**Zusammenfassung**

**der Konferenz vom 15.12.2023**

**und Präsenz am 12.01.2024**

# Zusammenfassung der Videos zur Präsenz vom 12.01.2024

***Video Modul\_7\_ÜbungsSeminar\_online\_20240112\_part1.mp4***

## Aufgabe 1

**Aus jeweils 7 Mitgliedern** der Parteien A, B und C soll **ein 6-köpfiger Ausschuss** gebildet werden. Wie viele Ausschusszusammensetzungen gibt es?

a) insgesamt?

b) wenn mindestens ein A-Mitglied dabei sein soll?

c) wenn mindestens ein A-Mitglied und ein B-Mitglied dabei sein sollen?

d) wenn aus jeder der drei Parteien mindestens ein Mitglied dabei sein soll?

Hinweise:

Bei c) und d) kann die Siebformel zum Einsatz kommen.

Die Aufgaben sind in der vorgegebenen Reihenfolge (a, b. c, d) zu lösen, da die Lösungen aufeinander aufbauen

𝛀 **Gesamtmenge der Ausschusszusammensetzungen**

**Welches Grundmuster (welche Grundform) der Kombinatorik ist hier anzuwenden?**

*Ist die Reihenfolge zur Auswahl der Mietglieder wichtig?*

*NEIN 🡆 ohne Reihenfolge*

*Sind die Ausschussmietglieder mehrfach zu berücksichtigen, d. h. ist ein Mitglied in mehreren Ausschüssen zu berücksichtigen?*

*Nein, jedes Mitglied kommt nur einmal pro Ausschuss vor 🡆 ohne Zurücklegen*

**Grundmuster (Grundform) der Kombinatorik**

* **ohne Reihenfolge und ohne Zurücklegen 🡆 Binomialkoeffizient**

***Erläuterung des Binomialkoeffizienten***

**Binomialkoeffizient**, um zu ermitteln, **wie viele Möglichkeiten es gibt, k Objekte / k Elemente aus einer Menge n zu ziehen**

Bsp.

6 aus 49

Wie viele Tipp-Möglichkeiten gibt es?

*Ziehung der Zahlen ohne Reihenfolge 🡆 die Reihenfolge der Ziehung der Zahlen ist egal*

*ohne Zurücklegen 🡆 es wird keine Zahl zurückgelegt, jede Zahl wird genau einmal gezogen*

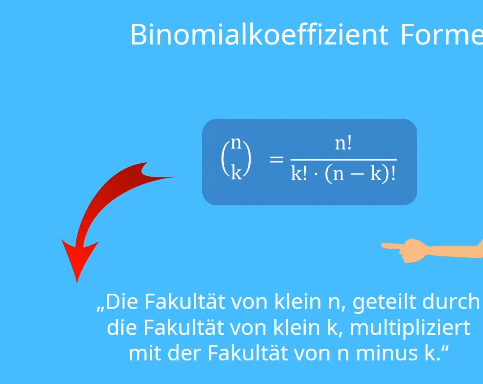
**Grundmuster (welche Grundform) der Kombinatorik 🡆 Binomialkoeffizient**

**Binomialkoeffizient** dient der **Bestimmung der k-Objekte / k Elemente aus einer Menge n**

**k aus n bzw. n über k**

|𝛀| =

**Binomialkoeffizient ist die Fakultät aus der Menge n geteilt durch Fakultät zur Menge der (eingeschränkten) Objekte (Elemente) k multipliziert mit der Fakultät (n-k)!**



z. B. 4 über 3 🡆 🡆 **Funktion nCr im Casio**

**Kombination**:

**Binomialkoeffizient**

**im Casio**

**Eingabe mit Taste „nCr“** :

*mit n, r∈Z/ 0 ≤ r ≤ n < 1\*1010*

 🡆 **„1: Comp“** **nur bei der ersten Verwendung!**

**Eingabe Menge n zu allen Möglichkeiten** 🡆 **** 🡆  🡆 **Eingabe Menge k zu den bedingten (eingeschränkten) Möglichkeiten**

Bsp.:

Wie viele Möglichkeiten gibt es, aus 4 verschiedenen Pflanzen (alle Möglichkeiten) 3 Pflanzen (bedingte (eingeschränkte) Möglichkeiten auszuwählen?

🡆 Binomialkoeffizient 🡆 **4 über 3 oder 3 aus 4**

**im Casio**

**4** 🡆 **** 🡆  🡆 **3** = 4

**4 über 3 bzw. 3 aus 4**  🡆 =

*Hinweis: Ermittlung d. Binomialkoeffizienten ohne Rechner über das Pascalsche Dreieck*

**49 über 6 bzw. 6 aus 49 🡆 = 13.983.816**

**Fakultät**:

**im Casio**

**Eingabe mit Taste ** (Funktion n!)

Taste  🡆 „**1: Comp**“ **nur bei der ersten Verwendung!**

**Eingabe Zahl zur Fakultät** 🡆 **** 🡆 

Bsp.

Fakultät 5! 🡆

**5** 🡆 Taste „**Shift**“ 🡆 **** 🡆  = 120 = 5 \* 4 \* 3 \* 2

**Formel zur Fakultät: n! = n \* (n-1) …\* 1 ( 0 != 1 und 1!= 1)**

**Permutation (Variation)**:

**im Casio**

**Eingabe mit Taste**   (Funktion nPr)

*mit n, r∈ Z/ 0 ≤ r ≤ n < 1 \* 1010*

**Eingabe Menge n zu allen Möglichkeiten** 🡆  🡆  🡆 **Eingabe Menge k zu den bedingten (eingeschränkten) Möglichkeiten**

Bsp:

Wie viele Möglichkeiten aus 10 verschiedenen Pflanzen 4 nebeneinander in ein Beet zu pflanzen?

Eingabe:

**10** 🡆  🡆 “ 🡆 **4** = 5040

**Zufallszahlen**

**im Casio**

**dreistellige Zufallszahl zwischen 0 und 1 🡆 Eingabe mit Taste „Ran#“**:

* 🡆 Taste „ **,**“

**ganzzahlige Zufallszahl zwischen A und B: Eingabe mit Taste „RanInt(A,B)“** :

Taste  🡆 **Eingabe** **erste Zahl für Beginn des Intervalls** 🡆 Taste„ **,**“ 🡆  🡆 **Eingabe zweite Zahl für Ende des Intervalls**

**ab hier weiter mit dem Video**

Minute 14

**Aus jeweils 7 Mitgliedern der Parteien A, B und C** soll **ein 6-köpfiger Ausschuss** gebildet werden. **Der EINE Ausschuss besteht aus 6 Mitgliedern, der sich aus den 7 Mitgliedern der 3 Parteien zusammensetzt.**

Wie viele Ausschusszusammensetzungen gibt es?

a) insgesamt?

𝛀 **Gesamtmenge der Ausschusszusammensetzungen**

*Wie viele Parteimitglieder gibt es (bzw. aus wie vielen wird ausgewählt)?*

* **3 Parteien \* je 7 Mitglieder** = 21 Mitglieder insgesamt

*Wie groß wird der Ausschuss?*

* 6 Mitglieder

Binomialkoeffizient = „21 über 6“ bzw. „6 aus 21“

|Ω| bedeutet Mächtigkeit von Ω

**|𝛀| = = 𝟓𝟒𝟐64 Klammern um B-Koeffizienten nicht vergessen!**

a)

*Antwort:*

*Insgesamt gibt es 54.264 Möglichkeiten zu den Ausschusszusammensetzungen.*

**Im Casio**

**Binomialkoeffizient über Funktion nCr (Taste** **)**

**im Display steht: 21C6**

**21** 🡆  🡆  🡆 **6**

**Aus jeweils 7 Mitgliedern der Parteien A, B und C** soll **ein 6-köpfiger Ausschuss** gebildet werden. = 6 aus 3 \* 7 = 21 Mitgliedern gesamt

**Der EINE Ausschuss besteht aus 6 Mitgliedern, der sich aus den 7 Mitgliedern der 3 Parteien zusammensetzt.**

Wie viele Ausschusszusammensetzungen gibt es?

b) wenn **mindestens ein A-Mitglied** dabei sein soll?

Vorüberlegung:

„**mindestens ein…**“ = **Gesamtmenge – „kein“** (ähnlich mit Gegenwahrscheinlichkeit)

bzw.

Gesamtmenge – „nicht-A (|A|)“ oder

Gesamtmenge – „nicht-A (|B|)“ oder

Gesamtmenge – „nicht-A (|C|)“

**Mengen definieren**

|A| bedeutet Mächtigkeit von A

|A| = |B| = |C| A und B und C sind gleichmächtig

**Denkweise „verkehrt“!**

**„mindestens ein…“ = Gesamtmenge – „kein“** (bzw. „Menge OHNE …“)

**Menge der Ausschusszusammensetzungen ohne A-Mitglieder (Schnittmenge von A und B)**

**|𝑨| =** (**14 über 6**) *Warum ohne A-Mitglieder?*

*Die Menge |A| wird von der   
 Ereignismenge subtrahiert.  
 Das bedeutet, es werden die Mitglieder  
 aus B und C subtrahiert und die A-Mitglieder  
 verbleiben im Ereignisraum*

Hinweis:

Nenner = 6 bleibt unverändert

Gesamtmenge (Menge aller Möglichkeiten) im Zähler wird um die Anzahl der Mitglieder aus einer Partei (hier Mitglieder der Partei A) reduziert (21 – 7 = 14) 🡆 🡆 „14 über 6“ (nicht 14/6!)

**|A| = |B| = |C| =**

**Gesamtanzahl Ω =**

**Anzahl ohne A-Mitglieder |𝑨| =** nur Mitglieder aus |B| und |C|

**Gesamtanzahl – Anzahl ohne A-Mitglieder** (nur Mitglieder aus |B| und |C|)

**|Ω| - |A| = Klammern um B-Koeffizienten nicht   
 vergessen!**

In der Siebformel muss die Menge von |A| immer von Gesamtereignismenge Ω subtrahiert werden

**Im Casio**

**Binomialkoeffizient über Funktion nCr (Taste** **)**

**WICHTIG: Binomialkoeffizienten und Binomialkoeffizienten subtrahieren**

**21** 🡆  🡆  🡆 **6** 🡆 **-** **14** 🡆  🡆  🡆 **6**

**im Display steht: 21C6 – 14C6**

*Antwort:*

*Es bestehen 51.261 Möglichkeiten zu den Ausschusszusammensetzungen, wenn in jedem Ausschuss mindestens ein A-Mitglied dabei sein soll.*

**Aus jeweils 7 Mitgliedern der Parteien A, B und C** soll **ein 6-köpfiger Ausschuss** gebildet werden. Wie viele Ausschusszusammensetzungen gibt es?

**Der EINE Ausschuss besteht aus 6 Mitgliedern, der sich aus den 7 Mitgliedern der 3 Parteien zusammensetzt.**

c) wenn **mindestens ein A-Mitglied und ein B-Mitglied** dabei sein sollen?

„**mindestens ein…**“ = **Gesamtmenge – „kein“** (ähnlich mit Gegenwahrscheinlichkeit)

bzw.

Gesamtmenge – „nicht A (|A|)“ oder

Gesamtmenge – „nicht B (|B|)“ oder

Gesamtmenge – „nicht C (|C|)“

**Mengen definieren**

**Denkweise „verkehrt“!**

**„mindestens ein…“ = Gesamtmenge – „kein“** (bzw. „Menge OHNE …“)

**Menge der Ausschusszusammensetzungen ohne A-Mitglieder** (nur Mitglieder aus |B| und |C|)

**|𝑨| =** Mitglieder aus |B| und |C| werden von Ω subtrahiert

Hinweis:

Nenner = 6 bleibt unverändert

Gesamtmenge (Menge aller Möglichkeiten) im Zähler wird um die Anzahl der Mitglieder aus einer Partei (hier Mitglieder der Partei A) reduziert (21 – 7 = 14) 🡆 🡆 „14 über 6“

**Menge der Ausschusszusammensetzungen ohne B-Mitglieder**  (nur Mitglieder aus |A| und |C|)

**|B| =** Mitglieder aus |A| und |C|) werden von Ω subtrahiert

**|A| = |B| =**  A und B sind gleichmächtig

„**und**“ = „**Vereinigungsmenge**“

Gesamtanzahl |𝜴| – Vereinigungsmenge von Anzahl der Zusammensetzungen

**ohne A-Mitglieder |A| und ohne B-Mitglieder |B|**

**|𝜴| − |𝑨 ∪ 𝑩|**

Anwendung der **Siebformel**

(auch Einschluss-Ausschluss-Verfahren bzw. Prinzip der Inklusion und Exklusion genannt)

**|𝜴| − |𝑨 ∪ 𝑩|** = **|𝜴| − ( |𝑨| + |𝑩| - |𝑨 ∩ 𝑩| )**

In der Siebformel muss die Menge von |A| und |B| und Schnittmenge (Mitglieder aus |C|) von Gesamtereignismenge Ω subtrahiert werden

*Schnittmenge (Mitglieder aus |C|) von* **|A ⋂ B| =**  im Zähler steht die Anzahl der Mitglieder pro Partei = 7

Schnittmenge ist die **Objekte, die in A UND B enthalten ist** (Mitglieder aus |C|)

**A ⋂ B := {x | ( x ∈ A ∧ x ∈ B) }**

*AND B AND C = x ∈ A ∧ x ∈ B*

**≔** *bedeutet „ergibt sich aus“ (für Definition linksseitig) A ⋂ B ≔ A ⋂ C linke Definition ergibt sich aus rechter Definition*

**Siebformel** (Einschluss-Ausschluss-Verfahren) **für 2 disjunkte Mengen**

**|𝜴| − |𝑨 ∪ 𝑩|** = **|𝜴| − ( |𝑨| + |𝑩| - |𝑨 ∩ 𝑩| )**

Gesamtmenge – ( Menge ohne A-Mitglieder + Menge ohne B-Mitglieder - *Schnittmenge* von |A ⋂ B|

**|𝜴| − |𝑨 ∪ 𝑩|** =

=

**|𝜴| − |𝑨 ∪ 𝑩|  *=***

Vz-Wechsel, wg. Klammerauflösung

**Klammern um B-Koeffizienten nicht bergessen!**

**Im Casio (Klammern sind bereits aufgelöst)**

**Binomialkoeffizient über Funktion nCr (Taste** **)**

**21** 🡆  🡆  🡆 **6** 🡆 **-** **2 \* 14** 🡆  🡆  🡆 **6 + 7** 🡆  🡆  🡆 **6**

**im Display steht: 21C6 – 2 x 14C6 + 7C6**

*Antwort:*

*Es bestehen 48.265 Möglichkeiten zu den Ausschusszusammensetzungen, wenn in jedem Ausschuss mindestens ein A-Mitglied und ein B-Mitglied dabei sein sollen.*

**Aus je 7 Mitgliedern der Parteien A, B und C** soll **ein 6-köpfiger Ausschuss** gebildet werden. Wie viele Ausschusszusammensetzungen gibt es?

d) wenn **aus jeder der drei Parteien mindestens ein Mitglied** dabei sein soll

„**mindestens ein…**“ = **Gesamtmenge – „kein“** (ähnlich mit Gegenwahrscheinlichkeit)

**Denkweise „verkehrt“!**

**„mindestens ein…“ = Gesamtmenge – „kein“ (bzw. „Menge OHNE …“)**

**Menge der Ausschusszusammensetzungen ohne A-Mitglieder**

**|𝑨| =** nur Mitglieder aus |B| und |C| werden von Ω subtrahiert

**Menge der Ausschusszusammensetzungen ohne B-Mitglieder**

**|B| =** nur Mitglieder aus |A| und |C| werden von Ω subtrahiert

**Menge der Ausschusszusammensetzungen ohne C-Mitglieder**

**|C| =** nur Mitglieder aus |A| und |B| werden von Ω subtrahiert

„**und**“ = „**Vereinigungsmenge**“

Gesamtanzahl |𝜴| – Vereinigungsmenge von Anzahl der Zusammensetzungen

**ohne A-Mitglieder |A| und ohne B-Mitglieder |B| und ohne C-Mitglieder |C|**

**|𝜴| − |𝑨 ∪ 𝑩 ∪ C|**

**Anwendung der Siebformel für 3 Mengen**

(auch Einschluss-Ausschluss-Verfahren bzw. Prinzip der Inklusion und Exklusion genannt)

**|𝜴| − |𝑨 ∪ 𝑩 ∪ C|** = **|𝜴| - ( |𝑨| + |𝑩| + |C| - |𝑨 ∩ 𝑩| - |A ∩ C| - |B ∩ C| + |A ∩ B ∩ C| )**

Gesamtmenge – (Menge ohne A-Mitglieder + Menge ohne B-Mitglieder + Menge ohne C-Mitglieder) – *Schnittmenge* aus |A und B| - *Schnittmenge* aus |A und C| - *Schnittmenge* aus |B und C| + *Schnittmenge* aus |A und B und C|

*Schnittmenge von* **|A ⋂ B| = |A ⋂ C| = |B ⋂ C| =**

**Siebformel** (Einschluss-Ausschluss-Verfahren)

**|𝜴| − |𝑨 ∪ 𝑩** **∪ C|** =

=

**|𝜴| − |𝑨 ∪ 𝑩** **∪ C|** =

Vz-Wechsel, wg. Klammerauflösung

**Im Casio (Klammern sind bereits aufgelöst)**

**Binomialkoeffizient über Funktion nCr (Taste** **)**

**21** 🡆  🡆  🡆 **6** 🡆 **-** **3 \* 14** 🡆  🡆  🡆 **6 + 3 \* 7** 🡆  🡆  🡆 **6**

**im Display steht: 21C6 – 2 x 14C6 + 3 x 7C6**

*Antwort:*

*Es bestehen 45.276 Möglichkeiten zu den Ausschusszusammensetzungen, wenn in jedem Ausschuss mindestens ein Mitglied aus jeder Partei dabei sein sollen.*

**weiter mit dem Video**

Minute

## Aufgabe 2

Gegeben sei das Wort **ELEVEN**.

a) Wie viele „Worte“ kann man durch Buchstabenvertauschungen erzeugen?

b) Wie viele dieser „Worte“ enthalten die drei E's direkt hintereinander?

c) Wie viele dieser „Worte“ beginnen mit E und enden mit N?

**Welches Grundmuster (welche Grundform) der Kombinatorik ist hier anzuwenden?**

**Permutation mit Wiederholung Pmw**

**🡆 Anordnung der k-Elemente (Objekte)**

**𝑷𝒎𝑾 =**

Was steht im Zähler?

* Anzahl aller Buchstaben bzw. Anzahl aller Plätze
* **Das Wort „ELEVEN“ besteht aus 6 Buchstaben = Gesamtanzahl der Buchstabenvertauschungen**

Das Wort **ELEVEN** **enthält 6 Buchstaben**.

**🡆 Gesamtmenge (im Zähler) = 6**

Was steht im Nenner ?

* Anzahl der Permutationen (Variationsmöglichkeiten) der jeweiligen Buchstaben

= Buchstabentypen

Das Wort **ELEVEN** enthält **4 Buchstabentypen (= 4 Objekte / Elemente k):**

3 \* E 🡆 3!

1 \* L 🡆 1!

1 \* V 🡆 1!

1 \* N 🡆 1!

**∑ 6** Hinweis:   
 Die Summe der Anzahl der Buchstabentypen   
 (der Fakultäten) = Anzahl der Buchstaben (hier: 6)

**Nur ein Buchstabentyp mit Anzahl > 1 (Fakultät > 1) 🡆 hier: 3 \* E 🡆 3!**

**🡆 Anzahl der Permutationen (Variationsmöglichkeiten)** **im Nenner 3!1!1!1! 🡆 3!   
(Fakultät 1!) wird nicht geschrieben)**

**Somit folgende Permutation**

**P𝒎𝑾 = = 120**

**Im Casio**

**Permutation über Funktion nPr (Taste** **)**

6 🡆 🡆  🡆 3 Hinweis:

Bei nur einer verschiedenen Fakultät >1 im Nenner   
 (nur einem Buchstabentypen mit Anzahl > 1 )   
 wird Permutation direkt mit 🡆  aufgerufen

**im Display steht: 6P3**

*Antwort:*

*Durch Buchstabenvertauschungen können 120 Variationen (120 „Worte“) erzeugt werden.*

2. Beispiel:

**Mit 2 Buchstabentypen, die mehr als einmal vorkommen (also Fakultät > 1)   
🡆 hier: 3 \* A und 2 \* LL**

Gegeben sei das Wort **RAFAELLA**

a) Wie viele „Worte“ kann man durch Buchstabenvertauschungen erzeugen?

Das Wort **RAFAELLA** enthält 8 Buchstaben.

**🡆 Gesamtmenge (im Zähler) = 8**

Das Wort **RAFAELLA** enthält **4 Buchstabentypen (= 4 Objekte / Elemente k):**

1 \* R 🡆 1!

3 \* A 🡆 3!

1 \* F 🡆 1!

1 \* E 🡆 1!

2 \* L 🡆 2!

**∑ 8** Hinweis:   
 Die Summe der Anzahl der Buchstabentypen   
 (der Fakultäten) = Anzahl der Buchstaben (hier: 8)

**🡆 Anzahl der Permutationen (Variationsmöglichkeiten) im Nenner 1!3!1!1!2! 🡆 3!2!   
(Fakultät 1! wird nicht geschrieben)**

**Somit folgende Permutation**

𝑷𝒎𝑾 =

**Bei mehr als 2 Fakultäten im Nenner erfolgt die Berechnung der Permutation über die Fakultät**

Das Rechnen über Fakultät (statt über Permutation) ist nur bei mehr als einem Buchstabentypen, der häufiger als einmal vorkommt (hier 3 \* A = 3! und 2 \* L = 2!,) erforderlich.

**Im Casio**

**Fakultät über Funktion n! (Taste )**

**8 🡆 🡆  🡆  🡆 ( 🡆3 🡆  🡆  🡆 2 🡆  🡆 **

**Hinweis: Im Term zum Nenner muss in Klammern gesetzt werden!**

**im Display steht: 8!  (3! x 2!**

*Antwort:*

*Durch Buchstabenvertauschungen können insgesamt 3.360 Variationen (3.360 „Worte“) erzeugt werden.*

Gegeben sei das Wort **ELEVEN**.

b) Wie viele dieser Worte enthalten die drei E's direkt hintereinander?  
 Gemeint ist die Anzahl der Variationen, die 3 E’s direkt hintereinander haben können  
 z. B. EEELVN, LEEEVN usw.

**Welches Grundmuster (welche Grundform) der Kombinatorik ist hier anzuwenden?**

**Welcher Spezialfall?**

**Permutation mit Wiederholung (PmW)**

**🡆 Anordnung der k-Elemente**

**𝑷𝒎𝑾 =**

**Achtung: Sonderfall**

**Der Buchstabe „E“ soll in den Variationen hintereinander geschrieben werden**

**🡆 E’s dürfen somit nicht getrennt werden 🡆 somit werden die 3 E's als 1 Zeichen aufgefasst**

Was steht im Zähler?

* Anzahl aller Buchstaben bzw. Anzahl aller Plätze
* **In diesem Sonderfall wird für die Ermittlung der Buchstabenanzahl der Buchstabe „E“ als ein Zeichen behandelt   
  🡆 Somit verbleibt der Ausschnitt „ELVN“  
  Der Wortausschnitt „ELVN“ besteht aus 4 Buchstaben = Gesamtanzahl der Buchstabenvertauschungen**

**Wort-Ausschnitt „ELVN“** **enthält 4 Buchstaben**.

**🡆 Gesamtmenge (im Zähler) = 4**

Was steht im Nenner ?

* Anzahl der Permutationen (Variationsmöglichkeiten) der jeweiligen Buchstaben

= Buchstabentypen

**Der Buchstabe „E“ soll in den Variationen hintereinander geschrieben werden**

**🡆 E’s dürfen somit nicht getrennt werden 🡆 somit werden die 3 E's als 1 Zeichen aufgefasst**

**„E“ wird als ein Zeichen behandelt**

Daraus ergeben sich **4 Buchstabentypen (= 4 Objekte / Elemente k)**:

EEE 🡆 1 \* E 🡆 1!

L 🡆 1 \* L 🡆 1!

V 🡆 1 \* V 🡆 1!

N 🡆 1 \* N 🡆 1!

**∑ 4** Hinweis:   
 Die Summe der Anzahl der Buchstabentypen   
 (der Fakultäten) = Anzahl der Buchstaben (hier: 4)

Es gibt genau 4 Buchstabentypen 🡆 Fakultät n! = 4

**🡆 Anzahl der Permutationen (Variationsmöglichkeiten) im Nenner 1!1!1!1! 🡆 keine Fakultät im Nenner (Fakultät 1! wird nicht geschrieben)**

**Welcher Sonderfall?**

**Jedes Objekt / Element ( = Wort mit 3 E’s hintereinander) kommt nur einmal vor.**

**Sonderfall:**

**Permutation mit Wiederholung (PmW) ist in diesem Sonderfall auch eine Variation ohne Wiederholung (VoW)**,

da die Buchstabenanzahl zum Ausschnitt **„ELVN“** im Zähler = der Anzahl Objekte k (Buchstabentypen) im Nenner (4 = 4)

**wenn 𝒌 = 𝒏: |Ω| = 𝑽𝒐𝑾 = 𝒏!**

ausführliche Schreibweise zur Permutation mit Wiederholung (PmW) für diesen Sonderfall

**Im Casio**

**Fakultät über Funktion n! (Taste )**

**4 🡆 🡆 **

**im Display steht: 4!**

*Antwort:*

*Durch Buchstabenvertauschungen können 24 Variationen (24 „Worte“), in denen der Buchstabe „E“ dreimal hintereinander vorkommt, erzeugt werden.*

Gegeben sei das Wort **ELEVEN**.

c) Wie viele dieser Worte beginnen mit E und enden mit N?

**Welches Grundmuster (welche Grundform) der Kombinatorik ist hier anzuwenden?**

**Permutation mit Wiederholung Pmw**

**🡆 Anordnung der k-Elemente**

**𝑷𝒎𝑾 =**

Die Buchstaben „E“ und „N“ am Beginn bzw. Ende des Wortes **(E)LEVE(N)** stehen bereits fest und werden nicht berücksichtigt.

Es verbleibt der Wort-Ausschnitt **LEVE**

L, E, V, E sind in unterschiedliche Reihenfolgen zu bringen.

Was steht im Zähler?

* Anzahl aller Buchstaben bzw. Anzahl aller Plätze aus dem Ausschnitt **LEVE**
* **Der Wort-Ausschnitt „LEVE“ besteht aus 4 Buchstaben = Gesamtanzahl der Buchstabenvertauschungen**

**Der Wort-Ausschnitt** **„LEVE“** **enthält 4 Buchstaben**.

**🡆 Gesamtmenge (im Zähler) = 4**

Was steht im Nenner ?

* Anzahl der Permutationen (Variationsmöglichkeiten) der jeweiligen Buchstaben

= Buchstabentypen

Der Wort-Ausschnitt „**LEVE“** enthält **3 Buchstabentypen (= 3 Objekte / Elemente k):**

1 \* L 🡆 1!

2 \* E 🡆 2!

1 \* V 🡆 1!

**∑ 4** Hinweis:   
 Die Summe der Anzahl der Buchstabentypen   
 (der Fakultäten) = Anzahl der Buchstaben (hier: 4)

**Nur ein Buchstabentyp mit Anzahl > 1 (also Fakultät > 1) 🡆 hier: 2 \* E 🡆 2!**

**🡆 Anzahl der Permutationen (Variationsmöglichkeiten)** **im Nenner 1!2!1! 🡆 2!   
(Fakultät 1!) wird nicht geschrieben)**

**Somit folgende Permutation**

**P𝒎𝑾 = = 12**

**Im Casio**

4 🡆 🡆  🡆 2 Hinweis:

Bei nur einer verschiedenen Fakultät >1 im Nenner   
 (nur einem Buchstabentypen mit Anzahl > 1 )   
 wird Permutation direkt mit 🡆  aufgerufen

*Antwort:*

*Durch Buchstabenvertauschungen können 12 Variationen (12 „Worte“), die mit dem Buchstaben „E“ beginnen und mit dem Buchstaben „N“ enden, erzeugt erden.*

## Aufgabe 3

**bedingte Wahrscheinlichkeit**

In einer Großbank kommen 80% der männlichen Kreditkunden ihren Kreditverpflichtungen pünktlich nach, 15% schleppend nach, und bei 5% muss die Bank den Kredit abschreiben.

Bei den weiblichen Kreditkunden sind die entsprechenden Zahlen 85%, 10% und 5%.

Von den Kreditkunden der Bank sind 70% männlich.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus dem Kreis aller Kreditkunden ausgewählte Person ihren Kreditverpflichtungen pünktlich nachkommt?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus dem Kreis aller Kreditkunden ausgewählte Person weiblich ist, falls die Person ihren Kreditverpflichtungen nur schleppend nachkommt?

**Um welche Wahrscheinlichkeit geht es hier?**

**bedingte Wahrscheinlichkeit**

* Eintritt eines bestimmten Ereignisses B ist die Bedingung (Voraussetzung) für die Wahrscheinlichkeit eines anderen Ereignisses A
* Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Ereignisses A unter der Bedingung (Voraussetzung), dass das Ereignis B eingetreten ist?

Die **bedingte Wahrscheinlichkeit P(A|B)**

des Ereignisses **A "unter der Bedingung (Voraussetzung) B"**

**ist der Quotient aus der absoluten Häufigkeit HAB von AB**   
(das gleichzeitige Eintreten von A und B) **und der absoluten Häufigkeit von B** (HB) 🡆 (empirisches Gesetz der großen Zahlen, S. 12)

⋂ ist Symbol für Schnittmenge

**Definitionen:**

**Geschlecht (G) der Kunden:**

* M = Mann
* F = Frau

**Zahlungsverhalten (Zv) der Kunden**

* p = pünktlich
* s = schleppend
* n = nie

**gegeben sind:**

P(p|M) = 0,80 bedingte Wahrscheinlichkeit(pünktlich|Mann) = 80% = 0,80

P(s|M) = 0,15 bedingte Wahrscheinlichkeit(schleppend|Mann) = 15% = 0,15

P(n|M) = 0,05 bedingte Wahrscheinlichkeit(nie|Mann) = 5% = 0,05

P(p|F) = 0,85 bedingte Wahrscheinlichkeit(pünktlich|Frau) = 85% = 0,85

P(s|F) = 0,10 bedingte Wahrscheinlichkeit(schleppend|Frau) = 10% = 0,10

P(n|F) = 0,05 bedingte Wahrscheinlichkeit(nie|Frau) = 5% = 0,05

P(M) = 0,70 Anteil der männlichen Kunden = 70% = 0,70

P(F) = 1 - 0,70=0,30 Anteil der weiblichen Kunden = 30% = 0,30

**bedingte Wahrscheinlichkeit**

**Bedingung für die Wahrscheinlichkeiten zu den Zahlungsverhalten Zv ist das Geschlecht G**.

Die **Wahrscheinlichkeiten zum Zahlungsverhalten Zv (Ereignis A) sind vom Geschlecht G (Ereignis B) abhängig P(A|B) 🡆 P(Zv|G)**

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus dem Kreis aller Kreditkunden ausgewählte Person ihren Kreditverpflichtungen pünktlich nachkommt?

gefragt ist P(p) die Wahrscheinlichkeit zum Zahlungsverhalten Zv „pünktlich“ P(p)  
 unabhängig vom Geschlecht

**Welche Formel?**

* **Satz der totalen Wahrscheinlichkeit**
* ist ein Hilfsmittel, um mittels bekannter Wahrscheinlichkeiten weitere Wahrscheinlichkeiten zu ermitteln.
* bedingte Wahrscheinlichkeit A|B \* Wahrscheinlichkeit(B)
* **Warum „Satz der totalen Wahrscheinlichkeit“?**
  + **Es wird eine unbedingte Wahrscheinlichkeit P(A)   
    unter EINER Voraussetzung**(nach der Wahrscheinlichkeit des Eintritts eines Ereignisses P(B) )   
    ermittelt. **P(A) = ∑P(A|Bi) \* P(Bi)**
  + **Ereignis B ist immer das erste Ereignis im Graph und die Bedingung (Voraussetzung)**  
    (Der **Graph wird von rechts mach links gelesen** (d. h. **es wird mit dem letzten Ereignis ( P(A) )**, das bei der bedingten Wahrscheinlichkeit **nach dem ersten Ereignis** **(P (B)** eintritt, **angefangen zu lesen**)
  + **Die Wahrscheinlichkeit P(B) ist immer das erste Ereignis im Graphund die Bedingung.**
  + **P(A) ist die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit und immer das letzte Ereignis**
  + **WICHTIG:   
    Es müssen die Produkte aus beiden Pfaden**(Eintritt des Ereignisses P(Bi) und Eintritt des Ereignisses P( B̅i)) **berücksichtigt und addiert werden**

**Satz der totalen Wahrscheinlichkeit**

Für zwei Ereignisse A und B gilt:



Wahrscheinlichkeit(A) = bedingte Wahrscheinlichkeit A|B \* Wahrscheinlichkeit(B) + bedingte Wahrscheinlichkeit A| Komplement B \* Wahrscheinlichkeit(Komplement B)

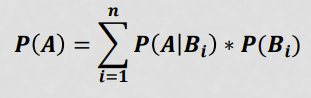
A ⋂ B Schnittmenge aus A und B

A ⋂ B̅ Komplement B: A ist nicht in B enthalten, B ist Teilmenge von A (A ohne B)  
 B „ergänzt“ A, jedoch Menge aus A nicht in Menge B

A|B bedingte Wahrscheinlichkeit: Wenn Ereignis B eintritt 🡆 tritt Ereignis A ein

Für endlich viele Ereignisse Bi

Bi sei {B1,…,Bn} eine Menge von paarweise disjunkten (einander ausschließenden) Ereignissen, dann gilt:



**Wahrscheinlichkeit (A) = SUMME( bedingte Wahrscheinlichkeit(A|B) \* Wahrscheinlichkeit(B) )**

disjunkt: Teilmengen A und B sind disjunkt (einander ausschließend, d. h. unvereinbar), wenn A \ B = Ø

B ist Teilmenge von A (in A enthalten), aber A ist in B nicht enthalten

**zur Lösung ist das Baumdiagramm (W-Graph, Wahrscheinlichkeitsgraph) hilfreich**

**Baumdiagramm (W-Graph, Wahrscheinlichkeitsgraph)**

* ist gerichteter Graph mit Baumstruktur (Baumdiagramm)
* die Ausgänge werden als Linien gezeichnet und dazu die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten notiert.
* Die Linien entsprechen disjunkten (einander ausschließenden) Ereignissen.
* Die Knoten am Ende jeder Linie und die Farben kennzeichnen die einzelnen Versuchsausgänge (Kugelsymbole können auch durch Beschriftungen ersetzt werden).

**beachte im Baumdiagramm**

* **Multiplikationsregel für jeden Pfad (entlang des Pfades)**
* **Additionsregel für die Produkte aus beiden Pfaden**

**Pfadregeln für Baumdiagramme:**

**1. Multiplikationssatz (Multiplikationsregel):**

* Die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten eines Pfades ist das Produkt aller längs des Pfades verzeichneten Wahrscheinlichkeiten.

**2. Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit (Additionsregel):**

* Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Pfade, die zu einem Zustand führen, bei dem das Ereignis A eintritt.

Bsp.

Student glaubt, dass das Studium mit Wahrscheinlichkeit von 70% (0,7) erfolgreich beendet wird.

Bei erfolgreich abgeschlossenem Studium ist die Wahrscheinlichkeit, den gewünschten Job zu erhalten 80% (0,8).

Ohne Studienabschluss ist die Wahrscheinlichkeit nur 10% (0,1).

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Student die Position erhalten wird?

***EINE Bedingung*** *(Voraussetzung) =* ***P(B)*** *(Studium erfolgreich abgeschlossen oder nicht)*

*Diese ist immer das erste Ereignis (hier E für erfolgreich oder E̅ für nicht erfolgreich) im Graph*(Der **Graph wird von rechts mach links gelesen** (d. h. **es wird mit dem letzten Ereignis ( P(A) )**, das bei der bedingten Wahrscheinlichkeit **nach dem ersten Ereignis ( P(B)** )eintritt, **angefangen zu lesen**)

***Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist P(A) und immer das letzte Ereignis im Graph ( hier P(J) für „Job“ ).***

***Die Wahrscheinlichkeit P(B) ist immer das erste Ereignis im Graph und die Bedingung ( hier P(E) für „Erfolgreich“ oder P(E̅) für „nicht erfolgreich“ ).***

*P(E) Studium erfolgreich abgeschlossen oder P(E̅) Studium nicht erfolgreich abgeschlossen*

*ist Ereignis P(B)*

Definitionen:

**E erfolgreich abgeschlossen P(B)**

**E̅ nicht erfolgreich abgeschlossen** **P(B̅)**

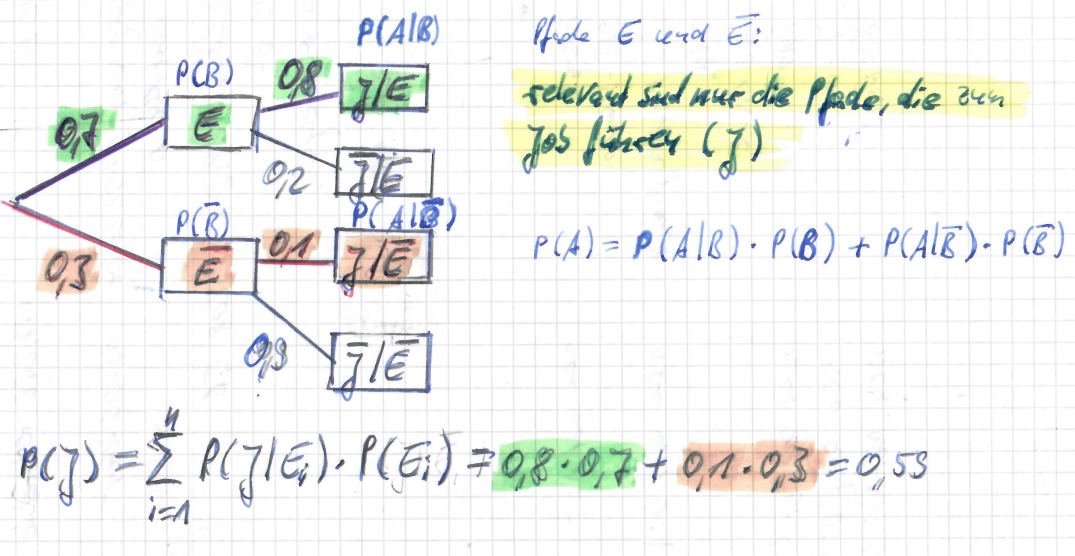
**J Job erhalten P(A)**

**J̅ Job nicht erhalten** **P(A̅)**

**In den beiden Pfaden E und E̅ sind nur die Pfade, die zum Job führen (J) relevant**

**Baumdiagramm (W-Graph, Wahrscheinlichkeitsgraph)**

* **Multiplikationsregel für jeden Pfad (entlang des Pfades)**
* **Additionsregel für die Produkte aus beiden Pfaden**



Die Wahrscheinlichkeit P(B) ist immer das erste Ereignis und die Bedingung.

Hier ‚E‘ oder ‚E̅‘ für erfolgreich/nicht erfolgreich

P(E) oder P(E̅)

P(A) ist die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit

hier ‚J‘ für ‚Job‘ P(J)

**P(A) = P(J)**

**P(B) = P(E) bzw. P(B̅)**

**P(A) = P(A|B) \* P(B)**

**P(J) = ∑P(J|E) \* P(E)**

**P(J̅) = ∑P(J̅|E|) \* P(E)**

**P(J) = ∑P(J|E̅ ) \* P(E̅ )**

**P(J̅) = ∑P(J̅ |E̅ ) \* P(E̅ )**

**Terme, die zur gesuchten Wahrscheinlichkeit führen (hier zum Job) führen, sind zu addieren**

daraus ergibt sich:

**P(J)** = **P(J|E) \* P(E)** + **P(J|E̅ \* P(E̅)**

**P(J)** = **0,8 \* 0,7** + **0,1 \* 0,3** = **0,59**

weiter mit der Aufgabe 3

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus dem Kreis aller Kreditkunden ausgewählte Person ihren Kreditverpflichtungen **pünktlich** ( **P(p)** )nachkommt?

**gefragt ist P(p)** die Wahrscheinlichkeit zum Zahlungsverhalten Zv „pünktlich“ P(p)  
 unabhängig vom Geschlecht

**P(p) Totale Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „pünktlich“**

***Eine Bedingung*** *(Voraussetzung): = P(B) (****Geschlecht „M“ oder „F“****)*

P(M) Das Geschlecht ist „Mann“

P(F) Das Geschlecht ist „Frau“

***Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist P(A) und immer das letzte Ereignis im Graph (hier P(p) für „pünktlich“.)***

***Die Wahrscheinlichkeit P(B) ist immer das erste Ereignis im Graph und die Bedingung ( hier die Wahrscheinlichkeit zum Geschlecht P(M) oder P(F) ).***

**gegeben sind:**

P(p|M) = 0,80 bedingte Wahrscheinlichkeit(pünktlich|Mann) = 80% = 0,80

P(p|F) = 0,85 bedingte Wahrscheinlichkeit(pünktlich|Frau) = 85% = 0,85

P(M) = 0,70 Anteil der männlichen Kunden = 70% = 0,70

P(F) = 1 - 0,70=0,30 Anteil der weiblichen Kunden = 30% = 0,30

Pfade im Baumdiagramm (Wahrscheinlichkeits-Graph (W-Graph))

M Mann

F Frau

P(p|M) bedingte Wahrscheinlichkeit für „pünktlich“, wenn Geschlecht = „Mann“

P(M) Wahrscheinlichkeit, wenn Geschlecht = „Mann“

P(p|F) bedingte Wahrscheinlichkeit für „pünktlich“, wenn Geschlecht = „Frau“

P(F) Wahrscheinlichkeit, wenn Geschlecht = „Frau“

**P(p) Totale Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „pünktlich“**

**P(p)** = P(p|M) \* P(M) + P(p|F) \* P(F)

Die Wahrscheinlichkeit P(B) ist immer das erste Ereignis und die Bedingung.

hier das Geschlecht ‚M‘ oder ‚F‘ P(M) oder P(F)

P(A) ist die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit

hier die Wahrscheinlichkeit zur pünktlichen Zahlung P(p)

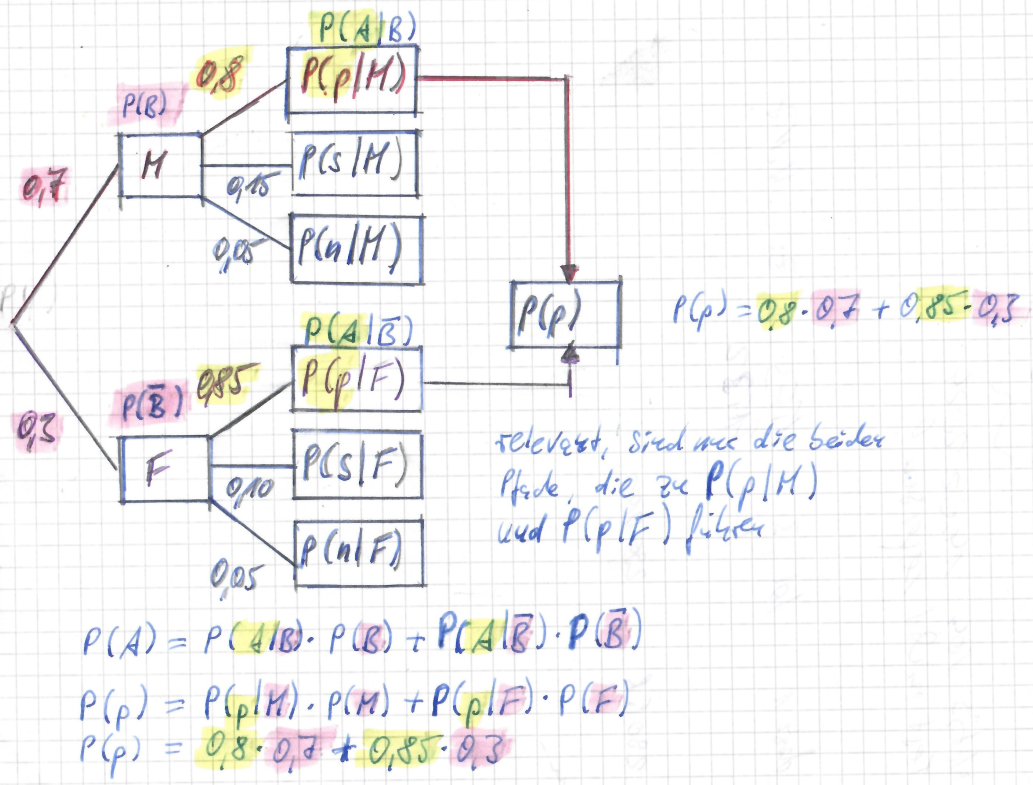
**P(A) = P(p)**

**P(B) = P(M)**

**P(B) = P(F)**

**P(p) = P(p|M) \* P(M) + P(p|F) \* P(F)**

**P(p)** = 0,8 \* 0,7 + 0,85 \* 0,3 = **0,815**



Hinweis:

Baumdiagramm mit Kreisen als Knoten zeichnet sich schnelle, als Baumdiagramm mit Rechtecken

**bedingte Wahrscheinlichkeit**

In einer Großbank kommen 80% der männlichen Kreditkunden ihren Kreditverpflichtungen pünktlich nach, 15% schleppend nach, und bei 5% muss die Bank den Kredit abschreiben.

Bei den weiblichen Kreditkunden sind die entsprechenden Zahlen 85%, 10% und 5%.

Von den Kreditkunden der Bank sind 70% männlich.

**Definitionen:**

**Geschlecht (G) der Kunden:**

* M = Mann
* F = Frau

**Zahlungsverhalten (Zv) der Kunden**

* p = pünktlich
* s = schleppend
* n = nie

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus dem Kreis aller Kreditkunden ausgewählte Person weiblich ist, falls die Person ihren Kreditverpflichtungen nur schleppend nachkommt?

Die **bedingte Wahrscheinlichkeit P(A|B)**

des Ereignisses **A "unter der Bedingung (Voraussetzung) B"**

ist der **Quotient aus der absoluten Häufigkeit HAB von AB**   
(das gleichzeitige Eintreten von A und B) **und der absoluten Häufigkeit von B** (HB)

**bedingte Wahrscheinlichkeit**

**Bedingung für die Wahrscheinlichkeiten zu den Zahlungsverhalten Zv ist das Geschlecht G**.

Die **Wahrscheinlichkeiten zum Zahlungsverhalten Zv (Ereignis A) sind vom Geschlecht G (Ereignis B) abhängig P(A|B) 🡆 P(Zv|G)**

**gefragt ist P(F|s)** Wahrscheinlichkeit, dass Geschlecht = „Frau“, wenn   
 Zv „schleppend“ ist P(F|s)

Bedingung für die Ermittlung der Wahrscheinlichkeit richtig lesen und formulieren.

Bedingungen.

Größe der Wahrscheinlichkeit, dass Person weiblich ist, wenn Zahlungsverhalten Zv = schleppend.

**1. Bedingung: P(A) = „schleppend“ 🡆 P(s) = 0,10**

**2. Bedingung: P(B) = „Frau“ 🡆 P(F) = 0,30**

**gesucht ist P(B|A) 🡆 =(F|s)**

**Welche Formel?**

* **Satz von Bayes** 🡆 direkte Konsequenz aus dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit
* **Warum Satz von Bayes?**
  + Es wird eine **bedingte Wahrscheinlichkeit P(B|A) unter ZWEI Bedingungen / Voraussetzungen (nach Eintritts mehrerer Ereignisse P(A) und P(B) ) ermittelt**.  
    **Ereignis B ist das erste Ereignis im Graph aber für die Wahrscheinlichkeitsermittlung das zweite auftretende Ereignis und die zweite Bedingung**(Der Graph wird von rechts mach links gelesen (d. h. es wird mit dem letzten Ereignis ( P(A) ) angefangen zu lesen)
  + **Achtung**:
* Die **gesuchte Wahrscheinlichkeit bezieht sich auf die Reihenfolge der Ereignisse P(B|A).**
* **P(B) ist das erste Ereignis im Graph und die zu ermittelnde Wahrscheinlichkeit sowie die Bedingung für das Ereignis P(A)**
* **P(A) ist das letzte Ereignis im Graph**
* Im **Zähler** stehen
  + die **bedingte Wahrscheinlichkeit P(A|B) aus dem ersten Pfad** (Pfad zur gesuchten Wahrscheinlichkeit)  
    **P(A) ist das letzte Ereignis im Graph, für die Wahrscheinlichkeitsermittlung aber das erste auftretende Ereignis und das Ereignis für die erste Bedingung**  
    **P(B) ist das erste Ereignis im Graph, für die Wahrscheinlichkeitsermittlung das zweite auftretende Ereignis und die zweite Bedingung**.
  + die **Wahrscheinlichkeit P(B)** zum Ereignis B **aus dem ersten Pfad** (Pfad zur gesuchten Wahrscheinlichkeit).
* Im **Nenner** stehen
  + **im ersten Term** 
    - **dieselben Werte wie im Zähler** (bedingte Wahrscheinlichkeit P(A|B) und Wahrscheinlichkeit P(B)
  + **im zweiten Term** 
    - die **bedingte Wahrscheinlichkeit P(A|B)** unddie **Wahrscheinlichkeit P(B)** zum Ereignis B **aus dem zweiten Pfad** (Pfad zur nicht gesuchten Wahrscheinlichkeit)  
      **WICHTIG:**Es müssen die Produkte aus beiden Pfaden addiert werden

**Satz von Bayes**

**Für zwei Ereignisse A und B mit 𝑷(𝑩 > 𝟎) gilt:**

bedingte Wahrscheinlichkeit A|B Wenn Ereignis B eintritt 🡆 tritt Ereignis A ein

bedingte Wahrscheinlichkeit B|A Wenn Ereignis A eintritt 🡆 tritt Ereignis B ein

Für endlich viele Ereignisse Bi gilt

Sind Ereignisse Bi paarweise disjunkt (einander ausschließend) und 𝐴⊂⋃i=1Bi (A ist echte Teilmenge von Bi) und 𝑷(𝑨) ≠ 𝟎, dann gilt:

𝐴⊂⋃i=1Bi A ist echte Teilmenge von Bi

Jedes Element von A ist auch Element von B

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus dem Kreis aller Kreditkunden ausgewählte Person weiblich ist, falls die Person ihren Kreditverpflichtungen nur schleppend nachkommt?

**gefragt ist P(F|s)** Wahrscheinlichkeit mit zwei Bedingungen  
 Zahlungsverhalten der Frauen P(F) 🡆 2. Bedingung,   
 wenn das Zv „schleppend“ P(s) 🡆 1. Bedingung   
 🡆 P(F|s)

P(F) Wahrscheinlichkeit B = „Frau“

P(s) Wahrscheinlichkeit A = „schleppend“

P(F|s) bedingte Wahrscheinlichkeit (F|s)   
 ist Zahlungsverhalten Zv „schleppend“ (Wahrscheinlichkeit A)

dann Zahlungsverhalten Zv zum Geschlecht = „Frau“   
 Wahrscheinlichkeit B),   
 🡆 P(B,A)

**gegeben sind:**

P(p|M) = 0,80 bedingte Wahrscheinlichkeit(pünktlich|Mann) = 80% = 0,80

P(s|M) = 0,15 bedingte Wahrscheinlichkeit(schleppend|Mann) = 15% = 0,15

P(n|M) = 0,05 bedingte Wahrscheinlichkeit(nie|Mann) = 5% = 0,05

P(p|F) = 0,85 bedingte Wahrscheinlichkeit(pünktlich|Frau) = 85% = 0,85

P(s|F) = 0,10 bedingte Wahrscheinlichkeit(schleppend|Frau) = 10% = 0,10

P(n|F) = 0,05 bedingte Wahrscheinlichkeit(nie|Frau) = 5% = 0,05

P(M) = 0,70 Anteil der männlichen Kunden = 70% = 0,70

P(F) = 1 - 0,70=0,30 Anteil der weiblichen Kunden = 30% = 0,30

***1. Bedingung*** *(Voraussetzung): = P(A) (****Zv „schleppend“ (Ps)***

2. Bedingung  *(Voraussetzung) = P(B) (* P(F) Das Geschlecht ist „Frau“ )

P(B) ( P(M) Das Geschlecht ist „Mann“

**P(A) ist das letzte Ereignis** im Graph, für die Wahrscheinlichkeitsermittlung aber das **erste auftretende Ereignis und** das **Ereignis für die erste Bedingung**

**P(B) ist das erste Ereignis** im Graph, für die Wahrscheinlichkeitsermittlung **das zweite auftretende Ereignis und die zweite Bedingung*.***

**gesucht:**

P(F|s) bedingte Wahrscheinlichkeit (F|s)   
 ist Zahlungsverhalten Zv „schleppend“ (Wahrscheinlichkeit A)

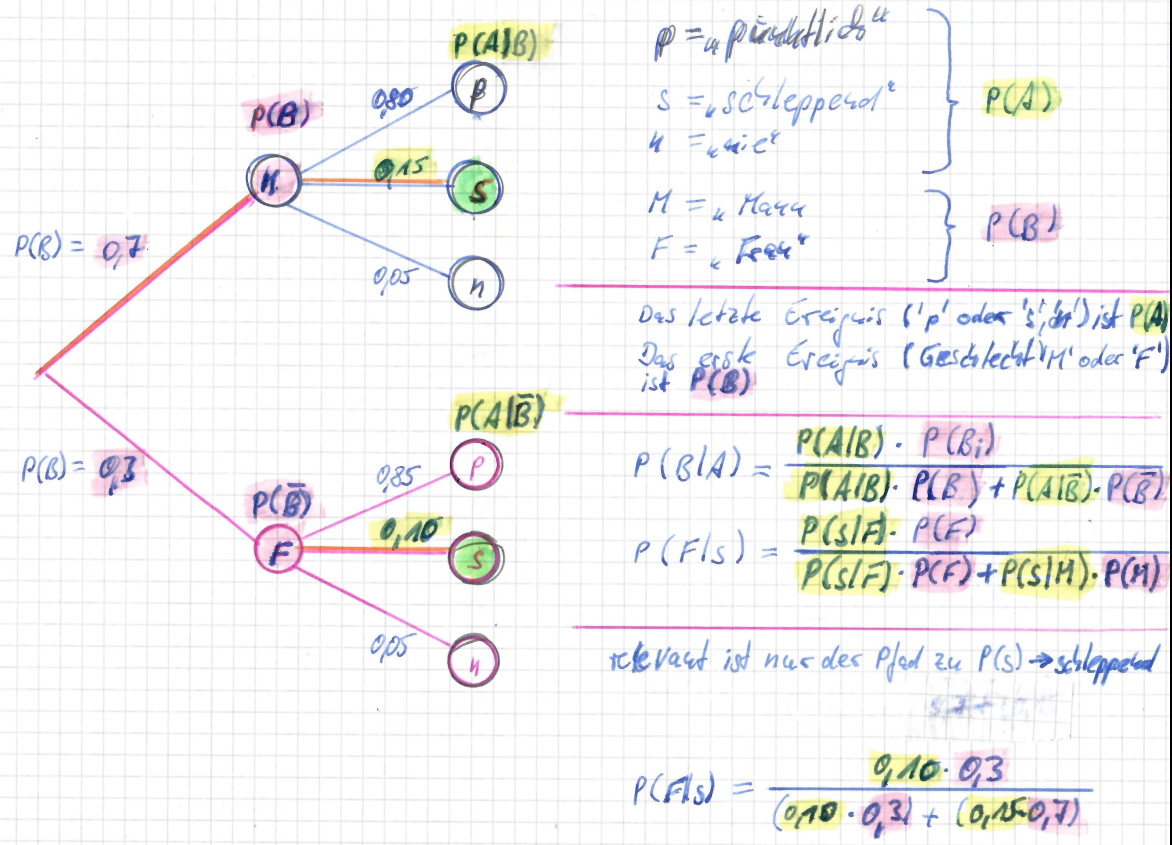
dann Zahlungsverhalten Zv zum Geschlecht = „Frau“   
 Wahrscheinlichkeit B),   
 🡆 P(B,A)

* Im **Zähler** stehen
  + die **bedingte Wahrscheinlichkeit P(A|B) aus dem ersten Pfad** (Pfad zur gesuchten Wahrscheinlichkeit)  
    **P(A) ist das letzte Ereignis im Graph, für die Wahrscheinlichkeitsermittlung aber das erste auftretende Ereignis und das Ereignis für die erste Bedingung**  
    **P(B) ist das erste Ereignis im Graph, für die Wahrscheinlichkeitsermittlung das zweite auftretende Ereignis und die zweite Bedingung**.
  + die **Wahrscheinlichkeit P(B)** zum Ereignis B **aus dem ersten Pfad** (Pfad zur gesuchten Wahrscheinlichkeit).
* Im **Nenner** stehen
  + **im ersten Term** 
    - **dieselben Werte wie im Zähler** (bedingte Wahrscheinlichkeit P(A|B) und Wahrscheinlichkeit P(B)
  + **im zweiten Term** 
    - die **bedingte Wahrscheinlichkeit P(A|B)** unddie **Wahrscheinlichkeit P(B)** zum Ereignis B **aus dem zweiten Pfad** (Pfad zur nicht gesuchten Wahrscheinlichkeit)  
      **WICHTIG:**Es müssen die Produkte aus beiden Pfaden addiert werden

**zur Lösung ist das Baumdiagramm (W-Graph, Wahrscheinlichkeitsgraph) hilfreich**

**beachte im Baumdiagramm**

* **Multiplikationsregel für jeden Pfad (entlang des Pfades)**
* **Additionsregel für die Produkte aus beiden Pfaden**



„**Satz von Bayes**“ ist dem „**Satz der totalen Wahrscheinlichkeit**“ **sehr ähnlich** (er leitet sich aus dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit ab).

Unterschied zwischen „**Satz von Bayes**“ und dem „**Satz der totalen Wahrscheinlichkeit**“:

**Satz von Bayes**

* Summe aus P(A|B) und P(B) aus dem Pfad zur gesuchten Wahrscheinlichkeit dividiert durch Summe aus P(A|B) und P(B) aus beiden Pfaden

**Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:**

* Summe aus P(A|B) und P(B) aus beiden Pfaden

## Aufgabe 4

Berechne die **Wahrscheinlichkeit, dass aus einem Schachspiel eine beliebige Figur** genommen wird, die **kein Pferd** ist.

**gefragt ist P(kein Pferd) = ?**

**Mit Hilfe des Gegenereignisses (Komplementärereignis, Gegenwahrscheinlichkeit)**

* Komplementärereignis (Ac 🡆 Gegenereignis, ohne A)

**Gegenereignis (Komplementärereignis, Gegenwahrscheinlichkeit)**

* **Menge aller Ereignisse, die nicht zum Ereignis führen (gehören)**
  + **durch Komplementärmenge gegeben  
    Ω\A**  
    **P(kein Pferd) = 1 – P(Pferd)**

**Gegenereignis (Gegenwahrscheinlichkeit)**

* ist Ereignis A eine Teilmenge des Ereignisraums Ω
  + entspricht die **Komplementärmenge** Ω\A **allen Ereignissen** (aus dem Ergebnisraum Ω) , **die nicht in A enthalten sind.**
  + Diese Ereignisse sind ebenfalls eine Teilmenge von Ω
  + **Bezeichnungen**  
    - Gegenereignis von A  
    - Negation von A  
    - „nicht-A“   
    - „A tritt nicht ein“
  + Schreibweisen  
    - **🡐** A  
    - A̅

**Anzahl der Figuren eines Schachspiels (**Ergebnismenge Ω**)**

**n = 32**

**Anzahl Pferde eines Schachspiels (**Ergebnismenge A)

**n(𝑃𝑓𝑒𝑟𝑑𝑒) = 4**

**Wahrscheinlichkeit, ein Pferd zu ziehen**

**P(Pferd) = 4:32 = 0,125**

**Wahrscheinlichkeit, kein Pferd zu ziehen**

**P(kein Pferd) = 1 – n(𝑃𝑓𝑒𝑟𝑑𝑒) : n**

**P(kein Pferd) = 1 – 4 : 32**

**P(kein Pferd) = 1 – 0,125 = 0,875 = 87,5%**

**einfacher**

**P(kein Pferd) =**

Hinweis:

keine ungekürzten Brüche!

Dezimalzahlen als % Werte (0,875 🡆 als 87,5) schreiben

Antwort:

Die Wahrscheinlichkeit, dass aus dem Schachspeil kein Pferd gezogen wird liegt bei 87,5%.

## Aufgabe 5

Unter zehn Fahrgästen einer Straßenbahn befinden sich zwei Schwarzfahrer.

Ein Kontrolleur bittet 3 Personen, ihren Fahrschein vorzuzeigen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Schwarzfahrer in die Kontrolle geraten?

**gegeben sind:**

10 Fahrgäste

2 Schwarzfahrer

3 Kontrollen

**zur Lösung ist das Baumdiagramm (W-Graph, Wahrscheinlichkeitsgraph) hilfreich**

Hinweise:

Die Pfade werden immer bis zur 3. Kontrolle berücksichtigt (auch wenn nach der 2. Kontrolle bereits 2 Schwarzfahrer gefunden wurden (wie im letzten Pfad)(

Es werden nur die Pfade berücksichtigt, in denen **2 Schwarzfahrer gefunden wurden**

In den Knoten wird das Verhältnis der möglichen Schwarzfahrer zum Ereignisraum Ω bzw. das Verhältnis der übrigen Fahrgäste zum Ereignisraum Ω (Ω – SF) notiert. Wurde bei der vorausgehenden Kontrolle ein SF gefunden, verringert sich die Anzahl möglicher SF um 1.

In den Pfaden werden die Werte multipliziert.

Die Produkte der einzelnen Pfade werden addiert

3 mögliche Fälle zu zwei gefundenen Schwarzfahrern:   
 3 Kontrollen mit 2 Schwarzfahrern 🡆 1 SF in der 1. Kontrolle, 0 SF in der 2. Kontrolle, 1 SF in der 3. Kontrolle  
 3 Kontrollen mit 2 Schwarzfahrern 🡆 0 SF in der 1. Kontrolle, 1 SF in der 2. Kontrolle, 1 SF in der 3. Kontrolle  
 2 Kontrollen mit 2 Schwarzfahrern 🡆 1 SF in der 1. Kontrolle, 1 SF in der 2. Kontrolle, 0 SF in der 3. Kontrolle

Daraus ergeben sich 9 Verhältnisse (9 Brüche)   
Die Zähler der 9 Brüche können wie folgt zusammengefasst werden:   
 Multiplikation der Zähler für jeden Pfad (Top down):

1. Pfad: 8 \* 2 \* 1 = **16**

2. Pfad: 2 \* 8 \* 1 = **16**

3. Pfad: 2 \* 1 \* 8 = **16**  
 Addition der 3 Produkte **🡆 16 + 16 + 16 = 48**

Die Nenner ergeben sich a**us den jeweiligen Brüchen**

8/10 und 2/10, 2/9, 8/9 und 1/9, 1/8 und 8/8

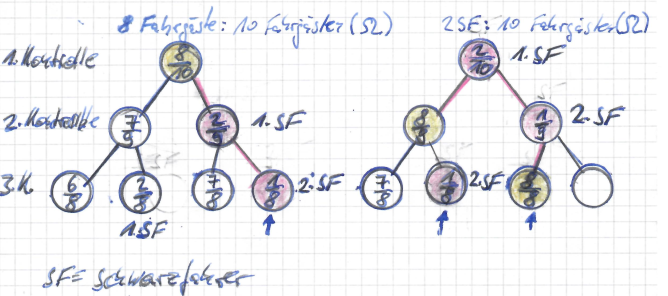
ergibt somit die Nenner 10, 9, 8 🡆 **die Nenner müssen multipliziert werden 🡆 10 \* 9 \* 8 = 720**

Das ergibt den Bruch

Im Casio:

Anzeige Dezimalbruch in echten Bruch über die Taste 

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **1. Kontrolle**  **= 1. Person von 10** | 8 Fahrgäste : 10 Gesamt  **8/10** | | | | 2 Schwarzfahrer : 10 Gesamt  **2/10** | | | |
| **1. SF gefunden** | | | |
| **2. Kontrolle**  **= 2. Person von nur noch 9**  (10 – 1 aus der 1. Kontrolle) | 7 : 9 Gesamt  **7/9** | | 2 Schwarzfahrer : 9 Gesamt  **2/9** | | 8 : 9 Gesamt  **8/9** | | 1. Schwarzfahrer : 9 Gesamt  **1/9** | |
| **1. Schwarzfahrer gefunden** | | **2. Schwarzfahrer gefunden** | |
| **3. Kontrolle**  **= 3. Person von nur noch 8**  (10 – 2 aus 1. und 2. Kontrolle) | 6 : 8  **6/8** | 2 SF : 8  **2/8** | 7 : 8  **7/8** | 1 : 8  **1/8** | 7 : 8  **7/8** | 1 : 8  **1/8** | 8 : 8  **8/8** |  |
| **1. SF gefunden** | **2. SF gefunden** |  | **2. SF gefunden** |



1. Kontrolle:

* 2 mögliche SF zu 10 gesamt

oder

* 8 Fahrgäste zu 10 gesamt

2. Kontrolle:

* wenn in der 1. Kontrolle ein SF gefunden wurde:  
  1 möglicher SF zu 9 gesamt

oder

* wenn in der 1. Kontrolle kein SF gefunden wurde:   
  8 Fahrgäste zu 9 gesamt

