

# 微积分复习

MikeWalrus

2020 年 11 月 28 日

1

---

<sup>1</sup>我的博客 [MikeWalrus.github.io](https://mikewalrus.github.io) 上可能可以找到更新版本

# 1 极限与连续

## 1.1 函数极限存在的条件

### 1.1.1 归结原理

**定理 5.1 海涅定理或归结原理** 设函数  $y = f(x)$  在点  $x_0$  的某个去心邻域  $\dot{U}(x_0)$  内有定义, 则极限  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$  存在的充分必要条件是: 对于任何含于  $\dot{U}(x_0)$  且以  $x_0$  为极限的数列  $x_n$ , 都有  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$ .

### 1.1.2 夹逼准则与两个重要极限

**定理 5.2 夹逼准则** 如果函数  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $h(x)$  满足下列条件:

(1) 当  $x \in \dot{U}(x_0)$  时, 有  $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ ;

(2) 当  $x \rightarrow \infty$  时, 有  $g(x) \rightarrow A$ ,  $h(x) \rightarrow A$ ,

则当  $x \rightarrow \infty$  时,  $f(x)$  的极限存在, 且为  $A$ .

两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

## 1.2 闭区间上连续函数的性质

**定义 8.1 最值** 设函数  $f(x)$ ,  $x \in I$ ; 对于  $x_0 \in I$ ,  $\forall x \in I$ , 若  $f(x) \leq f(x_0)$  则称  $f(x_0)$  为  $f(x)$  在区间  $I$  上的最大值,  $x_0$  是最大值点; 若  $f(x) \geq f(x_0)$  则称  $f(x_0)$  为  $f(x)$  在区间  $I$  上的最小值,  $x_0$  是最小值点.

**定理 8.1 最大值最小值定理** 闭区间  $[a, b]$  上的连续函数  $f(x)$  在区间上取得最大值及最小值, 即存在  $\alpha, \beta \in [a, b]$ , 使得  $\forall x \in [a, b]$ , 均有  $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ .

**定理 8.2 有界性定理** 若  $f$  在闭区间  $[a, b]$  连续, 则  $f$  在  $[a, b]$  有界.

**定理 8.3 零点定理** 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a)f(b) < 0$  则至少存在一点  $\xi \in (a, b)$ , 使得  $f(\xi) = 0$ . [\[关于开区间\]](#)

**定理 8.4 介值定理** 设函数  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上连续, 且  $f(a) \neq f(b)$ , 则对于介于  $f(a)$ ,  $f(b)$  之间的任意一个数  $A$ , 总存在  $\xi \in [a, b]$  使得  $f(\xi) = A$ . [\[关于开区间\]](#)

**推论 1** 闭区间上的连续曲线必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

## 2 导数与微分

### 2.1 函数的求导法则

$$\begin{aligned}
 (C)' &= 0 & (x^\alpha)' &= \alpha x^{\alpha-1} \\
 (\log_a |x|)' &= \frac{1}{x \ln a} & (\ln(|x|))' &= \frac{1}{x} \\
 (a^x)' &= a^x \ln a & (e^x)' &= e^x \\
 (\sin x)' &= \cos x & (\cos x)' &= -\sin x \\
 (\tan x)' &= \sec^2 x & (\cot x)' &= -\csc^2 x \\
 (\sec x)' &= \sec x \tan x & (\csc x)' &= -\csc x \cot x \\
 (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
 (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} & (\operatorname{arccot} x)' &= -\frac{1}{1+x^2} \\
 (\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}))' &= \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}
 \end{aligned}$$

### 2.2 高阶导数

#### 2.2.1 高阶导数的定义

#### 2.2.2 高阶导数的运算法则

加法减法

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$$

乘法莱布尼兹公式

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

常用的高阶导数

$$\begin{aligned}
 (a^x)^{(n)} &= a^x (\ln x)^n \\
 (e^x)^{(n)} &= e^x \\
 (\sin(x))^{(n)} &= \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2}) \\
 (\cos(x))^{(n)} &= \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2}) \\
 \left(\frac{1}{a+bx}\right)^{(n)} &= (-1)^n \frac{b^n n!}{(a+bx)^{n+1}} \\
 (\ln(1+x))^{(n)} &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}
 \end{aligned}$$

### 3 中值定理与导数的应用

#### 3.1 微分中值定理

##### 3.1.1 费马定理

**定义 1.1 极值** 设函数  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  内有定义, 点  $x_0$  是区间  $(a, b)$  内一点, 若存在  $x_0$  的邻域  $U(x_0)$ , 使得  $\forall x \in U(x_0)$ , 有  $f(x_0) \geq f(x)$ , 则称  $f(x)$  在点  $x_0$  取得**极大值**, 称点  $x_0$  为**极大值点**.

**定理 1.1 Fermat 定理** 设函数  $f(x)$  在点  $x_0$  处取得极值, 若  $f'(x_0)$  存在, 则必有

$$f'(x_0) = 0$$

##### 3.1.2 罗尔中值定理

**定理 1.2 Rolle 中值定理** 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 开区间  $(a, b)$  内可导, 并且满足  $f(a) = f(b)$ , 则  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得  $f'(\xi) = 0$

##### 3.1.3 拉格朗日中值定理

**定理 1.3 Lagrange 中值定理** 设函数  $f(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 开区间  $(a, b)$  内可导, 则  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a), \quad 0 < \theta < 1$$

$$f(a + h) - f(a) = f'(a + \theta h)h, \quad 0 < \theta < 1$$

有限增量公式

$$\Delta y = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x$$

$\Delta x$  不一定很小, 所以不是  $dx$

**推论 1** 若  $f'(x) \equiv 0$ ,  $x \in I$ , 则  $f(x)$  在  $I$  上恒等于常数.

**推论 2** 若函数  $f(x)$  和  $g(x)$  在区间  $(a, b)$  内满足条件  $f'(a) = g'(b)$ , 则有  $f(x) = g(x) + C, x \in (a, b)$ .

**推论 3** 若  $f'(x) \equiv C$ ,  $x \in I$ , 则  $f(x)$  在  $I$  内为一线性函数, 即  $f(x) = Cx + b$ .

### 3.1.4 柯西中值定理

**定理 1.4 Cauchy 中值定理** 如果函数  $f(x)$  和  $F(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续, 开区间  $(a, b)$  内可导, 且  $F'(x)$  在  $(a, b)$  的每一点均不为零, 那么在  $(a, b)$  内至少有一点  $\xi$ , 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

## 3.2 泰勒公式

**定理 2.1 Taylor 中值定理 (Lagrange 余项)** 如果函数  $f(x)$  在含有  $x_0$  的某个开区间  $(a, b)$  内具有直到  $(n+1)$  阶的导数, 则对任一  $x \in (a, b)$ , 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$$

**Maclaurin 公式**

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{(n+1)}$$

**Peano 余项**

$$R_n(x) = o(x^n)$$

**误差估计式**

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x|^{(n+1)}$$

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|(x - x_0)|^{(n+1)}$$

**常用的麦克劳林公式**

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k}(x) \text{ or } R_{2k-1}(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k+1}(x) \text{ or } R_{2k}(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!} + R_n(x) \quad R_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)}x^{n+1}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{(\alpha)(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)$$

### 3.3 函数的单调性与极值

### 3.4 洛必达法则

### 3.5 曲线的凸性与函数作图

#### 3.5.1 曲线的凸性

**定义 5.1** 设函数  $f(x)$  在区间  $I$  上有定义,  $\forall x_1, x_2 \in I$  和  $\forall \lambda \in (0, 1)$  总有

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

则称  $f$  为区间  $I$  上的**下凸函数**, 称曲线  $y = f(x)$  在区间  $I$  上是**下凸**的. 反之, 如果总有

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

则称  $f$  为区间  $I$  上的**上凸函数**, 称曲线  $y = f(x)$  在区间  $I$  上是**上凸**的.

**定义 5.1'** 设函数  $f(x)$  在区间  $I$  上有定义,  $\forall x_1, x_2 \in I$ , 如果

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

则称  $f$  为区间  $I$  上的**下凸函数**, 称曲线  $y = f(x)$  在区间  $I$  上是**下凸**的. 反之...

**定理 5.1** 设  $f(x)$  在区间  $I$  上可导, 则  $f(x)$  在区间  $I$  下凸 (上凸) 的充分必要条件是  $f'(x)$  在区间  $I$  单调递增 (递减).

**定理 5.2** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续,  $(a, b)$  上具有二阶导数, 那么

- (1) 若在  $(a, b)$  内  $f''(x) > 0$ , 则  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  的图形是下凸的;
- (2) 若在  $(a, b)$  内  $f''(x) < 0$ , 则  $y = f(x)$  在  $[a, b]$  的图形是上凸的;

**定义 5.2 拐点** 设  $f(x)$  在区间  $I$  上连续,  $x_0$  是区间  $I$  内的点. 如果曲线在点  $(x_0, f(x_0))$  的两侧凸性相反, 则称点  $(x_0, f(x_0))$  为此曲线的拐点.

#### 3.5.2 渐近线

**定义 5.3** 若曲线  $C$  上的动点  $P$  沿着曲线无限地远离原点时, 点  $P$  与某一固定直线  $L$  的距离趋于零, 则称直线  $L$  为曲线的渐近线. 特别地,

- (1) 如果  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ , 则直线  $y = A$  是曲线  $y = f(x)$  的一条水平渐近线.
- (2) 如果  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x_0) = \infty$ , 则直线  $x = x_0$  是曲线  $y = f(x)$  的一条铅直 (或垂直) 渐近线.
- (3) 斜渐近线

**定理 5.3** 如果下述两极限存在 (有限)

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx]$$

则  $y = kx + b$  是  $y = f(x)$  的斜渐近线.

### 3.6 平面曲线的曲率

#### 3.6.1 弧微分

弧微分公式

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

$$ds = \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)}$$

#### 3.6.2 曲线的曲率

平均曲率

$$\bar{k} = \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|$$

曲率

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|$$

#### 3.6.3 曲率的计算

参数方程

$$k = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{[x'^2(t) + y'^2(t)]^{\frac{2}{3}}}$$

普通方程

$$k = \frac{|y''|}{[1 + y'^2]^{\frac{2}{3}}}$$

极坐标

$$k = \frac{|\rho^2(\theta) + 2\rho'(\theta) - \rho(\theta)\rho''(\theta)|}{[\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)]^{\frac{2}{3}}}$$

#### 3.6.4 曲率圆与曲率半径

曲率半径

$$R = \frac{1}{k}$$

## 4 不定积分

### 4.1 原函数与不定积分的概念

**定义 1.1 原函数** 设函数  $f(x)$  和  $F(x)$  在区间  $I$  上有定义, 若  $\forall x \in I$ , 有  $F'(x) = f(x)$ , 则称函数  $F(x)$  是  $f(x)$  在区间  $I$  上的一个原函数.

$$\begin{array}{ll}
 (C)' = 0 & \int 0 = C \\
 (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} & \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \\
 (\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a} & \\
 (\ln(|x|))' = \frac{1}{x} & \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \\
 (a^x)' = a^x \ln a & \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \\
 (e^x)' = e^x & \int e^x dx = e^x + C \\
 (\sin x)' = \cos x & \int \cos x dx = \sin x + C \\
 (\cos x)' = -\sin x & \int \sin x dx = -\cos x + C \\
 (\tan x)' = \sec^2 x & \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C \\
 (\cot x)' = -\csc^2 x & \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C \\
 (\sec x)' = \sec x \tan x & \int \sec x \tan x dx = \sec x + C \\
 (\csc x)' = -\csc x \cot x & \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C \\
 (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C \\
 (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x + C \\
 (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} & \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C \\
 (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2} & \int \frac{1}{1+x^2} dx = -\operatorname{arccot} x + C \\
 (\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}))' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} & \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C
 \end{array}$$



## 4.2 不定积分的换元积分法与换元积分法

### 4.2.1 换元积分法

**定理 2.1 第一换元积分法** 设  $f(u)$  存在原函数  $F(u)$ ，函数  $u = \varphi(x)$  可导，则有

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = \left[ \int f(u) du \right]_{u=\varphi(x)} = F(\varphi(x)) + C$$

以下当作公式记忆

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \int \frac{dx}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a} \int \left( \frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + (\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d(\frac{x}{a})}{1 + (\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{\frac{1}{a} dx}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} = \int \frac{d(\frac{x}{a})}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\begin{aligned} \int \csc x dx &= \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{d \cos x}{\cos^2 x - 1} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C = \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\sin x} \right| + C = \ln |\cot x - \csc x| + C \end{aligned}$$

$$\int \sec x dx = \ln |\tan x + \sec x| + C$$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d \cos x}{\cos x} = -\ln \cos x + C$$

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = \ln \sin x + C$$

**定理 2.2 第二换元积分法** 设函数  $x = \varphi(t)$  有连续的导数，且  $\varphi'(x) \neq 0$ ，若函数

公式推导

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &\stackrel{x=a \sin t}{=} \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt \\ &= a^2 \int \cos^2 t dt \\ &= a^2 \int \frac{\cos 2t + 1}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} a^2 t + \frac{a^2}{2} \sin t \cos t + C \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C \end{aligned}$$

补充公式汇总

$$\int \sec x dx = \ln |\tan x + \sec x| + C$$

$$\int \csc x \, dx = \ln |\cot x - \csc x| + C$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln(\cos x) + C$$

$$\int \cot x \, dx = \ln(\sin x) + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} \, dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \text{ (可以解决)}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \, dx = \ln(x^2 + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \text{ (可以解决)}$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} \, dx = \frac{a^2}{2} \ln(x^2 + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} \, dx \text{ (可以解决)}$$

$$\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \left( \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \right) + C$$

2

## 5 定积分及其应用

### 5.1 定积分的概念

#### 5.1.1 具体实例

步骤

1. 划分
2. 近似
3. 求和
4. 取极限

---

<sup>2</sup>可以不用递推, 换元  $x = a \tan x$

### 5.1.2 定积分的定义

**定义 1.1** 设  $f(x)$  是定义在闭区间  $[a, b]$  上的有界函数, 在闭区间  $[a, b]$  上任取分割

$$T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

将闭区间  $[a, b]$  分为若干个小闭区间  $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{i-1}, x_i], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$ . 第  $i$  个小闭区间  $[x_i, x_{i+1}]$  的长度表示为  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ , 取  $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$ , 在  $[x_i, x_{i+1}]$  上任取点  $\xi_i$ , 作和式  $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$  (称为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的积分和). 如果不论如何选择分割  $T$  及取在  $[x_i, x_{i+1}]$  上的点  $\xi_i$ , 只要当  $\lambda \rightarrow 0$  时, 该和式总趋于确定的常数  $I$ , 那么称极限  $I$  为  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的**定积分**, 记作  $\int_a^b f(x) dx$ , 即

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

规定

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= - \int_b^a f(x) dx \\ \int_a^a f(x) dx &= 0 \end{aligned}$$

### 5.1.3 定积分的几何意义

## 5.2 定积分的性质

**性质 1**  $\int_a^b dx = b - a$

**性质 2** 线性性

**性质 3** 保号性

**推论 1** 单调性

**推论 2** 有点像夹逼准则

**推论 3** 定积分的绝对值  $\leq$  绝对值的定积分

**性质 4** 区间可加性  $c$  不用在  $a$  和  $b$  之间

### 5.2.1 积分中值定理

**定理 2.1** 设函数  $f(x)$ ,  $g(x)$  在闭区间  $[a, b]$  上连续,  $g(x)$  在区间  $[a, b]$  上不变号, 则

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx \quad (a \leq \xi \leq b)$$

推论 4 <sup>3</sup> 设  $f(x) \in C[a, b]$ , 则存在  $\xi \in [a, b]$ , 使

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

### 5.3 微积分基本定理

#### 5.3.1 积分上限的函数及其导数

定理 若  $f(x) \in C[a, b]$ , 则变上限函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

是  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的一个原函数.

证明 对  $\forall x, x+h \in [a, b]$ , 有

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[ \int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi) \quad (x < \xi < x+h)^4 \\ &= f(x)\end{aligned}$$

变限积分求导

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \int_x^b f(t) dt &= -f(x) \\ \frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt &= f[\varphi(x)]\varphi'(x) \\ \frac{d}{dx} \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt &= \frac{d}{dx} \left[ \int_{\psi(x)}^a f(t) dt + \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt \right] \\ &= f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x)\end{aligned}$$

#### 5.3.2 牛顿-莱布尼兹公式

设  $F(x)$  是连续函数  $f(x)$  在  $[a, b]$  上的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

<sup>3</sup>老师说这个可能比上面的更常用

<sup>4</sup>积分中值定理

## 5.4 定积分的计算方法

### 5.4.1 定积分的换元积分法

[定积分的换元法]

**定理 4.1** 设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上连续, 函数  $x = \varphi(t)$  在  $[\alpha, \beta]$  或  $[\beta, \alpha]$  上有连续导数  $\varphi'(t)$ , 且  $\varphi(\alpha) = a$ ,  $\varphi(\beta) = b$ ,  $\varphi([\alpha, \beta]) = [a, b]$  或  $\varphi([\beta, \alpha]) = [a, b]$ , 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \varphi'(t) dt$$

[奇零偶倍]

**一个结论** <sup>5</sup> 若函数  $f(x)$  在区间  $[-a, a]$  上连续, 则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx$$

有关 三角函数的函数 的几个结论 <sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx \\ \int_0^{\pi} f(\sin x) dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx \\ \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx \end{aligned}$$

### 5.4.2 定积分的分部积分法

**定理 4.2** 若函数  $u(x)$ ,  $v(x)$  在区间  $[a, b]$  上有连续导数, 则

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx$$

<sup>5</sup>接下来可得到奇零偶倍

<sup>6</sup>这里注意这几个积分上限, 若与公式的积分上限不对应, 则不能直接使用这几个公式

Wallis 公式 <sup>7</sup>推导用到分部积分:

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) \, dx \left( = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx \right) \\
 &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \, d \cos x \\
 &= - \sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x (n-1) \sin^{n-2} x \, dx \\
 &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x \, dx \\
 &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \\
 \therefore I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2}
 \end{aligned}$$

当  $n$  为偶数时

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

当  $n$  为奇数时

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$

---

<sup>7</sup>也可称“点火公式”，注意上下限只能是  $\frac{\pi}{2}$  和 0