Aufgabenstellung beschriebenen Menge (3 Packungen werden entnommen) multipliziert

**🡆**  gefragt: genau eine beschädigte Packung, entnommen werden 3 Packungen = 3 -1 = 2

**Eselsbrücke:**

**Zähler = n – n2 (5 Packungen 2. Wahl)**

**Eselsbrücke:**

**Summe aus allen Zählern = n 🡆 5 + 15 = 20**

**Summe aus allen Nennern = k 🡆 1 + 2 = 3**

Die Wahrscheinlichkeit berechnet sich aus

**Wichtig:**

**b)**

**Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält die Stichprobe höchstens eine beschädigte Packung**

höchstens eine beschädigte Packung = 1 oder keine 🡆 1 Packung oder 0 Packungen

Ω ist bereits berechnet

E wird nach demselben Algorithmus wie zur 1. Aufgabe berechnet, jedoch sind nun 0 Packungen zu berücksichtigen 🡆 2 Produkte, die addiert werden

In beiden Termen muss Summe zum Zähler wieder n ergeben ( = 20) und Summe zum Nenner wieder k (= 3) ergeben

Der erste Term muss nicht mehr berechnet werden, da bereits im Teil a) berechnet

Die Wahrscheinlichkeit berechnet sich aus

**c)**

**Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält die Stichprobe mindestens eine beschädigte Packung**

über Gegenwahrscheinlichkeit: 1 – keine beschädigte Packung (0)

Der erste Term , der zweite Term muss nicht mehr berechnet werden, da bereits im Teil b) berechnet

**hintereinander Ziehen, mit Zurücklegen**

mit Reihenfolge, mit Zurücklegen 🡆 VmW = nk

**a)**

**Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält die Stichprobe genau eine beschädigte Packung**

**n = 20 n2 = 5**

**k = 3**

**mögliche Fälle**

mit Reihenfolge, mit Zurücklegen 🡆 VmW = nk

**günstige Fälle**

mit Reihenfolge, mit Zurücklegen 🡆 VmW = nk

Der Algorithmus ist wie bei ohne Reihenfolge ohne Zurücklegen nur mit nk

Die gefragte Anzahl zum gefragten Ereignis wird dem dazu passenden Gegenereignis zugeordnet

51 = 5 gefragt: genau 1 beschädigte Packung zu 5 Packungen mit 2. Wahl (n2)

**Eselsbrücke:** gefragt: 1 schlechte Packung aus 5 schlechten Packungen

Diese wird mit der in der Aufgabenstellung beschriebenen Menge (3 Packungen werden entnommen) multipliziert = 3

Diese wird dem um die zweite n-Menge (Menge zur zweiten Wahl = 5) reduzierte Gesamtanzahl und der Differenz aus gefragten Menge und der in der Aufgabenstellung beschriebenen Menge (3 Packungen werden entnommen) multipliziert = 152

152 = 225

E = **3 \*** **51** \* **152** = 5 \* 225 = 3375

**Eselsbrücke:**

**Summe aus allen Basiswerten = n 🡆 5 + 15 = 20**

**Summe aus allen Exponenten = k 🡆 1 + 2 = 3**

Die Wahrscheinlichkeit berechnet sich aus

**b)**

**Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält die Stichprobe höchstens eine beschädigte Packung**

höchstens eine beschädigte Packung = 1 oder keine 🡆 1 Packung oder 0 Packungen

Ω ist bereits berechnet

E wird nach demselben Algorithmus wie zur 1. Aufgabe berechnet, jedoch sind nun 0 Packungen zu berücksichtigen 🡆 2 Produkte, die addiert werden

In beiden Termen muss Summe zur Basis wieder n ergeben ( = 20) und Summe der Exponenten wieder k (= 3) ergeben

Der erste Term muss nicht mehr berechnet werden, da bereits im Teil a) berechnet

E = **3 \*** **51** \* **152 + 50** \* **153** = 3375 + 153 = 3375 + 3375 = 6750

**50 = 1**

**c)**

**Mit welcher Wahrscheinlichkeit enthält die Stichprobe mind. eine beschädigte Packung**

Gegenwahrscheinlichkeit: 1 – keine

E = **50** \* **153 = 3375**

**Gegenwahrscheinlichkeit**

P(A) = 1 – keine (Gegenteil vom ursprünglichen Ereignis)

z. B.

mindestens eine 6 in 3 Würfen

mindestens 1 Packung …

kein Pferd 🡆 P(A) = 1 – 4/32 = 0,88

Urne mit **6 roten** und **4 grünen Kugeln** werden **gleichzeitig** **5 Kugeln** entnommen.

Wahrscheinlichkeit, dass **genau 2 der Kugeln rot** sind?

ohne Reihenfolge, ohne Wiederholung 🡆 **KoW 🡆**

n = 10

k = 5

**mögliche Fälle**

**günstige Fälle**

**Ein Mini-Bällebad enthält 3 rote, 4 blaue und 5 grüne Bälle.**

**Sie greifen blind hinein.**

**a) Sie ziehen 3 Bälle gleichzeitig. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Bälle die unterschiedliche Farbe haben?**

3 Bälle gleichzeitig ziehen

gesucht: P(alleBälleUnterschiedlicheFarbe)

ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen 🡆 KoW 🡆

n = 12

k = 3 3 gezogene Bälle

krot = 3

kblau = 4

kgrün = 5

**einfache Multiplikation der Anzahl der Binomialkoeffizienten pro Farbe da unterschiedliche Farben gefragt sind 🡆 Möglichkeiten (= Farben) können beliebig kombiniert werden == Multiplikationsregel!**

**Ein Mini-Bällebad enthält 3 rote, 4 blaue und 5 grüne Bälle.**

**Sie greifen blind hinein.**

**a) Sie ziehen 3 Bälle gleichzeitig. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Bälle die gleiche Farbe haben?**

3 Bälle gleichzeitig ziehen

gesucht: P(alleBälleGleicheFarbe)

ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen 🡆 KoW 🡆

n = 12

k = 3 3 gezogene Bälle

krot = 3

kblau = 4

kgrün = 5

**Addition der Werte (keine Multiplikation), da Möglichkeiten (= Farben) nicht beliebig kombiniert werden können 🡆 gefragt sind hier gleiche Farben (somit keine beliebige Kombi, sondern sortiert (gefiltert) nach Farben**

Addition, da Vereinigungsmenge zu allen   
 Elementarmengen (rot, grün, blau)

**Ein Mini-Bällebad enthält 3 rote, 4 blaue und 5 grüne Bälle.**

**Sie ziehen 3 Bälle nacheinander und legen diese wieder zurück. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Bälle unterschiedliche Farben haben**

b)

3 Bälle nacheinander ziehen, mit zurücklegen

gesucht: P(alleBälleUnterschiedlicheFarbe)

mit Reihenfolge, mit Zurücklegen 🡆 VmW = nk

n = 12 k = 3

mögliche Fälle

günstige Fälle

Anzahl der Möglichkeiten für roten Ball = 3.

Anzahl der Möglichkeiten für blauen Ball = 4.

Anzahl der Möglichkeiten für grünen Ball =

**einfache Multiplikation der Anzahl der Bälle pro Farbe ( 3 rote \* 4 blaue \* 5 grüne) da unterschiedliche Farben gefragt sind 🡆 Möglichkeiten (= Farben) können beliebig kombiniert werden == Multipliaktionsregel!**

E

**ODER Wahrscheinlichkeit auch durch Multiplikation der Möglichkeiten**

Möglichkeiten für roten Ball = 3 / 12

Möglichkeiten für blauen Ball = 4 / 12

Möglichkeiten für grünen Ball = 5 / 12

**Ein Mini-Bällebad enthält 3 rote, 4 blaue und 5 grüne Bälle.**

**Sie ziehen 3 Bälle nacheinander und legen diese wieder zurück. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Bälle gleiche Farben haben**

b)

3 Bälle nacheinander ziehen, mit zuücklegen

gesucht: P(alleBälleGleicheFarbe)

mit Reihenfolge, mit Zurücklegen 🡆 VmW 🡆 nk

n = 12 k = 3

Algorithmus ähnlich dem ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen 🡆 KoW

hier aber nk (VmW ) statt

mögliche Fälle

Ω = 123 = 1728

günstige Fälle

**Addition der potenzierten Werte (keine Multiplikation), da Möglichkeiten (= Farben) nicht beliebig kombiniert werden können 🡆 gefragt sind hier gleiche Farben (somit keine beliebige Kombi, sondern sortiert (gefiltert) nach Farben**

Farbe ist Basis, Potenz ist die Anzahl der Möglichkeiten = Anzahl der gezogenen Bälle

E = nk + nk + nk für jede Farbe

nrot = 3 nblau = 4 ngrün = 5 k = 3

E = 33 + 43 + 53 = 216