微积分复习

廖骏轩

2020 年 12 月 19 日

[1]

[1] 我的博客 MikeWalrus.github.io 上可能可以找到更新版本

1 极限与连续

1.1 预备知识

1. 一些函数性质：有界性、单调性、周期性、对称性；

2. 基本初等函数：幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数；

3. 初等函数：由常数及基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的复合所构成的可用一个解析式表示的函数[2]

1.2 数列极限

1.2.1 数列极限的概念

定义 1.2.1 (“$\varepsilon - N$”语言) 如果给定数列 $\{a_n\}$，使得 $\forall \varepsilon > 0$（不论多么小），都 $\exists N \in \mathbf{Z}^+$，使得当 $n > N$ 时，$|a_n - A| < \varepsilon$ 恒成立，则称数列 $\{a_n\}$ 以 A 为极限，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A$$

或者

$$x_n \to A(n \to \infty).$$

1.2.2 数列极限的性质

唯一性、有界性、保号性、归并性[3]

1.2.3 数列极限存在的判别定理

1. 夹逼准则，

2. 单调有界原理：单调有界数列必有极限.

1.3 函数极限存在的条件

1.3.1 归结原理

定理 1.3.1 (**海涅定理或归结原理**) 设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个去心邻域 $\dot{U}(x_0)$ 内有定义，则极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 存在的充分必要条件是：对于任何含于 $\dot{U}(x_0)$ 且以 x_0 为极限的数列 x_n，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$.

---

[2]有些分段函数就不是，但是有些分段函数实际上也可以用一个式子表示，如 $|x| = \sqrt{x^2}$，它是基本初等函数.

[3]和归结原理类似

1.3.2 夹逼准则与两个重要极限

定理 1.3.2 (**夹逼准则**) 如果函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 满足下列条件：
（1）当 $x \in \dot{U}(x_0)$ 时，有 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$；
（2）当 $x \to \infty$ 时，有 $g(x) \to A$，$h(x) \to A$，
则当 $x \to \infty$ 时，$f(x)$ 的极限存在，且为 A.

两个重要极限

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

1.4 无穷小与无穷大

1.4.1 无穷小

定义 1.4.1 无穷小量就是极限为 0 的变量.

定理 1.4.1 (**函数极限与无穷小的关系**) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 的充分必要条件是 $f(x) = A + \alpha(x)$，其中 $\alpha(x)$ 是 $x \to x_0$ 时的无穷小.

定理 1.4.2 1. **有限个**无穷小的和仍然是无穷小；

2. **有界函数**与无穷小之积仍然是无穷小，从而常数与无穷小之积仍然是无穷小；

3. **有限个**无穷小之积仍然是无穷小.

1.4.2 无穷小的比较

定义 1.4.2 设 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为自变量 x 的同一极限过程中的两个无穷小，

1. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 0$，则称 $\beta(x)$ 是比 $\alpha(x)$ **高阶**的无穷小，记为 $\beta = o(\alpha)$，或称 α 是比 β **低阶**的无穷小；

2. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = C \neq 0$，则称 $\beta(x)$ 是与 $\alpha(x)$ 同阶的无穷小，记为 $\beta = O(\alpha)$;

3. 若 $\lim \frac{\beta}{\alpha} = 1$，则称 $\beta(x)$ 与 $\alpha(x)$ 是**等价无穷小**，记为 $\alpha \sim \beta$.

常见的等价无穷小 [4] 当 $x \to 0$ 时

$$\begin{array}{llll}
\sin x \sim x, & \tan x \sim x, & \arcsin x \sim x, & \arctan x \sim x \\
1-\cos x \sim \frac{1}{2}x^2, & \ln(1+x) \sim x, & e^x - 1 \sim x, & (1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x \\
\alpha^x - 1 \sim x \ln x, & \sqrt[n]{1+x} \sim \frac{x}{n} & &
\end{array}$$

$$x - \sin x \sim \frac{1}{6}x^3, \quad x - \tan x \sim \frac{1}{3}x^3, \quad \tan x - \sin x \sim \frac{1}{2}x^3$$

[4] 等价无穷小代换必须是分子分母整体或者因式

1.5 函数的连续性和间断点

1.5.1 函数的连续性

1.5.2 间断点及分类

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则称 x_0 为函数的**间断点**. 第一类间断点 x_0：左、右极限 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$，$\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ 均存在的间断点称为**第一类间断点**，有如下两种类型：

1. 可去间断点：左、右极限存在并且相等；
2. 跳跃间断点：左、右极限存在但不相等；

第二类间断点 x_0：非第一间断点统称为**第二类间断点**.[5]

1.6 闭区间上连续函数的性质

定义 1.6.1 (**最值**) 设函数 $f(x)$，$x \in I$；对于 $x_0 \in I$，$\forall x \in I$，若 $f(x) \leqslant f(x_0)$ 则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的**最大值**, x_0 是**最大值点**；若 $f(x) \geqslant f(x_0)$ 则称 $f(x_0)$ 为 $f(x)$ 在区间 I 上的**最小值**, x_0 是**最小值点**.

定理 1.6.1 (**最大值最小值定理**) 闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 在区间上取得最大值及最小值，即存在 $\alpha, \beta \in [a,b]$，使得 $\forall x \in [a,b]$，均有 $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$.

定理 1.6.2 (**有界性定理**) 若 f 在闭区间 $[a,b]$ 连续，则 f 在 $[a,b]$ 有界.

定理 1.6.3 (**零点定理**) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b) < 0$ 则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$，使得 $f(\xi) = 0$. [关于开闭区间]

定理 1.6.4 (**介值定理**) 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a) \neq f(b)$，则对于介于 $f(a)$，$f(b)$ 之间的任意一个数 A，总存在 $\xi \in [a,b]$ 使得 $f(\xi) - A$. [关于开闭区间]

推论 1 闭区间上的连续曲线必取得介于最大值和最小值之间的任何值.

[5]考试可以不区分第二类间断点的无穷间断点和震荡间断点.

2 导数与微分

2.1 函数的求导法则

$$
\begin{aligned}
&(C)' = 0 && (x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1} \\
&(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a} && (\ln(|x|))' = \frac{1}{x} \\
&(a^x)' = a^x \ln x && (e^x)' = e^x \\
&(\sin x)' = \cos x && (\cos x)' = -\sin x \\
&(\tan x)' = \sec^2 x && (\cot x)' = -\csc^2 x \\
&(\sec x)' = \sec x \tan x && (\csc x)' = -\csc x \cot x \\
&(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
&(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} && (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2} \\
&(\ln(x+\sqrt{x^2 \pm a^2}))' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}
\end{aligned}
$$

2.2 高阶导数

2.2.1 高阶导数的定义

2.2.2 高阶导数的运算法则

加法减法

$$(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$$

乘法：莱布尼兹公式

$$(u \cdot v)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

常用的高阶导数

$$
\begin{aligned}
(a^x)^{(n)} &= a^x (\ln x)^n \\
(e^x)^{(n)} &= e^x \\
(\sin(x))^{(n)} &= sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2}) \\
(\cos(x))^{(n)} &= cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2}) \\
\left(\frac{1}{a+bx}\right)^{(n)} &= (-1)^n \frac{b^n n!}{(a+bx)^{n+1}} \\
(\ln(1+x))^{(n)} &= (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n}
\end{aligned}
$$

3 中值定理与导数的应用

3.1 微分中值定理

3.1.1 费马定理

定义 1.1 极值 设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，点 x_0 是区间 (a,b) 内一点，若存在 x_0 的邻域 $U(x_0)$，使得 $\forall x \in U(x_0)$，有 $f(x_0) \geqslant f(x)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 取得**极大值**，称点 x_0 为**极大值点**.

定理 3.1.1 (Fermat **定理**) 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处取得极值，若 $f'(x_0)$ 存在，则必有

$$f'(x_0) = 0$$

3.1.2 罗尔中值定理

定理 3.1.2 (Rolle **中值定理**) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，开区间 (a,b) 内可导，并且满足 $f(a) = f(b)$, 则 $\exists \xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = 0$

3.1.3 拉格朗日中值定理

定理 3.1.3 (Lagrange **中值定理**) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，开区间 (a,b) 内可导，则 $\exists \xi \in (a,b)$，使得

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \\ f(b)-f(a) &= f'(\xi)(b-a) \\ f(b)-f(a) &= f'(a+\theta(b-a))(b-a), \quad 0<\theta<1 \\ f(a+h)-f(a) &= f'(a+\theta h)h, \quad 0<\theta<1 \end{aligned}$$

有限增量公式

$$\Delta y = f'(x+\theta \Delta x)\Delta x$$

Δx 不一定很小，所以不是 $\mathrm{d}x$

推论 1 若 $f'(x) \equiv 0$，$x \in I$，则 $f(x)$ 在 I 上恒等于常数.

推论 2 若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 (a,b) 内满足条件 $f'(a) = g'(b)$，则有 $f(x) = g(x) + C, x \in (a,b)$.

推论 3 若 $f'(x) \equiv C$，$x \in I$，则 $f(x)$ 在 I 内为一线性函数，即 $f(x) = Cx + b$.

3.1.4 柯西中值定理

定理 3.1.4 (Cauchy **中值定理**) 如果函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，开区间 (a,b) 内可导，且 $F'(x)$ 在 (a,b) 的每一点均不为零，那么在 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{F(b)-F(a)} = \frac{f'(\xi)}{F'(\xi)}$$

3.2 泰勒公式

定理 3.2.1 (Taylor **中值定理（**Lagrange **余项））** 如果函数 $f(x)$ 在含有 x_0 的某个开区间 (a,b) 内具有直到 $(n+1)$ 阶的导数，则对任一 $x\in(a,b)$，有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$
$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{(n+1)}$$

Maclaurin 公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_n(x)$$
$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{(n+1)}$$

Peano 余项

$$R_n(x)=o(x^n)$$

误差估计式

$$|R_n(x)|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}|x|^{(n+1)}$$
$$|R_n(x)|\leqslant\frac{M}{(n+1)!}|(x-x_0)|^{(n+1)}$$

常用的麦克劳林公式

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$$
$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!}+R_{2k}(x)orR_{2k-1}(x)$$
$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+R_{2k+1}(x)orR_{2k}(x)$$
$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n!}+R_n(x)\qquad R_n=\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)}x^{n+1}$$
$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{(\alpha)(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+R_n(x)$$

3.3 函数的单调性与极值

3.4 洛必达法则

3.5 曲线的凸性与函数作图

3.5.1 曲线的凸性

定义 5.1 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，$\forall x_1, x_2 \in I$ 和 $\forall \lambda \in (0,1)$ 总有

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

则称 f 为区间 I 上的**下凸函数**，称曲线 $y = f(x)$ 在区间 I 上是**下凸**的. 反之，如果总有

$$f[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

则称 f 为区间 I 上的**上凸函数**，称曲线 $y = f(x)$ 在区间 I 上是**上凸**的.

定义 5.1' 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，$\forall x_1, x_2 \in I$，如果

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

则称 f 为区间 I 上的**下凸函数**，称曲线 $y = f(x)$ 在区间 I 上是**下凸**的. 反之...

定理 3.5.1 设 $f(x)$ 在区间 I 上可导，则 $f(x)$ 在区间 I 下凸（上凸）的充分必要条件是 $f'(x)$ 在区间 I 单调递增（递减）.

定理 3.5.2 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，(a,b) 上具有二阶导数，那么

（1）若在 (a,b) 内 $f''(x) > 0$，则 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 的图形是下凸的；

（2）若在 (a,b) 内 $f''(x) > 0$，则 $y = f(x)$ 在 $[a,b]$ 的图形是上凸的；

定义 5.2 拐点 设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，x_0 是区间 I 内的点. 如果曲线在点 $(x_0, f(x_0))$ 的两侧凸性相反，则称点 $(x_0, f(x_0))$ 为此曲线的拐点.

3.5.2 渐近线

定义 5.3 若曲线 C 上的动点 P 沿着曲线无限地远离原点时，点 P 与某一固定直线 L 的距离趋于零，则称直线 L 为曲线的渐近线. 特别地，

（1）如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$, 则直线 $y = A$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条水平渐近线.

（2）如果 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_0) = \infty$, 则直线 $x = x_0$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条铅直（或垂直）渐近线. （3）斜渐近线

定理 3.5.3 如果下述两极限存在（有限）

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx]$$

则 $y = kx + b$ 是 $y = f(x)$ 的斜渐近线.

3.6 平面曲线的曲率

3.6.1 弧微分

弧微分公式

$$ds = \sqrt{1+(y')^2} = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2}$$
$$ds = \sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$
$$ds = \sqrt{\rho^2(\theta)+\rho'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta$$

3.6.2 曲线的曲率

平均曲率

$$\overline{k} = |\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}|$$

曲率

$$k = \lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \left|\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|$$

3.6.3 曲率的计算

参数方程

$$k = \frac{|x'(t)y''(t)-x''(t)y'(t)|}{[x'^2(t)+y'^2(t)]^{\frac{3}{2}}}$$

普通方程

$$k = \frac{|y''|}{[1+y'^2]^{\frac{3}{2}}}$$

极坐标

$$k = \frac{\left|\rho^2(\theta)+2\rho'^2(\theta)-\rho(\theta)\rho''(\theta)\right|}{[\rho'^2(\theta)+\rho^2(\theta)]^{\frac{3}{2}}}$$

3.6.4 曲率圆与曲率半径

曲率半径

$$R = \frac{1}{k}$$

4 不定积分

4.1 原函数与不定积分的概念

定义 1.1 原函数 设函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 在区间 I 上有定义，若 $\forall x \in I$，有 $F'(x) = f(x)$, 则称函数 $F(x)$ 是 $f(x)$ 在区间 I 上的一个原函数.

$$
\begin{aligned}
&(C)' = 0 && \int 0 = C \\
&(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} && \int x^\alpha \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + C \\
&(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a} && \\
&(\ln(|x|))' = \frac{1}{x} && \int \frac{1}{x} \, \mathrm{d}x = \ln|x| + C \\
&(a^x)' = a^x \ln x && \int a^x \, \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + C \\
&(e^x)' = e^x && \int e^x \, \mathrm{d}x = e^x + C \\
&(\sin x)' = \cos x && \int \cos x \, \mathrm{d}x = \sin x + C \\
&(\cos x)' = -\sin x && \int \sin x \, \mathrm{d}x = -\cos x + C \\
&(\tan x)' = \sec^2 x && \int \frac{1}{\cos^2 x} \, \mathrm{d}x = \int \sec^2 x \, \mathrm{d}x = \tan x + C \\
&(\cot x)' = -\csc^2 x && \int \frac{1}{\sin^2 x} \, \mathrm{d}x = \int \csc^2 x \, \mathrm{d}x = -\cot x + C \\
&(\sec x)' = \sec x \tan x && \int \sec x \tan x \, \mathrm{d}x = \sec x + C \\
&(\csc x)' = -\csc x \cot x && \int \csc x \cot x \, \mathrm{d}x = -\csc x + C \\
&(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = \arcsin x + C \\
&(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} && \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x = -\arccos x + C \\
&(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} && \int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = \arctan x + C \\
&(\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2} && \int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x = -\operatorname{arccot} x + C \\
&(\ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}))' = \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} && \int \frac{1}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} \, \mathrm{d}x = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C
\end{aligned}
$$

4.2 不定积分的换元积分法与换元积分法

4.2.1 换元积分法

定理 4.2.1 (**第一换元积分法**) 设 $f(u)$ 存在原函数 $F(u)$ ，函数 $u = \varphi(x)$ 可导，则有

$$\int f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f[\varphi(x)]d\varphi(x) = \left[\int f(u)\,\mathrm{d}u\right]_{u=\varphi(x)} = F(\varphi(x)) + C$$

以下当作公式记忆

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)(x+a)} = \frac{1}{2a}\int (\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a})\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{\mathrm{d}x}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\int \frac{\mathrm{d}(\frac{x}{a})}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{\frac{1}{a}\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \int \frac{\mathrm{d}(\frac{x}{a})}{\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\begin{aligned}\int \csc x\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos^2 x - 1} \\ &= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C = \ln\left|\frac{\cos x - 1}{\sin x}\right| + C = \ln|\cot x - \csc x| + C\end{aligned}$$

$$\int \sec x\,\mathrm{d}x = \ln|\tan x + \sec x| + C$$

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos x} = -\ln\cos x + C$$

$$\int \cot x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin x} = \ln\sin x + C$$

定理 4.2.2 (**第二换元积分法**) 设函数 $x = \varphi(t)$ 有连续的导数，且 $\varphi'(x) \neq 0$，若函数

公式推导

$$\begin{aligned}\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x &\xlongequal{x=a\sin t} \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\cdot a\cos t\,\mathrm{d}t \\ &= a^2\int \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= a^2\int \frac{\cos 2t + 1}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}a^2 t + \frac{a^2}{2}\sin t\cos t + C \\ &= \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C\end{aligned}$$

补充公式汇总

$$\int \sec x\,\mathrm{d}x = ln|\tan x + \sec x| + C$$

$$\int \csc x\,\mathrm{d}x = \ln|\cot x - \csc x| + C$$

$$\int \tan x\,\mathrm{d}x = -\ln(\cos x) + C$$

$$\int \cot x\,\mathrm{d}x = \ln(\sin x) + C$$

$$\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2+bx+c}\text{（配方可以解决）}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln(x^2+\sqrt{x^2\pm a^2}) + C$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\text{（配方可以解决）}$$

$$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\ln(x^2+\sqrt{x^2\pm a^2}) + \frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2} + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C$$

$$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x\text{（配方可以解决）}$$

$$\int \frac{1}{(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2}\left(\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}\right) + C$$

[6]

5 定积分及其应用

5.1 定积分的概念

5.1.1 具体实例

步骤

1. 划分
2. 近似
3. 求和
4. 取极限

[6]可以不用递推，换元 $x = a\tan x$

5.1.2 定积分的定义

定义 1.1 设 $f(x)$ 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的有界函数，在闭区间 $[a,b]$ 上任取分割

$$T: a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

将闭区间 $[a,b]$ 分为若干个小闭区间 $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{i-1},x_i],\cdots[x_{n-1},x_n]$. 第 i 个小闭区间 $[x_i,x_{i+1}]$ 的长度表示为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$，取 $\lambda = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$，在 $[x_i,x_{i+1}]$ 上任取点 ξ_i, 作和式 $\sum_{n=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ （称为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的积分和）. 如果不论如何选择分割 T 及取在 $[x_i,x_{i+1}]$ 上的点 ξ_i，只要当 $\lambda \to 0$ 时，该和式总趋于确定的常数 I，那么称极限 I 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**定积分**，记作 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

规定

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

5.1.3 定积分的几何意义

5.2 定积分的性质

性质 1 $\int_a^b \mathrm{d}x = b - a$

性质 2 线性性

性质 3 保号性

推论 1 单调性

推论 2 有点像夹逼准则

推论 3 定积分的绝对值 $\leqslant$ 绝对值的定积分

性质 4 区间可加性 c 不用在 a 和 b 之间

5.2.1 积分中值定理

定理 5.2.1 设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上不变号，则

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \quad (a \leqslant \xi \leqslant b)$$

推论 4 [7] 设 $f(x) \in C[a,b]$，则存在 $\xi \in [a,b]$，使

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$$

5.3 微积分基本定理

5.3.1 积分上限的函数及其导数

定理 5.3.1 若 $f(x) \in C[a,b]$，则变上限函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数.

证明 对 $\forall x, x+h \in [a,b]$，有

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= \lim_{h\to\infty} \frac{\Phi(x+h)-\Phi(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to\infty} \frac{1}{h}\left[\int_a^{a+h} f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right] \\
&= \lim_{h\to\infty} \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \lim_{h\to\infty} f(\xi) \qquad (x<\xi<x+h)^{8} \\
&= f(x)
\end{aligned}$$

变限积分求导

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = -f(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f[\varphi(x)]\varphi'(x)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\Psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\int_{\Psi(x)}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^{\varphi(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right] \\
&= f[\varphi(x)]\varphi'(x) - f[\Psi(x)]\Psi'(x)
\end{aligned}$$

[变限函数求导]

5.3.2 牛顿-莱布尼兹公式

设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}(x) = F(b) - F(a)$$

[7] 老师说这个可能比上面的更常用

[8] 积分中值定理

5.4 定积分的计算方法

5.4.1 定积分的换元积分法

[定积分的换元法]

定理 5.4.1 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 或 $[\beta,\alpha]$ 上有连续导数 $\varphi'(t)$，且 $\varphi(\alpha)=a$，$\varphi(\beta)=b$，$\varphi([\alpha,\beta])=[a,b]$ 或 $\varphi([\beta,\alpha])=[a,b]$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta \varphi(t)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

[奇零偶倍]

一个结论 [9] 若函数 $f(x)$ 在区间 $[-a,a]$ 上连续，则

$$\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a [f(x)+f(-x)]\,\mathrm{d}x$$

有关 <u>三角函数的函数</u> 的几个结论 [10]

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$$
$$\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} 2f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$$

5.4.2 定积分的分部积分法

定理 5.4.2 若函数 $u(x)$，$v(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续导数，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$$

[9] 接下来可得到奇零偶倍

[10] 这里注意这几个积分上限，若与公式的积分上限不对应，则不能直接使用这几个公式

Wallis 公式 [11]推导用到分部积分:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\,\mathrm{d}x \left(= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x\right) \\
&= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\,\mathrm{d}\cos x \\
&= -\sin^{n-1} x \cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x(n-1)sin^{n-2}\,\mathrm{d}x \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 x)\sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\,\mathrm{d}x - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x \\
\therefore I_n &= \frac{n-1}{n} I_{n-2}
\end{aligned}$$

当 n 为偶数时

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

当 n 为奇数时

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1$$

5.5 定积分的几何运用举例

5.5.1 平面图形的面积

直角坐标

$$A = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x$$

$$A = \int_a^b [\psi(y) - \varphi(y)]\,\mathrm{d}y$$

极坐标

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}\varphi^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

5.5.2 平面曲线的弧长

[12]

$$s = \int_a^b \mathrm{d}s$$

[11]也可称“点火公式”，注意上下限只能是 $\frac{\pi}{2}$ 和 0

[12]复习弧微分公式

5.5.3 体积

绕 x 轴和绕 y 轴的旋转体的体积

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$$

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x)\,\mathrm{d}x \qquad [13]$$

5.5.4 旋转体的侧面积

$$\begin{aligned} S侧 &= 2\pi \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}s \\ &= 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,\mathrm{d}s \end{aligned}$$

6 反常积分

6.1 积分限为无穷的反常积分

定义 1.1 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续（或分段连续），对于任意 $t>a$，积分 $\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，则定义 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$，并称 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 为 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上的反常积分. 如果极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛；若此极限不存在，则称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

$(-\infty,b]$ 上的反常积分类似.

对于定义在 $(-\infty,\infty)$ 上的连续函数 $f(x)$ 的反常积分 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 作如下的定义：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

其中 c 为任意实数，当且仅当等式右边的两个积分**同时**收敛时，称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，且该极限值称为反常积分的值，否则称其发散.

6.2 无界函数的反常积分

瑕点 若函数 $f(x)$ 在点 a 的任一领域内都无界，则称点 a 为函数 $f(x)$ 的瑕点.

定义 2.1 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b)$ 上连续，点 b 是 $f(x)$ 的瑕点，对任意 $0<\varepsilon<b-a$，$f(x)$ 在 $[a,b-\varepsilon]$ 可积，定义

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x$$

[13] 柱壳法

若等式右边极限存在，则称反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，且该极限值称为反常积分的值，否则称其发散.

若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,c)\cup(c,b]$ 上连续，点 c 是 $f(x)$ 的瑕点，其反常积分

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{\varepsilon_1\to 0^+}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,\mathrm{d}x + \lim_{\varepsilon_2\to 0^+}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

当且仅当右端两个极限都存在时，称反常积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛，且该极限值称为反常积分的值，否则称其发散.

7 微分方程

7.1 微分方程的基本概念

7.1.1 分类

- 常微分方程：未知函数是一元的
- 偏微分方程：未知函数是多元的

7.1.2 常微分方程的基本概念

定义 1.1 含有未知函数的导数（包含高阶导数）或微分的等式（表示未知函数、未知函数的导数与自变量之间的关系）称为**微分方程**. 未知函数是一元函数的微分方程称为**常微分方程**

微分方程中未知函数的导数的最高阶数称为微分方程的**阶**. 一般的 n 阶微分方程的形式是

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0$$

或

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}) \qquad (n\text{ 阶显式微分方程})$$

- 微分方程的解：使方程称为恒等式的函数.
- 通解：解中所含独立的任意常数的个数与方程的阶数相同.
- 特解：不含任意常数的解，其图形称为**积分曲线**.
- 定解条件：确定通解中任意常数的条件.

7.2 一阶微分方程

7.2.1 可分离变量的微分方程

若一阶微分方程可写成

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}=g(x)h(y) \qquad \text{或} \qquad M(y)\,\mathrm{d}y=N(x)\,\mathrm{d}x$$

则称它为**可分离变量的方程**. 对于已分离变量的方程 $M(y)\,\mathrm{d}y = N(x)\,\mathrm{d}x$，则有

$$\int M(y)\,\mathrm{d}y = \int N(x)\,\mathrm{d}x + C$$

[可分离变量的方程]

7.2.2 可化为可分离变量型的方程

定义 2.1 形如

$$y' = \varphi(\frac{y}{x})$$

的方程，称为**齐次型方程**

解法 令 $u = \frac{y}{x}$，则 $y = ux$，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

代入原方程得

$$u + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \varphi(u)$$

分离变量:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u) - u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

两边积分，得

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{\varphi(u) - u} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

附：可化为齐次方程的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}(c^2 + c_1^2 \neq 0)$$[14]

1. 当 $\frac{a_1}{a} \neq \frac{b_1}{b}$ 时，作变换 $x = X + h, y = Y + k$（h,k 为待定常数)，则 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}X$，$\mathrm{d}y = \mathrm{d}Y$，原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{aX + bY + ah + bk + c}{a_1X + b_1Y + a_1h + b_1k + c_1}$$

令

$$\begin{cases} ah + bk + c = 0 \\ a_1h + b_1k + c_1 = 0 \end{cases}$$

解出 h，k

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{aX + bY}{a_1X + b_1Y}$$

[14] 也适用于 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)(c^2 + c_1^2 \neq 0)$

这样就转化为齐次方程了. 求出其解后，将 $X=x-h, Y=y-k$ 代入，即得原方程的解.

2. 当 $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\lambda$ 时，原方程可化为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{ax+by+c}{\lambda(ax+by)+c_1} \qquad (b\neq 0)$$

令 $v=ax+by$，则

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=a+b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=a+b\frac{v+c}{\lambda v+c_1}$$

即得到可分离变量方程.

7.2.3 一阶线性微分方程

标准形式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)$$

若 $Q(x)\equiv 0$，称其为**齐次方程**.[15]

若 $Q(x)\not\equiv 0$，称其为**非齐次方程**.

解法

$$\begin{aligned}
y'+P(x)y&=Q(x)\\
e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}y'+e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}P(x)y&=Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\\
\left(e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}y\right)'&=Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\\
e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}y&=\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

结论

$$\begin{aligned}
y&=e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\int\left[Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}+C\right]\mathrm{d}x\\
&=Ce^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}+e^{-\int P(x)\,\mathrm{d}x}\int Q(x)e^{\int P(x)\,\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x \qquad ^{16}
\end{aligned}$$

7.2.4 伯努利方程

Bernoulli 方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+P(x)y=Q(x)y^{\alpha} \qquad (\alpha\neq 0,1)$$

[15]注意：这个“齐次方程”与上面介绍的可以利用换元解决的“齐次型方程”不是一个概念，不要搞混了.

[16]用的时候这里积分以后不用 $+C$

解法 令 $z=y^{1-\alpha}$

$$y^{-\alpha}+P(x)y^{1-\alpha}=Q(x)$$

$$(1-\alpha)y^{-\alpha}+(1-a)P(x)y^{1-\alpha}=(1-\alpha)Q(x)$$

因为 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=(1-\alpha)y^{-\alpha}$,

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}+(1+\alpha)P(x)z=(1+\alpha)Q(x)$$

到此已转化为一阶线性微分方程，求完 $z=y^{1-\alpha}$ 带回.

7.3 可降阶的高阶微分方程

1. $y^{(n)}=f(x)$
2. n 次积分.
3. $y''=f(x,y')$ 即没有 y

   令 $p=y'$，变为 $p'=f(x,p)$.
4. $y''=f(y,y')$ 即不显含 x 令 $z=y'$，就有

   $$y''=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}p$$

   变成以 y 为自变量的

   $$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p)$$

   解出后再分离变量解出 y.

7.4 线性微分方程解的结构

标准的 n 阶线性微分方程的一般形式为

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=f(x)$$

若 $Q(x)\equiv 0$，称其为**齐次方程**.
若 $Q(x)\not\equiv 0$，称其为**非齐次方程**.

7.4.1 二阶齐次线性微分方程解的结构

标准的一般形式为

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0 \tag{1}$$

定理 7.4.1 (**齐次方程的叠加原理**) 若函数 $y_1(x),y_2(x)$ 是微分方程(1)的两个解，则函数

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x) \tag{2}$$

也是方程(1)的解.

定义 7.4.1 设 $y_i(x), i=1,\cdots,n$ 为定义在区间 I 上的 n 个函数,若存在 n 个不全为零的常数 $k_i, i=1,\cdots,n$,使得

$$\sum_{i=1}^{n} k_i y_i(x) = 0, \quad \forall x \in I \tag{3}$$

则称 $y_i(x), i=1,\cdots,n$ 在区间 I 上**线性相关**，否则[17] 称 $y_i(x), i=1,\cdots,n$ 在区间 I 上**线性无关**

定理 7.4.2 若 $y_1(x), y_2(x)$ 是方程(1)的两个线性无关的解，则方程(1)的通解（此时也是全部解）可以写为

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

7.4.2 二阶非齐次线性微分方程解的结构

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{4}$$

定理 7.4.3 二阶非齐次线性微分方程(4)的通解等于它所对应的齐次线性微分方程(1)的通解与它本身的一个特解之和.[18]

定理 7.4.4 (**非齐次方程的叠加原理**) 设二阶非齐次线性微分方程(4)的右端项 $f(x)$ 是几个函数之和，如

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x) + f_2(x), \tag{5}$$

而 $y_1^*(x)$ 和 $y_2^*(x)$ 分别是方程

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_1(x)$$

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f_2(x)$$

的特解，则 $y* = y_1^* + y_2^*$ 是方程 (5)的特解.[19]

7.5 常系数线性微分方程

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{6}$$

7.5.1 二阶常系数齐次线性微分方程

特征方程

$$r^2 + pr + q = 0$$

特征根：r_1, r_2

[17]即 $\sum_{i=1}^{n} k_i y_i(x) = 0, \quad \Rightarrow k_1 = k_2 = k_3 = \cdots = 0$

[18] “非齐通 = 齐通 + 非齐特”，还可以推广到 n 阶

[19]可以推广到 n 阶线性微分方程的情形

表 1: 根据特征根得到的通解

特征根	通解
$r_1 \neq r_2$ 实根	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$	$y = (C_1 + C_2 x)e^{r_1 x}$
$r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$	$y = e^{\alpha x}(C_1 \cos\beta x + C_2 sin\beta x)$

- 二阶：二阶导 y'';
- 常系数：系数都是常数;
- 齐次：右边不是 $f(x)$ 而是 0;
- 线性：y 和 y 的（高阶）导数都是一次的；

附：推广到一般 n 阶常系数齐次线性微分方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_n y = 0 \tag{7}$$

特征方程为

$$r^{(n)} + a_1 r^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}r' + a_n r = 0 \tag{8}$$

特征根：$r_1, r_2, \cdots, r_n$

表 2: n 阶的通解的构成

特征方程的根		微分方程相应的线性无关的解项
单根	实根 r	给出一项：e^{rx}
	负根 $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$	给出两项：$e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x$
k 重根 $k > 1$	实根 r	给出 k 项：$e^{rx}, xe^{rx}, \cdots, x^{k-1}e^{rx}$
	负根 $\alpha \pm \mathrm{i}\beta$	给出 $2k$ 项：$e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\sin\beta x$ $xe^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \cdots,$ $x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$

7.5.2 二阶常系数非齐次线性微分方程

一般形式

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{9}$$

根据 $f(x)$ 的特殊形式给出非齐次方程的特解 $y*$ 的**待定形式**.

1. $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$[20]

[20] $P_m(x)$ 意为 x 的 m 次多项式，下同

特解设为 $y^* = e^{\lambda x}Q(x)$，有

$$Q''(x) + (2\lambda + p)Q'(x) + (\lambda^2 + p\lambda + q)Q(x) = P_m(x) \tag{10}$$

分三种情况讨论

λ 不是特征方程的根	$y = Q_m(x)e^{\lambda x}$
λ 是特征方程的单根	$y = xQ_m(x)e^{\lambda x}$ [21]
λ 是特征方程的重根	$y = x^2Q_m(x)e^{\lambda x}$

2. $f(x) = e^{\lambda x}\left[P_l(x)\cos\omega x + \tilde{P}_n(x)\sin\omega x\right]$

$\lambda \pm \mathrm{i}\omega$ 不是特征方程的根	$y = e^{\lambda x}\left[P_m(x)\cos\omega x + Q_m(x) + \sin\omega x\right]$ [22]
$\lambda \pm \mathrm{i}\omega$ 是特征方程的单根	$y = xe^{\lambda x}\left[P_m(x)\cos\omega x + Q_m(x) + \sin\omega x\right]$

7.5.3 欧拉方程

$$x^n y^{(n)} + p_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}xy' + p_n y = f(x) \tag{11}$$

解法 令 $x = e^t$，则 $t = \ln x$

$$y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \Rightarrow xy' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mathrm{D}y$$

$$y'' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{e^t\,\mathrm{d}t}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(e^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}e^{-t} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}e^{-t}\right)\frac{1}{x} \Rightarrow x^2y'' = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \mathrm{D}^2y - \mathrm{D}y$$

$$x^k y^{(k)} = \mathrm{D}(\mathrm{D}-1)\cdots(\mathrm{D}-k+1)y \tag{12}$$

其中 $\mathrm{D} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ 是微分算子，$\mathrm{D}^k = \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}$，这样就可以转化为常系数线性微分方程.

[21] 推广后 λ 是 k 重根，则 $y* = x^kQ_m(x)e^{\lambda x}$

[22] 推广后 $\lambda \pm \mathrm{i}\omega$ 是 k 重根，则 $y = x^ke^{\lambda x}\left[P_m(x)\cos\omega x + Q_m(x) + \sin\omega x\right]$