**Zusammenfassung**

**der Konferenz vom 15.12.2023**

**und Präsenz am 12.01.2024**

# Zusammenfassung der Videos zur Präsenz vom 12.01.2024

***Video Modul\_7\_ÜbungsSeminar\_online\_20240112\_part1.mp4***

## Aufgabe 1

**Aus jeweils 7 Mitgliedern** der Parteien A, B und C soll **ein 6-köpfiger Ausschuss** gebildet werden. Wie viele Ausschusszusammensetzungen gibt es?

a) insgesamt?

b) wenn mindestens ein A-Mitglied dabei sein soll?

c) wenn mindestens ein A-Mitglied und ein B-Mitglied dabei sein sollen?

d) wenn aus jeder der drei Parteien mindestens ein Mitglied dabei sein soll?

Hinweise:

Bei c) und d) kann die Siebformel zum Einsatz kommen.

Die Aufgaben sind in der vorgegebenen Reihenfolge (a, b. c, d) zu lösen, da die Lösungen aufeinander aufbauen

𝛀 **Gesamtmenge der Ausschusszusammensetzungen**

**Welches Grundmuster (welche Grundform) der Kombinatorik ist hier anzuwenden?**

*Ist die Reihenfolge zur Auswahl der Mietglieder wichtig?*

*NEIN 🡆 ohne Reihenfolge*

*Sind die Ausschussmietglieder mehrfach zu berücksichtigen, d. h. ist ein Mitglied in mehreren Ausschüssen zu berücksichtigen?*

*Nein, jedes Mitglied kommt nur einmal pro Ausschuss vor 🡆 ohne Zurücklegen*

**Grundmuster (Grundform) der Kombinatorik**

* **ohne Reihenfolge und ohne Zurücklegen 🡆 Binomialkoeffizient**

***Erläuterung des Binomialkoeffizienten***

**Binomialkoeffizient**, um zu ermitteln, **wie viele Möglichkeiten es gibt, k Objekte / k Elemente aus einer Menge n zu ziehen**

Bsp.

6 aus 49

Wie viele Tipp-Möglichkeiten gibt es?

*Ziehung der Zahlen ohne Reihenfolge 🡆 die Reihenfolge der Ziehung der Zahlen ist egal*

*ohne Zurücklegen 🡆 es wird keine Zahl zurückgelegt, jede Zahl wird genau einmal gezogen*

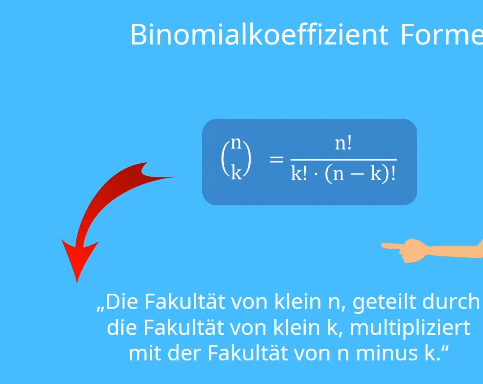
**Grundmuster (welche Grundform) der Kombinatorik 🡆 Binomialkoeffizient**

**Binomialkoeffizient** dient der **Bestimmung der k-Objekte / k Elemente aus einer Menge n**

**k aus n bzw. n über k**

|𝛀| =

**Binomialkoeffizient ist die Fakultät aus der Menge n geteilt durch Fakultät zur Menge der (eingeschränkten) Objekte (Elemente) k multipliziert mit der Fakultät (n-k)!**



z. B. 4 über 3 🡆 🡆 **Funktion nCr im Casio**

**Kombination**:

**Binomialkoeffizient**

**im Casio**

**Eingabe mit Taste „nCr“** :

*mit n, r∈Z/ 0 ≤ r ≤ n < 1\*1010*

 🡆 **„1: Comp“** **nur bei der ersten Verwendung!**

**Eingabe Menge n zu allen Möglichkeiten** 🡆 **** 🡆  🡆 **Eingabe Menge k zu den bedingten (eingeschränkten) Möglichkeiten**

Bsp.:

Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 4 verschiedenen Pflanzen (alle Möglichkeiten) 3 Pflanzen (bedingte (eingeschränkte) Möglichkeiten auszuwählen?

🡆 Binomialkoeffizient 🡆 **4 über 3 oder 3 aus 4**

**im Casio**

**4** 🡆 **** 🡆  🡆 **3** = 4

**4 über 3 bzw. 3 aus 4**  🡆 =

*Hinweis: Ermittlung d. Binomialkoeffizienten ohne Rechner über das Pascalsche Dreieck*

**49 über 6 bzw. 6 aus 49 🡆 = 13.983.816**

**Fakultät**:

**im Casio**

**Eingabe mit Taste ** (Funktion n!)

Taste  🡆 „**1: Comp**“ **nur bei der ersten Verwendung!**

**Eingabe Zahl zur Fakultät** 🡆 **** 🡆 

Bsp.

Fakultät 5! 🡆

**5** 🡆 Taste „**Shift**“ 🡆 **** 🡆  = 120 = 5 \* 4 \* 3 \* 2

**Formel zur Fakultät: n! = n \* (n-1) …\* 1 ( 0 != 1 und 1!= 1)**

**Permutation (Variation)**:

**im Casio**

**Eingabe mit Taste**   (Funktion nPr)

*mit n, r∈ Z/ 0 ≤ r ≤ n < 1 \* 1010*

**Eingabe Menge n zu allen Möglichkeiten** 🡆  🡆  🡆 **Eingabe Menge k zu den bedingten (eingeschränkten) Möglichkeiten**

Bsp:

Wie viele Möglichkeiten aus 10 verschiedenen Pflanzen 4 nebeneinander in ein Beet zu pflanzen?

Eingabe:

**10** 🡆  🡆 “ 🡆 **4** = 5040

**Zufallszahlen**

**im Casio**

**dreistellige Zufallszahl zwischen 0 und 1 🡆 Eingabe mit Taste „Ran#“**:

* 🡆 Taste „ **,**“

**ganzzahlige Zufallszahl zwischen A und B: Eingabe mit Taste „RanInt(A,B)“** :

Taste  🡆 **Eingabe** **erste Zahl für Beginn des Intervalls** 🡆 Taste„ **,**“ 🡆  🡆 **Eingabe zweite Zahl für Ende des Intervalls**

**ab hier weiter mit dem Video**

Minute 14

**Aus jeweils 7 Mitgliedern der Parteien A, B und C** soll **ein 6-köpfiger Ausschuss** gebildet werden. **Der EINE Ausschuss besteht aus 6 Mitgliedern, der sich aus den 7 Mitgliedern der 3 Parteien zusammensetzt.**

Wie viele Ausschusszusammensetzungen gibt es?

a) insgesamt?

𝛀 **Gesamtmenge der Ausschusszusammensetzungen**

*Wie viele Parteimitglieder gibt es (bzw. aus wie vielen wird ausgewählt)?*

* **3 Parteien \* je 7 Mitglieder** = 21 Mitglieder insgesamt

*Wie groß wird der Ausschuss?*

* 6 Mitglieder

Binomialkoeffizient = „21 über 6“ bzw. „6 aus 21“

|Ω| bedeutet Mächtigkeit von Ω

**|𝛀| = = 𝟓𝟒𝟐64**

a)

*Antwort:*

*Insgesamt gibt es 54.264 Möglichkeiten zu den Ausschusszusammensetzungen.*

**Im Casio**

**21** 🡆  🡆  🡆 **6** 🡆 **-** **14** 🡆  🡆  🡆 **6**

**Aus jeweils 7 Mitgliedern der Parteien A, B und C** soll **ein 6-köpfiger Ausschuss** gebildet werden.

**Der EINE Ausschuss besteht aus 6 Mitgliedern, der sich aus den 7 Mitgliedern der 3 Parteien zusammensetzt.**

Wie viele Ausschusszusammensetzungen gibt es?

b) wenn **mindestens ein A-Mitglied** dabei sein soll?

Vorüberlegung:

„**mindestens ein…**“ = **Gesamtmenge – „kein“** (ähnlich mit Gegenwahrscheinlichkeit)

bzw.

Gesamtmenge – „Menge OHNE A (|A|)“ oder

Gesamtmenge – „Menge OHNE B (|B|)“ oder

Gesamtmenge – „Menge OHNE C (|C|)“

**Mengen definieren**

|A| bedeutet Mächtigkeit von A

|A| = |B| = |C| A und B und C sind gleichmächtig

**Denkweise „verkehrt“!**

**„mindestens ein…“ = Gesamtmenge – „kein“** (bzw. „Menge OHNE …“)

**Menge der Ausschusszusammensetzungen ohne A-Mitglieder**

**|𝑨| =** (14 über 6)

Hinweis:

Nenner = 6 bleibt unverändert

Gesamtmenge (Menge aller Möglichkeiten) im Zähler wird um die Anzahl der Mitglieder aus einer Partei (hier Mitglieder der Partei A) reduziert (21 – 7 = 14) 🡆 🡆 „14 über 6“ (nicht 14/6!)

**|A| = |B| = |C| =**

**Gesamtanzahl Ω =**

**Anzahl ohne A-Mitglieder |𝑨| =**

**Gesamtanzahl – Anzahl der Zusammensetzungen ohne A-Mitglieder**

**|Ω| - |A| =**

**WICHTIG: Binomialkoeffizienten und Binomialkoeffizienten subtrahieren**

**Im Casio**

**21** 🡆  🡆  🡆 **6** 🡆 **-** **14** 🡆  🡆  🡆 **6**

*Antwort:*

*Es bestehen 51.261 Möglichkeiten zu den Ausschusszusammensetzungen, wenn in jedem Ausschuss mindestens ein A-Mitglied dabei sein soll.*

**Aus jeweils 7 Mitgliedern der Parteien A, B und C** soll **ein 6-köpfiger Ausschuss** gebildet werden. Wie viele Ausschusszusammensetzungen gibt es?

**Der EINE Ausschuss besteht aus 6 Mitgliedern, der sich aus den 7 Mitgliedern der 3 Parteien zusammensetzt.**

c) wenn **mindestens ein A-Mitglied und ein B-Mitglied** dabei sein sollen?

„**mindestens ein…**“ = **Gesamtmenge – „kein“** (ähnlich mit Gegenwahrscheinlichkeit)

bzw.

Gesamtmenge – „Menge OHNE A (|A|)“ oder

Gesamtmenge – „Menge OHNE B (|B|)“ oder

Gesamtmenge – „Menge OHNE C (|C|)“

**Mengen definieren**

**Denkweise „verkehrt“!**

**„mindestens ein…“ = Gesamtmenge – „kein“** (bzw. „Menge OHNE …“)

**Menge der Ausschusszusammensetzungen ohne A-Mitglieder**

**|𝑨| =** (14 über 6)

Hinweis:

Nenner = 6 bleibt unverändert

Gesamtmenge (Menge aller Möglichkeiten) im Zähler wird um die Anzahl der Mitglieder aus einer Partei (hier Mitglieder der Partei A) reduziert (21 – 7 = 14) 🡆 🡆 „14 über 6“

**Menge der Ausschusszusammensetzungen ohne B-Mitglieder**

**|B| =** (14 über 6)

**|A| = |B| =**  A und B sind gleichmächtig

„**und**“ = „**Vereinigungsmenge**“

Gesamtanzahl |𝜴| – Vereinigungsmenge von Anzahl der Zusammensetzungen

**ohne A-Mitglieder |A| und ohne B-Mitglieder |B|**

**|𝜴| − |𝑨 ∪ 𝑩|**

Anwendung der **Siebformel**

(auch Einschluss-Ausschluss-Verfahren bzw. Prinzip der Inklusion und Exklusion genannt)

**|𝜴| − |𝑨 ∪ 𝑩|** = **|𝜴| − ( |𝑨| + |𝑩| - |𝑨 ∩ 𝑩| )**

Gesamtmenge – ( Menge ohne A-Mitglieder + Menge ohne B-Mitglieder - *Schnittmenge* von |A ⋂ B|

*Schnittmenge von* **|A ⋂ B| =**  im Zähler steht die Anzahl der Mitglieder pro Partei = 7

Schnittmenge ist die **Menge der Objekte, die in A UND B enthalten ist**

**A ⋂ B := {x | ( x ∈ A ∧ x ∈ B) }**

*AND B AND C = x ∈ A ∧ x ∈ B*

**≔** *bedeutet „ergibt sich aus“ (für Definition linksseitig) A ⋂ B ≔ A ⋂ C linke Definition ergibt sich aus rechter Definition*

**Siebformel** (Einschluss-Ausschluss-Verfahren) **für 2 disjunkte Mengen**

**|𝜴| − |𝑨 ∪ 𝑩|** = **|𝜴| − ( |𝑨| + |𝑩| - |𝑨 ∩ 𝑩| )**

Gesamtmenge – ( Menge ohne A-Mitglieder + Menge ohne B-Mitglieder - *Schnittmenge* von |A ⋂ B|

**|𝜴| − |𝑨 ∪ 𝑩|** =

=

Vz-Wechsel, wg. Klammerauflösung

**Im Casio (Klammern sind bereits aufgelöst)**

**21** 🡆  🡆  🡆 **6** 🡆 **-** **2 \* 14** 🡆  🡆  🡆 **6 + 7** 🡆  🡆  🡆 **6**

**Aus je 7 Mitgliedern der Parteien A, B und C** soll **ein 6-köpfiger Ausschuss** gebildet werden. Wie viele Ausschusszusammensetzungen gibt es?

d) wenn **aus jeder der drei Parteien mindestens ein Mitglied** dabei sein soll

„**mindestens ein…**“ = **Gesamtmenge – „kein“** (ähnlich mit Gegenwahrscheinlichkeit)

**Denkweise „verkehrt“!**

**„mindestens ein…“ = Gesamtmenge – „kein“ (bzw. „Menge OHNE …“)**

**Menge der Ausschusszusammensetzungen ohne A-Mitglieder**

**|𝑨| =** (14 über 6)

**Menge der Ausschusszusammensetzungen ohne B-Mitglieder**

**|B| =** (14 über 6)

**Menge der Ausschusszusammensetzungen ohne C-Mitglieder**

**|C| =** (14 über 6)

**|A| = |B| = |C| =**  A und B und C sind gleichmächtig

„**und**“ = „**Vereinigungsmenge**“

Gesamtanzahl |𝜴| – Vereinigungsmenge von Anzahl der Zusammensetzungen

**ohne A-Mitglieder |A| und ohne B-Mitglieder |B| und ohne C-Mitglieder |C|**

**|𝜴| − |𝑨 ∪ 𝑩 ∪ C|**

Anwendung der **Siebformel** **für 3 Mengen**

(auch Einschluss-Ausschluss-Verfahren bzw. Prinzip der Inklusion und Exklusion genannt)

**|𝜴| − |𝑨 ∪ 𝑩 ∪ C|** = **|𝜴| - ( |𝑨| + |𝑩| + |C| - |𝑨 ∩ 𝑩| - |A ∩ C| - |B ∩ C| + |A ∩ B ∩ C| )**

Gesamtmenge – (Menge ohne A-Mitglieder + Menge ohne B-Mitglieder + Menge ohne C-Mitglieder) – *Schnittmenge* aus |A und B| - *Schnittmenge* aus |A und C| - *Schnittmenge* aus |B und C| + *Schnittmenge* aus |A und B und C|

*Schnittmenge von* **|A ⋂ B| = |A ⋂ C| = |B ⋂ C| =**

**Siebformel** (Einschluss-Ausschluss-Verfahren)

**|𝜴| − |𝑨 ∪ 𝑩** **∪ C|** =

=

Vz-Wechsel, wg. Klammerauflösung

**Im Casio (Klammern sind bereits aufgelöst)**

**21** 🡆  🡆  🡆 **6** 🡆 **-** **3 \* 14** 🡆  🡆  🡆 **6 + 3 \* 7** 🡆  🡆  🡆 **6**

**weiter mit dem Video**

Minute

## Aufgabe 2

Gegeben sei das Wort **ELEVEN**.

a) Wie viele „Worte“ kann man durch Buchstabenvertauschungen erzeugen?

b) Wie viele dieser „Worte“ enthalten die drei E's direkt hintereinander?

c) Wie viele dieser „Worte“ beginnen mit E und enden mit N?

**Welches Grundmuster (welche Grundform) der Kombinatorik ist hier anzuwenden?**

**Permutation mit Wiederholung Pmw**

**🡆 Anordnung der k-Elemente**

**𝑷𝒎𝑾 =**

Was steht im Zähler?

* Anzahl aller Buchstaben bzw. Anzahl aller Plätze
* **Das Wort „ELEVEN“ besteht aus 6 Buchstaben = Gesamtanzahl der Buchstabenvertauschungen**

Das Wort **ELEVEN** **enthält 6 Buchstaben**.

**🡆 Gesamtmenge (im Zähler) = 6**

Was steht im Nenner ?

* Anzahl der Permutationen (Variationsmöglichkeiten) der jeweiligen Buchstaben

= Buchstabentypen

Das Wort **ELEVEN** enthält **4 Buchstabentypen (= 4 Objekte / Elemente k):**

3 \* E 🡆 3!

1 \* L 🡆 1!

1 \* V 🡆 1!

1 \* N 🡆 1!

**∑ 6** Hinweis:   
 Die Summe der Anzahl der Buchstabentypen   
 (der Fakultäten) = Anzahl der Buchstaben (hier: 6)

**Nur ein Buchstabentyp mit Anzahl > 1 (also Fakultät > 1) 🡆 hier: 3 \* E 🡆 3!**

**🡆 Anzahl der Permutationen (Variationsmöglichkeiten)** **im Nenner 3!1!1!1! 🡆 3!   
(Fakultät 1!) wird nicht geschrieben)**

**Somit folgende Permutation**

**P𝒎𝑾 = = 120**

**Im Casio**

6 🡆 🡆  🡆 3 Hinweis:

Bei nur einer verschiedenen Fakultät >1 im Nenner   
 (nur einem Buchstabentypen mit Anzahl > 1 )   
 wird Permutation direkt mit 🡆  aufgerufen

*Antwort:*

*Durch Buchstabenvertauschungen können 120 Variationen (120 „Worte“) erzeugt erden.*

2. Beispiel:

**Mit 2 Buchstabentypen, die mehr als einmal vorkommen (also Fakultät > 1) 🡆 hier: 3 \* E**

Gegeben sei das Wort **RAFAELLA**

a) Wie viele „Worte“ kann man durch Buchstabenvertauschungen erzeugen?

Das Wort **RAFAELLA** enthält 8 Buchstaben.

**🡆 Gesamtmenge (im Zähler) = 8**

Das Wort **RAFAELLA** enthält **4 Buchstabentypen (= 4 Objekte / Elemente k):**

1 \* R 🡆 1!

3 \* A 🡆 3!

1 \* F 🡆 1!

1 \* E 🡆 1!

2 \* L 🡆 2!

**∑ 8** Hinweis:   
 Die Summe der Anzahl der Buchstabentypen   
 (der Fakultäten) = Anzahl der Buchstaben (hier: 8)

**🡆 Anzahl der Permutationen (Variationsmöglichkeiten) im Nenner 1!3!1!1!2! 🡆 3!2!   
(Fakultät 1! wird nicht geschrieben)**

**Somit folgende Permutation**

𝑷𝒎𝑾 =

**Im Casio**

**8 🡆 🡆  🡆  🡆 ( 🡆3 🡆  🡆  🡆 2 🡆  🡆 **

Hinweis: Term im Nenner muss in Klammern gesetzt werden)

Das Rechnen über Fakultät (statt über Permutation) ist nur bei mehr als einem Buchstabentypen, der häufiger als einmal vorkommt (hier 3 \* A = 3! und 2 \* L = 2!,) erforderlich.

*Antwort:*

*Durch Buchstabenvertauschungen können insgesamt 3.360 Variationen (3.360 „Worte“) erzeugt werden.*

Gegeben sei das Wort **ELEVEN**.

b) Wie viele dieser Worte enthalten die drei E's direkt hintereinander?  
 Gemeint ist die Anzahl der Variationen, die 3 E’s direkt hintereinander haben können  
 z. B. EEELVN, LEEEVN usw.

**Welches Grundmuster (welche Grundform) der Kombinatorik ist hier anzuwenden?**

**Welcher Spezialfall?**

**Permutation mit Wiederholung (PmW)**

**🡆 Anordnung der k-Elemente**

**𝑷𝒎𝑾 =**

**Achtung: Sonderfall**

**Der Buchstabe „E“ soll in den Variationen hintereinander geschrieben werden**

**🡆 E’s dürfen somit nicht getrennt werden 🡆 somit werden die 3 E's als 1 Zeichen aufgefasst**

Was steht im Zähler?

* Anzahl aller Buchstaben bzw. Anzahl aller Plätze
* **In diesem Sonderfall wird für die Ermittlung der Buchstabenanzahl der Buchstabe „E“ als ein Zeichen behandelt   
  🡆 Somit verbleibt der Ausschnitt „ELVN“  
  Der Wortausschnitt „ELVN“ besteht aus 4 Buchstaben = Gesamtanzahl der Buchstabenvertauschungen**

**Wort-Ausschnitt „ELVN“** **enthält 4 Buchstaben**.

**🡆 Gesamtmenge (im Zähler) = 4**

Was steht im Nenner ?

* Anzahl der Permutationen (Variationsmöglichkeiten) der jeweiligen Buchstaben

= Buchstabentypen

**Der Buchstabe „E“ soll in den Variationen hintereinander geschrieben werden**

**🡆 E’s dürfen somit nicht getrennt werden 🡆 somit werden die 3 E's als 1 Zeichen aufgefasst**

**„E“ wird als ein Zeichen behandelt**

Daraus ergeben sich **4 Buchstabentypen (= 4 Objekte / Elemente k)**:

EEE 🡆 1 \* E 🡆 1!

L 🡆 1 \* L 🡆 1!

V 🡆 1 \* V 🡆 1!

N 🡆 1 \* N 🡆 1!

**∑ 4** Hinweis:   
 Die Summe der Anzahl der Buchstabentypen   
 (der Fakultäten) = Anzahl der Buchstaben (hier: 4)

Es gibt genau 4 Buchstabentypen 🡆 Fakultät n! = 4

**🡆 Anzahl der Permutationen (Variationsmöglichkeiten) im Nenner 1!1!1!1! 🡆 keine Fakultät im Nenner (Fakultät 1! wird nicht geschrieben)**

**Welcher Sonderfall?**

**Jedes Objekt / Element ( = Wort mit 3 E’s hintereinander) kommt nur einmal vor.**

**Sonderfall:**

**Permutation mit Wiederholung (PmW) ist in diesem Sonderfall auch eine Variation ohne Wiederholung (VoW)**,

da die Buchstabenanzahl zum Ausschnitt **„ELVN“** im Zähler = der Anzahl Objekte k (Buchstabentypen) im Nenner (4 = 4)

**wenn 𝒌 = 𝒏: |Ω| = 𝑽𝒐𝑾 = 𝒏!**

ausführliche Schreibweise zur Permutation mit Wiederholung (PmW) für diesen Sonderfall

**Im Casio**

**4 🡆 🡆 **

*Antwort:*

*Durch Buchstabenvertauschungen können 24 Variationen (24 „Worte“), in denen der Buchstabe „E“ dreimal hintereinander vorkommt, erzeugt werden.*

Gegeben sei das Wort **ELEVEN**.

c) Wie viele dieser Worte beginnen mit E und enden mit N?

**Welches Grundmuster (welche Grundform) der Kombinatorik ist hier anzuwenden?**

**Permutation mit Wiederholung Pmw**

**🡆 Anordnung der k-Elemente**

**𝑷𝒎𝑾 =**

Die Buchstaben „E“ und „N“ am Beginn bzw. Ende des Wortes **(E)LEVE(N)** stehen bereits fest und werden nicht berücksichtigt.

Es verbleibt der Wort-Ausschnitt **LEVE**

L, E, V, E sind in unterschiedliche Reihenfolgen zu bringen.

Was steht im Zähler?

* Anzahl aller Buchstaben bzw. Anzahl aller Plätze aus dem Ausschnitt **LEVE**
* **Der Wort-Ausschnitt „LEVE“ besteht aus 4 Buchstaben = Gesamtanzahl der Buchstabenvertauschungen**

**Der Wort-Ausschnitt** **„LEVE“** **enthält 4 Buchstaben**.

**🡆 Gesamtmenge (im Zähler) = 4**

Was steht im Nenner ?

* Anzahl der Permutationen (Variationsmöglichkeiten) der jeweiligen Buchstaben

= Buchstabentypen

Der Wort-Ausschnitt „**LEVE“** enthält **3 Buchstabentypen (= 3 Objekte / Elemente k):**

1 \* L 🡆 1!

2 \* E 🡆 2!

1 \* V 🡆 1!

**∑ 4** Hinweis:   
 Die Summe der Anzahl der Buchstabentypen   
 (der Fakultäten) = Anzahl der Buchstaben (hier: 4)

**Nur ein Buchstabentyp mit Anzahl > 1 (also Fakultät > 1) 🡆 hier: 2 \* E 🡆 2!**

**🡆 Anzahl der Permutationen (Variationsmöglichkeiten)** **im Nenner 1!2!1! 🡆 2!   
(Fakultät 1!) wird nicht geschrieben)**

**Somit folgende Permutation**

**P𝒎𝑾 = = 12**

**Im Casio**

4 🡆 🡆  🡆 2 Hinweis:

Bei nur einer verschiedenen Fakultät >1 im Nenner   
 (nur einem Buchstabentypen mit Anzahl > 1 )   
 wird Permutation direkt mit 🡆  aufgerufen

*Antwort:*

*Durch Buchstabenvertauschungen können 12 Variationen (12 „Worte“), die mit dem Buchstaben „E“ beginnen und mit dem Buchstaben „N“ enden, erzeugt erden.*

## Aufgabe 3

**bedingte Wahrscheinlichkeit**

In einer Großbank kommen 80% der männlichen Kreditkunden ihren Kreditverpflichtungen pünktlich nach, 15% schleppend nach, und bei 5% muss die Bank den Kredit abschreiben.

Bei den weiblichen Kreditkunden sind die entsprechenden Zahlen 85%, 10% und 5%.

Von den Kreditkunden der Bank sind 70% männlich.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus dem Kreis aller Kreditkunden ausgewählte Person ihren Kreditverpflichtungen pünktlich nachkommt?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus dem Kreis aller Kreditkunden ausgewählte Person weiblich ist, falls die Person ihren Kreditverpflichtungen nur schleppend nachkommt?

**Um welche Wahrscheinlichkeit geht es hier?**

**bedingte Wahrscheinlichkeit**

* Eintritt eines bestimmten Ereignisses B ist die Bedingung (Voraussetzung) für die Wahrscheinlichkeit eines anderen Ereignisses A
* Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses A unter der Bedingung (Voraussetzung), dass das Ereignis B eingetreten ist?

Die **bedingte Wahrscheinlichkeit P(A|B)**

des Ereignisses **A "unter der Bedingung (Voraussetzung) B"**

**ist der Quotient aus der absoluten Häufigkeit HAB von AB**   
(das gleichzeitige Eintreten von A und B) **und der absoluten Häufigkeit von B** (HB) 🡆 (empirisches Gesetz der großen Zahlen, S. 12)

⋂ ist Symbol für Schnittmenge

**Definitionen:**

**Geschlecht (G) der Kunden:**

* M = Mann
* F = Frau

**Zahlungsverhalten (Zv) der Kunden**

* p = pünktlich
* s = schleppend
* n = nie

**gegeben sind:**

P(p|M) = 0,80 bedingte Wahrscheinlichkeit(pünktlich|Mann) = 80% = 0,80

P(s|M) = 0,15 bedingte Wahrscheinlichkeit(schleppend|Mann) = 15% = 0,15

P(n|M) = 0,05 bedingte Wahrscheinlichkeit(nie|Mann) = 5% = 0,05

P(p|F) = 0,85 bedingte Wahrscheinlichkeit(pünktlich|Frau) = 85% = 0,85

P(s|F) = 0,10 bedingte Wahrscheinlichkeit(schleppend|Frau) = 10% = 0,10

P(n|F) = 0,05 bedingte Wahrscheinlichkeit(nie|Frau) = 5% = 0,05

P(M) = 0,70 Anteil der männlichen Kunden = 70% = 0,70

P(F) = 1 - 0,70=0,30 Anteil der weiblichen Kunden = 30% = 0,30

**bedingte Wahrscheinlichkeit**

**Bedingung für die Wahrscheinlichkeiten zu den Zahlungsverhalten Zv ist das Geschlecht G**.

Die **Wahrscheinlichkeiten zum Zahlungsverhalten Zv (Ereignis A) sind vom Geschlecht G (Ereignis B) abhängig P(A|B) 🡆 P(Zv|G)**

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus dem Kreis aller Kreditkunden ausgewählte Person ihren Kreditverpflichtungen pünktlich nachkommt?

gefragt ist P(p) die Wahrscheinlichkeit zum Zahlungsverhalten Zv „pünktlich“ P(p)  
 unabhängig vom Geschlecht

**Welche Formel?**

* **Satz der totalen Wahrscheinlichkeit**
* ist ein Hilfsmittel, um mittels bekannter Wahrscheinlichkeiten weitere Wahrscheinlichkeiten zu ermitteln.
* bedingte Wahrscheinlichkeit A|B \* Wahrscheinlichkeit(B)
* **Warum „Satz der totalen Wahrscheinlichkeit“?**
  + **Es wird eine unbedingte Wahrscheinlichkeit P(A)   
    unter einer Voraussetzung**(nach der Wahrscheinlichkeit des Eintritts eines Ereignisses P(B) )   
    ermittelt. **P(A) = ∑P(A|Bi) \* P(Bi)**
  + **Ereignis B ist immer das erste Ereignis im Graph und die Bedingung (Voraussetzung)**  
    (Der **Graph wird von rechts mach links gelesen** (d. h. **es wird mit dem letzten Ereignis ( P(A) )**, das bei der bedingten Wahrscheinlichkeit **nach dem ersten Ereignis** **(P (B)** eintritt, **angefangen zu lesen**)
  + **Die Wahrscheinlichkeit P(B) ist immer das erste Ereignis im Graphund die Bedingung.**
  + **P(A) ist die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit und immer das letzte Ereignis**
  + **WICHTIG:   
    Es müssen die Produkte aus beiden Pfaden**(Eintritt des Ereignisses P(Bi) und Eintritt des Ereignisses P( B̅i)) **berücksichtigt und addiert werden**

**Satz der totalen Wahrscheinlichkeit**

Für zwei Ereignisse A und B gilt:



Wahrscheinlichkeit(A) = bedingte Wahrscheinlichkeit A|B \* Wahrscheinlichkeit(B) + bedingte Wahrscheinlichkeit A| Komplement B \* Wahrscheinlichkeit(Komplement B)

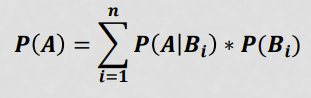
A ⋂ B Schnittmenge aus A und B

A ⋂ B̅ Komplement B: A ist nicht in B enthalten, B ist Teilmenge von A (A ohne B)  
 B „ergänzt“ A, jedoch Menge aus A nicht in Menge B

A|B bedingte Wahrscheinlichkeit: Wenn Ereignis B eintritt 🡆 tritt Ereignis A ein

Für endlich viele Ereignisse Bi

Bi sei {B1,…,Bn} eine Menge von paarweise disjunkten (einander ausschließenden) Ereignissen, dann gilt:



**Wahrscheinlichkeit (A) = SUMME( bedingte Wahrscheinlichkeit(A|B) \* Wahrscheinlichkeit(B) )**

disjunkt: Teilmengen A und B sind disjunkt (einander ausschließend, d. h. unvereinbar), wenn A \ B = Ø

B ist Teilmenge von A (in A enthalten), aber A ist in B nicht enthalten

**zur Lösung ist das Baumdiagramm (Wahrscheinlichkeitsgraph) hilfreich**

**Wahrscheinlichkeitsgraph (W-Graph))**

* ist gerichteter Graph mit Baumstruktur (Baumdiagramm)
* die Ausgänge werden als Linien gezeichnet und dazu die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten notiert.
* Die Linien entsprechen disjunkten (einander ausschließenden) Ereignissen. Die Knoten am Ende jeder Linie und die Farben kennzeichnen die einzelnen Versuchsausgänge (Kugelsymbole können auch durch Beschriftungen ersetzt werden).

**Pfadregeln für Baumdiagramme:**

**1. Multiplikationssatz:**

* Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Pfades ist das Produkt aller längs des Pfades verzeichneten Wahrscheinlichkeiten.

**2. Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit:**

* Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die zu einem Zustand führen, bei dem das Ereignis A eintritt.

Bsp.

Student glaubt, dass das Studium mit Wahrscheinlichkeit von 70% (0,7) erfolgreich beendet wird.

Bei erfolgreich abgeschlossenem Studium ist die Wahrscheinlichkeit, den gewünschten Job zu erhalten 80% (0,8).

Ohne Studienabschluss ist die Wahrscheinlichkeit nur 10% (0,1).

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Student die Position erhalten wird?

***EINE Bedingung*** *(Voraussetzung) =* ***P(B)*** *(Studium erfolgreich abgeschlossen oder nicht)*

*Diese ist immer das erste Ereignis (hier E für erfolgreich oder E̅ für nicht erfolgreich) im Graph*(Der **Graph wird von rechts mach links gelesen** (d. h. **es wird mit dem letzten Ereignis ( P(A) )**, das bei der bedingten Wahrscheinlichkeit **nach dem ersten Ereignis ( P(B)** )eintritt, **angefangen zu lesen**)

***Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist P(A) und immer das letzte Ereignis im Graph ( hier P(J) für „Job“ ).***

***Die Wahrscheinlichkeit P(B) ist immer das erste Ereignis im Graph und die Bedingung ( hier P(E) für „Erfolgreich“ oder P(E̅) für „nicht erfolgreich“ ).***

*P(E) Studium erfolgreich abgeschlossen oder P(E̅) Studium nicht erfolgreich abgeschlossen*

*ist Ereignis P(B)*

Definitionen:

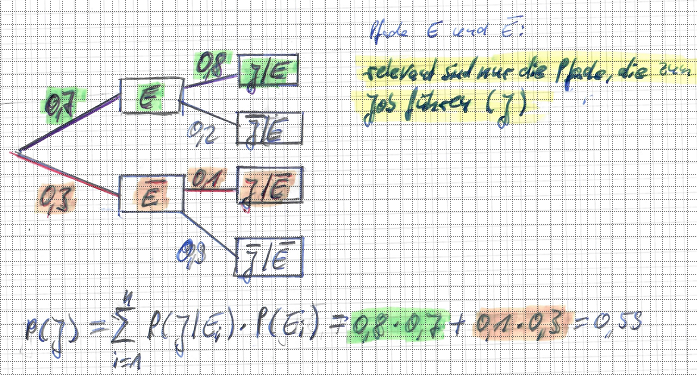
**E erfolgreich abgeschlossen P(B)**

**E̅ nicht erfolgreich abgeschlossen** **P(B̅)**

**J Job erhalten P(A)**

**J̅ Job nicht erhalten** **P(A̅)**

**In den beiden Pfaden E und E̅ sind nur die Pfade, die zum Job führen (J) relevant**



Die Wahrscheinlichkeit P(B) ist immer das erste Ereignis und die Bedingung.

Hier ‚E‘ oder ‚E̅‘ für erfolgreich/nicht erfolgreich

P(E) oder P(E̅)

P(A) ist die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit

hier ‚J‘ für ‚Job‘ P(J)

**P(A) = P(J)**

**P(B) = P(E) bzw. P(B̅)**

**P(A) = P(A|B) \* P(B)**

**P(J) = ∑P(J|E) \* P(E)**

**P(J̅) = ∑P(J̅|E|) \* P(E)**

**P(J) = ∑P(J|E̅ ) \* P(E̅ )**

**P(J̅) = ∑P(J̅ |E̅ ) \* P(E̅ )**

**Terme, die zur gesuchten Wahrscheinlichkeit führen (hier zum Job) führen, sind zu addieren**

daraus ergibt sich:

**P(J)** = **P(J|E) \* P(E)** + **P(J|E̅ \* P(E̅)** = **0,8 \* 0,7** + **0,1 \* 0,3** = **0,59**

weiter mit der Aufgabe 3

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus dem Kreis aller Kreditkunden ausgewählte Person ihren Kreditverpflichtungen pünktlich nachkommt?

gefragt ist P(p) die Wahrscheinlichkeit zum Zahlungsverhalten Zv „pünktlich“ P(p)  
 unabhängig vom Geschlecht

P(p) Totale Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „pünktlich“

***Eine Bedingung*** *(Voraussetzung): = P(B) (****Geschlecht „M“ oder „F“****)*

P(M) Das Geschlecht ist „Mann“

P(F) Das Geschlecht ist „Frau“

***Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist P(A) und immer das letzte Ereignis im Graph (hier P(p) für „pünktlich“.)***

***Die Wahrscheinlichkeit P(B) ist immer das erste Ereignis im Graph und die Bedingung ( hier die Wahrscheinlichkeit zum Geschlecht P(M) oder P(F) ).***

**gegeben sind:**

P(p|M) = 0,80 bedingte Wahrscheinlichkeit(pünktlich|Mann) = 80% = 0,80

P(p|F) = 0,85 bedingte Wahrscheinlichkeit(pünktlich|Frau) = 85% = 0,85

P(M) = 0,70 Anteil der männlichen Kunden = 70% = 0,70

P(F) = 1 - 0,70=0,30 Anteil der weiblichen Kunden = 30% = 0,30

Pfade im Baumdiagramm (Wahrscheinlichkeits-Graph (W-Graph))

M Mann

F Frau

P(p|M) bedingte Wahrscheinlichkeit für „pünktlich“, wenn Geschlecht = „Mann“

P(M) Wahrscheinlichkeit, wenn Geschlecht = „Mann“

P(p|F) bedingte Wahrscheinlichkeit für „pünktlich“, wenn Geschlecht = „Frau“

P(F) Wahrscheinlichkeit, wenn Geschlecht = „Frau“

**P(p) Totale Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „pünktlich“**

**P(p)** = P(p|M) \* P(M) + P(p|F) \* P(F)

Die Wahrscheinlichkeit P(B) ist immer das erste Ereignis und die Bedingung.

hier das Geschlecht ‚M‘ oder ‚F‘ P(M) oder P(F)

P(A) ist die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit

hier die Wahrscheinlichkeit zur pünktlichen Zahlung P(p)

**P(A) = P(p)**

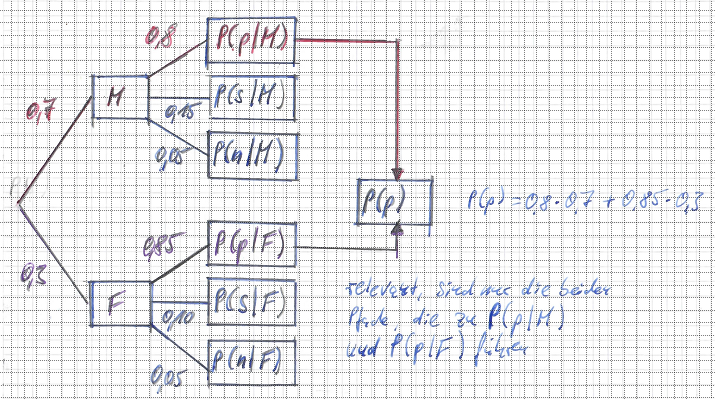
**P(B) = P(M)**

**P(B) = P(F)**

**P(p) = ∑P(p|M) \* P(M)**

**P(p) = ∑P(p|F) \* P(F)**

**P(p)** = 0,8 \* 0,7 + 0,85 \* 0,3 = **0,815**



**bedingte Wahrscheinlichkeit**

In einer Großbank kommen 80% der männlichen Kreditkunden ihren Kreditverpflichtungen pünktlich nach, 15% schleppend nach, und bei 5% muss die Bank den Kredit abschreiben.

Bei den weiblichen Kreditkunden sind die entsprechenden Zahlen 85%, 10% und 5%.

Von den Kreditkunden der Bank sind 70% männlich.

**Definitionen:**

**Geschlecht (G) der Kunden:**

* M = Mann
* F = Frau

**Zahlungsverhalten (Zv) der Kunden**

* p = pünktlich
* s = schleppend
* n = nie

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus dem Kreis aller Kreditkunden ausgewählte Person weiblich ist, falls die Person ihren Kreditverpflichtungen nur schleppend nachkommt?

Die **bedingte Wahrscheinlichkeit P(A|B)**

des Ereignisses **A "unter der Bedingung (Voraussetzung) B"**

ist der **Quotient aus der absoluten Häufigkeit HAB von AB**   
(das gleichzeitige Eintreten von A und B) **und der absoluten Häufigkeit von B** (HB)

**bedingte Wahrscheinlichkeit**

**Bedingung für die Wahrscheinlichkeiten zu den Zahlungsverhalten Zv ist das Geschlecht G**.

Die **Wahrscheinlichkeiten zum Zahlungsverhalten Zv (Ereignis A) sind vom Geschlecht G (Ereignis B) abhängig P(A|B) 🡆 P(Zv|G)**

**gefragt ist P(F|s)** Wahrscheinlichkeit, dass Geschlecht = „Frau“, wenn   
 Zv „schleppend“ ist P(F|s)

**Welche Formel?**

* **Satz von Bayes** 🡆 direkte Konsequenz aus dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit
* **Warum Satz von Bayes?**
  + Es wird eine **bedingte Wahrscheinlichkeit P(B|A) unter mehreren Bedingungen / Voraussetzungen (nach Eintritts mehrerer Ereignisse P(A) und P(B) ) ermittelt**.  
    **Ereignis B ist das erste Ereignis im Graph aber für die Wahrscheinlichkeitsermittlung das zweite auftretende Ereignis und die zweite Bedingung**(Der Graph wird von rechts mach links gelesen (d. h. es wird mit dem letzten Ereignis ( P(A) ) angefangen zu lesen)
  + **Achtung**:
* Die **gesuchte Wahrscheinlichkeit bezieht sich auf die Reihenfolge der Ereignisse P(B|A).**
* **P(B) ist das erste Ereignis im Graph und die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit sowie die Bedingung für das Ereignis P(A)**
* **P(A) ist das letzte Ereignis im Graph**
* Im **Zähler** stehen
  + die **bedingte Wahrscheinlichkeit P(A|B) aus dem ersten Pfad** (Pfad zur gesuchten Wahrscheinlichkeit)  
    **P(A) ist das letzte Ereignis im Graph, für die Wahrscheinlichkeitsermittlung aber das erste auftretende Ereignis und das Ereignis für die erste Bedingung**  
    **P(B) ist das erste Ereignis im Graph, für die Wahrscheinlichkeitsermittlung das zweite auftretende Ereignis und die zweite Bedingung**.
  + die **Wahrscheinlichkeit P(B)** zum Ereignis B **aus dem ersten Pfad** (Pfad zur gesuchten Wahrscheinlichkeit).
* Im **Nenner** stehen
  + **im ersten Term** 
    - **dieselben Werte wie im Zähler** (bedingte Wahrscheinlichkeit P(A|B) und Wahrscheinlichkeit P(B)
  + **im zweiten Term** 
    - die **bedingte Wahrscheinlichkeit P(A|B)** unddie **Wahrscheinlichkeit P(B)** zum Ereignis B **aus dem zweiten Pfad** (Pfad zur nicht gesuchten Wahrscheinlichkeit)  
      **WICHTIG:**Es müssen die Produkte aus beiden Pfaden addiert werden

**Satz von Bayes**

Für zwei Ereignisse A und B mit 𝑷(𝑩 > 𝟎) gilt:

bedingte Wahrscheinlichkeit A|B Wenn Ereignis B eintritt 🡆 tritt Ereignis A ein

bedingte Wahrscheinlichkeit B|A Wenn Ereignis A eintritt 🡆 tritt Ereignis B ein

Für endlich viele Ereignisse Bi gilt

Sind Ereignisse Bi paarweise disjunkt (einander ausschließend) und 𝐴⊂⋃i=1Bi (A ist echte Teilmenge von Bi) und 𝑷(𝑨) ≠ 𝟎, dann gilt:

𝐴⊂⋃i=1Bi A ist echte Teilmenge von Bi

Jedes Element von A ist auch Element von B

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus dem Kreis aller Kreditkunden ausgewählte Person weiblich ist, falls die Person ihren Kreditverpflichtungen nur schleppend nachkommt?

**gefragt ist P(F|s)** Wahrscheinlichkeit mit zwei Bedingungen  
 Zahlungsverhalten der Frauen P(F) 🡆 2. Bedingung,   
 wenn das Zv „schleppend“ P(s) 🡆 1. Bedingung   
 🡆 P(F|s)

P(F) Wahrscheinlichkeit B = „Frau“

P(s) Wahrscheinlichkeit A = „schleppend“

P(F|s) bedingte Wahrscheinlichkeit (F|s)   
 ist Zahlungsverhalten Zv „schleppend“ (Wahrscheinlichkeit A)

dann Zahlungsverhalten Zv zum Geschlecht = „Frau“   
 Wahrscheinlichkeit B),   
 🡆 P(B,A)

**gegeben sind:**

P(p|M) = 0,80 bedingte Wahrscheinlichkeit(pünktlich|Mann) = 80% = 0,80

P(s|M) = 0,15 bedingte Wahrscheinlichkeit(schleppend|Mann) = 15% = 0,15

P(n|M) = 0,05 bedingte Wahrscheinlichkeit(nie|Mann) = 5% = 0,05

P(p|F) = 0,85 bedingte Wahrscheinlichkeit(pünktlich|Frau) = 85% = 0,85

P(s|F) = 0,10 bedingte Wahrscheinlichkeit(schleppend|Frau) = 10% = 0,10

P(n|F) = 0,05 bedingte Wahrscheinlichkeit(nie|Frau) = 5% = 0,05

P(M) = 0,70 Anteil der männlichen Kunden = 70% = 0,70

P(F) = 1 - 0,70=0,30 Anteil der weiblichen Kunden = 30% = 0,30

***1. Bedingung*** *(Voraussetzung): = P(A) (****Zv „schleppend“ (Ps)***

2. Bedingung  *(Voraussetzung) = P(B) (* P(F) Das Geschlecht ist „Frau“ )

P(B) ( P(M) Das Geschlecht ist „Mann“

**P(A) ist das letzte Ereignis** im Graph, für die Wahrscheinlichkeitsermittlung aber das **erste auftretende Ereignis und** das **Ereignis für die erste Bedingung**

**P(B) ist das erste Ereignis** im Graph, für die Wahrscheinlichkeitsermittlung **das zweite auftretende Ereignis und die zweite Bedingung*.***

**gesucht:**

P(F|s) bedingte Wahrscheinlichkeit (F|s)   
 ist Zahlungsverhalten Zv „schleppend“ (Wahrscheinlichkeit A)

dann Zahlungsverhalten Zv zum Geschlecht = „Frau“   
 Wahrscheinlichkeit B),   
 🡆 P(B,A)

* Im **Zähler** stehen
  + die **bedingte Wahrscheinlichkeit P(A|B) aus dem ersten Pfad** (Pfad zur gesuchten Wahrscheinlichkeit)  
    **P(A) ist das letzte Ereignis im Graph, für die Wahrscheinlichkeitsermittlung aber das erste auftretende Ereignis und das Ereignis für die erste Bedingung**  
    **P(B) ist das erste Ereignis im Graph, für die Wahrscheinlichkeitsermittlung das zweite auftretende Ereignis und die zweite Bedingung**.
  + die **Wahrscheinlichkeit P(B)** zum Ereignis B **aus dem ersten Pfad** (Pfad zur gesuchten Wahrscheinlichkeit).
* Im **Nenner** stehen
  + **im ersten Term** 
    - **dieselben Werte wie im Zähler** (bedingte Wahrscheinlichkeit P(A|B) und Wahrscheinlichkeit P(B)
  + **im zweiten Term** 
    - die **bedingte Wahrscheinlichkeit P(A|B)** unddie **Wahrscheinlichkeit P(B)** zum Ereignis B **aus dem zweiten Pfad** (Pfad zur nicht gesuchten Wahrscheinlichkeit)  
      **WICHTIG:**Es müssen die Produkte aus beiden Pfaden addiert werden