二阶与三阶行列式

二阶行列式 Second-order determinant

记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，称为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

其中数 a_{11}，a_{22}，a_{12}，a_{21} 称为行列式的元素，横排叫做行，竖排叫做列；**元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 叫做列标，表明该元素位于第 j 列**；行列式是一个代数和

这个规则称为“对角线法则”，把从 a_{11} 到 a_{22} 的连线叫做主对角线，把 a_{12} 到 a_{21} 的连线交副对角线

二元线性方程

对于二元线性方程

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

定义

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} \quad , \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则二元线性方程组可改写为

$$\begin{cases} Dx_1 = D_1 \\ Dx_2 = D_2 \end{cases}$$

于是，当 $D \neq 0$ 时，该二元线性方程有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \quad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

三阶行列式 Third-order determinant

记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{3}3 - a11a_{23}a_{32}$$

称为三阶行列式

三阶行列式有 6 项，每一项均为不同行不同列的三个元素之积，在按一定法则冠以正负号

三元线性方程组

类似于二元线性方程组，对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

同时记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}\quad,\quad D_1=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&a_{13}\\b_2&a_{22}&a_{23}\\b_3&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$$

$$D_2=\begin{vmatrix}a_{11}&b_1&a_{13}\\a_{21}&b_2&a_{23}\\a_{31}&b_3&a_{33}\end{vmatrix}\quad,\quad D_3=\begin{vmatrix}b_1&a_{12}&b_1\\b_2&a_{22}&b_2\\b_3&a_{32}&b_3\end{vmatrix}$$

若系数行列式 $D\neq 0$，则该方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D}\quad x_2\frac{D_2}{D}\quad x_3=\frac{D_3}{D}$$

排列

定义

由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的不重复的每一种有确定次序的排列，称为 n 级排列（简称为排列）

逆序

在一个 n 级排列（$i_1i_2\cdots i_t\cdots i_s\cdots i_n$）中，若 $i_t>i_s$，则称数 i_t 与数 i_s 构成一个逆序；一个 n 级排列中逆序的总数称为该排列的逆序数，记为 $N(i_1i_2\cdots i_n)$

即一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，设比 i_k 大的且排在 i_k 前的数共有 t_k 各，则 i_k 的逆序的个数为 t_k，而该排列中所有自然数的逆序的个数之和就是这个排列的逆序数，即

$$N(i_1i_2\cdots i_n)=\sum_{k=1}^{n}t_k$$

逆序数为奇数的排列称为奇排列；逆序数为偶数的排列称为偶排列

对换

在排列中，将任意两个元素对调，其余元素不动，这种作出新排列的方法称为对换；将两个相邻元素对换，称为相邻对换

任意一个排列经过一次对换后，其奇偶性改变

奇排列经过奇数词对换后可变为自然数顺序排列，而偶排列经过偶数次对换后可变为自然数顺序排列

n 个自然数（$n>1$）共有 $n!$ 个 n 级排列，其中奇偶排列各占一半

n 阶行列式

定义

有 n^2 各元素 a_{ij} 组成的记号

$$\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，其中横排称为行，竖排称为列；它表示所有**取自不同行且不同列的 n 个元素的乘积** $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的代数和，其各项的符号为：**当该项的各个元素的行标按自然数排列后（$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$），其对应的列标所构成的排列（$j_1j_2\cdots j_n$）是偶排列则符号取正，否则（是奇排列）则符号取负**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 求和；行列式有时也简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$，这里数 a_{ij} 称为行列式的元素，称

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$$

为行列式的一般项

特点

- n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和，被冠以正号与负号的项各占其一半
- **行列式的本质是一个数，一个按照特殊定义规定的数**
- 元素 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的符号为
- 一阶行列式 $\begin{vmatrix} a \end{vmatrix} = a$

特殊行列式与其计算

- **副对角线行列式**

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2(n-1)}\cdots a_{n1}$$

- **对角行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

- **上三角（形）行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

- **下三角（形）行列式**

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

- 反对称行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{if } n \text{ is odd}$$