矩阵的概念

由 $m\times n$ 个数 a_{ij} 排成的 m 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{matrix}$$

称为 m 行 n 列矩阵，简称 $m\times n$ 矩阵，为表示一个整体，总是加一个括弧，并用大写黑体字母表示它，记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

这 $m\times n$ 个数称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素，a_{ij} 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行第 j 列的元素，一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 也可简记为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{m\times n}=(a_{ij})_{m\times n} \text{ or } \boldsymbol{A}=(a_{ij})$$

如果矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的行数及列数均相同，且对应元素相等，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 相等，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

几种特殊矩阵

- **实矩阵**

  元素均为实数的矩阵

- **复矩阵**

  元素为复数的矩阵

- **非负矩阵**

  元素均为非负数的矩阵

- n **阶方阵**

  若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数与列数都等于 n，则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，记为 $\boldsymbol{A}_n$

- **同型矩阵**

  如果两个矩阵具有相同的行数与相同的列数，则称这两个矩阵为同型矩阵

- **零矩阵**

  所有元素均为零的矩阵，记为 $\boldsymbol{O}$

- n **阶单位矩阵**

  n 阶方阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$，记为 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_n$ or $\boldsymbol{I}=\boldsymbol{I}_n$

- **行矩阵 & 行向量**

  只有一行的矩阵 $\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$，为避免元素混淆，也记为 $\begin{bmatrix} a_1, & a_2, & \cdots, & a_n \end{bmatrix}$

- **列矩阵 & 列向量**

  只有一列的矩阵 $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$

- **n 阶对角矩阵**

  n 阶方阵 $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$，也可记为 $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$

- **n 阶数量矩阵**

  当一个 n 阶对角矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的对角元素全部等于某一数 a 是，即 $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(a, a, \cdots, a) = a\boldsymbol{I}$

矩阵的运算

- **取负**

  设矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$，记 $-\boldsymbol{A} = (-a_{ij})$，称 $-\boldsymbol{A}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**

- **加法**

  设有两 $m \times n$ 的同型矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 和 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和记作 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$，规定为

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = (a_{ij} + b_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \cdots & a_{2n} + b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

- **减法**

  由于 $\boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$，则可定义减法 $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + (-\boldsymbol{B})$

- **数乘运算**

  数 k 与 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的乘积记作 $k\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}k$，定义为

$$k\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}k = (ka_{ij}) = \begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}$$

- **线性运算**

  矩阵的加法与数乘两种运算统称为矩阵的线性运算，它们满足规律

  > $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}$

> $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$

> $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$

> $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$

> $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$

> $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$

> $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$

> $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$

- **乘法**

  设

$$\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times s}=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1s}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2s}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\a_{m1}&a_{m2}&\cdots&a_{ms}\end{bmatrix}\quad\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times n}=\begin{bmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\b_{s1}&b_{s2}&\cdots&b_{sn}\end{bmatrix}$$

  矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积记作 $\boldsymbol{AB}$，定义为

$$\boldsymbol{AB}=(c_{ij})_{m\times n}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1n}\\c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2n}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\c_{m1}&c_{m2}&\cdots&c_{mn}\end{bmatrix}\quad\left(c_{ij}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}\right)$$

  若 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$，则矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的元素 c_{ij} 即为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 第 i 行元素与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 第 j 行元素对应元素乘积之和，即

$$c_{ij}=\begin{bmatrix}a_{i1}&a_{i2}&\cdots&a_{is}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_{1j}\\b_{2j}\\\vdots\\b_{sj}\end{bmatrix}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{is}b_{sj}=\sum_{k=1}^{s}a_{ik}b_{kj}$$

  显然 $\boldsymbol{AB}\neq\boldsymbol{BA}$（有时两者中只有一个有定义）

  两非零矩阵的乘积可能为零矩阵，故不能从 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 得出 $\boldsymbol{A}$ or $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$

  矩阵乘法一般也不满足消去律，即不能从 $\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{BC}$ 得出 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$

  矩阵乘法满足运算规则（若有定义）

  > $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$

  > $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AC}+\boldsymbol{BC}$

  > $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{CA}+\boldsymbol{CB}$

  > $k(\boldsymbol{AB})=(k\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}(k\boldsymbol{B})$

- **可交换**

  如果两矩阵相乘，有 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 可交换，简称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 可换

  （对于单位矩阵有 $\boldsymbol{I}_m\boldsymbol{A}_{m\times n}=\boldsymbol{A}_{m\times n}\boldsymbol{I}_n=\boldsymbol{A}_{m\times n}$）

- **转置**

  把矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行换成同序数的列所得到的新矩阵称为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^T$ or $\boldsymbol{A}'$

  即若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$

  矩阵的转置满足运算规则（若有定义）

  > $(\boldsymbol{A}^T)^T=\boldsymbol{A}$
  >
  > $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{A}^T+\boldsymbol{B}^T$
  >
  > $(k\boldsymbol{A})^T=k\boldsymbol{A}^t$
  >
  > $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^T=\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{A}^T$

- **方阵的幂**

  设方阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$，规定

  $$\boldsymbol{A}^0=\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{A}^k=\overbrace{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}\cdot\cdots\cdot\boldsymbol{A}}^{k\text{ of }\boldsymbol{A}}$$

  矩阵的幂满足运算规则

  > $\boldsymbol{A}^m\boldsymbol{A}^n=\boldsymbol{A}^{m+n}$
  >
  > $(\boldsymbol{A}^m)^n=\boldsymbol{A}^{mn}$

- **方阵的行列式**

  由 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的元素所构成的行列式（各元素的位置不变），称为方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式，记作

  $$|\boldsymbol{A}| \text{ or } \det \boldsymbol{A}$$

  矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det\boldsymbol{A}$ 满足运算规则（其中 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 同为 n 阶方阵）

  > $\det\boldsymbol{A}^T=\det\boldsymbol{A}$
  >
  > $\det(k\boldsymbol{A})=k^n\det\boldsymbol{A}$
  >
  > $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\det\boldsymbol{A}\det\boldsymbol{B}$
  >
  > $\det(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})=\det(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$

- **对称矩阵**

  设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，如果 $\boldsymbol{A}^T=\boldsymbol{A}$，即 $a_{ij}=a_{ji}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称矩阵

- **反对称矩阵**

  设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶方阵，如果 $\boldsymbol{A}^T=-\boldsymbol{A}$，即 $a_{ij}=-a_{ji}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为反对称矩阵

- **共轭矩阵**

  设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ 为复矩阵，记 $\overline{\boldsymbol{A}}=(\overline{a_{ij}})$，其中 $\overline{a_{ij}}$ 为 a_{ij} 的共轭复数，称 $\overline{\boldsymbol{A}}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的共轭矩阵

> $\overline{\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}} + \overline{\boldsymbol{B}}$

> $\overline{\lambda \boldsymbol{A}} = \overline{\lambda \boldsymbol{A}}$

> $\overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}}$

> $\overline{(\boldsymbol{A}^T)} = (\overline{\boldsymbol{A}})^T$

逆矩阵

对于一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$，如果存在一个 n 阶方阵 $\boldsymbol{B}$，使得 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{I}$，则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵，而方阵 $\boldsymbol{B}$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵

若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 是可逆的，则 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵是唯一的，记为 $\boldsymbol{A}^{-1}$

如果 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式 $\det \boldsymbol{A} \neq 0$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为非奇异的，否则称 $\boldsymbol{A}$ 为奇异的

线性方程组的矩阵表示

对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

若记 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$，则利用矩阵的乘法，线性方程组可表示为

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 称为方程组的系数矩阵，方程 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 称为矩阵方程

如果 $x_j = c_j$ 是方程组的解，记列矩阵 $\boldsymbol{\eta} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A\eta} = \boldsymbol{b}$ 这是也称 $\boldsymbol{\eta}$ 是矩阵方程的解；反之如果 $\boldsymbol{\eta}$ 是矩阵方程的解，既有矩阵等式 $\boldsymbol{A\eta} = \boldsymbol{b}$ 成立，则 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\eta}$，即 $x_j = c_j$ 也是线性方程组的解

线性变换

变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 与变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 之间的关系式

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{cases}$$

称为从变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 到变量 $y_1, y_2, \cdots, y_m$ 的线性变换，其中 a_{ij} 为常数；线性变换的系数 a_{ij} 构成的矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times n}$ 称为线性变换的系数矩阵

若记 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$，则线性变换关系是可表示为矩阵形式

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$$

当一线性变换的系数矩阵为单位矩阵 $\boldsymbol{I}$ 式，线性变换 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}$ 称为恒等变换，因为 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{I}\boldsymbol{x}$
线性变换实际上构建了一种从矩阵 $\boldsymbol{x}$ 到矩阵 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 的矩阵变换关系 $\boldsymbol{x}\rightarrow\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$