

导数 Derivative

设函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量 x 在 x_0 处取得增量 Δx （点 $x_0 + \Delta x$ 仍在该邻域内）时，相应地，因变量取得增量 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ；如果 Δy 与 Δx 之比当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时的极限存在，那么称函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称这个极限为函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的导数 (Derivative)，记为 $f'(x_0)$ ，即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

也可记为 $y'|_{x=x_0}$ ， $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=x_0}$ 或 $\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$

如果函数 $f(x)$ 在开区间 I 内的每一点都可导，那么就称函数 $f(x)$ 在开区间 I 内可导 (derivatived function)；这时， $\forall x \in I$ 都存在一个 $f(x)$ 的导数值，这些值构成了一个新的函数，这个函数交原来函数 $y = f(x)$ 的导函数 (Derived function)，记作 y' ， $f'(x)$ ， $\frac{dy}{dx}$ 或 $\frac{df(x)}{dx}$

$$\text{左导数: } f'_-(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$\text{右导数: } f'_+(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

$$\text{切线方程: } y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$\text{法线方程: } y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

可导必定连续

函数求导法则

如果函数 $u = u(x)$ 及 $v = v(x)$ 都在点 x 具有导数，那么它们的和、差、积和差（除分母为零的点外）都在点 x 具有导数，且

- $[u(x) \pm v(x)]' = u'(x) \pm v'(x)$
- $[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$
- $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)} \quad (v(x) \neq 0)$

如果函数 $x = f(y)$ 在区间 I_y 内单调、可导且 $f'(y) \neq 0$ ，那么它的反函数 $y = f^{-1}(x)$ 在区间 $I_x = x|x = f(y), y \in I_y$ 内也可导，且

$$[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(y)}$$

如果 $u = g(x)$ 在点 x 可导，而 $y = f(u)$ 在点 $u = g(x)$ 可导，那么复合函数 $y = f \circ g(x)$ 在点 x 可导，且其函数为

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

常数和基本初等函数的求导公式

$$\begin{array}{ll} (C)' = 0' & (x^\mu)' = \mu x^{\mu-1} \\ (\sin x)' = \cos x' & (\cos x)' = -\sin x \\ (\tan x)' = \sec^2 x & (\cot x)' = -\csc^2 x \\ (\sec x)' = \sec x \tan x & (\csc x)' = -\csc x \cot x \\ (a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1) & (e^x)' = e^x \\ (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1) & (\ln x)' = \frac{1}{x} \\ (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} & (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} & (\operatorname{arccot} x)' = \frac{1}{1+x^2} \\ (e^x)^{(n)} = e^x & [\ln(x+1)]^{(n)} = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(x+1)^n} \\ (\sin x)^{(n)} = \sin(x + n \cdot \frac{\pi}{2}) & (\cos x)^{(n)} = \cos(x + n \cdot \frac{\pi}{2}) \\ (x^\mu)^{(n)} = \begin{cases} \frac{\mu!}{(\mu-n)!} x^{\mu-n} & \text{if } \mu > n \\ n! = \mu! & \text{if } \mu = n \\ 0 & \text{if } \mu < n \end{cases} & (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k u^{n-k} v^k \end{array}$$

高阶函数

函数 $y = f(x)$ 的导数 $y' = f'(x)$ 依然是 x 的函数，我们把 $y' = f'(x)$ 的导数叫做函数 $y = f(x)$ 的二阶导数，记作 y'' 或 $\frac{d^2 y}{dx^2}$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx}$$

(n-1) 阶导数的导数叫做 n 阶导数，二阶及二阶以上的导数统称高阶导数

$$y, y', y'', y''', y^{(4)}, \dots, y^{(n)}$$

参数方程求导

参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定 x 与 y 之间的函数关系，则称此函数关系表达的函数为由参数方程所确定的函数。

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$