微分中值定理

费马 (Fermat) 引理：设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有定义，并且在 x_0 处可导，如果对于任意的 $x \in U(x_0)$，有

$$f(x) \leq f(x_0) \quad or \quad f(x) \geq f(x_0)$$

那么 $f'(x_0) = 0$

罗尔 (Rolle) 定理：如果函数 $f(x)$ 满足

- 在闭区间 $[a, b]$ 上连续
- 在开区间 (a, b) 内可导
- 在区间端点处的函数值相等，$f(a) = f(b)$

那么在 (a, b) 内至少有一点 $\xi \quad (a < \xi < b)$，使得 $f'(\xi) = 0$

拉格朗日中值定理 (Lagrange Median Theorem)：如果函数 $f(x)$ 满足

- 在闭区间 $[a, b]$ 上连续
- 在开区间 (a, b) 内可导

那么在 (a, b) 内至少有一点 $\xi \quad (a < \xi < b)$，使等式

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$$

成立

如果函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续，I 内可导且导数恒为零，那么 $f(x)$ 在区间 I 上是一个常数

柯西 (Cauchy) 中值定理：如果函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 满足

- 在闭区间 $[a, b]$ 上连续
- 在开区间 (a, b) 内可导
- 对任一 $x \in (a, b)$，$g'(x) \neq 0$

那么在 (a, b) 内至少有一点 ξ，使等式

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

成立

洛必达法则 L'Hôpital's rule

设

- 当 $x \to a$ 时，函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 都趋向于零
- 在点 a 的某个去心邻域内，$f'(x)$ 及 $g'(x)$ 都存在，且 $g'(x) \neq 0$
- $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或为无限大）

则

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

设

- 当 $x \to \infty$ 时，函数 $f(x)$ 及 $g(x)$ 都趋向于零
- 当 $|x| > N$ 时 $f'(x)$ 及 $g'(x)$ 都存在，且 $g'(x) \neq 0$
- $\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在（或为无限大）

则

$$\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

泰勒公式 Taylor's Formula

泰勒中值定理 1：如果函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有 n 阶导数，那么存在 x_0 的一个邻域，对于该邻域内的任一 x，有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = o((x - x_0)^n)$$

泰勒中值定理 2：如果函数 $f(x)$ 在 x_0 的摸个邻域 $U(x_0)$ 内具有 $(n+1)$ 阶导数，那么对于任意 $x \in U(x_0)$，有

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x)$$

其中

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

这里 ξ 是 x_0 与 x 之间的某个值（R_n 被称为拉格朗日余项 Lagrange form）

在泰勒公式中将 x_0 取为 0，则有麦克劳林 (Maclaurin) 公式

函数的单调性与曲线的凹凸性

设函数 $y = f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内可导

- 如果在 (a, b) 内 $f'(x) \geq 0$，且等号仅在有限点成立，那么函数在 $[a, b]$ 上单调增加
- 如果在 (a, b) 内 $f'(x) \leq 0$，且等号仅在有限点成立，那么函数在 $[a, b]$ 上单调减少

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，如果对 I 上任意两点 x_1，x_2 恒有

$$f(\frac{x_1 + x_2}{x}) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的 (concave up)

如果恒有

$$f(\frac{x_1 + x_2}{x}) > \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

那么称 $f(x)$ 在 I 上的图形是凹的 (concave down)

设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续，在 (a, b) 内具有一阶和二阶导数，那么

- 若在 (a, b) 内 $f''(x) > 0$，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是凹的
- 若在 (a, b) 内 $f''(x) < 0$，则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上是凸的

如果函数在通过点 $(x_0, f(x_0))$ 时，凹凸性发生了改变，那么就称这一点为曲线的拐点 point of inflection (POI)

函数的单调性与曲线的凹凸性

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域 $U(x_0)$ 内有定义，如果对于去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内任意 x，有

$$f(x) < f(x_0) \quad or \quad f(x) > f(x_0)$$

那么就称 $f(x_0)$ 时函数 $f(x)$ 的一个极大值（或极小值）

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处可导，且在 x_0 处取得极值，则 $f'(x_0) = 0$

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续，且在 x_0 的某去心邻域 $\mathring{U}(x_0, \delta)$ 内可导

- 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时，$f'(x) > 0$，而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时，$f'(x) < 0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值
- 若 $x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 时，$f'(x) < 0$，而 $x \in (x_0, x_0 + \delta)$ 时，$f'(x) > 0$，则 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值

设函数 $f(x)$ 在 x_0 处具有二阶导数且 $f'(x_0) = 0$,$f''(x_0) \neq 0$，则

- 当 $f''(x_0) < 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极大值
- 当 $f''(x_0) > 0$ 时，函数 $f(x)$ 在 x_0 处取得极小值

曲率 curvature

弧微分 $\mathbf{d}s=\sqrt{1+y'^2}\mathbf{d}x$

曲率 $\kappa=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right|=\left|\dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}\right|=\dfrac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}=\dfrac{\|\vec{r'}\times\vec{r''}\|}{\|\vec{r'}\|^3}$

曲率半径 ρ 与曲率 κ 互为倒数（$\rho\kappa=1$）

当点 $(x,f(x))$ 沿曲线 C 移动式，相应的曲率中心 D 的轨迹曲线 G 称为曲线 C 的渐屈线，而曲线 C 称为曲线 G 的渐伸线，其方程为 $\begin{cases}\alpha=x-\frac{(1+y'^2)}{y''}y'\\ \beta=y+\frac{1+y'^2}{y''}\end{cases}$

牛顿-拉弗森方法（牛顿迭代法）Newton-Raphson method

寻找一点 x 使得 $f(x)=0$，以任意 x_0 为起点进行迭代

$$x_{n+1}=x_n+\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$