# 矩阵的概念

由 $m \times n$ 个数 $a_{ij}$ 排成的 $m$ 行 $n$ 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为 $m$ 行 $n$ 列矩阵，简称 $m \times n$ 矩阵，为表示一个整体，总是加一个括弧，并用大写黑体字母表示它，记为

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

这 $m \times n$ 个数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素，$a_{ij}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列的元素，一个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也可简记为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_{m\times n} = (a_{ij})_{m\times n} \text{ or } \boldsymbol{A} = (a_{ij})$$

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行数及列数均相同，且对应元素相等，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，记为 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$

## 几种特殊矩阵

- **实矩阵**

  元素均为实数的矩阵

- **复矩阵**

  元素为复数的矩阵

- **非负矩阵**

  元素均为非负数的矩阵

- $n$ **阶方阵**

  若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数与列数都等于 $n$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵，记为 $\boldsymbol{A}_n$

- **同型矩阵**

  如果两个矩阵具有相同的行数与相同的列数，则称这两个矩阵为同型矩阵

- **零矩阵**

  所有元素均为零的矩阵，记为 $\boldsymbol{O}$

- $n$ **阶单位矩阵**

  $n$ 阶方阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$，记为 $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_n$ or $\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}_n$

- **行矩阵 & 行向量**

  只有一行的矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$，为避免元素混淆，也记为 $\begin{bmatrix} a_1, & a_2, & \cdots, & a_n \end{bmatrix}$

- **列矩阵 & 列向量**

  只有一列的矩阵 $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

- **$n$ 阶对角矩阵**

  $n$ 阶方阵 $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$，也可记为 $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$

- **$n$ 阶数量矩阵**

  当一个 $n$ 阶对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角元素全部等于某一数 $a$ 是，即 $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(a, a, \cdots, a) = a\boldsymbol{I}$

## 矩阵的运算

- **取负**

  设矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$，记 $-\boldsymbol{A} = (-a_{ij})$，称 $-\boldsymbol{A}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**

- **加法**

  设有两 $m \times n$ 的同型矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和记作 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$，规定为

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

- **减法**

  由于 $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$，则可定义减法 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})$

- **数乘运算**

  数 $k$ 与 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积记作 $k\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}k$，定义为

$$k\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}k = (ka_{ij}) = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

- **线性运算**

  矩阵的加法与数乘两种运算统称为矩阵的线性运算，它们满足规律

  > $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$

> $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$

> $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$

> $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$

> $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$

> $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$

> $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$

> $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$

- **乘法**

  设

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1s}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2s}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{ms}\end{bmatrix}\quad\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_{s1}&b_{s2}&\cdots&b_{sn}\end{bmatrix}$$

  矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积记作 $\boldsymbol{AB}$，定义为

$$\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\c_{m1}&c_{m2}&\cdots&c_{mn}\end{bmatrix}\quad\left(c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\right)$$

  若 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$，则矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的元素 $c_{ij}$ 即为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 第 $i$ 行元素与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 第 $j$ 行元素对应元素乘积之和，即

$$c_{ij}=\begin{bmatrix}a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{is}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{sj}\end{bmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

  显然 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$（有时两者中只有一个有定义）

  两非零矩阵的乘积可能为零矩阵，故不能从 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 得出 $\boldsymbol{A}$ or $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

  矩阵乘法一般也不满足消去律，即不能从 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BC}$ 得出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

  矩阵乘法满足运算规则（若有定义）

  > $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$

  > $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$

  > $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$

  > $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$

- **可交换**

  如果两矩阵相乘，有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可交换，简称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可换

  （对于单位矩阵有 $\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}$）

- **转置**

  把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行换成同序数的列所得到的新矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^T$ or $\boldsymbol{A}'$

  即若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

  矩阵的转置满足运算规则（若有定义）

  > $(\boldsymbol{A}^T)^T=\boldsymbol{A}$
  >
  > $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T$
  >
  > $(k\boldsymbol{A})^T=k\boldsymbol{A}^t$
  >
  > $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$

- **方阵的幂**

  设方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，规定

  $$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}^k=\overbrace{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{A}}^{k\text{ of }\boldsymbol{A}}$$

  矩阵的幂满足运算规则

  > $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{m+n}$
  >
  > $(\boldsymbol{A}^m)^n=\boldsymbol{A}^{mn}$

- **方阵的行列式**

  由 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素所构成的行列式（各元素的位置不变），称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记作

  $$|\boldsymbol{A}| \text{ or } \det\boldsymbol{A}$$

  矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det\boldsymbol{A}$ 满足运算规则（其中 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 同为 $n$ 阶方阵）

  > $\det\boldsymbol{A}^T=\det\boldsymbol{A}$
  >
  > $\det(k\boldsymbol{A})=k^n\det\boldsymbol{A}$
  >
  > $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{B}$
  >
  > $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\det(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$

- **对称矩阵**

  设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵，如果 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$，即 $a_{ij}=a_{ji}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵

- **反对称矩阵**

  设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵，如果 $\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}$，即 $a_{ij}=-a_{ji}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵

- **共轭矩阵**

  设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为复矩阵，记 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\overline{a_{ij}})$，其中 $\overline{a_{ij}}$ 为 $a_{ij}$ 的共轭复数，称 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的共轭矩阵

> $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}}=\overline{\boldsymbol{A}}+\overline{\boldsymbol{B}}$

> $\overline{\lambda\boldsymbol{A}}=\overline{\lambda\boldsymbol{A}}$

> $\overline{\boldsymbol{AB}}=\overline{\boldsymbol{AB}}$

> $\overline{(\boldsymbol{A}^T)}=(\overline{\boldsymbol{A}})^T$

# 逆矩阵

对于一个 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，如果存在一个 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}=\boldsymbol{I}$，则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，而方阵 $\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵

**若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵是唯一的，记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$**

如果 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det\boldsymbol{A}\neq 0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异的，否则称 $\boldsymbol{A}$ 为奇异的

## 伴随矩阵与逆矩阵

行列式 $\det\boldsymbol{A}$ 的各个元素的代数余子式 $A_{ij}$ 所构成的矩阵

$$\boldsymbol{A}^*=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵

$n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是其行列式 $\det\boldsymbol{A}\neq 0$，且当 $\boldsymbol{A}$ 可逆时，有

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\frac{1}{\det\boldsymbol{A}}\boldsymbol{A}^*$$

其中 $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵

伴随矩阵的一个基本性质

$$\boldsymbol{AA}^*=\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}=(\det\boldsymbol{A})\boldsymbol{I}$$

## 逆矩阵的运算性质

- 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 也可逆，且 $(\boldsymbol{A}^{-1})^{-1}=\boldsymbol{A}$
- 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，数 $k\neq 0$，则 $(k\boldsymbol{A})^{-1}=\frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}$
- 两个同阶可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的乘积也是可逆矩阵，且 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$ （$(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_n)^{-1}=\boldsymbol{A}_n^{-1}\cdots\boldsymbol{A}_2^{-1}\boldsymbol{A}_1^{-1}$）
- 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\boldsymbol{A}^T$ 也可逆，且有 $(\boldsymbol{A}^T)^{-1}=(\boldsymbol{A}^{-1})^T$
- 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则 $\det(\boldsymbol{A}^{-1})=(\det\boldsymbol{A})^{-1}$

# 线性方程组的矩阵表示

对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

若记 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$，则利用矩阵的乘法，线性方程组可表示为

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 称为方程组的系数矩阵，方程 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 称为矩阵方程

如果 $x_j=c_j$ 是方程组的解，记列矩阵 $\boldsymbol{\eta}=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{b}$ 这是也称 $\boldsymbol{\eta}$ 是矩阵方程的解；反之如果 $\boldsymbol{\eta}$ 是矩阵方程的解，既有矩阵等式 $\boldsymbol{A\eta}=\boldsymbol{b}$ 成立，则 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\eta}$，即 $x_j=c_j$ 也是线性方程组的解

# 线性变换

变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 与变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ y_2=a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m=a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{cases}$$

称为从变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 到变量 $y_1,y_2,\cdots,y_m$ 的线性变换，其中 $a_{ij}$ 为常数；线性变换的系数 $a_{ij}$ 构成的矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 称为线性变换的系数矩阵

若记 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$，则线性变换关系是可表示为矩阵形式

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ax}$$

当一线性变换的系数矩阵为单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 式，线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{Ix}$ 称为恒等变换，因为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Ix}$

**线性变换实际上构建了一种从矩阵 $\boldsymbol{x}$ 到矩阵 $\boldsymbol{Ax}$ 的矩阵变换关系 $\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{Ax}$**

# 矩阵方程

对标准矩阵方程

$$\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$$

利用矩阵乘法的运算规律和逆矩阵的运算性质，可解出

$$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{X}=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1},\quad \boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{B}^{-1}$$

而其它形式的矩阵方程，可以转化标准矩阵方程

# 矩阵多项式及其运算

设 $\varphi(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$ 为 $x$ 的 $m$ 次多项式，$\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶矩阵，记

$$\varphi(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{I}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m$$

$\varphi(\boldsymbol{A})$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $m$ 次多项式

$f(\boldsymbol{A})g(\boldsymbol{A})=g(\boldsymbol{A})f(\boldsymbol{A})$ 总是成立，从而 $\boldsymbol{A}$ 的多项式可以像数 $x$ 的多项式一样相乘或分解因式

**如果 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$，则 $\boldsymbol{A}^k=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^k\boldsymbol{P}^{-1}$**，从而

$$\varphi(\boldsymbol{A})=a_0\boldsymbol{I}+a_1\boldsymbol{A}+\cdots+a_m\boldsymbol{A}^m=\boldsymbol{P}\varphi(\boldsymbol{\Lambda})\boldsymbol{P}^{-1}$$

如果 $\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 为对角矩阵，则

$$\boldsymbol{\Lambda}^k=\mathrm{diag}(\lambda_1^k,\lambda_2^k,\cdots,\lambda_n^k)$$

从而 $\varphi(\boldsymbol{\Lambda})=a_0\boldsymbol{I}+a_1\boldsymbol{\Lambda}+\cdots+a_m\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}(\varphi(\lambda_1),\varphi(\lambda_2),\cdots,\varphi(\lambda_n))$

# 分块矩阵

若将大矩阵 $\boldsymbol{A}$ 用若干条纵线与横线分成多个小矩阵，每个小矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的**子块**，以子块为元素的形式上的矩阵称为**分块矩阵**

## 分块矩阵的运算

- **加法**

  若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行数、列数均相同，且采用相同的分块方法，则 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的每个分块是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 中对应分块之和

- **数乘**

  设 $\boldsymbol{A}$ 是一个分块矩阵，$k$ 为一实数，则 $k\boldsymbol{A}$ 的每个子块是 $k$ 与 $\boldsymbol{A}$ 中相应子块的数乘

- **乘法**

  两分块矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的乘积依然按照普通矩阵的乘积进行运算，即把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 中的子块当作数量来对待，但对于乘积 $\boldsymbol{AB}$，$\boldsymbol{A}$ 的列划分必须与 $\boldsymbol{B}$ 的行划分一致

- **转置**

  设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\cdots&\boldsymbol{A}_{1t}\\\vdots&\ddots&\vdots\\\boldsymbol{A}_{s1}&\cdots&\boldsymbol{A}_{st}\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^T=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11}^T&\cdots&\boldsymbol{A}_{s1}^T\\\vdots&\ddots&\vdots\\\boldsymbol{A}_{1t}^T&\cdots&\boldsymbol{A}_{st}^T\end{bmatrix}$

- **分块对角矩阵**

  若 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶矩阵，若 $\boldsymbol{A}$ 的分块矩阵实在对角线上有非零子块，其余子式都为零矩阵，且在对角线上的子块都是方阵，即

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1 & & & \boldsymbol{O}\\ & \boldsymbol{A}_2 & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & \boldsymbol{A}_s\end{bmatrix}$$

  其中 $\boldsymbol{A}_i$ 都是方阵，则称 $\boldsymbol{A}$ 为分块对角矩阵

  分块对角矩阵具有性质

  - 若 $\det\boldsymbol{A}_i\neq 0$，则 $\det\boldsymbol{A}\neq 0$，且 $\det\boldsymbol{A}=\det\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2\cdots\boldsymbol{A}_s$
  -

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1^{-1} & & & \boldsymbol{O}\\ & \boldsymbol{A}_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ \boldsymbol{O} & & & \boldsymbol{A}_s\end{bmatrix}$$

  - 同结构的分块对角矩阵的和、差、积、数乘及逆仍是分块对角矩阵，且运算表现为对应子块的运算

- **分块上（下）三角矩阵**

  形如

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \cdots & \boldsymbol{A}_{1s}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{A}_{2s}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{A}_{ss}\end{bmatrix}\ \text{or}\ \begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{O} & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & \cdots & \boldsymbol{O}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{A}_{s1} & \boldsymbol{A}_{s2} & \cdots & \boldsymbol{A}_{ss}\end{bmatrix}$$

  的分块矩阵，分别称为分块上三角矩阵或分块下三角矩阵，其中 $\boldsymbol{A}_{pp}$ 是方阵；同结构的分块上（下）三角矩阵的和、差、积、数乘及逆仍是分块上（下）三角形矩阵

# 矩阵的初等变换

矩阵的下列三种变换称为矩阵的初等行变换：

1. 交换矩阵的两行（交换 $i$，$j$ 两行，记作 $r_i\leftrightarrow r_j$）
2. 以一个非零的数 $k$ 乘矩阵的某一行（第 $i$ 行乘数 $k$，记作 $kr_i$ 或 $r_i\times k$）
3. 把矩阵的某一行的 $k$ 倍加到另一行（第 $j$ 行乘数 $k$ 加到第 $i$ 行，记为 $r_i+kr_j$）

矩阵的下列三种变换称为矩阵的初等列变换：

1. 交换矩阵的两列（交换 $i$，$j$ 两列，记作 $c_i\leftrightarrow c_j$）
2. 以一个非零的数 $k$ 乘矩阵的某一列（第 $i$ 列乘数 $k$，记作 $kc_i$ 或 $c_i\times k$）
3. 把矩阵的某一列的 $k$ 倍加到另一列（第 $j$ 列乘数 $k$ 加到第 $i$ 列，记为 $c_i+kc_j$）

初等行变换与初等列变换统称**初等变换**；初等别换的逆变换依然为初等变换，且变换类型相同

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次的初等变换变成矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价，记为

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B} \text{ or } \boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$$

矩阵间的等价关系具有下列基本性质

- **自反性** $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{A}$
- **对称性**若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，则 $\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{A}$
- **传递性**若 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{B} \sim \boldsymbol{C}$，则有 $\boldsymbol{A} \sim \boldsymbol{C}$

称满足下列条件的矩阵为**行阶梯形矩阵**

- 零行（元素均为零的行）位于矩阵的下方
- 各非零行的首个非零元（从左至右的第一个不为零的元素）的列标随行标的增大而严格增大（或说其列标一定不小于行标）

称满足下列条件的阶梯形矩阵为**行最简形矩阵**

- 各非零行的首个非零元都是 1
- 每个首行非零元所在列的其他元素均为 0

对于任意矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等线性变换，均可化为**标准形**矩阵（一行最简形矩阵）

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{E}_r & \boldsymbol{O}_{r\times(n-r)} \\ \boldsymbol{O}_{(m-r)\times r} & \boldsymbol{O}_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}$$

任一矩阵 $\boldsymbol{A}$ 总可以经过有限次初等行变换后化为行阶梯形矩阵，并进而化为行最简形矩阵
如果 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶可逆矩阵，则矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换可化为单位矩阵 $\boldsymbol{I}$，即 $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{I}$

## 初等矩阵

对单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 施以一次初等变换得到的矩阵称为**初等矩阵**，三种初等变换分别对应着三种初等矩阵

1. $\boldsymbol{I}$ 的第 $i$，$j$ 行（列）互换得到的矩阵

$$\boldsymbol{I}(i,j)=\begin{bmatrix}
1 &&&&&&&&&& \\
& \ddots &&&&&&&&& \\
&& 1 &&&&&&&& \\
&&& 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 &&& \\
&&& \vdots & 1 &&& \vdots &&& \\
&&& \vdots && \ddots && \vdots &&& \\
&&& \vdots &&& 1 & \vdots &&& \\
&&& 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 &&& \\
&&&&&&&& 1 && \\
&&&&&&&&& \ddots & \\
&&&&&&&&&& 1
\end{bmatrix}$$

2. $\boldsymbol{I}$ 的第 $i$ 行（列）乘以非零数 $k$ 得到的矩阵

$$\boldsymbol{I}(i(k))=\begin{bmatrix}
1 &&&& \\
& \ddots &&& \\
&& k && \\
&&& \ddots & \\
&&&& 1
\end{bmatrix}$$

3. $\boldsymbol{I}$ 的第 $j$ 行乘以数 $k$ 加到第 $i$ 行上，或 $\boldsymbol{I}$ 的第 $i$ 列乘以数 $k$ 加到第 $j$ 行上得到的矩阵

$$\boldsymbol{I}(i\quad j(k))=\begin{bmatrix}
1 &&&&&& \\
& \ddots &&&&& \\
&& 1 & \cdots & k && \\
&&& \ddots & \vdots && \\
&&&& 1 && \\
&&&&& \ddots & \\
&&&&&& 1
\end{bmatrix}$$

初等矩阵具有下列基本性质

- $\boldsymbol{I}(i,j)^{-1}=\boldsymbol{I}(i,j)$
- $\boldsymbol{I}(i(k))^{-1}=\boldsymbol{I}(i(k^{-1}))$
- $\boldsymbol{I}(i\quad j(k))^{-1}=\boldsymbol{I}(i\quad j(-k))$

- $\det \boldsymbol{I}(i,j)=-1$
- $\det \boldsymbol{I}(i(k))=k$
- $\det \boldsymbol{I}(i\quad j(k))=1$

设 $\boldsymbol{A}$ 为一个 $m\times n$ 矩阵，对 $\boldsymbol{A}$ 施行一次某种初等行（列）变换，相当一用同种的 $m$（$n$）阶初等矩阵左（右）乘 $\boldsymbol{A}$

### 利用初等变换求矩阵的逆

$n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆的充分必要条件是 $\boldsymbol{A}$ 可以表示为若干初等矩阵的乘积

因而求求矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 时，可构造 $n \times 2n$ 矩阵 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix}$，然后对其施以初等行变换将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为单位矩阵 $\boldsymbol{I}$，则上述初等行变换同时也将其中的单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 化为 $\boldsymbol{A}^{-1}$，即

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}^{-1}\end{bmatrix}$$

### 利用初等变换求解矩阵方程

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可逆，则求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 等价于求矩阵 $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，为此构造矩阵 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix}$，对其施以初等行变换将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 化为单位矩阵 $\boldsymbol{I}$，则上述初等变换矩阵同时将其中的矩阵 $\boldsymbol{B}$ 化为 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$，即

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}\end{bmatrix}$$

这样就给出了用初等变换求解矩阵方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 的方法

同理，求解矩阵方程 $\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{B}$ 等价于计算矩阵 $\boldsymbol{BA}^{-1}$，亦可利用初等列变换求解矩阵 $\boldsymbol{BA}^{-1}$，即

$$\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B}\end{bmatrix} \to \begin{bmatrix}\boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{BA}^{-1}\end{bmatrix}$$

## 矩阵的秩 The Rank of Matrix

矩阵可经初等行变换化为行阶梯形矩阵，且行阶梯形矩阵所行含非零行的行数时唯一确定的（而这个数就是矩阵的秩，介于其唯一性尚未证明，先用行列式定义矩阵的秩）

**在 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中，任取 $k$ 行 $k$ 列，位于这些行列交叉处的 $k^2$ 个元素，不改变它们在 $\boldsymbol{A}$ 中的顺序而得到的 $k$ 阶行列式，称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的 $k$ 阶子式**

**设 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，如果存在 $\boldsymbol{A}$ 的 $r$ 阶子式不为零，而任一 $r+1$ 阶子式皆为零，则称数 $r$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩，记为 $r(\boldsymbol{A})$（或 $R(\boldsymbol{A})$），并规定零矩阵的秩等于零**

### 性质

- 若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 中有某个 $s$ 阶子式不为 0，则 $r(\boldsymbol{A}) \geq s$
- 若 $\boldsymbol{A}$ 中所有 $t$ 阶子式全为 0，则 $r(\boldsymbol{A}) < t$
- 若 $\boldsymbol{A}$ 为 $m \times n$ 矩阵，则 $0 \leq r(\boldsymbol{A}) \leq \min\{m, n\}$
- 当 $r(\boldsymbol{A}) - \min\{m, n\}$ 时，称 $\boldsymbol{A}$ 为**满秩矩阵**，否则称为**降秩矩阵**
- $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}^T)$
- $\max\{r(\boldsymbol{A}), r(\boldsymbol{B})\} \leq r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}) \leq r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B})$
- $r(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \leq r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B})$
- $r(\boldsymbol{AB}) \leq \min\{r(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B})\}$
- 若 $\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{B}_{n\times l} = \boldsymbol{O}$，则 $r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) \leq n$

## 矩阵的秩的求法

若 $\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$（$\boldsymbol{A}$ 经过有限次初等变换为 $\boldsymbol{B}$），则 $r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{B})$

**用初等行变换把矩阵变成行阶梯形矩阵，行阶梯形矩阵中非零行的行数就是该矩阵的秩**

由矩阵的秩及满秩矩阵的定义，显然，若一个 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是满秩的，则 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$，因而非奇异；反之亦然