二重积分

定义

设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的有界函数，将闭区间 D 任意分成 n 个小区域

$$\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$$

其中 $\Delta\sigma_i$ 表示第 i 个小闭区域，也表示它的面积，在每个 $\Delta\sigma_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i)，做乘积 $f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$，并作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$；如果当各小闭区域的直径中的最大值 $\lambda \to 0$ 时，这和的极限总存在，且与比和区域 D 的分法及点 (ξ_i,η_i) 的取法无关，那么称此极限为函数 $f(x,y)$ 在闭合区域 D 上的二重积分，记作 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$，即

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

其中 $f(x,y)$ 叫做被积函数，$f(x,y)\mathrm{d}\sigma$ 叫做被积表达式，$\mathrm{d}\sigma$ 叫做面积元素，x 与 y 叫做积分变量，D 叫做积分区域，$\lim_{\lambda\to 0} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$ 叫做积分和

如果依照直角坐标系划分 $\Delta\sigma_i$，则有 $\mathrm{d}\sigma = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 叫做直角坐标系中的面积元素

性质

- 设 α 与 β 为常数，则

$$\iint_D [\alpha f(x,y) + \beta g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = \alpha\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \beta\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

- 如果闭区域 D 被有线条曲线划分为有限个部分闭区域，那么在 D 上的二重积分等于各部分区域上的二重积分的和

- 如果在 D 上，$f(x,y)\equiv 0$，σ 为 D 的面积，那么

$$\sigma = \iint_D 1\mathrm{d}\sigma = \iint_D \mathrm{d}\sigma$$

- 如果在 D 上，$f(x,y)\le g(x,y)$，那么有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le \iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

  又有

$$\left|\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \le \iint_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma$$

- 设 M 和 m 分别时 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上的最大最小值，σ 是 D 的面积，则有

$$m\sigma \le \iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \le M\sigma$$

- 设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续，σ 是 D 的面积，则在 D 上至少存在一点 (ξ,η)，使得

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\sigma$$

换元法

设 $f(x,y)$ 在 xOy 平面上的闭区域 D 上连续，若变换

$$T: x = x(u,v), y = y(u,v)$$

将 uOv 平面上的闭区域 D' 投影至 xOy 平面上的闭区域 D，且满足

- $x(u,v)$，$y(u,v)$ 在 D' 上具有一阶连续偏导数
- 在 D' 上雅可比式
$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \neq 0$$
- 变换 $T: D' \to D$ 是一对一的

则有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D f(x,y)|J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

三重积分

定义

设 $f(x,y,z)$ 是空间有界闭区域 Ω 上的有界函数，将闭区间 Ω 任意分成 n 个小区域

$$\Delta v_1, \Delta v_2, \cdots, \Delta v_n$$

其中 Δv_i 表示第 i 个小闭区域，也表示它的体积，在每个 Δv_i 上任取一点 (ξ_i, η_i, ζ_i)，做乘积 $f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$，并作和 $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$；如果当各小闭区域的直径中的最大值 $\lambda \to 0$ 时，这和的极限总存在，且与比和区域 Ω 的分法及点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的取法无关，那么称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在闭合区域 Ω 上的三重积分，记作 $\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v$，即

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\mathrm{d}v = \lim_{\lambda \to 0} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta v_i$$

其中 $f(x,y,z)$ 叫做被积函数，$f(x,y,z)\mathrm{d}v$ 叫做被积表达式，$\mathrm{d}v$ 叫做体积元素，Ω 叫做积分区域

如果依照直角坐标系划分 Δv_i，则有 $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$，其中 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 叫做直角坐标系中的体积元素

$$\mathrm{d}v = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}z = \rho^2\sin\varphi\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

曲面面积

曲面方程

设曲面 S 由方程

$$z = f(x,y)$$

给出，D 为曲面 S 在 xOy 上的投影，而其表面积为

$$A = \iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

参数方程

若曲面 S 由参数方程

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

给出，即

$$G(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$$

其中 $(u,v) \in D$，则

$$\mathrm{d}A = \left\| \frac{\partial G}{\partial u} \times \frac{\partial G}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \sqrt{(x_u^2 + y_u^2 + z_u^2)(x_v^2 + y_v^2 + z_v^2) - (x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v)^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

含参变量的积分

如果函数 $f(x,y)$ 在矩形 $R = [a,b] \times [c,d]$ 上连续，那么由积分 $\varphi(x) = \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 确定的函数 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上也连续

如果函数 $f(x,y)$ 在矩形 $R = [a,b] \times [c,d]$ 上连续，那么 $\int_a^b [\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y]\mathrm{d}x = \int_c^d [\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x]\mathrm{d}y$

如果函数 $f(x,y)$ 及其偏导数 $f_x(x,y)$ 在矩形 $R = [a,b] \times [c,d]$ 上连续，那么由 $\varphi(x) = \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$ 确定的函数 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上可微，且

$$\varphi'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^d f_x(x,y)\mathrm{d}y$$

如果函数 $f(x,y)$ 在矩形 $R = [a,b] \times [c,d]$ 上连续，函数 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且

$$c \le \alpha(x) \le d, c \le \beta(x) \le d$$

那么由积分 $\Phi(x) = \displaystyle\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$ 确定的函数 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上也连续

如果函数 $f(x,y)$ 及其偏导数 $f_x(x,y)$ 都在矩形 $R = [a,b] \times [c,d]$ 上连续，函数 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可微，且

$$c \le \alpha(x) \le d, c \le \beta(x) \le d$$

那么由积分 $\Phi(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$ 确定的函数 $\Phi(x)$ 在 $[a,b]$ 上也可微，且

$$\begin{aligned} \Phi'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \\ &= \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f_x(x,y)\mathrm{d}y + f[x,\beta(x)]\beta'(x) - f[x,\alpha(x)]\alpha'(x) \end{aligned}$$