二阶与三阶行列式

二阶行列式 Second-order determinant

记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

其中数 a_{11}，a_{22}，a_{12}，a_{21} 称为行列式的元素，横排叫做行，竖排叫做列；**元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 叫做列标，表明该元素位于第 j 列**；行列式是一个代数和

这个规则称为“对角线法则”，把从 a_{11} 到 a_{22} 的连线叫做主对角线，把 a_{12} 到 a_{21} 的连线交副对角线

二元线性方程

对于二元线性方程

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$$

定义

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad , \quad D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则二元线性方程组可改写为

$$\begin{cases} Dx_1=D_1 \\ Dx_2=D_2 \end{cases}$$

于是，当 $D\neq 0$ 时，该二元线性方程有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D} \quad x_2=\frac{D_2}{D}$$

三阶行列式 Third-order determinant

记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{3}3-a11a_{23}a_{32}$$

称为三阶行列式

三阶行列式有 6 项，每一项均为不同行不同列的三个元素之积，在按一定法则冠以正负号

三元线性方程组

类似于二元线性方程组，对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$

同时记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad , \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad , \quad D_3 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & b_1 \\ b_2 & a_{22} & b_2 \\ b_3 & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

若系数行列式 $D \neq 0$，则该方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \quad x_2 \frac{D_2}{D} \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

n 阶行列式

排列与逆序

由自然数 $1, 2, \cdots, n$ 组成的不重复的每一种有确定次序的排列，称为 n 级排列（简称为排列）

在一个 n 级排列（$i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n$）中，若 $i_t > i_s$，则称数 i_t 与数 i_s 构成一个逆序；一个 n 级排列中逆序的总数称为该排列的逆序数，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$

即一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，设比 i_k 大的且排在 i_k 前的数共有 t_k 各，则 i_k 的逆序的个数为 t_k，而该排列中所有自然数的逆序的个数之和就是这个排列的逆序数，即

$$N(i_1 i_2 \cdots i_n) = \sum_{k=1}^{n} t_k$$

逆序数为奇数的排列称为奇排列；逆序数为偶数的排列称为偶排列

n 阶行列式的定义

有 n^2 各元素 a_{ij} 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，其中横排称为行，竖排称为列；它表示所有**取自不同行且不同列的 n 个元素的乘积** $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的代数和，其各项的符号为：**当该项的各个元素的行标按自然数排列后（$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$），其对应的列标所构成的排列（$j_1 j_2 \cdots j_n$）是偶排列则符号取正，否则（是奇排列）则符号取负**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和；行列式有时也简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$，这里数 a_{ij} 称为行列式的元素，称

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

为行列式的一般项