曲线积分 curve intergral

定义

设 L 为 xOy 面内的一条光滑曲线弧，函数 $f(x,y)$ 在 L 上有界，在 L 上任意插入一点列 $M_1,M_2,\cdots,M_{n-1}$ 把 L 分成 n 个小段；设第 i 个小段的长度为 Δs_i，又 (ξ_i,η_i) 为第 i 个小段上任意取定的一点，作积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$，并作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$，如果当各小弧段的长度的最大值 $\lambda\to 0$ 时，这和的极限总存在，且与曲线弧 L 的分法无关，那么称此极限为函数 $f(x,y)$ 在曲线弧 L 上对弧长的曲线积分或第一类曲线积分，记作 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$，即

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta s_i$$

其中 $f(x,y)$ 称为被积函数，L 叫做积分弧段

类似的情况可以扩展至三维

$$\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i$$

甚至是任意维

$$\int_L f(P)\mathrm{d}s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta s_i$$

性质

- 若曲线 L 为一闭合曲线，则将对 $f(P)$ 在 L 上的曲线积分记为 $\displaystyle\oint_L f(P)\mathrm{d}s$
- 若 α 与 β 均为常数，则
$$\int_L[\alpha f(P)+\beta g(P)]\mathrm{d}s=\alpha\int_L f(P)\mathrm{d}s+\beta\int_L g(P)\mathrm{d}s$$
- 若曲线 L 可以被分为有限多条曲线 $L_1,L_2,\cdots,L_n$，则
$$\int_L f(P)\mathrm{d}s=\sum_{i=1}^{n}\int_{L_i} f(P)\mathrm{d}s$$
- 设在 L 上 $f(P)\le g(P)$，则
$$\int_L f(P)\mathrm{d}s\le\int_L g(P)\mathrm{d}s$$
特别有
$$\left|\int_L f(P)\mathrm{d}s\right|\le\int_L |f(P)|\mathrm{d}s$$

曲线积分的计算

若曲线 L 可由参数方程 $\boldsymbol{r}(t)$ $t\in[\alpha,\beta]$ 表述（其中 $\alpha\le\beta$），则对于函数 $f(P)$ 在曲线 L 上的曲线积分可改写为

$$\int_L f(P)\mathrm{d}s=\int_{\alpha}^{\beta} f(\boldsymbol{r}(t))\|\boldsymbol{r}'(t)\|\mathrm{d}t$$

对坐标的曲线积分

定义

设 L 为 n 维空间内点 A 到点 B 的一条有向光滑曲线弧，函数 $F_i(P)$ 在 L 上有界，在 L 上沿 L 的方向任意插入一点列 $M_1(x_{11},x_{21},\cdots,x_{n1}),M_2(x_{12},x_{22},\cdots,x_{n2}),\cdots,M_{m-1}(x_{1m-1},x_{2m-1},\cdots,x_{nm-1})$ 把 L 分为 m 个有向小弧段

$$\overset{\frown}{M_{j-1}M_j}\quad(j=1,2,\cdots,n;M_0=A,M_n=B)$$

设 $\Delta x_{ij}=x_{ij}-x_{ij-1}$，点 P_j 为 $\overset{\frown}{M_{j-1}M_j}$ 上任意取定的点，做乘积 $F_i(P_j)\Delta x_{ij}$，并做和 $\sum_{j=1}^{m}F_i(P_j)\Delta x_{ij}$，如果当各小弧段长度的最大值 $\lambda\to 0$ 是，这和的极限总存在，且与曲线弧 L 的分法及点 P_j 的取法无关，那么称此极限为函数 $F_i(P)$ 在有向曲线弧 L 上对坐标 x_i 的曲线积分或第二类曲线积分，记作 $\int_L F_i(P)\mathrm{d}x_i$，即

$$\int_L F_i(P)\mathrm{d}x_i=\lim_{\lambda\to 0}F_i(P_j)\Delta x_{ij}$$

其中 $F_i(p)$ 叫做被积函数，L 叫做积分弧段

若 $\boldsymbol{F}(P)=\langle F_1(P),F_2(P),\cdots,F_n(P)\rangle$，则有

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\int_L F_i(P)\mathrm{d}x_i\right)=\int_L\left(\sum_{i=1}^{n}F_i(P)\mathrm{d}x_i\right)=\int_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 称为有向曲线元

性质

- 若 α 与 β 均为常数，则

$$\int_L[\alpha\boldsymbol{F}(P)+\beta\boldsymbol{G}(P)]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\alpha\int_L\boldsymbol{F}(P)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}+\beta\int_L\boldsymbol{G}(P)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

- 若有向曲线 L 可以被分为有限多条曲线 $L_1,L_2,\cdots,L_n$，则

$$\int_L\boldsymbol{F}(P)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\sum_{i=1}^{n}\int_{L_i}\boldsymbol{F}(P)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

- 设 L 是有向光滑曲线弧，L^- 是 L 的反向曲线弧，则

$$\int_{L^-}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=-\int_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

计算

若曲线 L 可由参数方程 $\boldsymbol{r}(t)$ $t\in[\alpha,\beta]$ 表述（其中 $\boldsymbol{r}(\alpha)$ 位于起点 A，$\boldsymbol{r}(\beta)$ 位于起点 B），则

$$\int_L\boldsymbol{F}(P)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_\alpha^\beta\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}(t))\cdot\boldsymbol{r}'(t)\mathrm{d}t$$

两类曲线积分之间的联系

$$\int_L\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_L F_T\mathrm{d}s$$

其中 F_T 为向量 $\boldsymbol{F}$ 在曲线的切向量 $\boldsymbol{T}$ 上的投影

格林公式及其应用

格林公式 Green's theorem

设闭区域 D 由分段光滑的曲线 ∂D 围成，若函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 在 D 上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_{\partial D} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

其中 ∂D 为 D 的正向边界（即，∂D 的左边均在 D 内，右边均在 D 外）

路径无关

若对于函数 $\boldsymbol{F}(P)$ 的曲线积分在 G 内与其积分路径无关，仅与其起点与终点相关，则称该积分在 G 内与路径无关，否则称其与路径有关

设区域 G 是一连通区域，若函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导，则曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在 G 内与路径无关的充分必要条件为

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

在 G 内恒成立

若对于函数 $\boldsymbol{F}(P)$ 的曲线积分在 G 内与路径无关，则沿 G 内任意闭合曲线的曲线积分 $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 均为 0

二元函数的全微分求积

设区域 G 是一个单连通域，若函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数，则 $P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$ 在 G 内为某一函数 $u(x,y)$ 的全微分的充分必要条件是

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

在 G 内恒成立

设区域 G 是一连通区域，若函数 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 在 G 内具有一阶连续偏导，则曲线积分 $\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 在 G 内与路径无关的充分必要条件为：在 G 内存在函数 $u(x,y)$，使 $\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$

曲线积分的基本定理

若曲线积分 $\int_L \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 在区域 G 内与积分路径无关，则称向量场 $\boldsymbol{F}$ 为保守场 (conservative field)

若向量场 $\boldsymbol{F}(P)$ 在 G 内为一保守场，则一定存在一数量函数 $f(P)$，使得 $\boldsymbol{F} = \nabla f$，而曲线积分 $\int_L \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}r$ 在 G 内与路径无关，且

$$\int_L \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}r = f(B) - f(A)$$

其中 L 是位于 G 内起点为 A，终点为 B 的任意分段光滑曲线

向量场 $\boldsymbol{F}$ 为保守场的充分必要条件是 $\nabla \times \boldsymbol{F} = 0$，即 $\boldsymbol{F}$ 的旋度为 0

对面积的曲面积分

定义

设曲面 Σ 是光滑的，函数 $f(x,y,z)$ 在 Σ 上有界，把 Σ 任意分成 n 小块 ΔS_i（ΔS_i 同时表示第 i 小块曲面的面积），设 (ξ_i,η_i,ζ_i) 是 ΔS_i 上任意取定的一点，做乘积 $f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$，并作和 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$，如果当各小块曲面的直径的最大值 $\lambda\to 0$ 时，这和的极限总存在，且与曲面 Σ 的分法及点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 的取法无关，那么称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 Σ 上对面积的曲面积分或第一类曲面积分，记作 $\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S$，即

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$$

其中 $f(x,y,z)$ 叫做被积函数，Σ 叫做积分曲面

性质

- 若 α 与 β 均为常数，则
$$\iint_\Sigma[\alpha f(P)+\beta g(P)]\mathrm{d}S=\alpha\iint_\Sigma f(P)\mathrm{d}S+\beta\iint_\Sigma g(P)\mathrm{d}S$$
- 若曲面 Σ 可以被分为有限多个曲面 $\Sigma_1,\Sigma_2,\cdots,\Sigma_n$，则
$$\iint_\Sigma f(P)\mathrm{d}S=\sum_{i=1}^n\iint_{\Sigma_i}f(P)\mathrm{d}S$$
- 设在 Σ 上 $f(P)\le g(P)$，则
$$\iint_\Sigma f(P)\mathrm{d}S\le\iint_\Sigma g(P)\mathrm{d}S$$
  特别有
$$\left|\iint_\Sigma f(P)\mathrm{d}S\right|\le\iint_\Sigma|f(P)|\mathrm{d}S$$

计算

若曲面 Σ 可由参数方程 $G(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ 表示，则函数 $f(x,y,z)$ 对于曲面 Σ 的曲面积分可表示为

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\left\|\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial v}\right\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

对坐标的曲面积分

定义

设 Σ 为光滑的有向的，向量函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 在 z 轴方向上的分量函数 $F_z(x,y,z)$ 在 Σ 上有界，把 Σ 任意分成 n 小块 ΔS_i（ΔS_i 同时表示第 i 小块曲面的面积），ΔS_i 在 xOy 面上的投影为 $(\Delta S_i)_{xy}$，设 (ξ_i,η_i,ζ_i) 是 ΔS_i 上任意取定的一点，做乘积 $F_z(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$，并作和 $\sum_{i=1}^n F_z(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$，如果当各小块曲面的直径的最大值 $\lambda\to 0$ 时，这和的极限总存在，且与曲面 Σ 的分法及点 (ξ_i,η_i,ζ_i) 的取法无关，那么称此极限为函数 $F_z(x,y,z)$ 在有向曲面 Σ 上对坐标 x、y 的曲面积分或第二类曲面积分，记作 $\iint_\Sigma F_z(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，即

$$\iint_\Sigma F_z(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^n F_z(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xy}$$

其中 $F_z(x,y,z)$ 叫做被积函数，Σ 叫做积分曲面

类似的可定义对坐标 y、z 的曲面积分以及对坐标 x、z 的曲面积分

$$\iint_{\Sigma} F_x(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} F_x(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{yz}$$

$$\iint_{\Sigma} F_y(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} F_y(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)(\Delta S_i)_{xz}$$

应用中常出现的形式为求向量场 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 在曲面有向 Σ 上的通量 Φ，为方便记为

$$\begin{aligned}\Phi(\Sigma) &= \iint_{\Sigma} F_x(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_{\Sigma} F_y(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \iint_{\Sigma} F_z(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{\Sigma} F_x(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + F_y(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z + F_z(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \iint_{\Sigma} \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 为有向面积微元

性质

- 若 α 与 β 均为常数，则

$$\iint_{\Sigma}[\alpha\boldsymbol{F}(P)+\beta\boldsymbol{G}(P)]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \alpha\iint_{\Sigma}\boldsymbol{F}(P)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} + \beta\iint_{\Sigma}\boldsymbol{G}(P)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

- 若有向曲面 Σ 可以被分为有限多个曲面 $\Sigma_1,\Sigma_2,\cdots,\Sigma_n$，则

$$\iint_{\Sigma}\boldsymbol{F}(P)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum_{i=1}^{n}\iint_{\Sigma_i}\boldsymbol{F}(P)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

- 设 Σ 是有向光滑曲面，Σ^- 是 Σ 的反向光滑曲面（曲面重叠，但法向量相反），则

$$\iint_{\Sigma^-}\boldsymbol{F}(P)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\iint_{\Sigma}\boldsymbol{F}(P)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

计算

若曲面 Σ 可由参数方程 $G(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$ 表示，则函数 $f(x,y,z)$ 对于曲面 Σ 的曲面积分可表示为

$$\iint_{\Sigma}\boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}S = \iint_{D}\boldsymbol{F}(x(u,v),y(u,v),z(u,v)\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial v}\right)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

其中曲面 Σ 的正向与 $\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial u}\times\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial v}$ 的方向相同

两类曲线积分之间的联系

$$\iint_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_{\Sigma}F_N\mathrm{d}S$$

其中 F_N 为向量 $\boldsymbol{F}$ 在曲面法向量 $\boldsymbol{N}$ 上的投影

高斯通量公式 Gauss' flux theorem

设空间闭合区域 Ω 是由分段光滑的闭曲面 $\partial\Omega$ 所围成，若向量函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 的各个分量 F_x、F_y 与 F_z 再 Ω 上具有一阶连续偏导数，则

$$\Phi(\partial\Omega)=\oiint_{\partial\Omega}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}v=\iiint_{\Omega}\nabla\cdot\boldsymbol{F}\mathrm{d}v$$

这里 $\partial\Omega$ 是 Ω 的整个边界曲面的外侧

若对于空间区域 G 内任意比去买你所围成的区域全属于 G，则称 G 是空间二维单连通区域；如果 G 内任一闭曲线中可以组成一张完全属于 G 的曲面，则称 G 是空间一维单连通区域

设 G 是空间二维单连通区域，若 $P(x,y,z)$、$Q(x,y,z)$ 与 $R(x,y,z)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数，则曲面积分

$$\iint_{\Sigma}P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}x\mathrm{d}z+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

在 G 内与所取平面 Σ 无关，而只取决于 Σ 的边界曲线 $\partial\Sigma$ 的充分必要条件是

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$$

在 G 内恒成立

格林第一公式与拉普拉斯算子

设函数 $u(x,y,z)$ 与 $v(x,y,z)$ 在闭区域 Ω 上具有一阶及二阶连续偏导数，则

$$\oiint_{\partial\Omega}u\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S=\iiint_{\Omega}u\Delta v\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

其中 $\partial\Omega$ 为闭区域 Ω 的整个边界曲面，$\frac{\partial v}{\partial\boldsymbol{n}}$ 为函数 $u(x,y,z)$ 沿 $\partial\Omega$ 的外法线方向的方向导数，符号 $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 称为拉普拉斯 (Laplace) 算子，该公式称为格林第一公式

通量与散度 flux & divergence

设有向量场

$$\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}$$

其中函数 F_x、F_y 与 F_z 均具有一阶连续偏导数，Σ 是场内的一片有向曲面，$\boldsymbol{n}$ 是 Σ 在点 (x,y,z) 处的单位法向量，则积分

$$\Phi(\Sigma)=\iint_{\Sigma}\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S$$

称为向量场 $\boldsymbol{F}$ 通过曲面 Σ 向着指定侧的通量

对于向量场 $\boldsymbol{F}$，定义其散度 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}$ 为

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}$$

若将 $\boldsymbol{F}$ 视为描述一稳定不可压缩流体的流动速度场,则 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}(M)$ 可看作为该流体在点 M 的源头强度;对于 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}(M)>0$ 的点，流体从该点发散，即正源；对于 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}(M)<0$ 的点，流体从该点汇聚，即负源；对于 $\mathrm{div}\boldsymbol{F}(M)=0$ 的点，流体从该点只改变流向，即无源

若用 nabla 算子 $\nabla=\left\langle\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right\rangle$ 来表示，则有

$$\mathrm{div}\boldsymbol{F}=\nabla\cdot\boldsymbol{F}$$

若向量场 $\boldsymbol{F}$ 的散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}$ 处处为 0，则称 $\boldsymbol{F}$ 为无源场，否则称其为有源场

斯托克公式环流量与旋度

斯托克公式 Stokes' theorem

斯托克公式是格林公式的推广，即格林公式是斯托克公式在二维上的一个缺省

设 Γ 为分段光滑的空间有向闭曲线，Σ 是以 Γ 为边界的分片光滑的有向曲面，Γ 的正向与 Σ 的侧复合右手规则，若函数 $F_x(x,y,z)$、$F_y(x,y,z)$ 与 $F_z(x,y,z)$ 在曲面 Σ（连同边界 Γ）上具有一阶连续偏导数，则有

$$\iint_\Sigma \left(\frac{\partial F_z}{\partial y}-\frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial F_x}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial F_y}{\partial x}-\frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_\Gamma F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z$$

为方便记忆，将其用行列式表示，则有

$$\iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}x\mathrm{d}z & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}=\oint_\Gamma F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z$$

若引入环流量与旋度，则可表示为

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\iint_\Sigma \nabla\times\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

空间曲线积分的路径无关

设空间区域 G 是一维单连通域，若函数 $F_x(x,y,z)$、$F_y(x,y,z)$ 与 $F_z(x,y,z)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数，则空间积分 $\int_\Gamma F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z$ 在 G 内域路径无关的充分必要条件是

$$\frac{\partial F_z}{\partial y}=\frac{\partial F_y}{\partial z}\quad\frac{\partial F_x}{\partial z}=\frac{\partial F_z}{\partial x}\quad\frac{\partial F_y}{\partial x}=\frac{\partial F_x}{\partial y}\qquad(\text{ or }\nabla\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0})$$

在 G 内恒成立

设区域 G 是空间一维单连通区域，若函数 $F_x(x,y,z)$、$F_y(x,y,z)$ 与 $F_z(x,y,z)$ 在 G 内具有一阶连续偏导数，则表达式 $F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z$ 在 G 内成为某一函数 $u(x,y,z)$ 的全微分的充分必要条件是等式 $\nabla\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{0}$ 在 G 内恒成立；当该条件满足时，这函数为

$$u(x,y,z)=\int_{(x_0,y_0,z_0)}^{(x,y,z)}F_x\mathrm{d}x+F_y\mathrm{d}y+F_z\mathrm{d}z+u_0$$

其中积分路径可任一取定，u_0 为 (x_0,y_0,z_0) 处的值；因而也可去

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}F_x(x,y_0,z_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}F_y(x,y,z_0)\mathrm{d}y+\int_{z_0}^{z}F_z(x,y,z)\mathrm{d}z+u_0$$

(x_0,y_0,z_0) 为 G 内某一点

环流量与旋度 circulation&rotation

设有向量场

$$\boldsymbol{F}=F_x\boldsymbol{i}+F_y\boldsymbol{j}+F_z\boldsymbol{k}$$

其中函数 F_x、F_y 与 F_z 均具有一阶连续偏导数，Γ 是场内的一条分段光滑的有向闭曲线，$\boldsymbol{r}$ 是 Γ 在点 (x,y,z) 处的单位切向量，则积分

$$\oint_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{r}\mathrm{d}s$$

称为向量场 $\boldsymbol{F}$ 沿有向曲线 Γ 的环流量，也可表示为

$$\oint_{\Gamma} \boldsymbol{F} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

对于向量场 $\boldsymbol{F}$，定义其旋度 $\mathrm{rot}\boldsymbol{F}$ 为

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

利用 nabla 算子来表示则有

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

其表示向量场 $\boldsymbol{F}$ 在一点上的旋转量，其旋转方向为 $\nabla \times \boldsymbol{F}$ 按右手规则定义