微积分复习

MikeWalrus

2020 年 12 月 12 日

[1]

[1] 我的博客 MikeWalrus.github.io 上可能可以找到更新版本

1 极限与连续

1.1 函数极限存在的条件

1.1.1 归结原理

定理 5.1 海涅定理或归结原理 设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $\dot{U}(x_0)$ 内有定义,则极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 存在的充分必要条件是：对于任何含于 $\dot{U}(x_0)$ 且以 x_0 为极限的数列 x_n，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=A$.

1.1.2 夹逼准则与两个重要极限

定理 5.2 夹逼准则 如果函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 满足下列条件：

（1）当 $x\in\dot{U}(x_0)$ 时，有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$；

（2）当 $x\to\infty$ 时，有 $g(x)\to A$，$h(x)\to A$，

则当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 的极限存在，且为 A.

两个重要极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

1.2 闭区间上连续函数的性质

定义 8.1 最值 设函数 $f(x)$，$x\in I$；对于 $x_0\in I$，$\forall x\in I$，若 $f(x)\leqslant f(x_0)$ 则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的**最大值**, x_0 是**最大值点**；若 $f(x)\geqslant f(x_0)$ 则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的**最小值**, x_0 是**最小值点**.

定理 8.1 最大值最小值定理 闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 在区间上取得最大值及最小值，即存在 $\alpha,\beta\in[a,b]$，使得 $\forall x\in[a,b]$，均有 $f(a)\leqslant f(x)\leqslant f(b)$.

定理 8.2 有界性定理 若 f 在闭区间 $[a,b]$ 连续，则 f 在 $[a,b]$ 有界.

定理 8.3 零点定理 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\dot{f}(b)<0$ 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$. [关于开闭区间]

定理 8.4 介值定理 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\neq f(b)$，则对于介于 $f(a)$，$f(b)$ 之间的任意一个数 A，总存在 $\xi\in[a,b]$ 使得 $f(\xi)-A$. [关于开闭区间]

推论 1 闭区间上的连续曲线必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

2 导数与微分

2.1 函数的求导法则

$$
\begin{aligned}
&(C)' = 0 && (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \\
&(\log_a |x|)' = \frac{1}{x\ln a} && (\ln(|x|))' = \frac{1}{x} \\
&(a^x)' = a^x \ln x && (e^x)' = e^x \\
&(\sin x)' = \cos x && (\cos x)' = -\sin x \\
&(\tan x)' = \sec^2 x && (\cot x)' = -\csc^2 x \\
&(\sec x)' = \sec x \tan x && (\csc x)' = -\csc x \cot x \\
&(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
&(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} && (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \\
&(\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2}))' = \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}
\end{aligned}
$$

2.2 高阶导数

2.2.1 高阶导数的定义

2.2.2 高阶导数的运算法则

加法减法

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$$

乘法莱布尼兹公式

$$(u \cdot v)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

常用的高阶导数

$$
\begin{aligned}
(a^x)^{(n)} &= a^x (\ln x)^n \\
(e^x)^{(n)} &= e^x \\
(\sin(x))^{(n)} &= sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2}) \\
(\cos(x))^{(n)} &= cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2}) \\
\left(\frac{1}{a+bx}\right)^{(n)} &= (-1)^n \frac{b^n n!}{(a+bx)^{n+1}} \\
(\ln(1+x))^{(n)} &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}
\end{aligned}
$$

3 中值定理与导数的应用

3.1 微分中值定理

3.1.1 费马定理

定义 1.1 极值 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，点 x_0 是区间 (a,b) 内一点，若存在 x_0 的邻域 $U(x_0)$，使得 $\forall x \in U(x_0)$，有 $f(x_0) \geqslant f(x)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 取得**极大值**，称点 x_0 为**极大值点**.

定理 1.1 Fermat 定理 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极值，若 $f'(x_0)$ 存在，则必有

$$f'(x_0) = 0$$

3.1.2 罗尔中值定理

定理 1.2 Rolle 中值定理 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，开区间 (a,b) 内可导，并且满足 $f(a) = f(b)$，则 $\exists \xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = 0$

3.1.3 拉格朗日中值定理

定理 1.3 Lagrange 中值定理 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，开区间 (a,b) 内可导，则 $\exists \xi \in (a,b)$，使得

$$\begin{aligned}
f'(\xi) &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\
f(b)-f(a) &= f'(\xi)(b-a) \\
f(b)-f(a) &= f'(a+\theta(b-a))(b-a), \quad 0<\theta<1 \\
f(a+h)-f(a) &= f'(a+\theta h)h, \qquad\qquad\quad 0<\theta<1
\end{aligned}$$

有限增量公式

$$\Delta y = f'(x+\theta\Delta x)\Delta x$$

Δx 不一定很小，所以不是 $\mathrm{d}x$

推论 1 若 $f'(x) \equiv 0$，$x \in I$，则 $f(x)$ 在 I 上恒等于常数.

推论 2 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 (a,b) 内满足条件 $f'(a) = g'(b)$，则有 $f(x) = g(x) + C, x \in (a,b)$.

推论 3 若 $f'(x) \equiv C$，$x \in I$，则 $f(x)$ 在 I 内为一线性函数，即 $f(x) = Cx + b$.

3.1.4 柯西中值定理

定理 1.4 Cauchy 中值定理 如果函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，开区间 (a,b) 内可导，且 $F'(x)$ 在 (a,b) 的每一点均不为零，那么在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)}=\frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

3.2 泰勒公式

定理 2.1 Taylor 中值定理（Lagrange 余项） 如果函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的某个开区间 (a,b) 内具有直到 $(n+1)$ 阶的导数，则对任一 $x\in(a,b)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$
$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}$$

Maclaurin 公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$$
$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{(n+1)}$$

Peano 余项

$$R_n(x)=o(x^n)$$

误差估计式

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}|x|^{(n+1)}$$
$$|R_n(x)|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}|(x-x_0)|^{(n+1)}$$

常用的麦克劳林公式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$
$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+R_{2k}(x)orR_{2k-1}(x)$$
$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+R_{2k+1}(x)orR_{2k}(x)$$
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!}+R_n(x)\qquad R_n=\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)}x^{n+1}$$
$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{(\alpha)(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$$

3.3 函数的单调性与极值

3.4 洛必达法则

3.5 曲线的凸性与函数作图

3.5.1 曲线的凸性

定义 5.1 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，$\forall x_1, x_2 \in I$ 和 $\forall \lambda \in (0,1)$ 总有

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

则称 f 为区间 I 上的**下凸函数**，称曲线 $y=f(x)$ 在区间 I 上是**下凸**的. 反之，如果总有

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2)$$

则称 f 为区间 I 上的**上凸函数**，称曲线 $y=f(x)$ 在区间 I 上是**上凸**的.

定义 5.1' 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，$\forall x_1, x_2 \in I$，如果

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

则称 f 为区间 I 上的**下凸函数**，称曲线 $y=f(x)$ 在区间 I 上是**下凸**的. 反之...

定理 5.1 设 $f(x)$ 在区间 I 上可导，则 $f(x)$ 在区间 I 下凸（上凸）的充分必要条件是 $f'(x)$ 在区间 I 单调递增（递减）.

定理 5.2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 上具有二阶导数，那么

（1）若在 (a,b) 内 $f''(x)>0$，则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 的图形是下凸的；

（2）若在 (a,b) 内 $f''(x)>0$，则 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 的图形是上凸的；

定义 5.2 拐点 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，x_0 是区间 I 内的点. 如果曲线在点 $(x_0, f(x_0))$ 的两侧凸性相反，则称点 $(x_0, f(x_0))$ 为此曲线的拐点.

3.5.2 渐近线

定义 5.3 若曲线 C 上的动点 P 沿着曲线无限地远离原点时，点 P 与某一固定直线 L 的距离趋于零，则称直线 L 为曲线的渐近线. 特别地，

（1）如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, 则直线 $y=A$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条水平渐近线。

（2）如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_0) = \infty$, 则直线 $x=x_0$ 是曲线 $y=f(x)$ 的一条铅直（或垂直）渐近线。（3）斜渐近线

定理 5.3 如果下述两极限存在（有限）

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx]$$

则 $y=kx+b$ 是 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

3.6 平面曲线的曲率

3.6.1 弧微分

弧微分公式

$$ds = \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$$
$$ds = \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$
$$ds = \sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

3.6.2 曲线的曲率

平均曲率

$$\overline{k} = |\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}|$$

曲率

$$k = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|$$

3.6.3 曲率的计算

参数方程

$$k = \frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{[x'^2(t)+y'^2(t)]^{\frac{2}{3}}}$$

普通方程

$$k = \frac{|y''|}{[1+y'^2]^{\frac{2}{3}}}$$

极坐标

$$k = \frac{\left|\rho^2(\theta)+2\rho'^2(\theta)-\rho(\theta)\rho''(\theta)\right|}{[\rho'^2(\theta)+\rho^2(\theta)]^{\frac{2}{3}}}$$

3.6.4 曲率圆与曲率半径

曲率半径

$$R = \frac{1}{k}$$

4 不定积分

4.1 原函数与不定积分的概念

定义 1.1 原函数 设函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 在区间 I 上有定义，若 $\forall x \in I$，有 $F'(x) = f(x)$, 则称函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

$$
\begin{aligned}
&(C)' = 0 && \int 0 = C \\
&(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} && \int x^\alpha \,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \\
&(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a} && \\
&(\ln(|x|))' = \frac{1}{x} && \int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x = \ln |x| + C \\
&(a^x)' = a^x \ln x && \int a^x \,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \\
&(e^x)' = e^x && \int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + C \\
&(\sin x)' = \cos x && \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x + C \\
&(\cos x)' = -\sin x && \int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + C \\
&(\tan x)' = \sec^2 x && \int \frac{1}{\cos^2 x} \,\mathrm{d}x = \int \sec^2 x \,\mathrm{d}x = \tan x + C \\
&(\cot x)' = -\csc^2 x && \int \frac{1}{\sin^2 x} \,\mathrm{d}x = \int \csc^2 x \,\mathrm{d}x = -\cot x + C \\
&(\sec x)' = \sec x \tan x && \int \sec x \tan x \,\mathrm{d}x = \sec x + C \\
&(\csc x)' = -\csc x \cot x && \int \csc x \cot x \,\mathrm{d}x = -\csc x + C \\
&(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin x + C \\
&(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \,\mathrm{d}x = -\arccos x + C \\
&(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} && \int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = \arctan x + C \\
&(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2} && \int \frac{1}{1+x^2} \,\mathrm{d}x = -\operatorname{arccot} x + C \\
&(\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}))' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} && \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \,\mathrm{d}x = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C
\end{aligned}
$$

4.2 不定积分的换元积分法与换元积分法

4.2.1 换元积分法

定理 2.1 第一换元积分法 设 $f(u)$ 存在原函数 $F(u)$ ，函数 $u=\varphi(x)$ 可导，则有

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,\mathrm{d}x=\int f[\varphi(x)]d\varphi(x)=\left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)}=F(\varphi(x))+C$$

以下当作公式记忆

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}=\int\frac{\mathrm{d}x}{(x-a)(x+a)}=\frac{1}{2a}\int(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a})\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2}=\frac{1}{a^2}\int\frac{\mathrm{d}x}{1+(\frac{x}{a})^2}=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{\frac{1}{a}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}=\int\frac{\mathrm{d}(\frac{x}{a})}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$$

$$\begin{aligned}\int\csc x\,\mathrm{d}x&=\int\frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos^2 x-1}\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x-1}{\cos x+1}\right|+C=\ln\left|\frac{\cos x-1}{\sin x}\right|+C=\ln|\cot x-\csc x|+C\end{aligned}$$

$$\int\sec x\,\mathrm{d}x=\ln|\tan x+\sec x|+C$$

$$\int\tan x\,\mathrm{d}x=\int\frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos x}=-\ln\cos x+C$$

$$\int\cot x\,\mathrm{d}x=\int\frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin x}=\ln\sin x+C$$

定理 2.2 第二换元积分法 设函数 $x=\varphi(t)$ 有连续的导数，且 $\varphi'(x)\neq 0$，若函数

公式推导

$$\begin{aligned}\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x&\xlongequal{x=a\sin t}\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t\\&=a^2\int\cos^2 t\,\mathrm{d}t\\&=a^2\int\frac{\cos 2t+1}{2}\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}a^2t+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C\\&=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C\end{aligned}$$

补充公式汇总

$$\int\sec x\,\mathrm{d}x=ln|\tan x+\sec x|+C$$

$$\int \csc x \,\mathrm{d}x = \ln|\cot x - \csc x| + C$$

$$\int \tan x \,\mathrm{d}x = -\ln(\cos x) + C$$

$$\int \cot x \,\mathrm{d}x = \ln(\sin x) + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2 + bx + c} \text{（可以解决）}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \,\mathrm{d}x = \ln(x^2 + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \text{（可以解决）}$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} \,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2} \ln(x^2 + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + \frac{x}{2}\sqrt{x^2 \pm a^2} + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} \,\mathrm{d}x \text{（可以解决）}$$

$$\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \left(\frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \right) + C$$

[2]

5 定积分及其应用

5.1 定积分的概念

5.1.1 具体实例

步骤

1. 划分
2. 近似
3. 求和
4. 取极限

[2]可以不用递推，换元 $x = a \tan x$

5.1.2 定积分的定义

定义 1.1 设 $f(x)$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的有界函数，在闭区间 $[a,b]$ 上任取分割

$$T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

将闭区间 $[a,b]$ 分为若干个小闭区间 $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{i-1},x_i],\cdots[x_{n-1},x_n]$. 第 i 个小闭区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 的长度表示为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，取 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$，在 $[x_i,x_{i+1}]$ 上任取点 ξ_i, 作和式 $\sum_{n=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ （称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分和）. 如果不论如何选择分割 T 及取在 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的点 ξ_i，只要当 $\lambda \to 0$ 时，该和式总趋于确定的常数 I，那么称极限 I 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**定积分**，记作 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

规定

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

5.1.3 定积分的几何意义

5.2 定积分的性质

性质 1 $\int_a^b \mathrm{d}x = b - a$

性质 2 线性性

性质 3 保号性

推论 1 单调性

推论 2 有点像夹逼准则

推论 3 定积分的绝对值 $\leqslant$ 绝对值的定积分

性质 4 区间可加性 c 不用在 a 和 b 之间

5.2.1 积分中值定理

定理 2.1 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上不变号，则

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \quad (a \leqslant \xi \leqslant b)$$

推论 4 [3] 设 $f(x)\in C[a,b]$，则存在 $\xi\in[a,b]$，使

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

5.3 微积分基本定理

5.3.1 积分上限的函数及其导数

定理 若 $f(x)\in C[a,b]$，则变上限函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

证明 对 $\forall x, x+h\in[a,b]$，有

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= \lim_{h\to\infty}\frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h}\\
&= \lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\left[\int_a^{a+h} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right]\\
&= \lim_{h\to\infty}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t\\
&= \lim_{h\to\infty} f(\xi) \qquad (x<\xi<x+h)^{4}\\
&= f(x)
\end{aligned}$$

变限积分求导

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = -f(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\Psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{\Psi(x)}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t+\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right]\\
&= f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f[\Psi(x)]\Psi'(x)
\end{aligned}$$

[变限函数求导]

5.3.2 牛顿-莱布尼兹公式

设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(x) = F(b)-F(a)$$

[3] 老师说这个可能比上面的更常用

[4] 积分中值定理

5.4 定积分的计算方法

5.4.1 定积分的换元积分法

[定积分的换元法]

定理 4.1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 或 $[\beta,\alpha]$ 上有连续导数 $\varphi'(t)$，且 $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，$\varphi([\alpha,\beta])=[a,b]$ 或 $\varphi([\beta,\alpha])=[a,b]$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta \varphi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

[奇零偶倍]

一个结论 [5] 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上连续，则

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a [f(x)+f(-x)]\,\mathrm{d}x$$

有关 三角函数的函数 的几个结论 [6]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} 2f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

5.4.2 定积分的分部积分法

定理 4.2 若函数 $u(x)$，$v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续导数，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$$

[5] 接下来可得到奇零偶倍

[6] 这里注意这几个积分上限，若与公式的积分上限不对应，则不能直接使用这几个公式

Wallis 公式 [7]推导用到分部积分:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x \left(= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x\right) \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\,\mathrm{d}\cos x \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x(n-1)sin^{n-2}\,\mathrm{d}x \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x \\
\therefore I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2}
\end{aligned}$$

当 n 为偶数时

$$I_n = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

当 n 为奇数时

$$I_n = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{4}{5}\cdot\frac{2}{3}\cdot 1$$

5.5 定积分的几何运用举例

5.5.1 平面图形的面积

直角坐标

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x$$

$$A = \int_a^b [\psi(y) - \varphi(y)]\,\mathrm{d}y$$

极坐标

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

5.5.2 平面曲线的弧长

[8]

$$s = \int_a^b \mathrm{d}s$$

---

[7]也可称“点火公式”，注意上下限只能是 $\frac{\pi}{2}$ 和 0

[8]复习弧微分公式

5.5.3 体积

绕 x 轴和绕 y 轴的旋转体的体积

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x \qquad [9]$$

5.5.4 旋转体的侧面积

$$\begin{aligned} S侧 &= 2\pi \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}s \\ &= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

6 反常积分

6.1 积分限为无穷的反常积分

定义 1.1 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续（或分段连续），对于任意 $t>a$，积分 $\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，则定义 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$，并称 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 为 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的反常积分. 如果极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛；若此极限不存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

$(-\infty,b]$ 上的反常积分类似.

对于定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的连续函数 $f(x)$ 的反常积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 作如下的定义：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

其中 c 为任意实数，当且仅当等式右边的两个积分**同时**收敛时，称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，且该极限值称为反常积分的值，否则称其发散.

6.2 无界函数的反常积分

瑕点 若函数 $f(x)$ 在点 a 的任一领域内都无界，则称点 a 为函数 $f(x)$ 的瑕点.

定义 2.1 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，点 b 是 $f(x)$ 的瑕点，对任意 $0<\varepsilon<b-a$，$f(x)$ 在 $[a,b-\varepsilon]$ 可积，定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$$

[9] 柱壳法

若等式右边极限存在，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，且该极限值称为反常积分的值，否则称其发散.

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,c)\cup(c,b]$ 上连续，点 c 是 $f(x)$ 的瑕点，其反常积分

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

当且仅当右端两个极限都存在时，称反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，且该极限值称为反常积分的值，否则称其发散.

7 微分方程

7.1 微分方程的基本概念

7.1.1 分类

- 常微分方程：未知函数是一元的
- 偏微分方程：未知函数是多元的

7.1.2 常微分方程的基本概念

定义 1.1 含有未知函数的导数（包含高阶导数）或微分的等式（表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系）称为**微分方程**. 未知函数是一元函数的微分方程称为**常微分方程**

微分方程中未知函数的导数的最高阶数称为微分方程的**阶**. 一般的 n 阶微分方程的形式是

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$$

或

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}) \qquad (n\text{ 阶显式微分方程})$$

- 微分方程的解：使方程称为恒等式的函数.
- 通解：解中所含独立的任意常数的个数与方程的阶数相同.
- 特解：不含任意常数的解，其图形称为**积分曲线**.
- 定解条件：确定通解中任意常数的条件.

7.2 一阶微分方程

7.2.1 可分离变量的微分方程

若一阶微分方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}=g(x)h(y) \qquad \text{或} \qquad M(y)\,\mathrm{d}y=N(x)\,\mathrm{d}x$$

则称它为**可分离变量的方程**. 对于已分离变量的方程 $M(y)\,\mathrm{d}y = N(x)\,\mathrm{d}x$，则有

$$\int M(y)\,\mathrm{d}y = \int N(x)\,\mathrm{d}x + C$$

[可分离变量的方程]

7.2.2 可化为可分离变量型的方程

定义 2.1 形如

$$y' = \varphi(\frac{y}{x})$$

的方程，称为**齐次型方程**

解法 令 $u = \frac{y}{x}$，则 $y = ux$，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

代入原方程得

$$u + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \varphi(u)$$

分离变量：

$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u) - u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边积分，得

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u) - u} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

附：可化为齐次方程的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}(c^2 + c_1^2 \neq 0)$$[10]

1. 当 $\frac{a_1}{a} \neq \frac{b_1}{b}$ 时，作变换 $x = X + h, y = Y + k$（h,k 为待定常数），则 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}X$，$\mathrm{d}y = \mathrm{d}Y$，原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{aX + bY + ah + bk + c}{a_1X + b_1Y + a_1h + b_1k + c_1}$$

令

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{cases}$$

解出 h，k

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{aX + bY}{a_1X + b_1Y}$$

[10]也适用于 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)(c^2 + c_1^2 \neq 0)$

这样就转化为齐次方程了. 求出其解后，将 $X=x-h, Y=y-k$ 代入，即得原方程的解.

2. 当 $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda$ 时，原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1}\qquad(b\neq 0)$$

令 $v=ax+by$，则

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=a+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=a+b\frac{v+c}{\lambda v+c_1}$$

即得到可分离变量方程.

7.2.3 一阶线性微分方程

标准形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$$

若 $Q(x)\equiv 0$，称其为**齐次方程**.[11]
若 $Q(x)\not\equiv 0$，称其为**非齐次方程**.

解法

$$\begin{aligned}
y'+P(x)y&=Q(x)\\
e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}y'+e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}P(x)y&=Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\\
\left(e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}y\right)'&=Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\\
e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}y&=\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

结论

$$\begin{aligned}
y&=e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\int\left[Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}+C\right]\mathrm{d}x\\
&=Ce^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}+e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$ [12]

7.2.4 伯努利方程

Bernoulli 方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^{\alpha}\qquad(\alpha\neq 0,1)$$

[11] 注意：这个“齐次方程”与上面介绍的可以利用换元解决的“齐次型方程”不是一个概念，不要搞混了.
[12] 用的时候这里积分以后不用 $+C$

解法 令 $z=y^{1-\alpha}$

$$y^{-\alpha}+P(x)y^{1-\alpha}=Q(x)$$

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}+(1-a)P(x)y^{1-\alpha}=(1-\alpha)Q(x)$$

因为 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-\alpha)y^{-\alpha}$,

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1+\alpha)P(x)z=(1+\alpha)Q(x)$$

到此已转化为一阶线性微分方程，求完 $z=y^{1-\alpha}$ 带回.

7.3 可降阶的高阶微分方程

1. $y^{(n)}=f(x)$
2. n 次积分.
3. $y''=f(x,y')$ 即没有 y

   令 $p=y'$，变为 $p'=f(x,p)$.
4. $y''=f(y,y')$ 即不显含 x 令 $z=y'$，就有

   $$y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p$$

   变成以 y 为自变量的

   $$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$$

   解出后再分离变量解出 y.

7.4 线性微分方程解的结构

标准的 n 阶线性微分方程的一般形式为

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x)$$

若 $Q(x)\equiv 0$，称其为**齐次方程**.
若 $Q(x)\not\equiv 0$，称其为**非齐次方程**.

7.4.1 二阶齐次线性微分方程解的结构

标准的一般形式为

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{1}$$

定理 7.4.1 (叠加原理) 若函数 $y_1(x), y_2(x)$ 是微分方程(1)的两个解，则函数

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \tag{2}$$

也是方程(1)的解.

定义 7.4.1 设 $y_i(x), i = 1, \cdots, n$ 为定义在区间 I 上的 n 个函数，若存在 n 个不全为零的常数 $k_i, i = 1, \cdots, n$，使得

$$\sum_{i=1}^{n} k_i y_i(x) = 0, \quad \forall x \in I \tag{3}$$

则称 $y_i(x), i = 1, \cdots, n$ 在区间 I 上**线性相关**，否则[13] 称 $y_i(x), i = 1, \cdots, n$ 在区间 I 上**线性无关**

定理 7.4.2 若 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程(1)的两个线性无关的解，则方程(1)的通解（此时也是全部解）可以写为

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

7.4.2 二阶非齐次线性微分方程解的结构

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{4}$$

定理 7.4.3 二阶非齐次线性微分方程(4)的通解等于它所对应的齐次线性微分方程(1)的通解与它本身的一个特解之和.[14]

7.5 常系数线性微分方程

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{5}$$

7.5.1 二阶常系数齐次线性微分方程

特征方程

$$r^2 + pr + q = 0$$

特征根：r_1, r_2

表 1: 根据特征根得到的通解

特征根	通解
$r_1 \neq r_2$ 实根	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 sin\beta x)$

[13] 即 $\sum_{i=1}^{n} k_i y_i(x) = 0, \quad \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = \cdots = 0$

[14] “非齐通 = 齐通 + 非齐特”，还可以推广到 n 阶

- 二阶：二阶导 y'';
- 常系数：系数都是常数;
- 齐次：右边不是 $f(x)$ 而是 0;
- 线性：y 和 y 的（高阶）导数都是一次的;