**Wahrscheinlichkeit – Zusammenfassung**

### Beschreibende Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie

* beschreibende Statistik kommt ohne Wahrscheinlichkeit aus

|  |  |
| --- | --- |
| Beschreibende Statistik | Wahrscheinlichkeitstheorie |
| relative Häufigkeit fi | Wahrscheinlichkeit p(A) |
| Häufigkeitsverteilung | Wahrscheinlichkeitsverteilung |
| Stichprobe | Zufallsvariablen |
| Mittelwert x̅ | Erwartungswert |
| Standardabweichung s | Streuung |
| Varianz s² | Varianz s² |
| Median x̅Z | Median, x̅Z |
| Quantile | Quantile |
| Merkmale | Experiment |
| Merkmalsausprägungen xi | Elementarereignisse ω  Teilmenge vom Ereignisraum Ω **ω ⊆ Ω** |
| Stichprobe | n-malige Wiederholung des Experiments |

### Wahrscheinlichkeitstheorie

* untersucht **bestimmte Ereignisse bei der Durchführung des (Zufalls-) Experiments**

Bsp.:

* + Wurf einer Münze A = {Kopf}
  + Würfeln B = {5, 6}
  + Lotto 6 aus 49
  + mehr als 1000 Anrufe pro Tag D = { n | n > 1000}
  + Matrikelnummer mit 7 beginnt K = {MatNr| MatNr 7\*}
* **Experiment ist beliebig oft und unter identischen Bedingungen wiederholbar**
* **Ergebnis des Experiments** ist **nicht exakt vorhersagbar** („hängt vom Zufall ab“)
* **Zufallsaspekt einer Stichprobe** ist auch **Verbindung zur Wahrscheinlichkeitstheorie**   
  (historisch ist Wahrscheinlichkeitsrechnung eng mit dem Glücksspiel verbunden)
* auch **Funktionen können Ergebnisse eines Zufallsexperiments** sein

**Definitionen:**

**Experiment:**

* + **Erhebung eines Merkmals an einem Merkmalsträger**

**Stichprobe vom Umfang n**

* + die n-malige Wiederholung des Experiments

**Elementarereignisse ω (‚Klein-Omega‘) (singleton):**

* + die **verschiedenen möglichen Ergebnisse des Experiments** = **Merkmalsausprägungen**  
    sind **Teilmengen des Ereignisraums Ω 🡆 ω ⊆ Ω**

**Ereignisraum Ω (‚Groß-Omega‘)**

* + Ω ǂ 0
  + **Summe aller Elementarereignisse**
  + **Menge aller möglichen Ergebnisse**

### Ereignisraum Ω (auch Ergebnismenge oder Merkmalraum; Stichprobenraum (sample space))

* **nichtleere Menge** Ω ǂ 0
* **Menge aller möglichen Ergebnisse (Elementarereignisse) eines** mathematischen **Zufallsexperiments**
* Stichprobenraum (sample space)
* **|Ω|= n 🡆 Anzahl der Ergebnisse in der Menge Ω**
* Ω kann **endlich, abzählbar (diskret) oder überabzählbar unendlich** sein
* Ω heißt **diskret**, falls es **höchstens abzählbar unendlich viele Elemente hat**.

### Ereignis (event)

* **Elementarereignis (ω) ist Teilmenge A des Ereignisraums Ω A ⊂ Ω**
* **A tritt ein, wenn ω ϵ A ( Elementarereignis eine Element der Teilmenge A ist)**
* **Elementarereignisse** (singleton) {ω} sind **einelementige Teilmengen des Ereignisraums (Elemente von Ω)**
* **Ω** heißt **sicheres Ereignis** tritt immer ein
* **Ø** heißt **unmögliches Ereignis** kann nie eintreten
* **Ac** heißt **Komplementärereignis** **Gegenereignis, ohne A** (Ereignis B ∉ A)
* Teilmengen A und B heißen **wenn A \ B = Ø**  
  **unvereinbar oder disjunkt**

### Wahrscheinlichkeit p (probability)

* **Wahrscheinlichkeit p** ist ein **Maß für die Sicherheit** (oder Unsicherheit) **zur Voraussage über die Begrenzung der Möglichkeiten**
* Wahrscheinlichkeitsrechnung: **Zuordnung einer Wahrscheinlichkeit p(A) zu jedem Elementarereignis A**

**Beispiele**:

2 Elementarereignisse beim Münzwerfen

**p(‚Kopf‘)** = ½

**p(‚Zahl‘)** = ½

**p(‚Kopf** oder **Zahl‘)** = 2/2 = 1 Kopf‘ oder ‚Zahl‘

**p(‚Kopf und Zahl‘)** = 0/2 = 0 = Ø ‚Kopf‘ und ‚Zahl‘ nicht gleichzeitig   
 unmögliches Ereignis

### Wahrscheinlichkeit und relative Häufigkeit

* Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses wird häufig in Prozent angegeben (p \* 100)
* **Parallelität zu den relativen Häufigkeiten fi eines Merkmals**
* Im späterer Anwendung: **Schätzung der Wahrscheinlichkeiten** eines Ereignisses p **oder einer Merkmalsausprägung (Elementarereignis ω) durch relativen Häufigkeiten über n-fache Wiederholung des Experiments (absolute Häufigkeiten)**
* **Wahrscheinlichkeiten von Ereignissen können näherungsweise bestimmt werden**, wenn sie nicht elementar logisch oder physikalisch sind.

### Bestimmung der Wahrscheinlichkeit in der Praxis (Wahrscheinlichkeit des Ereignisses)

Bsp. Würfel:

Versuch der Formulierung des Maßes für die Sicherheit (Wahrscheinlichkeit), die 6 zu würfeln:

„**Unter 6 Würfel-Versuchen** wird **ungefähr 1 mal die Augenzahl 6** auftreten"

**Nicht sicher, dass bei 6 Versuchen die gewünschte Augenzahl genau 1 ist**

„**Unter 6000 Würfel-Versuchen wird ungefähr 1000 mal die Augenzahl 6** auftreten“   
 ist **schon plausibler**

"Unter einer **sehr großen Zahl n von Würfel-Versuchen** wird ungefähr n/6 mal die   
 Augenzahl 6 auftreten"

ist **noch sicherer**

* relative Häufigkeit h(A) 🡆 m/n:
  + **Ereignis A tritt genau m mal ein, wenn Experiment n mal identisch durchgeführt wird**   
    **m/n** (Anzahl der Ereignisse A / Anzahl der Experimente)
  + **relative Häufigkeit ist** meist **bei jeder Reihe von n Experimenten unterschiedlich**
  + **ist n** (in jeder Reihe der Experimente) **sehr groß, ist in jeder Reihe der Experimente die Anzahl der relativen Häufigkeiten m/n ungefähr gleich**
  + wächst **n gegen unendlich**, **sollte relative Häufigkeit einen fixen** (vom Experiment und dem Ereignis A abhängigen) **Wert haben**. Dieser Wert heißt „**Wahrscheinlichkeit des Ereignisses**“ 🡆 **empirisches Gesetz der großen Zahlen**



**3 Reihen (Folgen) mit jeweils n Versuchen (Experimenten) beim Würfeln**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Versuchsreihe i | Versuchs-Anzahl  n | Auftreten des Ereignisse  p(A) = 6 m mal wurde die 6 gewürfelt | relative Häufigkeit  hn(A)  m / n |
| 1 | 6 | {1, 1, 0, 2, 0} | 0,1667 0,1667 0 0,3333 0 |
| 2 | 60 | {7, 9, 8, 10, 9} | 0,1167 0,15 0,1333 0,1667 0,15 |
| 3 | 6000 | {1046, 1026, 993, 963, 986} | 0,174 0,171 0,166 0,161 0,164 |

**Wahrscheinlichkeit des Ereignisses** ist **für eine gegen unendlich strebende Anzahl n** von Durchführungen des Experiments **vorausgesagte relative Häufigkeit seines Eintretens**.

(mathematische Idealisierung, n strebt nicht wirklich "gegen unendlich“)

### Eigenschaften der Wahrscheinlichkeit:

* relative Häufigkeit jedes Ereignisses A im Bereich 0 ≤ h(A) ≤ 1 🡆 gilt daher auch für jede Wahrscheinlichkeit.
* Tritt Ereignis A mit Sicherheit ein 🡆 so tritt es bei n-maliger Durchführung des Experiments n mal ein
  + relative Häufigkeit hm(A) = n/n = 1 🡆 p(A) = 1
* Tritt ein Ereignis A mit Sicherheit nicht ein 🡆 so tritt es bei n-maliger Durchführung des Experiments 0 mal ein
  + relative Häufigkeit hm(A) = 0/n = 0 🡆 p(A) = 0

### Axiome von Kolmogorow

Wahrscheinlichkeitsmaß (W-Maß) muss folgende drei Axiome erfüllen:

1. **Wahrscheinlichkeit** für ein Ereignis A **ist immer eine reelle Zahl zwischen 0 und 1**:   
   **0 ≤ p(A) ≤ 1**
2. Das sichere Ereignis Ω hat die Wahrscheinlichkeit 1

**p(A) = 1 A tritt mit Sicherheit ein**

**p(A) = 0 A tritt mit Sicherheit nicht ein**

**0 < p(A) < 1 Werte zwischen 0 und 1 sind Grade an Sicherheit**

Je größer die Wahrscheinlichkeit p(A), umso größer die Annahme, dass   
 Ereignis A eintritt.

1. **Wahrscheinlichkeit einer Vereinigungsmenge ⋃ vieler disjunkter (unvereinbarer) Ereignisse = Summe der Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Ereignisse**

σ-Additivität (‚Sigma‘-Additivität):

Vereinigungsmenge von A und B ist Objekt-Menge, die in mindestens einem Element der Menge von A und B enthalten sind

### mengentheoretische Konzepte

* (Elementar)-**Ereignisse** ω sind **Teilmengen des Ereignisraums Ω**
* **Beziehungen zwischen den Ereignisse** werden **über** Begriffe der **Mengenlehre** beschrieben
* **Ereignisse werden wie Mengen miteinander verknüpft**

**⋂ Schnittmenge ( x ∈ A ⋀ x ∈ B )**

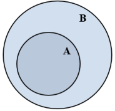
**⋃ Vereinigungsmenge ( x ∈ A ) ⋁ ( x ∈ B )**

**\ Mengendifferenz ( x ∈ A ) ⋀ ( x ∉ B )**

**c Komplementbildung von B in Bezug auf A ( x ∉ B )**

#### Teilmenge A von B

* Menge A ist Teilmenge einer Menge B
* **jedes Element** (Objekt) **von A ist auch in B enthalten**



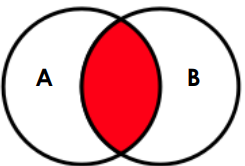
**A ⊆ B :⟺ ∀ x ( x ∈ A → x ∈ B )**

A ist echte Teilmenge von B daraus folgt für alle Elemente x

**A = B :⟺ ∀ x (x ∈ A ↔ x ∈ B )**

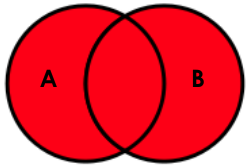
Zwei Mengen sind gleich, wenn beide Mengen dieselben Elemente enthalten

#### Schnittmenge von A und B

* **Menge der Elemente** (Objekte), **die in A UND in B enthalten sind**Es müssen aber **nicht alle Elemente von A in B enthalten** sein (Unterschied zur Teilmenge)
* Elemente **müssen** eine **nichtleere Menge** haben

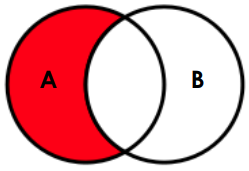
**A ⋂ B := { x ∣ ( x ∈ A ∧ x ∈ B ) }**

#### Vereinigungsmenge von A und B

* **Menge der Elemente (Objekte),** die **in mindestens einem Element von A und B enthalten sind**
* Elemente **können** eine **nichtleere Menge** haben

**A ⋃ B := { x ∣ ( x ∈ A ) ∨ ( x ∈ B ) }**

#### Differenzmenge von A und B

* **nur für 2 Mengen definiert**
* Menge der Elemente (Objekte), die **in A aber nicht in B** enthalten sind

**A ∖ B := { x ∣ ( x ∈ A ) ∧ ( x ∉ B ) }**

#### Komplement von B in Bezug auf A (A ohne B)

* ist **B eine Teilmenge von A**, dann ist A das Komplement der Menge B.

**BC := { x ∣ x ∉ B }**

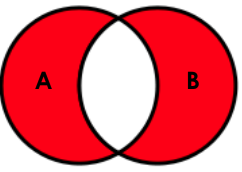
#### Symmetrische Differenz von A und B

**A △ B := { x ∣ ( x ∈ A ∧ x ∉ B ) ∨ ( x ∈ B ∧ x ∉ A ) }**

**A △ B := A ⋃ B - A ⋂ B**

**Vereinigungsmenge - Schnittmenge**

**Alle Elemente aus A und B – Elemente, die in A UND B enthalten sind**



### Einschluss-Ausschluss-Verfahren (Siebformel)

* auch **Prinzip von Inklusion und Exklusion** oder **Prinzip der Einschließung und Ausschließung**
* **Summenregel** **für zwei endliche disjunkte (unvereinbare) Mengen** A und B:

|𝐀 ∪ 𝐁| = |𝐀| + |𝐁| − |𝐀 ∩ 𝐁|

Menge von A + B – Schnittmenge von A und B (Menge die in A und B enthalten ist)

* **Summenregel für drei endliche disjunkte (unvereinbare) Mengen** A und B:

|𝐀 ∪ 𝐁 ∪ |𝐂 |= |𝐀| + |𝐁| + |𝐂| − |𝐀 ∩ 𝐁| − |𝐀 ∩ 𝐂| − |𝐁 ∩ 𝐂| + |𝐀 ∩ 𝐁 ∩ |C|

Menge A + B + C – Schnittmenge A und B – Schnittmenge A und C – Schnittmenge B und C + Schnittmenge A und B und C

### Gesetzmäßigkeiten

Für alle A , B , C ⊆ X gilt

**Antisymmetrie**: **A ⊆ B und B ⊆ A** → **A = B**

**Transitivität**: **A ⊆ B und B ⊆ C** → **A ⊆ C**

Die Mengen-Operationen **Schnitt ⋂ und Vereinigung ⋃ sind kommutativ, assoziativ** und **zueinander distributiv**

### Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung

**P ( Ω ) = 1**

**Ereignisraum Ω = 1 🡆 gesichertes Ereignis**

**P ( ← A ) = P ( Ω ∖ A ) = 1 - P ( A )**

**Ereignis ohne Elemente aus Menge A 🡆 1 - P ( A )**

#### Siebformel (Einschluss-Ausschluss-Verfahren, Prinzip der Inklusion und Exklusion)

**P ( Ω ) = 1**

* **Summenregel** **für zwei endliche disjunkte (unvereinbare) Mengen** A und B:

**P ( A ) = 1 – P ( ← A ) 1 ohne A bzw. Ω ohne A**

**|𝐀 ∪ 𝐁| = |𝐀| + |𝐁| − |𝐀 ∩ 𝐁|**

Menge von A + B – Schnittmenge von A und B (Menge die in A und B enthalten ist)

* **Summenregel für drei endliche disjunkte (unvereinbare) Mengen** A und B::

**|𝐀 ∪ 𝐁 ∪ |𝐂 |= |𝐀| + |𝐁| + |𝐂| − |𝐀 ∩ 𝐁| − |𝐀 ∩ 𝐂| − |𝐁 ∩ 𝐂| + |𝐀 ∩ 𝐁 ∩ |C|**

**P ( A ) = 1 – P ( ← A ) 1 ohne A bzw. Ω ohne A**

**P ( A ) = 1 – P( A ⋃ B ⋃ C ) 1 ohne A bzw. Ω ohne A**

**P ( A ) = 1 – P( A ) + P( B ) + P( C ) - P( A ⋂ B ) – P( A ⋂ C ) – P( B ⋂ C ) + P( A ⋂ B ⋂ C )**

Menge A + B + C – Schnittmenge A und B – Schnittmenge A und C – Schnittmenge B und C + Schnittmenge A und B und C

**Hinweis:**

**1 ist die Gesamtmenge (der Ereignisraum Ω )**

**Bsp.**

100 Studenten haben u.a. Kurse A, B und C belegt.

65 Studenten haben Kurs A belegt, 32 Kurs B, 18 Kurs C, 15 A und B, 9 B und C, 7 A und C, 3 haben alle drei Kurse belegt.

Wie viele Studenten haben keinen der Kurse A, B oder C belegt.

**(Anzahl Studenten ohne Kurse A, B, C) =**

**1 - P( A ) + P( B ) + P( C ) - P( A ⋂ B ) – P( A ⋂ C ) – P( B ⋂ C ) + P( A ⋂ B ⋂ C )**

**(Anzahl Studenten ohne Kurse A, B, C) = 100 – ( 65 + 32 + 18 – 15 - -9 – 7 + 3 ) = 100 – 87 = 13**

* Bei **einer von einer Gesamtmenge abhängigen Teilmenge** (z. B. einer Anzahl von gezogenen Kugeln) (k-Elemente bzw. k-Objekte)
  + bedeutet **Ω die von k und n abhängige Menge aller möglichen Ziehungsergebnisse** (Gesamtmenge) **und**
  + **betrachten eine Teilmenge E** (ein Ergebnis der 6 Ziehungsergebnisse) E ⊂ Ω

🡆 dann ist **p die Wahrscheinlichkeit**,   
 **dass ein Ziehungsergebnis zur „Ergebnismenge“ E** gehört

* **Diese Wahrscheinlichkeit ist** (unter obiger Gleichwahrscheinlichkeits-Annahme) **das Verhältnis der günstigen Möglichkeiten zu allen Möglichkeiten**

**Anzahl der Ergebnisse von Ω heißt Mächtigkeit |Ω|= n**

#### Laplace - Experiment

* Zufallsexperiment: **jedes Ereignis besitz die gleiche Wahrscheinlichkeit p**
* **alle Ergebnisse sind gleich wahrscheinlich**

**Laplace-Würfel**

* Ein nicht gezinkter (idealer) Würfel bei dem **jede gewürfelte Zahl gleich wahrscheinlich** ist)
* Wahrscheinlichkeit jedes Elementarereignisses ist gleich
* entsprechende Wahrscheinlichkeit ist

**(n/6) / n = (1/6) / 1 ⟺ (1/6) ≔ bei 600 Versuchen, wird jede Zahl 100-mal gewürfelt**

* Für idealen Würfel ist auch ungerade Zahl ein Ereignis.
* Wie groß ist die **Wahrscheinlichkeit für eine ungerade Zah**l?
  + **Von 6 möglichen Zahlen** (→ **mögliche Fälle**) **sind 3 Zahlen gerade** (2, 4, 6 → = 3 günstige Fälle).
  + **Jeder günstige (gerade Zahl) und ungünstige Fall (ungerade Zahl)** tritt bei n-Versuchen (Experimenten) für sehr großes n **gleich oft** ein   
    🡆 **n/6** mal = **relativer Anteil = 1 : 6**
  + Summe der günstigen Fälle ist dreimal größer als jede einzelne gerade Zahl

* + **relative Anteil aller günstigen Fälle** (gerade Zahl) ist somit d**reimal größer als der relative Anteil jeder einzelnen geraden Zahl** 🡆 3/6 = ½
  + **Wahrscheinlichkeit**, eine gerade oder ungerade Zahl = **3/6 = 1/2**
* **Anzahl aller möglichen Versuchsausgänge** eines Laplace-Experiments (= **Zahl der Elemente des Ereignisraums Ω**) heißt „**Zahl der möglichen Fälle**“
* **Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses A**

**Beispiel 1:**

Es werden zwei unterscheidbare (ideale) Würfeln geworfen.

vereinfacht: ein **roter** und ein **blauer** Würfel.

beide Würfel fallen unabhängig voneinander.

mögliche Versuchsausgänge sind alle 36 möglichen geordneten Paare von Augenzahlen:

(**1**, **1**), (**1**, **2**), (**1**, **3**), (**1**, **4**), (**1**, **5**), (**1**, **6**),

(**2**, **1**), (**2**, **2**), (**2**, **3**), (**2**, **4**), (**2**, **5**), (**2**, **6**),

(**3**, **1**), (**3**, **2**), (**3**, **3**), (**3**, **4**), (**3**, **5**), (**3**, **6**),

(**4**, **1**), (**4**, **2**), (**4**, **3**), (**4**, **4**), (**4**, **5**), (**4**, **6**),

(**5**, **1**), (**5**, **2**), (**5**, **3**), (**5**, **4**), (**5**, **5**), (**5**, **6**),

(**6**, **1**), (**6**, **2**), (**6**, **3**), (**6**, **4**), (**6**, **5**), (**6**, **6**).

Wie ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses „Die Summe der Zahlen in jedem Wurf ist gerade“?

* + **Zahl der möglichen Fälle** (Zahl aller möglichen Versuchsausgänge) = **36**
  + **Zahl der günstigen Fälle** (Zahl der möglichen Versuchsausgänge, bei denen die Summe der Zahlen gerade ist):
    - **Summe der Zahlen ist gerade**, **wenn** bei jedem Wurf **beide Zahlen gerade oder beide Zahlen ungerade sind**.
    - **Jeder Würfel hat 3 gerade und 3 ungerade Zahlen** 🡆 **9 Versuchsausgänge** mit Ereignissen (**gerade, gerade**) und **9 Versuchsausgänge** mit Ereignissen (**ungerade, ungerade**) = **18 günstige Fälle**.
* **gilt nur für Laplace-Experimente!**
* **Nicht jedes Zufallsexperiment ist ein Laplace-Experiment!**

**Beispiel 2:**

* + In einer Urne befinden sich **10 rote**, **15** **blaue** und **5 grüne** **Kugeln** ( = **30 Kugeln gesamt**)
  + Eine Kugel wird zufällig entnommen. Kugeln gleicher Farbe werden nicht unterschieden.
  + Kein Laplace-Experiment! 🡆 die Wahrscheinlichkeit der Versuchsausgänge rot, blau und grün ist nicht gleich!
  + kann jedoch in Laplace-Experiment gewandelt werden, in dem Kugeln nummeriert werden 🡆 damit ist jede Kugel einzigartig (besitzt Identität) 🡆 jede Nummer wird mit gleicher Wahrscheinlichkeit gezogen
  + **Zahl der möglichen Fälle = 30** (**Anzahl der Kugeln in der Urne**)
  + Versuchsausgänge **rot**: **Zahl der günstigen Fälle** = **10**
  + Versuchsausgänge **blau**: **Zahl der günstigen Fäll**e = **15**
  + Versuchsausgänge **grün**: **Zahl der günstigen Fälle** = **5**

**Wahrscheinlichkeiten für die drei Versuchsausgänge:**

#### Gegenwahrscheinlichkeit (Komplementärmenge, Gegenereignis)

* wenn A Teilmenge von Ω
  + ist die **Komplementärmenge Ω\A** die **Menge aller Versuchsausgänge** (Ereignisraum bzw. Ergebnismenge Ω), **die nicht in A** enthalten sind
  + **Bezeichnungen für Komplementärmenge**
    - **„A tritt nicht ein“**
    - **„nicht-A“**
    - **🡐 A**
    - **A̅**
    - **Gegenereignis von A**
    - **Negation von A**
* **Gegenereignis des Gegenereignisses ist wieder das ursprüngliche Ereignis** (Negation der Negation)

**A = 🡐 🡐 A**

* Die **Wahrscheinlichkeit eines Gegenereignisses heißt Gegenwahrscheinlichkeit**
* **Gegenwahrscheinlichkeit ist durch Komplementärmenge gegeben**

**P( 🡐 A ) = 1 – P( A )**

Gegenwahrscheinlichkeit Komplementärmenge

* **Summe aus der Wahrscheinlichkeit und der Gegenwahrscheinlichkeit = 1**

**p( A ) + p( 🡐A ) = 1**

Wahrscheinlichkeit + Gegenwahrscheinlichkeit = 1

**Beispiel 2:**

Urne mit 30 Kugeln (**10 rote**, **15** **blaue** und **5 grüne**)

**Ereignis P( A** **)** = „**nicht-rote Kugel** wird gezogen“

**Ereignis P( B )** = „**rote Kugel** wird gezogen“.

* + **Zahl der möglichen Fälle = 30** (**Anzahl der Kugeln in der Urne**)
  + Versuchsausgänge **rot**: **Zahl der günstigen Fälle** = **10**
  + **p( B ) = p( rote Kugel wird gezogen ) =** **10/30 = 1/3**
* alternativ kann über das Gegenereignis   
   p( A ) = P( **nicht-rote Kugel )** oder   
  berechnet werden
  + **A ist das Gegenereignis zu B 🡆 Wahrscheinlichkeit B = 1/3**

**P( A ) = 1 – P( B ) = 1 – 1/3**

**P( nicht-rote Kugel wird gezogen ) = 1 – 1/3 = 2/3 \* 30 = 20**

### Elementare Kombinatorik (abzählende Kombinatorik)

**Elementare Kombinatorik (abzählende Kombinatorik)**

* **Teilbereich der Kombinatorik**
* Bestimmung der **Anzahl möglicher Anordnungen oder Auswahlen** zu
  + **unterscheidbaren (ohne Wiederholung)** / **nicht unterscheidbaren (mit Wiederholung)** Objekten
  + **mit Beachtung der Reihenfolge (geordnet) / ohne Beachtung der Reihenfolge (ungeordnet)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | **mit** **Wiederholung**  (nicht unterscheidbar) | **ohne** **Wiederholung**  (unterscheidbar) |
| **mit** Beachtung der **Reihenfolge** (geordnet)  **und** **k ≤ n** | **Variation** mit Wiederholung  **VmW** | **Variation** ohne Wiederholung  (k-permutation)  **VoW** |
| **ohne** Beachtung der **Reihenfolge** (ungeordnet)  **und** **k < n** | **Kombination** mit Wiederholung  **KmW** | **Kombination** ohne Wiederholung  (k-combination)  **KoW** |

## Kombinatorik / Permutation

### Bausteine Der Kombinatorik

#### Multiplikationsregel der Kombinatorik:

* bei Möglichkeit der **mehrfachen Auswahl** 
  + **m1** Möglichkeiten für die **1. Wahl**,
  + **m2** Möglichkeiten für die **2. Wahl**,
  + **m3** Möglichkeiten für die **3. Wahl**
  + …

ist die **Gesamtzahl aller möglichen Fälle**

**m1 \* m2 \* m3 \* . . .**

#### Wichtigste Bausteine von Kombinatorik-Formeln:

**Fakultät**

* Für **n ∈ N0 ist n!** die **Anzahl der möglichen Permutationen** ( = **Vertauschungen** ) von n verschiedenen Objekten

**n! = n \* (n − 1) \*·. . . \* 1**

**0! = 1**

**1! = 1**

**Hinweis:**

**da Fakultät 0! = 1 und 1! = 1 werden 0! und 1! nicht in den Formeln / Berechnungen   
 berücksichtigt**

**Binomialkoeffizient**

**n Ereignisraum Ω**

**k für Permutation bzw. Kombinatorik ausgewählte / zu berücksichtigenden   
 Objekte / Elemente**

**Hinweis:**

**k ist nie > n**

**mit** **Berücksichtigung der Reihenfolge:** **k ≤ n**

**ohne Berücksichtigung der Reihenfolge ist k < n**

Tupel **„n über k“**, oder **„k aus n“**

* es sind **auf Weisen k Elemente aus** einer **Menge mit n Elementen auszuwählen**
* Dies entspricht der **Kombination ohne** Berücksichtigung der **Reihenfolge** und **ohne Wiederholung** (Zurücklegen) 🡆 **KoW 🡆 Anzahl der Ziehungsergebnisse**

### Grundmuster der Kombinatorik

A sei eine Menge mit n-Elementen A = {1,…,n}, aus der k Elemente auswählt werden ( k Ziehungen ).

Daraus ergeben sich **4 Grundmuster der Kombinatorik**:

* **mit Reihenfolge** 
  + **wenn „Ziehungen“ nacheinander erfolgen** (z. B. **würfeln**, Ziehung der **Lottozahlen**, **Sortierung** von Buchstaben / Zahlen
  + ist **immer eine Variation**
* **mit Reihenfolge, mit Wiederholung** (**mit Zurücklegen**)  
  **Variation mit Wiederholung 🡆 VmW**

|Ω| = 𝒏𝒌

* **mit Reihenfolge, ohne Wiederholung** (**ohne Zurücklegen**)   
  **Variation ohne Wiederholung 🡆 VoW**

**𝒌 < 𝒏**

Die Formel wird auch zur Ermittlung für die Menge der Elementarereignisse |E| bei der Berechnung der Wahrscheinlichkeit mit Zwischenschritten genommen.

**𝒌 = 𝒏**

**Sonderfall**

* **ohne Reihenfolge** 
  + wenn Ziehung gleichzeitig erfolgen und keine Sortierung erfolgt
  + ist **immer eine Kombination**
* **ohne Reihenfolge, mit Wiederholung** (**mit Zurücklegen**)  
  **Kombination mit Wiederholung 🡆 KmW**
* **ohne Reihenfolge, ohne Wiederholung** (**ohne Zurücklegen**) **🡆 Binomialkoeffizient**  
  **Kombination ohne Wiederholung 🡆 KoW**

### Beispiele zur Kombinatorik

**mit Reihenfolge, mit Wiederholung (mit Zurücklegen)**

**Ziehungen erfolgen nacheinander ( Sortierung )**

*Wie viele "Wörter" können aus 5 Buchstaben aus einem Alphabet mit dem Umfang 26 zustande kommen?*

**Variation mit Wiederholung ( VmW )**

n = 26

k = 5

**k < n**

**|**

*Fünfmaliges Werfen eines Würfels (oder Werfen von fünf Würfeln)*

**Variation mit Wiederholung ( VmW )**

n = 6

k = 5

**k < n**

**|**

**mit Reihenfolge, ohne Wiederholung (ohne Zurücklegen)**

**Ziehungen erfolgen nacheinander ( Sortierung )**

*Auf wie viele Arten können sich 5 Personen auf 5 freie (unterscheidbare) Plätze verteilen?*

**Variation ohne Wiederholung ( VoW )**

n = 5

k = 5

**k = n**

**Sonderfall**

*Es gibt eine genaue Sitzordnung für die Personen aus Beispiel*

*Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich jede Person auf den ihr zugedachten Platz zufällig gesetzt hat?*

**Laplace-Experiment**:

"Zahl der möglichen Fälle" = 120 = |Ω| (Ereignisraum / Ergebnismenge / Gesamtmenge)

"Zahl der günstigen Fälle" = 1 = |E| (Elementarereignis)

*Wie ist die Wahrscheinlichkeit, beim viermaligen Werfen eines Würfels lauter verschiedene Augenzahlen zu erzielen?*

n = 6

k = 4

**k < n**

**1. Schritt**

**Ermitteln des Ereignisraums / der Ergebnismenge |Ω|**

**Variation mit Wiederholung ( VmW )**

**|**

**2. Schritt**

**Ermitteln der günstigen Ereignisse (Elementarereignisse) |E|**

**Variation ohne Wiederholung ( VoW )**

**oder (langer Rechenweg)**

**3. Schritt**

**Ermitteln der Wahrscheinlichkeit**

**ohne Reihenfolge, mit Wiederholung (mit Zurücklegen)**

10 Sportlerinnen nehmen an 3 Wettbewerben teil, bei denen es jeweils genau eine Siegerin gibt.

Auf wie viele Arten können die Preise verteilt werden?

**Kombination mit Wiederholung ( KmW )**

Warum ohne Reihenfolge ( = Kombination)?

10 Sportlerinnen (Merkmalsträger) nehmen gleichzeitig an 3 Wettbewerben (Merkmalsausprägung) teil (keine Reihenfolge zu den Wettbewerben)

Warum mit Wiederholung (mit Zurücklegen)?

Jede Sportlerin nimmt an jeden Wettbewerb teil (Sportlerin wird für jeden Wettbewerb wieder „zurückgelegt“)

n = 10 Sportlerin

k = 3 Wettbewerbe

**ohne Reihenfolge, ohne Wiederholung (ohne Zurücklegen)**

*Experiment:* ***gleichzeitiges*** *Ziehen von 2 Kugeln aus der Urne U6 (Urne mit 6 Kugeln) ohne Zurücklegen.*

*Wie viele Paare sind möglich wenn man die Kugeln durchnummeriert?*

**Kombination ohne Wiederholung ( KoW )**

**Ziehungen erfolgen gleichzeitig ( ohne Sortierung )**

n = 6

k = 2

**k < n**

**Ergebnisraum: Ω = {{1,2}, {1,3}, ...., {5,6}}**

**Binomialkoeffizient**

**oder (langer Rechenweg)**

**ohne Reihenfolge, ohne Wiederholung (ohne Zurücklegen)**

*Einer Urne mit* ***6 roten*** *und* ***4 grünen Kugeln*** *werden* ***gleichzeitig******5 Kugeln*** *entnommen.*

*Wie ist die Wahrscheinlichkeit, dass* ***genau 2 der Kugeln rot*** *sind?*

**nroteK = 6 rote Kugeln**

**ngrüneK = 4 grüne Kugeln**

n = 10 alle Kugeln

k = 5

**k < n**

**1. Schritt**

**Ermitteln des Ereignisraums / der Ergebnismenge |Ω|**

**Kombination ohne Wiederholung ( KoW )**

**2. Schritt**

**Ermitteln der günstigen Ereignisse (Elementarereignisse) |E|**

**Kombination ohne Wiederholung ( KoW )**

**2 rote Kugeln**,

3 (5 – 2 = 3) grüne Kugeln.

kroteK = 2

kgrüneK = 3

**3. Schritt**

**Ermitteln der Wahrscheinlichkeit**

#### Anordnungen der Elemente einer Menge mit Wiederholung

(Anordnung der k-Objekte / k-Elemente)

**Permutation mit Wiederholung**

Permutation: wenn bei **Anordnung der k-Objekte / k Elemente**

* das 1. Element n1
* das 2. Element n2

usw. verwendet wird

**Ist n = n1 + n2 +…+ nk** , dann **ist die Anzahl der Permutationen**

Bsp.

Wieviel verschiedene Permutationen bzw. verschiedene Wörter lassen sich aus dem Wort **RAFAELLA** erstellen?

**RAFAELLA** ist Anordnung der Buchstabenmenge {R, A, F, E, L}

1. Schritt

Buchstabentypen bestimmen

R 1 x n1 = 1!

A 3 x n2 = 3!

F 1 x n3 = 1!

E 1 x n4 = 1!

L 2 x n5 = 2!

**∑ 8 = 1n1 + 3n2 + 1n3 + 1n4 + 2n5**

Buchstabe **„A“ ist dreimal ( Fakultät: 3! )** und **Buchstabe „L“ zweimal ( Fakultät: 2! )**  im Wort enthalten

Die Buchstaben „R“, „F“ und „E“ sind jeweils nur einmal im Wort enthalten und werden bei Bestimmung der Permutation nicht berücksichtigt

n = 8

n2 = 3

n5 = 2

3.360 Permutationen (3.360 verschiedene Wörter) lassen sich aus dem Wort **RAFAELLA** erstellen.

### Bedingte Wahrscheinlichkeit

* Oft sind nur Versuchsausgänge bei Eintreten eines bestimmten Ereignisses relevant

**bedingte Wahrscheinlichkeit p(A|B)**

* Wie groß ist Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses A unter der Voraussetzung, dass B eingetreten ist?
* **bedingte Wahrscheinlichkeit p(A|B) des Ereignisses A "unter der Voraussetzung B"** ist
  + die **relative Häufigkeit h(A)**, d. h.
  + der **Quotient aus absoluter Häufigkeit von P(A|B) 🡆 HAB**   
    ( für gleichzeitiges Eintreten der Ereignisse A und B ( AB ) ) **und**   
    der **absoluten Häufigkeit von P(B)** ( **HB** )   
    (Gesetz der großen Zahlen)
  + Bedingung: **P(B) > 0**

**𝑷(𝑨 ∩ 𝑩)**

* ist **Schnittmenge von Ereignis A und Ereignis B** (jedes Element von A ist auch Element von B und umgekehrt)
* die **Wahrscheinlichkeit** **für das Elementarereignis A und dann für das Ereignis B**

**𝑷(𝑩|𝑨)**

* ist **bedingte Wahrscheinlichkeit** 🡆 **Elementarereignis B, nachdem Ereignis A eingetreten** ist
  + **Bei 𝑷(𝑩|𝑨) ist bereits A eingetreten**
  + weitere mögliche Ausgänge des Experiments sind schon stark eingeschränkt.   
    **relevant** ist nun nur noch die **Wahrscheinlichkeit P( B )**

→ **𝑷(𝑨 ∩ 𝑩) und 𝑷(𝑩|𝑨) sind unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten**

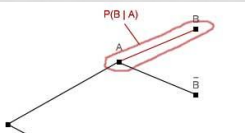
Beispiel:

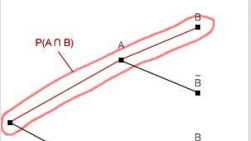
**P(A)** sei das **Ereignis „weiblich“**

**P(B)** sei das **Ereignis „Hochschulabschluss“**

bei einer zufällig herausgegriffenen Person im Hörsaal.

Die **„bedingte“ relative Häufigkeit P( B|A )** bezieht sich auf **weibliche Akademiker**





### Totale Wahrscheinlichkeit

**„Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit“**

* Ermitteln von Wahrscheinlichkeiten basierend auf bekannten Wahrscheinlichkeiten
* Für zwei Ereignisse A und B:

Für endlich viele Ereignisse Bi sei **{B1 ,…,Bn }** eine Menge von paarweise disjunkten   
 (einander ausschließenden) Ereignissen, dann gilt:

### Satz Von Bayes

* Satz von Bayes 🡆 direkte Konsequenz aus dem „Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit“

Für zwei Ereignisse A und B mit 𝑷(𝑩) > 𝟎 gilt:

Für endlich viele Ereignisse Bi

seien Bi paarweise disjunkt (einander ausschließend) und

**𝐴 ⊂ ⋃ 𝑩𝒊 und 𝑷(𝑨) ≠ 𝟎**

dann gilt:

### Wahrscheinlichkeitsgraphen (W-Graph, Baumdiagramm)

* grafische Darstellungsform der Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten
* zur Beschreibung des Ablaufs eines mehrstufigen Zufallsexperimentes
* bewerteter gerichteter Graph mit Baumstruktur (Baumdiagramm)

**Baumdiagramm**

* Ausgänge werden als Linien dargestellt und über den Linien die Wahrscheinlichkeiten notiert
* Linien entsprechen disjunkten (einander ausschließenden) Ereignissen.
* Die Knoten und Farben kennzeichnen die einzelnen Versuchsausgänge (Kugelsymbole können auch durch entsprechende Beschriftungen ersetzt werden).

**Pfadregeln**

**1. Multiplikationssatz:**

* + Die **Wahrscheinlichkeit für einen Pfad** ist das **Produkt aller** der längs **diesen Pfades verzeichneten Wahrscheinlichkeiten**.

**2. Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit**:

* + Die **Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A ist gleich der Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade**, die zu einem Zustand führen, bei dem das Ereignis A eintritt

*Bsp*

*In einer Urne befinden sich 10 rote, 15 blaue und 5 grüne Kugeln.*

*Aus dieser Urne werden hintereinander zwei Kugeln, ohne die erste zurückzulegen, gezogen.*

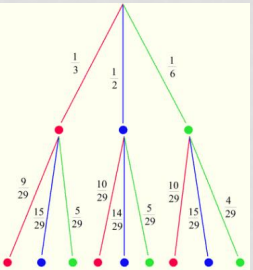
*Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden eine rote und eine blaue Kugel (egal in welcher Reihenfolge) gezogen?*

**VoW**

Wahrscheinlichkeiten für erste Ziehung aus dem Baumdiagramm.

Nach der ersten Ziehung sind nun nur 29 Kugeln in der Urne und die Wahrscheinlichkeiten für die zweite Ziehung hängen davon ab, welche Farbe die zuerst gezogene Kugel hat.

Das Prinzip des Baumdiagramms besteht nun darin, an das Ende jeder Linie, die einem Ausgang der ersten Ziehung entspricht, eine weitere Verzweigung anzuhängen, die die zweite Ziehung (unter den neuen Umständen) darstellt.



**Vow**

n = 30 Kugeln

nrot = 10 Kugeln

nblau = 15 Kugeln

ngrün = 5 Kugeln

vor der 1. Ziehung

10/30 = 1/3 rote Kugeln

15/30 = 1/2 blaue Kugeln

5/30 = 1/6 grüne Kugeln

hinter dem ersten Knoten **verbleiben 29 Kugeln (29 im Nenner)**

im Baumdiagramm von jeder Farbe wieder eine Verzweigung zu jeweils einer der Farben ( = 9 neue Knoten)

abhängig von der 1. Ziehung verringert sich der Zähler um 1  
**1. Ziehung = rote Kugel** 🡆 **Zähler zur roten Kugel hinter** dem ersten **rotem Knoten = 9**

**1. Ziehung = blaue Kugel** 🡆 **Zähler zur blauen Kugel** **hinter** dem ersten **blauen Knoten = 14**

**1. Ziehung = grüne Kugel** 🡆 **Zähler zur grünen Kugel** **hinter** dem ersten **grünen Knoten = 4**

**Berechnen der Wahrscheinlichkeit:**

**Multiplikationsregel für Baumdiagramme**

Die Wahrscheinlichkeit für einen Pfad ist das Produkt der entlang ihm verzeichneten Wahrscheinlichkeiten.

Es werden nur die für die Ziehung der jeweils einen roten oder blauen Kugel relevanten Pfade berücksichtigt 🡆 nur 1. Pfad und 2. Pfad (von links)

Vor der ersten Ziehung

**p(rote Kugel) = 10/30 = 1/3**

**p(blaue Kugel) = 15/30 = 1/2**

nach der ersten Ziehung

**p(rote Kugel) = 9/29**

**p(blaue Kugel) = 15/29**

**ODER**

**p(rote Kugel) = 10/29**

**p(blaue Kugel) = 14/29**

Beide Pfade (Pfad 1 und Pfad 2) sind zu berücksichtigen.

**1. Schritt**

**Multiplikationsregel für Baumdiagramme:**

Die Wahrscheinlichkeiten zu jedem Pfad sind zu multiplizieren

Wahrscheinlichkeiten aus dem 1. Pfad (von links)

Wahrscheinlichkeiten aus dem 2. Pfad (von links)

**2. Schritt**

**Additionsregel für Baumdiagramme:**

im 1. Schritt ermittelten Wahrscheinlichkeiten werden addiert 🡆 Pfade sind disjunkte Ereignisse.

Beispiel zum Baumdiagramm

*Der Informatikstudent glaubt am Anfang seines Studiums, dass er dieses mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,7 erfolgreich beenden wird.*

*Mit erfolgreich abgeschlossenem Studium beträgt die Wahrscheinlichkeit, die gewünschte Position zu erhalten, 0,8, ohne Studienabschluss nur 0,1.*

*Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Student die Position erhalten wird?*

E: Ende des Studiums

J: Job

P(E) = 0,70 🡆 P(J) = 0,8

P(E̅) = 0,30 🡆 P(J) = 0,1

* **gefragt ist P(J) 🡆 „totale Wahrscheinlichkeit“ für den Job**
* **bedingte Wahrscheinlichkeiten von J in beiden Pfaden (**unter allen möglichen Hypothesen) mit Wahrscheinlichkeiten der Hypothesen **multiplizieren und Ergebnisse addieren**

