定积分 integral

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，在 $[a,b]$ 中任意插入若干个分点 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$ 把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间 $[x_0,x_1],[x_1,x_2],\cdots,[x_{n-1},x_n]$，各个小区间的长度依次为 $\Delta x_1=x_1-x_0,\Delta x_2=x_2-x_1,\cdots,\Delta x_n=x_n-x_{n-1}$ 在每个小区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上任取一点 $\xi_i\ (x_{i-1}\le\xi_i\le x_i)$，作函数值 $f(\xi_i)$ 与小区间长度 Δx_i 的乘积 $f(\xi_i)\Delta x_i$，并作出和

$$S=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

记 $\lambda=\max\{\Delta x_1,\Delta x_2,\cdots,\Delta x_n\}$，如果当 $\lambda\to 0$ 时，这和的极限追踪存在，且与闭区间 $[a,b]$ 的分法及点 ξ_i 的取法无关，那么称这个极限 I 为函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的定积分，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=I=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

其中 $f(x)$ 叫做被积函数的，$f(x)\mathrm{d}x$ 叫做被积表达式，x 叫做积分变量，a 叫做积分下限，b 叫做积分上限，$[a,b]$ 叫做积分区间

如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积 如果 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界，且只有有限个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

定积分的性质

设 α 与 β 均为常数，则

$$\int_a^b[\alpha f(x)+\beta g(x)]\mathrm{d}x=\alpha\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+\beta\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

设 $a<c<b$，则

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\equiv 1$ 那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b 1\mathrm{d}x=\int_a^b \mathrm{d}x=b-a$$

如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\ge 0$，那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ge 0\quad(a\le b)$$

如果在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)\ge g(x)$，那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\ge\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\quad(a\le b)$$

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\le\int_a^b|f(x)|\mathrm{d}x\quad(a\le b)$$

设 M 及 m 分别时函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的最大值及最小值，则

$$m(b-a)\le\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\le M(b-a)\quad(a\le b)$$

如果函数 $f(x)$ 在积分区间 $[a,b]$ 上连续，那么在 $[a,b]$ 上至少存在一点 ξ，使

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a) \quad (a \le \xi \le b)$$

成立（积分中值公式）

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，那么积分上限的函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

在 $[a,b]$ 上可导，并且它的导数

$$\Phi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\mathrm{d}t = f(x) \quad (a \le x \le b)$$

如果函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，那么函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

就是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个原函数

牛顿-莱布尼茨公式 Newton-Leibniz formula 如果函数 $F(x)$ 使连续函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上的一个原函数，那么

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

假设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\phi(t)$ 满足条件

- $\phi(\alpha)=a, \phi(\beta)=b$
- $\phi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$（或 $[\beta,\alpha]$）上具有连续导数，且其值域 $R_\phi=[a,b]$

则有

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f[\phi(t)]\phi'(t)\mathrm{d}t$$

$$\int_a^b u\mathrm{d}v = [uv]_a^b - \int_a^b v\mathrm{d}uz$$

反常积分 Improper integral

- 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，如果极限 $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 存在，那么称反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并称此极限为反常积分的值；否则称其发散
- 设函数 $f(x)$ 在区间 $-\infty\ b]$ 上连续，如果极限 $\lim\limits_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，那么称反常积分 $\int_\infty^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并称此极限为反常积分的值；否则称其发散
- 设函数 $f(x)$ 在区间 $-\infty\ \infty]$ 上连续，如果反常积分 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}\ x$ 与 $\int_\infty^0 f(x)\mathrm{d}\ x$ 均收敛，那么称反常积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，其值为前两者的和；否则称其发散

以上反常积分统称为无穷限的反常积分

- 设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，点 a 为 $f(x)$ 的瑕点，如果极限 $\lim\limits_{t\to a^+}\displaystyle\int_t^b f(x)\mathrm{d}x$ 存在，那么称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并称此极限为反常积分的值；否则称其发散
- 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b)$ 上连续，点 b 为 $f(x)$ 的瑕点，如果极限 $\lim\limits_{t\to b^-}\displaystyle\int_a^t f(x)\mathrm{d}x$ 存在，那么称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，并称此极限为反常积分的值；否则称其发散
- 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,c)$ 及 $(c,b]$ 上连续，点 c 为 $f(x)$ 的瑕点，如果反常积分 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ 与 $\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ 均收敛，那么称反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，其值为前两者之和；否则称其发散

反常积分审敛法 & Γ 函数

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$，若函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

在 $[a,+\infty)$ 上有上界，则反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续；如果 $0\leq f(x)\leq g(x)\quad(a\leq x<+\infty)$，并且 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 收敛，那么 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛；$0\leq g(x)\leq f(x)\quad(a\leq x<+\infty)$，并且 $\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$ 发散，那么 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 也发散

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)\quad(a>0)$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$；如果存在常数 $M>0$ 及 $p>1$，使得 $f(x)\leq\frac{M}{x^p}\quad(a\leq x<+\infty)$，那么反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果存在常数 $N>0$，使得 $f(x)\geq\frac{N}{x}\quad(a\leq x<+\infty)$，那么反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$；如果存在常数 $p>1$，使得 $\lim_{x\to+\infty} x^p f(x)=c<+\infty$，那么反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果存在常数 $N>0$，使得 $\lim_{x\to+\infty} xf(x)=d>0$，那么反常积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 发散

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上连续，如果反常积分

$$\int_a^{+\infty}|f(x)|\mathrm{d}x$$

收敛（即，绝对收敛），那么反差积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

也收敛

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$，$x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点，如果存在常数 $M>0$ 及 $q<1$，使得

$$f(x)\leq\frac{M}{(x-a)^q}\quad(a<x\leq b)$$

那么反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果存在常数 $N>0$，使得

$$f(x)\geq\frac{N}{x-a}\quad(a<x\leq)$$

那么反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散

设函数 $f(x)$ 在区间 $(a,b]$ 上连续，且 $f(x)\geq 0$，$x=a$ 为 $f(x)$ 的瑕点，如果存在常数 $0<q<1$，使得

$$\lim_{x\to a^+}(x-a)^q f(x)$$

存在，那么反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛；如果存在常数 $N>0$，使得

$$\lim_{x\to a^+}(x-a)f(x)>0$$

那么反常积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 发散

Γ 函数

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}e^{-x}x^{s-1}\quad(s>0)$$

递推公式

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)\quad(s>0)$$

$$\Gamma(n+1)=n!\quad n\in\mathbb{N}^+$$

当 $s\to 0^+$ 时，$\Gamma(s)\to+\infty$

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s)=\frac{\pi}{\sin\pi s}\quad(0<s<1)$$

$$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$$

$$\int_0^{+\infty}e^{-u^2}\mathrm{d}u=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$$