**Wirtschaftsstatistik**

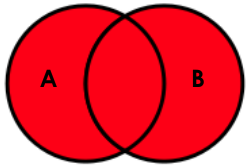
**Übungsblatt Modul 7**

**Wahrscheinlichkeitsrechnung**

**Mengenoperationen**

**Aufgabe 1**

Welche Ergebnisse liefern die folgenden Mengenoperationen?

**1. {1; 2; 3} ∪ {1; 3; 5; 7}**

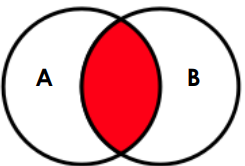
**∪ = Vereinigungsmenge**

Menge der Elemente (Objekte), die in mindestens einem Element

von A und B enthalten sind (in **A ODER in B** enthalten sind)

**( x ∈ A ) ∨ ( x ∈ B )**

**Lösung: {1; 2; 3; 5; 7}**



**2. {1; 2; 3; 4} ∩ {1; 3; 5; 7; 9}**

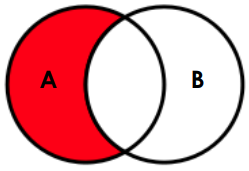
**∩ = Schnittmenge**

Menge der Elemente (Objekte), die in **A UND in B** enthalten sind

Objekte in A und B müssen **nicht leere Menge** haben

**( x ∈ A ∧ x ∈ B )**

**Lösung: {1; 3}**

**3. {1; 2; 3; 4; 5} \ {1; 3; 5; 7}**

**\ = Differenzmenge (ausschließende Menge)**

Menge der Elemente (Objekte), die **in A aber NICHT in B** enthalten sind

**( x ∈ A ) ∧ ( x ∉ B )**

**Lösung: {2; 4}**

**4. {1; 2; 4; 8} ∩ {x; y; z}**

**∩ = Schnittmenge**

Menge der Elemente (Objekte), die in **A UND in B** enthalten sind

Objekte in A und B müssen **nicht leere Menge** haben

**( x ∈ A ∧ x ∈ B )**

**Lösung: { }**

**5. ({1; 2; 3} ∩ {1; 3; 5}) ∪ {x; y; z}**

**∩ = Schnittmenge + ∪ = Vereinigungsmenge**

**∩ = Schnittmenge**

Menge der Elemente (Objekte), die in **A UND in B** enthalten sind

Objekte in A und B müssen **nicht leere Menge** haben

**( x ∈ A ∧ x ∈ B )**

**∪ = Vereinigungsmenge**

Menge der Elemente (Objekte), die in mindestens einem Element

von A und B enthalten sind (in **A ODER in B** enthalten sind)

**( x ∈ A ) ∨ ( x ∈ B )**

**Lösung: {1; 3; x; y; z}**

**6. ({1; 2; 3} ∪ {1; 3; 5}) ∩ {x; y; z}**

Hinweis:

Der 2. Ausdruck bezieht sich auf Schnittmenge.

Schnittmenge ist logisches UND.

**Objekte müssen in beiden Mengen enthalten sein**.

**({1; 2; 3} ∪ {1; 3; 5}) ∩ {x; y; z}**

**{1; 2; 3} ∪ {1; 3; 5}**

**1. Lösung**: Vereinigungsmenge **{1; 2; 3; 5}**

nun ist die Schnittmenge aus

**{1; 2; 3; 5} ∩ {x; y; z}**

zu bilden.

Schnittmenge = UND-Verknüpfung

**Objekte müssen in beiden Mengen enthalten sein**.

Objekte aus Menge A sind nicht in Menge B enthalten

**2. Lösung:** Schnittmenge **{ }**

**∪ = Vereinigungsmenge + ∩ = Schnittmenge**

**∪ = Vereinigungsmenge**

Menge der Elemente (Objekte), die in mindestens einem Element

von A und B enthalten sind (in **A ODER in B** enthalten sind)

**( x ∈ A ) ∨ ( x ∈ B )**

**∩ = Schnittmenge**

Menge der Elemente (Objekte), die in **A UND in B** enthalten sind

Objekte in A und B müssen **nicht leere Menge** haben

**( x ∈ A ∧ x ∈ B )**

**Lösung: { }**

**7. {1; 5; 10} \ {x; y; z**}

**\ = Differenzmenge (ausschließende Menge)**

Menge der Elemente (Objekte), die **in A aber nicht in B** enthalten sind

**( x ∈ A ) ∧ ( x ∉ B )**

**Lösung: {1; 5; 10}**

**8. {1; 2; 3; 4; 5} \ ( {1; 2; 3; 4; 5} ∩ {2; 4; 6} )**

**\ = Differenzmenge (ausschließende Menge) + ∩ = Schnittmenge**

**\ = Differenzmenge (ausschließende Menge)**

Menge der Elemente (Objekte), die **in A aber nicht in B** enthalten sind

**( x ∈ A ) ∧ ( x ∉ B )**

**∩ = Schnittmenge**

Menge der Elemente (Objekte), die in **A UND in B** enthalten sind

Objekte in A und B müssen **nicht leere Menge** haben

**( x ∈ A ∧ x ∈ B )**

Hinweis:

dieser Ausdruck ist wegen der Klammern von rechts nach links zu lösen.  
**{1; 2; 3; 4; 5} \ ( {1; 2; 3; 4; 5} ∩ {2; 4; 6} )**

1.)

**( {1; 2; 3; 4; 5} ∩ {2; 4; 6} )**

**1. Lösung:** Schnittmenge **{2; 4}**

2.)

nun ist die Differenzmenge aus

**{1; 2; 3; 4; 5} \ und**  **{2; 4}**

zu bilden

**2. Lösung:** Differenzmenge **{1; 3; 5}**

**Achtung: Klammern ( ) beachten!**

**Lösung: {1; 3; 5}**

**Aufgabe 2**

**Sei A = D = {1}, B =C = {2}.**

Bestimme folgendes:

**a) (A ∩ C) ∪ (B ∩ D)**

**∩ = Schnittmenge**

**∪ = Vereinigungsmenge**

**Lösung: { }**

**b)** **(A ∪ B) ∩ (C ∪ D)**

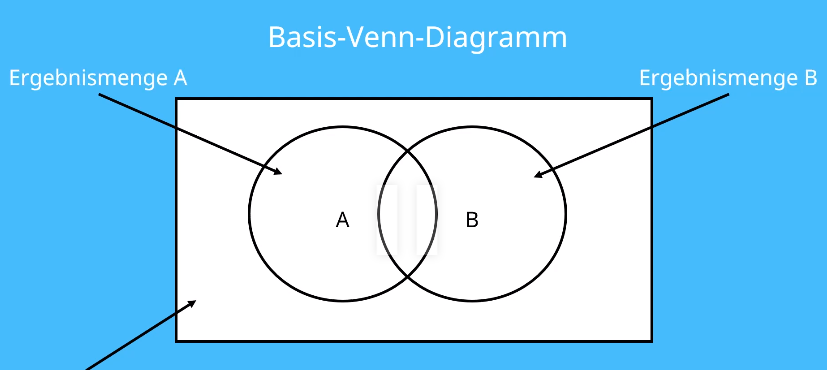
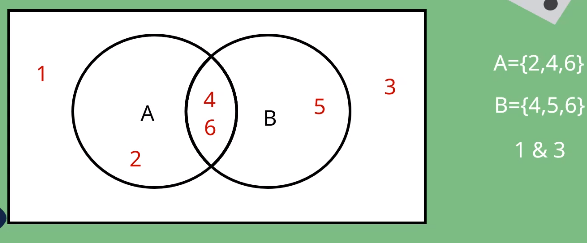
**Lösung: {1;2}**

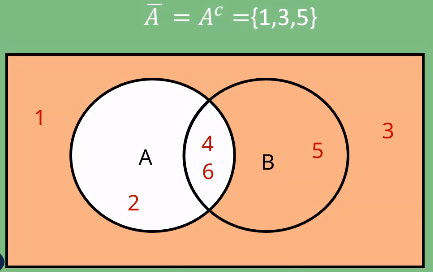
**Aufgabe 3**

Veranschaulichen Sie am Venn-Diagramm:

**Venn-Diagramm**

* zur Veranschaulichung
  + der Mengentheorie (mengentheoretische Konzepte)
  + der Zusammenhänge verschiedener Ereignisse
  + der Regeln in der Wahrscheinlichkeitsrechnung





**A = {2; 4; 6} B = {4; 5; 6}**

Teilmenge **A ⊆ B {4; 6}**

Vereinigungsmenge: **(A ∪ B) {2; 4; 5; 6}**

Schnittmenge: **(A∩B) {4; 6}**

Differenzmenge: **(A\B) {2}**

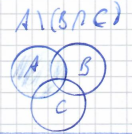
Komplement von A in Bezug auf B (B ohne A) **AC {1; 3; 5}**

A̅ ≔ nicht A

**Gesamtmenge ohne Elemente (Objekte) aus A**

Veranschaulichen Sie am Venn-Diagramm:

**a) A\(B∩C)**



**b) (A∪B) \ (A∩B)**

**(A∪B)**

Vereinigungsmenge (A∪B) 🡆 Objekte, die in **A ODER B** enthalten sind

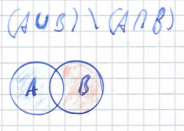
(A∪B) **\** (**A∩B)**

**\** (**A∩B)**

– Differenzmenge zur Schnittmenge (**A∩B) 🡆** 🡆 Objekte, die in **A UND B** enthalten sind

**ohne Objekte, die in A UND B enthalten sind**

**(A ∨ B) – (A ∧ B)**



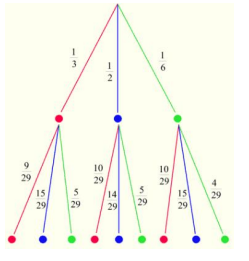
**Aufgabe 4**

Die Wahrscheinlichkeiten, mit denen roten, blauen und grünen Kugeln aus der Urne gezogen werden, sind im Baumdiagramm eingetragen.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Kugel grün ist.

**Multiplikationsregel: Wahrscheinlichkeiten in einem Pfad multiplizieren.**

**Additionsregel: Produkte der Wahrscheinlichkeiten aus allen Pfaden addieren.**



Es soll die Wahrscheinlichkeit P zur zweiten gezogene Kugel ermittelt werden.

Das bedeutet, die drei Pfade müssen bis zur 2. Ziehung durchlaufen werden.

Es sind alle 3 Pfade (1. Pfad = 1. Ziehung ist rote Kugel; 2. Pfad = 2. Ziehung ist blaue Kugel. 3. Pfad = 1. Ziehung ist grüne Kugel) durchlaufen werden.

**Aufgabe 5**

a)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei 2 (aufeinanderfolgenden) Würfen mindestens eine 5 zu erzielen?

**Einschluss-Ausschluss-Verfahren**

**diese Formel gilt nur für 2 Mengen**

**Vereinigungsmenge** **Addition – Schnittmenge**

**(ODER) logisches UND**

**Multiplikation**

**A ∪ 𝐁 = (𝐀 + 𝐁) – (𝐀 ∩ B)**

p(mindestens eine 5 in 2 Würfen)

ist dasselbe wie

**p((eine 5 im 1. Wurf) oder (eine 5 im 2.Wurf))** = **p(eine 5 im 1.Wurf) + p(eine 5 im 2.Wurf)** - **p((eine 5 im 1.Wurf) und (eine 5 im 2.Wurf)**

= **p(eine 5 im 1.Wurf) + p(eine 5 im 2.Wurf)** – **p(eine 5 im 1. Wurf) \* p(eine 5 im 2.Wurf)**

Verhältnis der günstigen Fälle zu den möglichen Fällen liegt bei 1 / 6 (1 erfolgreicher (=günstiger Fall) zu 6 möglichen Fällen (6 Seiten (Augen) des Würfels).

Es gib **2 Würfe = 2 Ereignisse A und B** (**A ist der 1. Wurf** (das **1. Ereignis**), **B ist der 2. Wurf** (das **2. Ereignis**)

Die Wahrscheinlichkeitsberechnung zur Formel

**(𝐀 + 𝐁) – (𝐀 ∩ B)**

ist folglich

**A ∪ 𝐁**  = (𝐀 + 𝐁) – (𝐀 ∩ B)

**auch mit Gegenwahrscheinlichkeit für 2 Würfe möglich**

b)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit bei 6 (aufeinanderfolgenden) Würfen wenigstens einmal eine 6 zu erzielen?

Wahrscheinlichkeit von 1:6 pro Wurf für alle 6 Würfe addieren, funktioniert nicht 🡆 Das impliziert, dass spätestens beim 6. Wurf die 6 gewürfelt wird 🡆 bedeutet Wahrscheinlichkeit von 1 (= sicheres Ereignis.

**ist also falsch!**

Das betrachtete Ereignis setzt sich aus 6 Ereignissen (6 beim 1. Wurf, 6 beim 2. Wurf,...) zusammen. Diese sind zwar unabhängig, schließen sich aber nicht aus.

**bei mehr als 2 Mengen:** Formel zum **Komplementärereignis (Gegenwahrscheinlichkeit)**:

***Würfeln keiner 6 beim 1. und 2.,...., und 6. Wurf***

**Komplementärereignis (Gegenwahrscheinlichkeit)**

Komplementärmenge Ω\A

Menge aller Versuchsausgänge, die nicht in A enthalten sind, d. h. in denen keine 6 gewürfelt wird

die nicht in A enthalten sind = „nicht-A“ oder **🡐** A oder A̅

**P( A̅ ) =1 – P( A ) ODER vice versa P( A ) =1 – P( A̅ )**

**Summe aus Wahrscheinlichkeit und Gegenwahrscheinlichkeit = 1** 🡆 **1 = P( A ) – P( A̅ )**

übertragen auf die Aufgabe

P(keine 6 in 6 Würfen) ist pro Wurf ein Ereignis mit 5 Objekten (jede Zahl außer 6 ist jeweils ein Objekt), jeder Wurf ist jeweils 1 Ereignis 🡆 somit 6 Ereignisse (= 6 Würfe) mit den Wahrscheinlichkeiten 5 / 6 (jede Zahl außer 6 🡆 „günstiger“ Fall / 6 mögliche Fälle)

🡆

1 ( = 6/6 ) ist die sichere Wahrscheinlichkeit von der das Produkt zu den 6 Ereignissen „keine 6“ (Gegenwahrscheinlichkeit) subtrahiert werden müssen

P(mindestens eine 6 in 6 Würfen) = 1 – P(keine 6 in 6 Würfen)

P(mindestens eine 6 in 6 Würfen)

= 1 – P(keine 6 im 1. Wurf) **UND** P(keine 6 im 2. Wurf) **UND** … **UND** P(keine 6 im 6. Wurf)

= 1 – P(keine 6 im 1. Wurf) \* P(keine 6 im 2. Wurf) \* … \* P(keine 6 im 6. Wurf)

**Aufgabe 6**

In einer Urne befinden sich ausschließlich rote und blaue Kugeln.

Es wird **genau** **zweimal eine Kugel mit Zurücklegen aus dieser Urne gezogen**.   
Dabei beträgt die **Wahrscheinlichkeit für das Ziehen mindestens einer blauen Kugel 95/144**. Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim einmaligen Ziehen aus dieser Urne eine rote Kugel gezogen wird.

mit Berücksichtigung der Reihenfolge, mit Zurücklegen 🡆 VmW

144 Kugeln

**blaue Kugeln: 95 / 144**

**rote Kugeln: 49 / 144**

**P(rote Kugel in 2 Zügen)** = 1 – **P(keine blaue Kugel in 2 Zügen)**

**Aufgabe 7**

In einer Fußballelf spielen**5 Verteidigungs-** und **5 Angriffsspieler**. Für **ein** eventuelles Elfmeterschießen werden 5 aus diesen 10 Spielern per Los ausgewählt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle 5 Elfmeterschützen Angriffsspieler sind?

mit Reihenfolge, ohne Wiederholung 🡆 Vow

Jede Losziehung = 1 Ereignis 🡆 6 Ereignisse

Bei jeder Losziehung nimmt die Zahl der möglichen Fälle (ni) um 1 ab.

Bei jeder Losziehung nimmt auch die Zahl der günstigen Fälle ki (Ziehen des Stürmers) um 1 ab.

Zusammengefasst:

Ereignisse

A1 „Ziehen eines Stürmers beim 1. Los“

A2 „Ziehen eines Stürmers beim 2. Los“

A3 „Ziehen eines Stürmers beim 3. Los“

A4 „Ziehen eines Stürmers beim 4. Los“

A5 „Ziehen eines Stürmers beim 5. Los“

Anzahl Ereignisse 5

Anzahl der möglichen Fälle n1 = 10, n2 = 9, n3 = 8, n4 = 7, n5 = 6

Anzahl der günstigen Fälle k1 = 5, k2 = 4, k3 = 3, k4 = 2, k5 = 1

Somit für jedes Ereignis eine Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeiten

Seien die Ereignisse A1, A2, A3, A4, A5 , dann sind die Wahrscheinlichkeiten

p(A1)=5/10

p(A2 | A1)=4/9

p(A3 | A1A2)=3/8

p(A4 | A1A2A3)=2/7

p(A5 | A1A2A3A4)=1/6

Dabei bedeutet p(Ai | A1 … Ai+1 ) = Eintreten der Wahrscheinlichkeit P(Ai) nach Eintreten der Wahrscheinlichkeit(en) 🡆 bedingte Wahrscheinlichkeit

P(A1 … Ai+1)

z. B. p(A5 | A1A2A3A4)=1/6 Eintreten der Wahrscheinlichkeit A5 (Stürmer wird beim 5.Los gezogen), wenn beim 1. Los, 2. Los, 3. Los, 4. los und 5.Los ein Stürmer gezogen wird.

Jede Wahrscheinlichkeit P( Ai ) ist ein Ereignisraum (=1 Ergebnismenge).

Aus den 5 Ereignisräumen (je 1 Ereignis \* 5 = 5 Ereignismengen) muss die Schnittmenge ⋂ ermittelt werden. Schnittmenge ⋂ werden durch Multiplikation der Elementarmengen (Ereignismengen) ermittelt.

P(5\ Angriffsspieler\ für Elfmeter) = P(A1) \* P(A2 | PA1) \* P(A3 | PA1 PA2) \* P(A4 | PA1 PA2 PA3) \* P(A5 | PA1 PA2 PA3 PA4)

Aufgabe 8

Ein sportbegeisterter junger Mann, der gerade sein Studium absolviert hat, sucht seine Traumfrau. Diese sollte folgende Eigenschaften haben: blonde Haare, zwischen 170 und 175 cm groß, abgeschlossenes Studium, aktiv Sport betreibend und reiche Eltern.

Dazu seien folgende Wahrscheinlichkeiten angenommen:

P(Frau)=0,5,

P(blond)=0,3,

P(170bis175)=0,4,

P(Studium)=0,1,

P(sportlich)=0,2,

P(reiche Eltern)=0,01.

a)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die nächste Person, die er zufällig kennenlernt, seine Traumfrau ist?

Unterstellung, dass alle Eigenschaften unabhängig voneinander sind.

Dann muss **Schnittmenge ⋂ aus den 6 Wahrscheinlichkeiten (= Ereignismengen) durch Multiplikation der Ereignismengen** gebildet werden

P(Frau UND blond UND 170bis175) UND Studium UND sportlich UND reiche Eltern ) =

P(Traumfrau) = P(Frau) \* P(blond) \* P(170bis175) \* P(Studium) \* P(sportlich) \* P(reiche Eltern)

**P(Traumfrau) = 0,5 \* 0,3 \* 0,4 \* 0,1 \* 0,2 \* 0,01 = 0,000012** = 1,2 x 10-5

**1,2 x 10-5 bei 10-5 schreibe 1 Vorkomma-Null und 4 Nachkommanullen (Anzahl der Nullen = Potenz)**

1,2 x 10**-2** = **0,0**12

1,2 x 10**-3** = **0,00**12

1,2 x 10**-4** = **0,000**12

1,2 x 10**-5** = **0,0000**12

b)

Ist die Wahrscheinlichkeit innerhalb eines Jahres die Traumfrau zu finden, wenn dieser Mann im Jahr 50 Personen zufällig kennenlernt, größer oder kleiner als die Wahrscheinlichkeit in a)?

Annahme für diese Aufgabe, dass Wahrscheinlichkeit ca. das 50fache beträgt (korrekte Berechnung ist tatsächlich nicht so einfach, sondern muss über das Komplementärereignis erfolgen).

Wird diese Annahme für die Ermittlung der Wahrscheinlichkeit zu Grunde gelegt, dann beträgt Wahrscheinlichkeit, die Traumfrau kennenzulernen das 50fache der Wahrscheinlichkeit aus Aufgabe 8a) also

50 \* 0,000012 = 0,0006

Selbst bei der Berechnung über das Komplementärereignis P(A) = 1 – (PA̅) ist die Wahrscheinlichkeit bei 50 Bekanntschaften / Jahr größer als die Wahrscheinlichkeit aus Aufgabe 8a)

Aufgabe 9

Bedingte Wahrscheinlichkeit

Es sei angenommen, dass in der Bevölkerung **3%** **eine bestimmte Krankheit haben**, so dass jede Person entweder als krank oder gesund eingestuft werden kann. Es gebe einen Test zur Indikation dieser Krankheit, der aber nicht 100-prozentig zuverlässig ist. Und zwar gibt er **für eine kranke Person in 95** von 100 Fällen das **richtige Ergebnis (+)**, stuft also in 5% der Fälle eine kranke Person irrtümlich als gesund ein, während er gesunde Personen zu 90% richtig klassifiziert (-), also in **10 von 100 Fällen eine gesunde Person** fälschlicherweise **als krank** indiziert. Wie groß ist die **Wahrscheinlichkeit, dass eine Person wirklich krank ist, wenn der Test ein positives (+) Ergebnis** erbracht hat?

Es soll das positive (+) Ergebnis zur kranken Person P(+Ergebnis | krankePerson) ermittelt werden

Achtung.

Ermittlung der Wahrscheinlichkeit basiert auf 2 Bedingungen 🡆 **Satz von Bayes**.

P(A) richtiges Ergebnis P(+Ergebnis)

P(B) Person ist krank P(krankePerson)

Es soll die Wahrscheinlichkeit zu P(A|B) = P(richtiges Ergebnis | Person ist krank) ermittelt werden.

Dabei müssen auch die Wahrscheinlichkeiten

P(A|B̅) = P(falsches Ergebnis | gesundePerson) P(+Ergebnis | gesundePerson)

**Achtung Falle:** hier ist falsches Ergebnis zur gesunden Person die positive Wahrscheinlichkeit P(+Ergebnis)

P(B̅) = P(gesundePerson)

berücksichtigt werden.

Satz von Bayes

**P( A | B) = P(+Ergebnis | krankePerson) = 0,95**

**P( B ) = P(krankePerson) = = 0,03**

**P( A | B̅ ) = P(+Ergebnis | gesundePerson) = 0,10**

+Ergebnis zur gesunden Person ist hier das Ergebnis, dass Person fälschlich als krank identifiziert (false positive)

**P( B̅ ) = P(gesundePerson) = 0,97**

**Aufgabe 10**

Das allseits bekannte Geburtstagsproblem: wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer

Klasse mit k Schülern mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben?

mit Reihenfolge mit Zurücklegen 🡆 Variation mit Wiederholung 🡆 VmW

Warum mit Reihenfolge?

Schüler wie Kugeln vorstellen,

Vorstellung, dass 2 Kugeln (= 2 Schüler) dieselbe Farbe (=dasselbe Geb-Datum haben)

Jeder Schüler entspricht einer Kugel = einer Ziehung

mit Reihenfolge: „Jeder Schüler „zieht“ einen Tag“

Warum „mit Zurücklegen“?

mit Zurücklegen: „da mehrere Schüler an einem Tag Geburtstag haben können“

Vorstellung, dass 2 Kugeln (= 2 Schüler) dieselbe Farbe (=dasselbe Geb-Datum haben)

🡆 Kugel 1 (Schüler K1) wird gezogen und zurückgelegt, da im 2 Zug auch die erste Kugel (= der erste Schüler) berücksichtigt werden muss 🡆 das Geb-Datum aus den folgenden Ziehungen muss mit dem Geb-Datum aus der 1. Ziehung verglichen werden

**also Variation mit Wiederholung** 🡆 VmW

theoretische Lösung, da Anzahl der Objekte/Elemente (= Schüleranzahl unbekannt)

**Berechnung über Gleichwahrscheinlichkeit**

**1.) Ermitteln der mögliche Ereignisse ( = Ergebnismenge |Ω| )**

**Variation mit Wiederholung** 🡆 VmW

n = 365 Anzahl Tage im Jahr

k = unbestimmt Anzahl Schüler

**Variation mit Wiederholung VmW**

**2.) Ermitteln der günstigen Ereignisse ( = Ereignismenge |E|)**

Die Ermittlung der Geburtstage erfolgt zu 365 verschiedenen Tagen im Jahr.

Daher muss über Komplementärereignis (Gegenwahrscheinlichkeit) P(A̅) = 365 - A berechnet werden

**Variation ohne Wiederholung Vow:**

**3. Ermitteln der Wahrscheinlichkeit P(A)**  (jedes Ereignis hat die gleiche Wahrscheinlichkeit)

Aufgabe 11

Aus 5 Buchstaben werden Wörter, größtenteils unsinnige, der Länge 3 gebildet.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein „zufällig“ gebildetes Wort nur zwei verschiedene Buchstaben besitzt?

**Hinweis:**

**Aufgabenstellung richtig lesen!**

**Bestimmung der richtigen Kombinatorik immer fallbezogen.**

**1.) Ermitteln der mögliche Fälle ( = Ergebnismenge |Ω| )**

**hier geht es um alle möglichen Kombinationen der Wörter, daher mit Reihenfolge, mit Wiederholung**

**mit Reihenfolge, mit Zurücklegen 🡆 Variation mit Wiederholung VmW = nk**

n = 5

k = 3

Ω = 53 = 125

Es gibt 125 Möglichkeiten (Variationen) aus 5 Buchstaben Wörter der Länge 3 zu erstellen

**2.) Ermitteln der günstigen Fälle (Elementarmenge E)**

Elementarmenge |E| zu Wörtern mit 3 verschiedenen Buchstaben (Alle 3 Buchstaben sind verschieden)

**hier geht es um die Kombination der k-Elemente (Elementarmenge = Ausprägungen aus Ω )**

**mit Reihenfolge, ohne Zurücklegen**

**Variation ohne Wiederholung VoW**

Es gibt 60 Worte mit 3 verschiedenen Buchstaben.

**3. Ermitteln der Wahrscheinlichkeit P(A)**  (jedes Ereignis hat die gleiche Wahrscheinlichkeit)

|E| = 60 60 Worte mit 3 verschiedenen Buchstaben

Worte mit 3 gleichen Buchstaben der Länge 3 = 5

(5 Worte a 3 Buchstaben = 5 Worte mit 2 gleichen Buchstaben 🡆 Jeder der 5 Buchstaben kann max. 2 x vorkommen 🡆 ergibt 5 Worte)

Die Wahrscheinlichkeit für Worte der Länge 3, die aus 5 Buchstaben gebildet werden und in denen jedes gebildete Wort nur zwei verschiedene Buchstaben besteht, liegt bei 52%, wenn Gleichwahrscheinlichkeit unterstellt wird.

**Aufgabe 12**

Ein Kartenspiel hat 32 Karten, der Skat besteht aus 2 Karten. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Buben im Skat liegen?

**Berechnung über Gleichwahrscheinlichkeit**

**1. Ermitteln der mögliche Fälle ( = Ergebnismenge |Ω| )**

**hier geht es um alle möglichen Kombinationen zu den 2 Skatkarten, daher ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen**

**ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen 🡆 Binomialkoeffizient**

**Kombination ohne Wiederholung 🡆 KoW**

n = 32, k = 2

**n über k bzw. k aus n** 🡆 32 über 2 oder **2 aus 32**

**2.) Ermitteln der günstigen Fälle (Elementarmenge E)**

**hier geht es um die Kombination der k-Elemente (Elementarmenge = Ausprägungen aus Ω )**

Es gibt 4 Buben, somit

ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen

**3. Ermitteln der Wahrscheinlichkeit P(A)**  (jedes Ereignis hat die gleiche Wahrscheinlichkeit)

**Aufgabe 13**

Wie viele verschiedene Wörter (auch unsinnige) der gleichen Länge wie das Wort **MISSISSIPPI** lassen sich durch Umordnen der Buchstaben bilden?

Anordnung der k-Elemente 🡆 Permutation mit Wiederholung VmW

**n = 11** 11 Buchstaben im Wort **MISSISSIPPI**

Ermitteln der Anzahl zu den k-Elementen

Bestimmen der Buchstabentypen

M 1 x

I 4 x

S 4 x

P 2 x

**∑ 11** Kontrollsumme = n?

**Aufgabe 14**

Auf wie viele Arten kann aus einem 20-köpfigen Verein ein 3-köpfiger Vorstand, **bestehend aus Vorsitzender, Schriftführerin und Kassiererin**, gebildet werden?

**1. Ermitteln der mögliche Fälle ( = Ergebnismenge |Ω| )**

Hier geht es um alle möglichen Kombinationen aus einen 20-köpfigen Verein einen ein 3-köpfigen Vorstand mit den Positionen Vorsitzender, Schriftführerin und Kassiererin zu bilden.

**mit Reihenfolge, ohne Zurücklegen**

**Variation ohne Wiederholung (Reihenfolge ist wichtig, da unterschiedliche Positionen im**

**Vorstand)**

n = 20

k = 3

Variation ohne Wiederholung VoW

Aus einen 20-köpfigen Verein kann auf 1140 Arten ein 3-köpfiger Vorstand gebildet werden.

**Aufgabe 15**

a) 100 Sportler nehmen an einem Wettbewerb teil. Es gibt **Gold, Silber und Bronze** zu gewinnen. Wie viele mögliche Ausgänge gibt es?

**Achtung: hier ist Reihenfolge: Gold (= 1. Platz), Silber (=2. Platz), Bronze (= 3. Platz) gefragt**

b) 100 Sportler nehmen an einem Wettbewerb teil. Die **drei ersten Plätze werden prämiert.** Wie viele mögliche Ausgänge gibt es einen Preis zu gewinnen?

**Achtung: Hier ist keine Reihenfolge gefragt!**

a)

**1. Ermitteln der mögliche Fälle ( = Ergebnismenge |Ω| )**

**mit Reihenfolge, ohne Zurücklegen**

n = 100

k = 3

Variation ohne Zurücklegen 🡆 VoW

b)

**1. Ermitteln der mögliche Fälle ( = Ergebnismenge |Ω| )**

**ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen**

n = 100

k = 3

Kombination ohne Zurücklegen 🡆 KoW

**Aufgabe 16 (Klausuraufgabe WS17/18)**

Von 25 Studenten studiert jeder wenigstens eines der Fächer Biologie, Geographie, Chemie. **Biologie** studieren insgesamt **14** Studenten, **Geographie 10** Studenten. **2 Studenten** haben **alle Fächer**. **6** Studenten haben **Biologie** und **Chemie** belegt, **5** **Geographie** und **Biologie** und **1 Geographie** und **Chemie**.

Wie viele Studenten studieren **Chemie**?

n = 25 Gesamtzahl der Studierenden

**Siebformel**

**A ⋃ B ⋃ C** = **A** + **B** + **C** – (**A** ⋂ **B** - **A** ⋂ **C** - **B** ⋂ **C**) + (**A** ⋂ **B** ⋂ **C** )

**A ⋃ B ⋃ C**  Vereinigungsmenge v |**A**| und |**B**| und |**C**| = **A + B + C** (**alle Objekte aus |A|, |B|, |C|** )

Elementarmengen

**A** = **Bio** 14

**B** = **Geo** 10

**C** = **Chemie** ?

Schnittmengen

**Bio** und **Geo A** ⋂ **B** = 5

**Bio** und **Chemie A** ⋂ **C** = 6

**Geo** und **Chemie B** ⋂ **C**  = 1

**Bio** und **Geo** und **Chemie A** ⋂ **B** ⋂ **C** = 2

Vereinigungs- Schnittmengen

menge

**A ⋃ B ⋃ C** = **A** + **B** + **C** – (**A** ⋂ **B** - **A** ⋂ **C** - **B** ⋂ **C**) + (**A** ⋂ **B** ⋂ **C** )

25 = 14 + 10 + **C** – 5 – 6 – 1 + 2 | -14, -10, +5, +6, +1, -2

C = 25 -14 – 10 + 5 + 6 +1 -2

**C = 11**

**Aufgabe 17**

Aus einem Karton mit 20 Kekspackungen, von denen 5 als 2.Wahl bezeichnet sein können, werden 3 Kekspackungen entnommen und geprüft (Stichprobe).

a)

Die Kekspackungen werden **gleichzeitig** entnommen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich in der Stichprobe:

**(1) genau eine beschädigte Packung**

**(2) höchstens eine beschädigte Packung**

**(3) mindestens eine beschädigte Packung**

a)

Die Kekspackungen werden **gleichzeitig** entnommen

🡆 **ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen (Wiederholung)**

Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich in der Stichprobe:

**(1) genau eine beschädigte Packung**

**Berechnung über Gleichwahrscheinlichkeit**

**1. Ermitteln der mögliche Fälle ( = Ergebnismenge |Ω| )**

hier geht es um alle möglichen Kombinationen zu 3 aus 20 Packungen bei gleichzeitiger Entnahme, daher ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen

**ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen 🡆 Binomialkoeffizient**

n = 20, k = 3

**n über k bzw. k aus n** 🡆 20 über 3 oder 3 aus 20

n = 20 20 Packungen gesamt

k = 3 3 entnommene Packungen

**ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen KoW**

**2.) Ermitteln der günstigen Fälle (Elementarmenge E)**

Elementarmenge |E| zu 1 beschädigten Packung aus 5 beschädigten Packungen

**hier geht es um die Kombination der k-Elemente**

**ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen 🡆 Binomialkoeffizient**

**Kombination ohne Wiederholung 🡆 KoW**

**(1) genau eine beschädigte Packung**

n = 5 5 fehlerhafte Packungen (2. Wahl) gesamt

k = 1 1 fehlerhafte Packung, deren Wahrscheinlichkeit berechnet wird

Bei der Berechnung der k-Elemente müssen die Ereignisse, die NICHT zu den fehlerhaften Packungen (Komplementärmenge, also Ereignismenge, die nicht im Ereignisraum enthalten sind) berücksichtigt werden (wäre der 2 Pfad im Baumdiagramm).

Beide Mengen sind nach Multiplikationsregel zu multiplizieren

n̅ = 20 -5 = 15 Komplementärmenge zur Gesamtmenge

k̅ = 3 -1 = 2 Komplementärmenge zu 1 entnommenen Packung

**3. Ermitteln der Wahrscheinlichkeit P(A)**  (jedes Ereignis hat die gleiche Wahrscheinlichkeit)

**|E| = 525** 525 mögliche Kombinationen zu beschädigten Packungen

**|Ω| = 1140**

**(2) höchstens eine beschädigte Packung**

**1. Ermitteln der mögliche Fälle ( = Ergebnismenge |Ω| )**

bereits in (1) erfolgt

**|Ω| = 1140**

**2.) Ermitteln der günstigen Fälle (Elementarmenge E)**

**ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen 🡆 Binomialkoeffizient**

**Kombination ohne Wiederholung 🡆 KoW**

**höchstens eine beschädigte Packung** (genau eine oder gar keine)

**n = 5** 5 fehlerhafte Packungen (2. Wahl) gesamt

**k1 = 1** 1 fehlerhafte Packung, deren Wahrscheinlichkeit berechnet werden  
 soll

**k2 = 0** 0 fehlerhafte Packung, deren Wahrscheinlichkeit berechnet werden   
 soll

**n̅** = 20 -5 = **15** Komplementärmenge zur Gesamtmenge

**k̅1** = 3 – 1 = **2** Komplementärmenge zu 1 entnommenen Packung

**k̅2** = 3 – 0 = **3** Komplementärmenge zu 0 entnommenen Packung

**3. Ermitteln der Wahrscheinlichkeit P(A)**  (jedes Ereignis hat die gleiche Wahrscheinlichkeit)

|**E| = 980** 980 mögliche Kombinationen zu beschädigten Packungen

**|Ω| = 1140**

**(3) mindestens eine beschädigte Packung**

***umständlich über 3 Ereignisse***

**1. Ermitteln der mögliche Fälle ( = Ergebnismenge |Ω| )**

bereits in (1) erfolgt

**|Ω| = 1140**

**2.) Ermitteln der günstigen Fälle (Elementarmenge E)**

ohne Reihenfolge ohne Zurücklegen 🡆 KoW

**mindestens eine beschädigte Packung** (keine oder mehr)

**ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen 🡆 Binomialkoeffizient**

**Kombination ohne Wiederholung 🡆 KoW**

**n = 5** 5 fehlerhafte Packungen (2. Wahl) gesamt

**k1 = 1** 1 fehlerhafte Packung, deren Wahrscheinlichkeit berechnet werden  
 soll

**k2 = 2** 2 fehlerhafte Packungen, deren Wahrscheinlichkeit berechnet werden   
 sollen

**k3 = 3** 3 fehlerhafte Packungen, deren Wahrscheinlichkeit berechnet werden   
 sollen

**n̅** = 20 -5 = **15** Komplementärmenge zur Gesamtmenge

**k̅1** = 3 – 1 = **2** Komplementärmenge zu 1 entnommenen Packung

**k̅2** = 3 – 2 = **1** Komplementärmenge zu 2 entnommenen Packungen

**k̅3**= 3 – 3= **0** Komplementärmenge zu 3 entnommenen Packungen

**3. Ermitteln der Wahrscheinlichkeit P(A)**  (jedes Ereignis hat die gleiche Wahrscheinlichkeit)

|E| = **685**

**Aufgabe 17**

Aus einem Karton mit 20 Kekspackungen, von denen 5 als 2.Wahl bezeichnet sein können, werden 3 Kekspackungen entnommen und geprüft (Stichprobe).

b) Die Kekspackungen werden **hintereinander** mit Zurücklegen entnommen.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich in der Stichprobe:

**(4) genau eine beschädigte Packung**

**(5) höchstens eine beschädigte Packung**

**(6) mindestens eine beschädigte Packung**

b)

Die Kekspackungen werden **hintereinander** mit Zurücklegen entnommen.

🡆 mit Reihenfolge, mit Zurücklegen (mit Wiederholung)

Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich in der Stichprobe:

**(4) genau eine beschädigte Packung**

**Berechnung über Gleichwahrscheinlichkeit**

**1. Ermitteln der mögliche Fälle ( = Ergebnismenge |Ω| )**

hier geht es um alle möglichen Kombinationen zu 3 aus 20 Packungen bei Entnahme hintereinander und mit Zurücklegen, daher mit Reihenfolge, mit Zurücklegen

**mit Reihenfolge, mit Zurücklegen 🡆 VmW** 🡆 **nk**

n = 20 20 Packungen gesamt

k = 3 3 entnommene Packungen

**2.) Ermitteln der günstigen Fälle (Elementarmenge E)**

mit Reihenfolge mit Zurücklegen 🡆 VmW 🡆 **nk**

wie bei Kombination ohne Wiederholung (ohne Reihenfolge, ohne Zurücklegen), jedoch mit nk und zusätzlich noch k = 3 als Faktor

|E| = 3 \* 51 \* 152 = 3375

**3. Ermitteln der Wahrscheinlichkeit P(A)**  (jedes Ereignis hat die gleiche Wahrscheinlichkeit)

Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich in der Stichprobe:

**(5) höchstens eine beschädigte Packung**

höchstens eine beschädigte Packung = eine (=1) oder keine (=0)

**1. Ermitteln der mögliche Fälle ( = Ergebnismenge |Ω| )**

Ω = 8000 (aus erster Berechnung)

**2.) Ermitteln der günstigen Fälle (Elementarmenge E)**

mit Reihenfolge mit Zurücklegen 🡆 VmW 🡆 **nk**

E = 3 \* 51 \* 152 + 50 \* 153  = 3375 + 1 \* 3375 = 6750

**3. Ermitteln der Wahrscheinlichkeit**

Mit welcher Wahrscheinlichkeit befindet sich in der Stichprobe:

**(5) mind. eine beschädigte Packung**

**1. Ermitteln der mögliche Fälle ( = Ergebnismenge |Ω| )**

Ω = 8000 (aus erster Berechnung)

**3. Ermitteln der Wahrscheinlichkeit**

über Gegenwahrscheinlichkeit

50 \* 153 = 3375 aus vorausgehender Berechnung