多元函数 function of several variables

n 维空间

n 维实数坐标空间可表示为

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中任意两元素，$\lambda \in \mathbb{R}$，规定

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$

$$\lambda \boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n)$$

它们的距离为

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

记 $\boldsymbol{x}$ 到零元的距离为 $\|\boldsymbol{x}\|$，即

$$\|\boldsymbol{x}\| = \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

故

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|)$$

$\mathbb{R}^n$ 中变元的极限：设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$，如果

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| \to 0$$

那么称变元 $\boldsymbol{x}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中趋于固定元 $\boldsymbol{a}$，记作 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$

即

$$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a} \Leftrightarrow x_1 \to a_1, x_2 \to a_2, \cdots, x_n \to a_n$$

邻域

在 $\mathbb{R}^n$ 上的邻域 (neighbourhood) 的概念，设 P_0 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一点呢，δ 为某一正数与点 P_0 距离小于 δ 的点 P 的集合称为点 P_0 的 δ 邻域，记作 $U(P_0, \delta)$，即

$$U(P_0, \delta) = \{P \,|\, \|\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P_0}\| < \delta\}$$

点 P_0 的去心 δ 邻域 (deleted neighbourhood)，记作 $\mathring{U}(P_0, \delta)$，即

$$U(P_0, \delta) = \{P \,|\, 0 < \|\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P_0}\| < \delta\}$$

如果不需要特别强调邻域的半径 δ，则用 $U(P_0)$ 表示 P_0 的某个邻域，点 P_0 的去心邻域记为 $\mathring{U}(P_0)$

点与点集之间的关系

对于任意一点 $P \in \mathbb{R}^n$ 与任一点集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 必为一下三种关系中的一个

- **内点 (interior point)** 如果 $\exists U(P) \subset E$，则称 P 为 E 的内点
- **外点 (exterior point)** 如果 $\exists U(P) \cap E = \varnothing$，则称 P 为 E 的外点

- **边界点 (boundary point)** 如果 $\forall U(P), \exists P_{in}, P_{ex} \in U(P)$ let $P_{in} \in E, P_{ex} \notin E$，则称 P 为 E 的边界点

  E 的边界点的全体称为 E 的边界 (boundary)，记作 ∂E

  聚点 (limit point)：如果对于任意给定的 $\delta > 0$，点 P 的去心邻域 $\mathring{U}(P, \delta)$ 内总有 E 中的点，那么称点 P 是 E 的聚点（$E \cup \partial E$）

- **开集 (open set)** 如果 E 的点都是 E 的内点，则称 E 为开集
- **闭集 (closed set)** 如果 $\partial E \subset E$，则称 E 为闭集
- **连通集 (connected set)** 如果 E 内任意两点都可以用折线联结起来，且该折线上的点都属于 E，则称 E 为连通集
- **(开) 区域 (domain)** 连通的开集，称为区域
- **闭区域 (bounded domain)** 开区域与其边界的合集，称为闭区域
- **有界集 (bounded set)** 如果 $\exists r$, let $E \subset U(O, r)$（O 为原点），那么称 E 为有界集
- **无界集 (unbounded set)** 如果 E 不是有界集，它就是无界集

多元函数

设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个非空子集，称映射 $f : D \to \mathbb{R}$ 为定义在 D 上的 n 元函数，通常记为

$$z = f(P), P \in D$$

其中点集 D 称为该函数的定义域，P 称为自变量，z 称为因变量

多元函数的值域

$$f(D) = z \,|\, z = f(P), P \in D$$

多元函数的极限

设 n 元函数 $f(P)$ 的定义域为 D，点 P_0 为 D 的聚点，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ϵ，总存在正数 δ, 使得当点 $P(x, y) \in D \cap \mathring{U}(P_0, \delta)$ 时，都有

$$|f(P) - A| < \epsilon$$

成立，那么就称常数 A 为函数 $f(P)$ 当 $P \to P_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A \text{ or } f(P) \to A(P \to P_0)$$

多元函数的连续性

设多元函数 $f(P)$ 的定义域为 D，P_0 为 D 的聚点，且 $P_0 \in D$，如果

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$$

那么称函数 $f(x)$ 在点 P_0 连续

设函数 $f(P)$ 的定义域为 D，P_0 是 D 的聚点，如果函数 $f(P)$ 在点 P_0 不连续，那么称 P_0 为函数 $f(P)$ 的断点

性质

- 在有界闭区间 D 上的多元连续函数，必定在 D 上有界，且能取得它的最大值与最小值
- 在有界闭区间 D 上的多元连续函数必取得介于最大值与最小值之间的任意值

- 在有界闭区间 D 上的多元连续函数必定在 D 上一致连续 $(\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\ \text{let}\ |f(P_1)-f(P_2)|<\epsilon\ \text{when}\ \|\boldsymbol{P_1}-\boldsymbol{P_2}\|<\delta)$

偏导数

设函数 $z=f(P)$ 在点 P_0 的某一邻域内有定义，对于变元 x_i 有增量 h，对应函数的增量

$$f(P_0+(0,0,\cdots,h,\cdots,0))-f(P_0)$$

如果

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(P_0+(0,0,\cdots,h,\cdots,0))-f(P_0)}{h}$$

存在，那么称此极限为函数 $z=f(P)$ 在点 P_0 处对于 x_i 的偏导数 (partial derivative)，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x_i}\right|_{P=P_0},\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{P=P_0}\ \text{or}\ f_{x_i}(P_0)$$

如果函数 $z=f(P)$ 在区间 D 内任意点均可导，那么这些点位置与其对应的偏导数可以构成一个新的函数，称为偏导函数，记为

$$\frac{\partial z}{\partial x_i},\frac{\partial f}{\partial x_i}\ \text{or}\ f_{x_i}(P)$$

高阶偏导数

设函数 $z=f(P)$ 在区域 D 内具有偏导函数，如果对该偏导函数继续求偏导，得二阶偏导函数，如果求导对象不同则称为混合偏导，如

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right)=\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\partial x_j}=f_{x_ix_j}f(P)$$

如果函数 $z=f(P)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i\partial x_j}$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x_j\partial x_i}$ 在区域 D 内连续，那么在该区间内这两个二阶混合偏导函数必定相等

拉普拉斯 (Laplace) 方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0\quad(z=\ln\sqrt{x^2+y^2})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0\quad\left(z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

全微分 total derivative

设函数 $z=f(x)$ 在点 P 的某邻域内有定义，如果函数在点 P 的某邻域内有定义，如果函数在点 P 的全增量

$$\Delta z=f(P+(\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n))-f(P)$$

维实数坐标空间可表示为

$$\Delta z=\sum_{i=1}^{n}A_i\Delta x_i+o(\rho)$$

其中 A_i 不依赖与 Δx_i 而仅与 P 有关，$\rho=\|(\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n)\|$，那么称函数 $z=f(P)$ 在点 P 可微分，而 $\sum\limits_{i=1}^{n}A_i\Delta x_i$ 称为函数 $f(P)$ 在点 P 的全微分，记作 $\mathrm{d}z$

$$\mathrm{d}z=\sum_{i=1}^{n}A_i\Delta x_i$$

如果函数在区域 D 内各点处都可微分，那么称这函数在 D 内可微分

如果函数 $z=f(P)$ 在点 P 可微分，那么该函数在点 P 的偏导 $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ 必定存在，且函数 $z=f(P)$ 在点 P 的全微分为

$$\mathrm{d}z=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial z}{\partial x_i}\Delta x_i$$

如果函数 $z=f(P)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ 在点 P 连续，那么函数在改点可微分

多元复合函数的求导法则

0.1 一元函数与多元函数复合的情形

如果函数 $u_i=\varphi_i(t)$ 在点 t 可导，函数 $z=f(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 在对应点 $(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 具有连续的偏导数，那么复合函数 $z=f[\varphi_1(t)],\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)]$ 在点 t 可导，且有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial z}{\partial u_i}\frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}$$