

微积分复习

廖骏轩

2020 年 12 月 12 日

1

¹我的博客 [MikeWalrus.github.io](https://mikewalrus.github.io) 上可能可以找到更新版本

1 极限与连续

1.1 函数极限存在的条件

1.1.1 归结原理

定理 5.1 海涅定理或归结原理 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $\dot{U}(x_0)$ 内有定义, 则极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ 存在的充分必要条件是: 对于任何含于 $\dot{U}(x_0)$ 且以 x_0 为极限的数列 x_n , 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$.

1.1.2 夹逼准则与两个重要极限

定理 5.2 夹逼准则 如果函数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 满足下列条件:

(1) 当 $x \in \dot{U}(x_0)$ 时, 有 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$;

(2) 当 $x \rightarrow \infty$ 时, 有 $g(x) \rightarrow A$, $h(x) \rightarrow A$,

则当 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 的极限存在, 且为 A .

两个重要极限

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

1.2 闭区间上连续函数的性质

定义 8.1 最值 设函数 $f(x)$, $x \in I$; 对于 $x_0 \in I$, $\forall x \in I$, 若 $f(x) \leq f(x_0)$ 则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的最大值, x_0 是最大值点; 若 $f(x) \geq f(x_0)$ 则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的最小值, x_0 是最小值点.

定理 8.1 最大值最小值定理 闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 在区间上取得最大值及最小值, 即存在 $\alpha, \beta \in [a, b]$, 使得 $\forall x \in [a, b]$, 均有 $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$.

定理 8.2 有界性定理 若 f 在闭区间 $[a, b]$ 连续, 则 f 在 $[a, b]$ 有界.

定理 8.3 零点定理 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a)f(b) < 0$ 则至少存在一点 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f(\xi) = 0$. [\[关于开区间\]](#)

定理 8.4 介值定理 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续, 且 $f(a) \neq f(b)$, 则对于介于 $f(a)$, $f(b)$ 之间的任意一个数 A , 总存在 $\xi \in [a, b]$ 使得 $f(\xi) = A$. [\[关于开区间\]](#)

推论 1 闭区间上的连续曲线必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

2 导数与微分

2.1 函数的求导法则

$$\begin{aligned}
 (C)' &= 0 & (x^\alpha)' &= \alpha x^{\alpha-1} \\
 (\log_a |x|)' &= \frac{1}{x \ln a} & (\ln(|x|))' &= \frac{1}{x} \\
 (a^x)' &= a^x \ln a & (e^x)' &= e^x \\
 (\sin x)' &= \cos x & (\cos x)' &= -\sin x \\
 (\tan x)' &= \sec^2 x & (\cot x)' &= -\csc^2 x \\
 (\sec x)' &= \sec x \tan x & (\csc x)' &= -\csc x \cot x \\
 (\arcsin x)' &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (\arccos x)' &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
 (\arctan x)' &= \frac{1}{1+x^2} & (\operatorname{arccot} x)' &= -\frac{1}{1+x^2} \\
 (\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}))' &= \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}
 \end{aligned}$$

2.2 高阶导数

2.2.1 高阶导数的定义

2.2.2 高阶导数的运算法则

加法减法

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$$

乘法莱布尼兹公式

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

常用的高阶导数

$$\begin{aligned}
 (a^x)^{(n)} &= a^x (\ln x)^n \\
 (e^x)^{(n)} &= e^x \\
 (\sin(x))^{(n)} &= \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2}) \\
 (\cos(x))^{(n)} &= \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2}) \\
 \left(\frac{1}{a+bx}\right)^{(n)} &= (-1)^n \frac{b^n n!}{(a+bx)^{n+1}} \\
 (\ln(1+x))^{(n)} &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}
 \end{aligned}$$

3 中值定理与导数的应用

3.1 微分中值定理

3.1.1 费马定理

定义 1.1 极值 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义, 点 x_0 是区间 (a, b) 内一点, 若存在 x_0 的邻域 $U(x_0)$, 使得 $\forall x \in U(x_0)$, 有 $f(x_0) \geq f(x)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 取得**极大值**, 称点 x_0 为**极大值点**.

定理 1.1 Fermat 定理 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极值, 若 $f'(x_0)$ 存在, 则必有

$$f'(x_0) = 0$$

3.1.2 罗尔中值定理

定理 1.2 Rolle 中值定理 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 开区间 (a, b) 内可导, 并且满足 $f(a) = f(b)$, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) = 0$

3.1.3 拉格朗日中值定理

定理 1.3 Lagrange 中值定理 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 开区间 (a, b) 内可导, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta(b - a))(b - a), \quad 0 < \theta < 1$$

$$f(a + h) - f(a) = f'(a + \theta h)h, \quad 0 < \theta < 1$$

有限增量公式

$$\Delta y = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x$$

Δx 不一定很小, 所以不是 dx

推论 1 若 $f'(x) \equiv 0$, $x \in I$, 则 $f(x)$ 在 I 上恒等于常数.

推论 2 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 (a, b) 内满足条件 $f'(a) = g'(b)$, 则有 $f(x) = g(x) + C, x \in (a, b)$.

推论 3 若 $f'(x) \equiv C$, $x \in I$, 则 $f(x)$ 在 I 内为一线性函数, 即 $f(x) = Cx + b$.

3.1.4 柯西中值定理

定理 1.4 Cauchy 中值定理 如果函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, 开区间 (a, b) 内可导, 且 $F'(x)$ 在 (a, b) 的每一点均不为零, 那么在 (a, b) 内至少有一点 ξ , 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{F(b) - F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

3.2 泰勒公式

定理 2.1 Taylor 中值定理 (Lagrange 余项) 如果函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的某个开区间 (a, b) 内具有直到 $(n+1)$ 阶的导数, 则对任一 $x \in (a, b)$, 有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{(n+1)}$$

Maclaurin 公式

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{(n+1)}$$

Peano 余项

$$R_n(x) = o(x^n)$$

误差估计式

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x|^{(n+1)}$$

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|(x - x_0)|^{(n+1)}$$

常用的麦克劳林公式

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k}(x) \text{ or } R_{2k-1}(x)$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k+1}(x) \text{ or } R_{2k}(x)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!} + R_n(x) \quad R_n = \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)}x^{n+1}$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{(\alpha)(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_n(x)$$

3.3 函数的单调性与极值

3.4 洛必达法则

3.5 曲线的凸性与函数作图

3.5.1 曲线的凸性

定义 5.1 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, $\forall x_1, x_2 \in I$ 和 $\forall \lambda \in (0, 1)$ 总有

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \leq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

则称 f 为区间 I 上的**下凸函数**, 称曲线 $y = f(x)$ 在区间 I 上是**下凸**的. 反之, 如果总有

$$f[\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2] \geq \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2)$$

则称 f 为区间 I 上的**上凸函数**, 称曲线 $y = f(x)$ 在区间 I 上是**上凸**的.

定义 5.1' 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, $\forall x_1, x_2 \in I$, 如果

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

则称 f 为区间 I 上的**下凸函数**, 称曲线 $y = f(x)$ 在区间 I 上是**下凸**的. 反之...

定理 5.1 设 $f(x)$ 在区间 I 上可导, 则 $f(x)$ 在区间 I 下凸 (上凸) 的充分必要条件是 $f'(x)$ 在区间 I 单调递增 (递减).

定理 5.2 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, (a, b) 上具有二阶导数, 那么

- (1) 若在 (a, b) 内 $f''(x) > 0$, 则 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 的图形是下凸的;
- (2) 若在 (a, b) 内 $f''(x) < 0$, 则 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 的图形是上凸的;

定义 5.2 拐点 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续, x_0 是区间 I 内的点. 如果曲线在点 $(x_0, f(x_0))$ 的两侧凸性相反, 则称点 $(x_0, f(x_0))$ 为此曲线的拐点.

3.5.2 渐近线

定义 5.3 若曲线 C 上的动点 P 沿着曲线无限地远离原点时, 点 P 与某一固定直线 L 的距离趋于零, 则称直线 L 为曲线的渐近线. 特别地,

- (1) 如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$, 则直线 $y = A$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条水平渐近线.
- (2) 如果 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x_0) = \infty$, 则直线 $x = x_0$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条铅直 (或垂直) 渐近线.
- (3) 斜渐近线

定理 5.3 如果下述两极限存在 (有限)

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx]$$

则 $y = kx + b$ 是 $y = f(x)$ 的斜渐近线.

3.6 平面曲线的曲率

3.6.1 弧微分

弧微分公式

$$ds = \sqrt{1 + (y')^2} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$$

$$ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

$$ds = \sqrt{\rho^2(\theta) + \rho'^2(\theta)} d\theta$$

3.6.2 曲线的曲率

平均曲率

$$\bar{k} = \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right|$$

曲率

$$k = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\alpha}{ds} \right|$$

3.6.3 曲率的计算

参数方程

$$k = \frac{|x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)|}{[x'^2(t) + y'^2(t)]^{\frac{2}{3}}}$$

普通方程

$$k = \frac{|y''|}{[1 + y'^2]^{\frac{2}{3}}}$$

极坐标

$$k = \frac{|\rho^2(\theta) + 2\rho'(\theta)\rho''(\theta) - \rho(\theta)\rho''(\theta)|}{[\rho'^2(\theta) + \rho^2(\theta)]^{\frac{2}{3}}}$$

3.6.4 曲率圆与曲率半径

曲率半径

$$R = \frac{1}{k}$$

4 不定积分

4.1 原函数与不定积分的概念

定义 1.1 原函数 设函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 在区间 I 上有定义, 若 $\forall x \in I$, 有 $F'(x) = f(x)$, 则称函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

$$\begin{array}{ll}
 (C)' = 0 & \int 0 = C \\
 (x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} & \int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \\
 (\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a} & \\
 (\ln(|x|))' = \frac{1}{x} & \int \frac{1}{x} dx = \ln |x| + C \\
 (a^x)' = a^x \ln a & \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \\
 (e^x)' = e^x & \int e^x dx = e^x + C \\
 (\sin x)' = \cos x & \int \cos x dx = \sin x + C \\
 (\cos x)' = -\sin x & \int \sin x dx = -\cos x + C \\
 (\tan x)' = \sec^2 x & \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \int \sec^2 x dx = \tan x + C \\
 (\cot x)' = -\csc^2 x & \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = \int \csc^2 x dx = -\cot x + C \\
 (\sec x)' = \sec x \tan x & \int \sec x \tan x dx = \sec x + C \\
 (\csc x)' = -\csc x \cot x & \int \csc x \cot x dx = -\csc x + C \\
 (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C \\
 (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\arccos x + C \\
 (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} & \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + C \\
 (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2} & \int \frac{1}{1+x^2} dx = -\operatorname{arccot} x + C \\
 (\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}))' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} & \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C
 \end{array}$$

4.2 不定积分的换元积分法与换元积分法

4.2.1 换元积分法

定理 2.1 第一换元积分法 设 $f(u)$ 存在原函数 $F(u)$ ，函数 $u = \varphi(x)$ 可导，则有

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x) dx = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = \left[\int f(u) du \right]_{u=\varphi(x)} = F(\varphi(x)) + C$$

以下当作公式记忆

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \int \frac{dx}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} \right) dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + (\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a} \int \frac{d(\frac{x}{a})}{1 + (\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{\frac{1}{a} dx}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} = \int \frac{d(\frac{x}{a})}{\sqrt{1 - (\frac{x}{a})^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\begin{aligned} \int \csc x dx &= \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{d \cos x}{\cos^2 x - 1} \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\cos x + 1} \right| + C = \ln \left| \frac{\cos x - 1}{\sin x} \right| + C = \ln |\cot x - \csc x| + C \end{aligned}$$

$$\int \sec x dx = \ln |\tan x + \sec x| + C$$

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{d \cos x}{\cos x} = -\ln \cos x + C$$

$$\int \cot x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d \sin x}{\sin x} = \ln \sin x + C$$

定理 2.2 第二换元积分法 设函数 $x = \varphi(t)$ 有连续的导数，且 $\varphi'(x) \neq 0$ ，若函数

公式推导

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2 - x^2} dx &\stackrel{x=a \sin t}{=} \int \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} \cdot a \cos t dt \\ &= a^2 \int \cos^2 t dt \\ &= a^2 \int \frac{\cos 2t + 1}{2} dt \\ &= \frac{1}{2} a^2 t + \frac{a^2}{2} \sin t \cos t + C \\ &= \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C \end{aligned}$$

补充公式汇总

$$\int \sec x dx = \ln |\tan x + \sec x| + C$$

$$\int \csc x \, dx = \ln |\cot x - \csc x| + C$$

$$\int \tan x \, dx = -\ln(\cos x) + C$$

$$\int \cot x \, dx = \ln(\sin x) + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2 - a^2} \, dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} \text{ (可以解决)}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \, dx = \ln(x^2 + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} \text{ (可以解决)}$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} \, dx = \frac{a^2}{2} \ln(x^2 + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + C$$

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} \, dx \text{ (可以解决)}$$

$$\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \left(\frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} \right) + C$$

2

5 定积分及其应用

5.1 定积分的概念

5.1.1 具体实例

步骤

1. 划分
2. 近似
3. 求和
4. 取极限

²可以不用递推, 换元 $x = a \tan x$

5.1.2 定积分的定义

定义 1.1 设 $f(x)$ 是定义在闭区间 $[a, b]$ 上的有界函数, 在闭区间 $[a, b]$ 上任取分割

$$T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

将闭区间 $[a, b]$ 分为若干个小闭区间 $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{i-1}, x_i], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$. 第 i 个小闭区间 $[x_i, x_{i+1}]$ 的长度表示为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, 取 $\lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{\Delta x_i\}$, 在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上任取点 ξ_i , 作和式 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ (称为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的积分和). 如果不论如何选择分割 T 及取在 $[x_i, x_{i+1}]$ 上的点 ξ_i , 只要当 $\lambda \rightarrow 0$ 时, 该和式总趋于确定的常数 I , 那么称极限 I 为 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的**定积分**, 记作 $\int_a^b f(x) dx$, 即

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$

规定

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= - \int_b^a f(x) dx \\ \int_a^a f(x) dx &= 0 \end{aligned}$$

5.1.3 定积分的几何意义

5.2 定积分的性质

性质 1 $\int_a^b dx = b - a$

性质 2 线性性

性质 3 保号性

推论 1 单调性

推论 2 有点像夹逼准则

推论 3 定积分的绝对值 \leq 绝对值的定积分

性质 4 区间可加性 c 不用在 a 和 b 之间

5.2.1 积分中值定理

定理 2.1 设函数 $f(x)$, $g(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续, $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上不变号, 则

$$\int_a^b f(x)g(x) dx = f(\xi) \int_a^b g(x) dx \quad (a \leq \xi \leq b)$$

推论 4 ³ 设 $f(x) \in C[a, b]$, 则存在 $\xi \in [a, b]$, 使

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi)(b-a)$$

5.3 微积分基本定理

5.3.1 积分上限的函数及其导数

定理 若 $f(x) \in C[a, b]$, 则变上限函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数.

证明 对 $\forall x, x+h \in [a, b]$, 有

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\Phi(x+h) - \Phi(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \left[\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt \\ &= \lim_{h \rightarrow \infty} f(\xi) \quad (x < \xi < x+h)^4 \\ &= f(x)\end{aligned}$$

变限积分求导

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \int_x^b f(t) dt &= -f(x) \\ \frac{d}{dx} \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt &= f[\varphi(x)]\varphi'(x) \\ \frac{d}{dx} \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt &= \frac{d}{dx} \left[\int_{\psi(x)}^a f(t) dt + \int_a^{\varphi(x)} f(t) dt \right] \\ &= f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\psi(x)]\psi'(x)\end{aligned}$$

[变限函数求导]

5.3.2 牛顿-莱布尼兹公式

设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的一个原函数, 则

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

³老师说这个可能比上面的更常用

⁴积分中值定理

5.4 定积分的计算方法

5.4.1 定积分的换元积分法

[定积分的换元法]

定理 4.1 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 函数 $x = \varphi(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 或 $[\beta, \alpha]$ 上有连续导数 $\varphi'(t)$, 且 $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, $\varphi([\alpha, \beta]) = [a, b]$ 或 $\varphi([\beta, \alpha]) = [a, b]$, 则

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(t) \varphi'(t) dt$$

[奇零偶倍]

一个结论 ⁵ 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-a, a]$ 上连续, 则

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_0^a [f(x) + f(-x)] dx$$

有关 三角函数的函数 的几个结论 ⁶

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) dx \\ \int_0^{\pi} f(\sin x) dx &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx \\ \int_0^{\pi} x f(\sin x) dx &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\pi} 2f(\sin x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) dx \end{aligned}$$

5.4.2 定积分的分部积分法

定理 4.2 若函数 $u(x)$, $v(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上有连续导数, 则

$$\int_a^b u(x) v'(x) dx = [u(x) v(x)]_a^b - \int_a^b v(x) u'(x) dx$$

⁵接下来可得到奇零偶倍

⁶这里注意这几个积分上限, 若与公式的积分上限不对应, 则不能直接使用这几个公式

Wallis 公式 ⁷推导用到分部积分:

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x) \, dx \left(= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x \, dx \right) \\
 &= - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x \, d \cos x \\
 &= - \sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x (n-1) \sin^{n-2} x \, dx \\
 &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2 x) \sin^{n-2} x \, dx \\
 &= (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x \, dx - (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx \\
 \therefore I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2}
 \end{aligned}$$

当 n 为偶数时

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

当 n 为奇数时

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$

5.5 定积分的几何运用举例

5.5.1 平面图形的面积

直角坐标

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)] \, dx$$

$$A = \int_a^b [\psi(y) - \varphi(y)] \, dy$$

极坐标

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} \varphi^2(\theta) \, d\theta$$

5.5.2 平面曲线的弧长

⁸

$$s = \int_a^b ds$$

⁷也可称“点火公式”，注意上下限只能是 $\frac{\pi}{2}$ 和 0

⁸复习弧微分公式

5.5.3 体积

绕 x 轴和绕 y 轴的旋转体的体积

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

$$V_y = 2\pi \int_a^b xf(x) dx \quad 9$$

5.5.4 旋转体的侧面积

$$S_{\text{侧}} = 2\pi \int_a^b f(x) ds$$

$$= 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} ds$$

6 反常积分

6.1 积分限为无穷的反常积分

定义 1.1 设函数 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上连续 (或分段连续), 对于任意 $t > a$, 积分 $\int_a^t f(x) dx$ 存在, 则定义 $\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$, 并称 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 为 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上的反常积分. 如果极限 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_a^t f(x) dx$ 存在, 则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 收敛; 若此极限不存在, 则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ 发散.

$(-\infty, b]$ 上的反常积分类似.

对于定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的连续函数 $f(x)$ 的反常积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ 作如下的定义:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{+\infty} f(x) dx$$

其中 c 为任意实数, 当且仅当等式右边的两个积分同时收敛时, 称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ 收敛, 且该极限值称为反常积分的值, 否则称其发散.

6.2 无界函数的反常积分

瑕点 若函数 $f(x)$ 在点 a 的任一领域内都无界, 则称点 a 为函数 $f(x)$ 的瑕点.

定义 2.1 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b)$ 上连续, 点 b 是 $f(x)$ 的瑕点, 对任意 $0 < \varepsilon < b - a$, $f(x)$ 在 $[a, b - \varepsilon]$ 可积, 定义

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

⁹柱壳法

若等式右边极限存在, 则称反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛, 且该极限值称为反常积分的值, 否则称其发散.

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a, c) \cup (c, b]$ 上连续, 点 c 是 $f(x)$ 的瑕点, 其反常积分

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) dx &= \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0^+} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x) dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0^+} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x) dx\end{aligned}$$

当且仅当右端两个极限都存在时, 称反常积分 $\int_a^b f(x) dx$ 收敛, 且该极限值称为反常积分的值, 否则称其发散.

7 微分方程

7.1 微分方程的基本概念

7.1.1 分类

- 常微分方程: 未知函数是一元的
- 偏微分方程: 未知函数是多元的

7.1.2 常微分方程的基本概念

定义 1.1 含有未知函数的导数 (包含高阶导数) 或微分的等式 (表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系) 称为微分方程. 未知函数是一元函数的微分方程称为常微分方程

微分方程中未知函数的导数的最高阶数称为微分方程的阶. 一般的 n 阶微分方程的形式是

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

或

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \quad (n \text{ 阶显式微分方程})$$

- 微分方程的解: 使方程称为恒等式的函数.
- 通解: 解中所含独立的任意常数的个数与方程的阶数相同.
- 特解: 不含任意常数的解, 其图形称为积分曲线.
- 定解条件: 确定通解中任意常数的条件.

7.2 一阶微分方程

7.2.1 可分离变量的微分方程

若一阶微分方程可写成

$$\frac{dx}{dy} = g(x)h(y) \quad \text{或} \quad M(y) dy = N(x) dx$$

则称它为可分离变量的方程. 对于已分离变量的方程 $M(y) dy = N(x) dx$, 则有

$$\int M(y) dy = \int N(x) dx + C$$

[可分离变量的方程]

7.2.2 可化为可分离变量型的方程

定义 2.1 形如

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

的方程, 称为齐次型方程

解法 令 $u = \frac{y}{x}$, 则 $y = ux$,

$$\frac{dy}{dx} = u + \frac{du}{dx}$$

代入原方程得

$$u + \frac{du}{dx} = \varphi(u)$$

分离变量:

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x}$$

两边积分, 得

$$\int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x}$$

附: 可化为齐次方程的方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1} (c^2 + c_1^2 \neq 0)^{10}$$

1. 当 $\frac{a_1}{a} \neq \frac{b_1}{b}$ 时, 作变换 $x = X + h, y = Y + k$ (h, k 为待定常数), 则 $dx = dX, dy = dY$, 原方程化为

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY + ah + bk + c}{a_1X + b_1Y + a_1h + b_1k + c_1}$$

令

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{cases}$$

解出 h, k

$$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY}{a_1X + b_1Y}$$

¹⁰也适用于 $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right) (c^2 + c_1^2 \neq 0)$

这样就转化为齐次方程了. 求出其解后, 将 $X = x - h, Y = y - k$ 代入, 即得原方程的解.

2. 当 $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \lambda$ 时, 原方程可化为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{\lambda(ax + by) + c_1} \quad (b \neq 0)$$

令 $v = ax + by$, 则

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= a + b \frac{dy}{dx} \\ \frac{dv}{dx} &= a + b \frac{v + c}{\lambda v + c_1} \end{aligned}$$

即得到可分离变量方程.

7.2.3 一阶线性微分方程

标准形式

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

若 $Q(x) \equiv 0$, 称其为齐次方程.¹¹

若 $Q(x) \neq 0$, 称其为非齐次方程.

解法

$$\begin{aligned} y' + P(x)y &= Q(x) \\ e^{\int P(x) dx} y' + e^{\int P(x) dx} P(x)y &= Q(x)e^{\int P(x) dx} \\ (e^{\int P(x) dx} y)' &= Q(x)e^{\int P(x) dx} \\ e^{\int P(x) dx} y &= \int Q(x)e^{\int P(x) dx} dx \end{aligned}$$

结论

$$\begin{aligned} y &= e^{-\int P(x) dx} \int [Q(x)e^{\int P(x) dx} + C] dx \\ &= Ce^{-\int P(x) dx} + e^{-\int P(x) dx} \int Q(x)e^{\int P(x) dx} dx \end{aligned} \quad 12$$

7.2.4 伯努利方程

Bernoulli 方程

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^\alpha \quad (\alpha \neq 0, 1)$$

¹¹注意: 这个“齐次方程”与上面介绍的可以利用换元解决的“齐次型方程”不是一个概念, 不要搞混了.

¹²用的时候这里积分以后不用 $+C$

解法 令 $z = y^{1-\alpha}$

$$y^{-\alpha} + P(x)y^{1-\alpha} = Q(x)$$

$$(1-\alpha)y^{-\alpha} + (1-\alpha)P(x)y^{1-\alpha} = (1-\alpha)Q(x)$$

因为 $\frac{dz}{dx} = (1-\alpha)y^{-\alpha}$,

$$\frac{dz}{dx} + (1+\alpha)P(x)z = (1+\alpha)Q(x)$$

到此已转化为一阶线性微分方程, 求完 $z = y^{1-\alpha}$ 带回.

7.3 可降阶的高阶微分方程

1. $y^{(n)} = f(x)$

2. n 次积分.

3. $y'' = f(x, y')$ 即没有 y

令 $p = y'$, 变为 $p' = f(x, p)$.

4. $y'' = f(y, y')$ 即不显含 x 令 $z = y'$, 就有

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} p$$

变成以 y 为自变量的

$$p \frac{dp}{dy} = f(y, p)$$

解出后再分离变量解出 y .

7.4 线性微分方程解的结构

标准的 n 阶线性微分方程的一般形式为

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$$

若 $Q(x) \equiv 0$, 称其为齐次方程.

若 $Q(x) \neq 0$, 称其为非齐次方程.

7.4.1 二阶齐次线性微分方程解的结构

标准的一般形式为

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (1)$$

定理 7.4.1 (叠加原理) 若函数 $y_1(x), y_2(x)$ 是微分方程(1)的两个解, 则函数

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) \quad (2)$$

也是方程(1)的解.

定义 7.4.1 设 $y_i(x), i = 1, \dots, n$ 为定义在区间 I 上的 n 个函数, 若存在 n 个不全为零的常数 $k_i, i = 1, \dots, n$, 使得

$$\sum_{i=1}^n k_i y_i(x) = 0, \quad \forall x \in I \quad (3)$$

则称 $y_i(x), i = 1, \dots, n$ 在区间 I 上线性相关, 否则¹³ 称 $y_i(x), i = 1, \dots, n$ 在区间 I 上线性无关

定理 7.4.2 若 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程(1)的两个线性无关的解, 则方程(1)的通解 (此时也是全部解) 可以写为

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

7.4.2 二阶非齐次线性微分方程解的结构

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (4)$$

定理 7.4.3 二阶非齐次线性微分方程(4)的通解等于它所对应的齐次线性微分方程(1)的通解与它本身的一个特解之和.¹⁴

7.5 常系数线性微分方程

$$y'' + py' + qy = 0 \quad (5)$$

7.5.1 二阶常系数齐次线性微分方程

特征方程

$$r^2 + pr + q = 0$$

特征根: r_1, r_2

表 1: 根据特征根得到的通解

特征根	通解
$r_1 \neq r_2$ 实根	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y = (C_1 + C_2 x) e^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x)$

¹³即 $\sum_{i=1}^n k_i y_i(x) = 0, \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = \dots = 0$

¹⁴ “非齐通 = 齐通 + 非齐特”, 还可以推广到 n 阶

- 二阶：二阶导 y'' ;
- 常系数：系数都是常数;
- 齐次：右边不是 $f(x)$ 而是 0;
- 线性： y 和 y 的（高阶）导数都是一次的;

附：推广到一般 n 阶常系数齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0 \tag{6}$$

特征方程为

$$r^{(n)} + a_1r^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}r' + a_nr = 0 \tag{7}$$

特征根： r_1, r_2, \cdots, r_n

表 2: n 阶的通解的构成

特征方程的根		微分方程相应的线性无关的解项
单根	实根 r	给出一项： e^{rx}
	负根 $\alpha \pm i\beta$	给出两项： $e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$
k 重根 $k > 1$	实根 r	给出 k 项： $e^{rx}, xe^{rx}, \cdots, x^{k-1}e^{rx}$
	负根 $\alpha \pm i\beta$	$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x$ 给出 $2k$ 项： $xe^{\alpha x} \cos \beta x, xe^{\alpha x} \sin \beta x, \cdots,$ $x^{k-1}e^{\alpha x} \cos \beta x, x^{k-1}e^{\alpha x} \sin \beta x$