常数项无穷级数 Constant term infinite series

一般项 General terms

一般的，如果给定一个数列 (sequence)

$$u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots$$

那么由这个数列构成的表达式

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

叫做（常数项）无穷级数，简称级数，记为 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$，即

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

其中第 n 项 u_n 叫做级数的一般项

部分和

做（常数项）级数的前 n 项的和

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$$

s_n 称为级数的部分和

收敛与发散 Convergenc & divergence

如果级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 有极限 s，即

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s$$

那么称无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛，这是极限 s 叫做这级数的和，并写成

$$s = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

如果 $\{s_n\}$ 没有极限，那么称无穷级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 发散

当级数收敛时，其部分和 s_n 是级数的和 s 的近似值，它们之间的差值叫做级数的余项；用近似值 s_n 代替和 s 所产生的误差是这个余项的绝对值，即误差是 $|r_n| \quad (r_n = s - s_n)$

特殊的几个级数

- 等比级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} aq^i = a + aq + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$$

$$s_n = \frac{a(1-q^n)}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^n}{1-q}$$

当 $|q| < 1$ 时收敛于 $\dfrac{a}{1-q}$，其余情况发散

- 等差级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} i = 1 + 2 + \cdots + n + \cdots$$

$$s_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

此级数发散

- 调和级数

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

调和级数时发散的

- 收敛于 1

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + cdot$$

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

此级数收敛于 1

收敛级数的基本性质

- 如果级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛于和 s，那么级数 $\sum_{i=1}^{i} nftyku_i$ 也收敛，其和为 ks
- 如果级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 与 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 分别收敛于和 s 和 σ，那么级数 $\sum_{i=1}^{\infty}(u_i \pm v_i)$ 也收敛，其和为 $s \pm \sigma$

  即，两个收敛级数可以逐项相加于逐项相减
- 在级数中去掉、加上或改变有限项，不会改变级数的收敛性
- 如果级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛，那么对于这个级数的项任一加括号后组成的级数

$$(u_1 + \cdots + u_{n_1}) + (u_{n_1+1} + \cdots + u_{n_2}) + \cdots + (u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k}) + \cdots$$

  仍收敛，且其和不变
- 如果级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛，那么它的一般项 u_n 趋于零（必要条件），即

$$\lim_{n \to \infty} u_n = 0$$

级数的审敛法

- 柯西审敛原理 (Cauchy Criterion)

  级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛的充分必要条件是：对于任一给定正数 ϵ，总存在正整数 N 使得当 $n > N$ 时，对于任意的正整数 p，都有

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + i_{n+p}| < \epsilon$$

  成立

- 正项级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛的充分必要条件时：它的部分和数列 $\{s_n\}$ 有界
- 比较审敛法

  设 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 和 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 都是正项级数，且 $u_i \le v_i$，若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 收敛则 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛；若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 发散则 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 发散
- 设 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 和 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 都是正项级数：若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 收敛，且存在正整数 N，使得当 $n \ge N$ 时有 $u_n \le kv_n \quad (k > 0)$，则 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛；若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 发散，且存在正整数 N，使得当 $n \ge N$ 时有 $u_n \ge kv_n \quad (k > 0)$，则 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 发散
- 比较审敛法的极限形式

  设 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 和 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 都是正项级数：

  - 如果 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l \quad (0 \le l < +\infty)$，且级数 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 收敛，那么级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛
  - 如果 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l > 0$ 或 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$，且级数 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 发散，那么级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 发散
- 比值审敛法，达朗贝尔 (d'Alembert) 判别法

  设 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 为正项级数，如果

  $$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$$

  那么当 $\rho < 1$ 时级数收敛，$\rho > 1$ 时级数发散，$\rho = 1$ 时可能收敛也可能发散
- 根值审敛法，柯西判别法

  设 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 为正项级数，如果

  $$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho$$

  那么当 $\rho < 1$ 时级数收敛，$\rho > 1$ 时级数发散，$\rho = 1$ 时级数可能收敛也可能发散
- 极限审理法

  设 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 为正项级数，

  - 如果 $\lim_{n\to\infty} nu_n = l > 0$，那么级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 发散
  - 如果 $p > 1$，而 $\lim_{n\to\infty} n^p u_n = l \quad (0 \le l < +\infty)$，那么级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛
- 莱布尼茨定理

  如果交错级数 $\sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_i$ 满足条件：

  - $u_n \ge u_{n+1}$
  - $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$

  那么级数收敛，且其和 $s \le u_1$，其余项 r_n 的绝对值 $|r_n| \le u_{n+1}$

- 绝对收敛若级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 的各项的绝对值组成的级数 $\sum_{i=1}^{\infty} absu_i$ 收敛，则称其绝对收敛；若 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 收敛，而 $\sum_{i=1}^{\infty} absu_i$ 发散，则称其条件收敛；如果级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 绝对收敛，那么级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 必定收敛
- 绝对收敛级数经改变项的位置后构成的级数也收敛，且与原级数有相同的和（绝对收敛级数具有可交换性）
- 绝对收敛级数的乘法

  设级数 $\sum_{i=1}^{\infty} u_i$ 与 $\sum_{i=1}^{\infty} v_i$ 都绝对收敛，其和分别为 s 和 σ，则它们的柯西乘积

  $$u_1v_1 + (u_1v_2 + u_2v_1) + \cdots + (u_1v_n + u_2v_{n-1} + \cdots + u_nv_1) + \cdots$$

  也是绝对收敛的，且其和为 $s\sigma$

幂级数

函数项级数 series of functions

如果给定一个定义在区间 I 上的函数列

$$u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x), \cdots$$

那么由这函数列构成的表达式

$$u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

称为定义在区间 I 上的（函数项）无穷级数，简称（函数项）级数

对于每一确定的值 $x_0 \in I$，函数项级数成为以常数项级数，这个级数可能收敛，也可能发散；对于是该级数收敛的点 x_0 称为函数项级数的收敛点，如果发散则称为发散点；收敛点的全体称为它的收敛域，发散点的全体称为它的发散域

对于收敛域内的任意 x，函数项级数成为一收敛的常数项级数，因而存在一确定的和；该和在收敛域上是 x 的一个函数 $s(x)$，称为和函数，即

$$s(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

将函数项级数的前 n 项的部分和记作 $s_n(x)$，则在收敛域上有

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$$

记 $r_n(x) = s(x) - s_n(x)$，$r_n(x)$ 叫做函数项级数的余项，且有

$$\lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$$

幂级数

幂级数的形式是

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_ix^i = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

其中常数 $a_0, a_1, a_2 \cdots, a_n, \cdots$ 叫做幂级数的系数

幂级数的收敛性

- 阿贝尔 (Abel) 定理

  如果级数 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ 当 $x = x_0 \quad (x_0 \neq 0)$ 时收敛，那么适合不等式 $|x| < |x_0|$ 的一切 x 使得这幂函数绝对收敛；反之，如果级数 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ 当 $x = x_0$ 时发散，那么适合不等式 $|x| > |x_0|$ 的一切 x 使得这幂函数发散

- 如果幂级数 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ 不是仅在 $x = 0$ 一点收敛，也不是在整个数轴上都收敛，那么必有一个确定的正数 R 存在，使得

  当 $|x| < R$ 时，幂级数绝对收敛；

  当 $|x| > R$ 时，幂级数发散；

  当 $|x| = R$ 时，收敛性不确定

  该常数 R 称为幂级数的收敛半径，开区间 $(-R, R)$ 称为收敛区间，再由 $x = \pm R$ 时的收敛性确定它的具体收敛域

- 如果

  $$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \rho$$

  其中 a_n、a_{n+1} 是幂级数 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ 的相邻的系数那么这幂级数的收敛半径

  $$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho}, & \rho \neq 0 \\ +\infty, & \rho = 0 \\ 0, & \rho = +\infty \end{cases}$$

幂级数的运算

设有两幂级数

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

与

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i$$

分别再区间 $(-R, R)$ 及 $(-R', R')$ 内收敛，则有

- 加法

  $$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) x^i$$

  其收敛域为 $(-R, R) \cap (-R', R')$

- 减法

  $$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i - \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i - b_i) x^i$$

  其收敛域为 $(-R, R) \cap (-R', R')$

- 乘法

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)\left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{i} a_j + b_{i-j}\right) x^i$$

其收敛域为 $(-R,R)\cap(-R',R')$

- 除法

$$\frac{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i}{\sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i} = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i$$

其中 $b_0 \neq 0$，则有

$$a_n = \sum_{i=0}^{n} b_i c_{n-i}$$

其收敛域可能远小于 $(-R,R)\cap(-R',R')$

性质

- 幂级数 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域上连续
- 幂级数 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上可积，并有逐项积分公式

$$\int_0^x s(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \left[\sum_{i=0}^{\infty} a_i t^i\right]\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{i+1} x^{i+1} \quad (x \in I)$$

逐项积分后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径

- 幂级数 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上可导，且有逐项求导公式

$$s'(x) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right)' = \sum_{i=0}^{\infty} i a_i x^{i-1} \quad (x \in I)$$

逐项求导后所得到的幂级数和原级数有相同的收敛半径

- 幂级数 $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ 的和函数 $s(x)$ 在其收敛域 I 上有任意阶导数

函数的幂级数展开

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域 $U(x_0)$ 内具有各阶导数，则 $f(x)$ 在该邻域内能展开称泰勒级数的充分必要条件是在该邻域内 $f(x)$ 的泰勒公式中的余项 $R_n(x)$ 当 $n \to \infty$ 时的极限为零，即

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0, \quad x \in U(x_0)$$

将函数 $f(x)$ 在原点的泰勒级数称为麦克劳林级数

常用展开

- $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \cdots + \dfrac{x^n}{n!} + \cdots = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \dfrac{x^i}{i!} \quad (-\infty < x < +\infty)$
- $a^x = e^{x\ln a} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} \dfrac{(\ln a)^i}{i!} x^i \quad (-\infty < x < +\infty)$

- $\ln(1+x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i+1} x^{i+1} \quad (-1 < x \le +1)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2n)!} x^{2n} \quad (-\infty < x < +\infty)$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{(2n+1)!} x^{2n+1} \quad (-\infty < x < +\infty)$
- $\frac{1}{1+x} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^i \quad (-1 < x < +1)$
- $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^{2i} \quad (-1 < x < +1)$
- $\arctan x = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1} x^{2i+1} \quad (-1 \le x \le +1)$
- $(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \cdots + \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} x^n + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} C_m^i x^i \quad (-1 < x < +1)$

  （二项式展开）

用幂级数解微分方程

如果 $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ 中的 $P(x)$ 与 $Q(x)$ 可在 $(-R, R)$ 内展开为 x 的幂级数，那么在 $(-R, R)$ 内必有形如

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$

的解

一致收敛性

定义

设有函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$，如果对于任意给定的正数 ϵ，都存在着一个只依赖于 ϵ 的正整数 N，使得当 $n > N$ 时，对于区间 I 上的一切 x，都有不等式

$$|r_n(x)| = |s(x) - s_n(x)| < \epsilon$$

成立，那么称函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛于和 $s(x)$，也称函数序列 $\{s_n(x)\}$ 在区间 I 上一致收敛于 $s(x)$

魏尔斯特拉斯 (Weierstrass) 判别法

如果函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上满足条件：

- $|u_n(x)| \le a_n$
- 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ 收敛

那么函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛

性质

- 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的各项 $u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上都连续，且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $s(x)$，那么 $s(x)$ 在 $[a,b]$ 上也连续
- 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的各项 $u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上都连续，且 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛于 $s(x)$，那么 $s(x)$ 在 $[a,b]$ 上可逐项积分，即

$$\int_{x_0}^{x} s(t)\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} u_i(t)\mathrm{d}t$$

  其中 $a \leq x_0 < x \leq b$，并且上式右侧的级数在 $[a,b]$ 上也一致收敛
- 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的各项 $u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上收敛于 $s(x)$，它的各项 $u_n(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上都具有连续导数 $u_n'(x)$，并且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上也一致收敛，且可逐项求导，即

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$$

- 如果幂级数 $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ 的收敛半径为 $R>0$，那么此级数在 $(-R,R)$ 内的任一闭区间 $[a,b]$ 上一致收敛
- 如果幂级数 $\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ 的收敛半径为 $R>0$，那么其和函数 $s(x)$ 在 $(-R,R)$ 内可导，且有逐项求导公式

$$s'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

  逐项求导后所得到的幂级数与原级数有相同的收敛半径