多元函数 function of several variables

n 维空间

n 维实数坐标空间可表示为

$$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) | x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$，$\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中任意两元素，$\lambda \in \mathbb{R}$，规定

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$

$$\lambda \boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n)$$

它们的距离为

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$$

记 $\boldsymbol{x}$ 到零元的距离为 $\|\boldsymbol{x}\|$，即

$$\|\boldsymbol{x}\| = \rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

故

$$\rho(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|)$$

$\mathbb{R}^n$ 中变元的极限：设 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$，如果

$$\|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\| \to 0$$

那么称变元 $\boldsymbol{x}$ 在 $\mathbb{R}^n$ 中趋于固定元 $\boldsymbol{a}$，记作 $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$

即

$$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a} \Leftrightarrow x_1 \to a_1, x_2 \to a_2, \cdots, x_n \to a_n$$

邻域

在 $\mathbb{R}^n$ 上的邻域 (neighbourhood) 的概念，设 P_0 是 $\mathbb{R}^n$ 上的一点呢，δ 为某一正数与点 P_0 距离小于 δ 的点 P 的集合称为点 P_0 的 δ 邻域，记作 $U(P_0, \delta)$，即

$$U(P_0, \delta) = \{P \,|\, \|\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P_0}\| < \delta\}$$

点 P_0 的去心 δ 邻域 (deleted neighbourhood)，记作 $\mathring{U}(P_0, \delta)$，即

$$U(P_0, \delta) = \{P \,|\, 0 < \|\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P_0}\| < \delta\}$$

如果不需要特别强调邻域的半径 δ，则用 $U(P_0)$ 表示 P_0 的某个邻域，点 P_0 的去心邻域记为 $\mathring{U}(P_0)$

点与点集之间的关系

对于任意一点 $P \in \mathbb{R}^n$ 与任一点集 $E \subset \mathbb{R}^n$ 必为一下三种关系中的一个

- **内点 (interior point)** 如果 $\exists U(P) \subset E$，则称 P 为 E 的内点
- **外点 (exterior point)** 如果 $\exists U(P) \cap E = \varnothing$，则称 P 为 E 的外点

- **边界点 (boundary point)** 如果 $\forall U(P), \exists P_{in}, P_{ex} \in U(P)$ let $P_{in} \in E, P_{ex} \notin E$，则称 P 为 E 的边界点

  E 的边界点的全体称为 E 的边界 (boundary)，记作 ∂E

  聚点 (limit point)：如果对于任意给定的 $\delta > 0$，点 P 的去心邻域 $\mathring{U}(P, \delta)$ 内总有 E 中的点，那么称点 P 是 E 的聚点（$E \cup \partial E$）

- **开集 (open set)** 如果 E 的点都是 E 的内点，则称 E 为开集
- **闭集 (closed set)** 如果 $\partial E \subset E$，则称 E 为闭集
- **连通集 (connected set)** 如果 E 内任意两点都可以用折线联结起来，且该折线上的点都属于 E，则称 E 为连通集
- **(开) 区域 (domain)** 连通的开集，称为区域
- **闭区域 (bounded domain)** 开区域与其边界的合集，称为闭区域
- **有界集 (bounded set)** 如果 $\exists r$, let $E \subset U(O, r)$（O 为原点），那么称 E 为有界集
- **无界集 (unbounded set)** 如果 E 不是有界集，它就是无界集

多元函数

设 D 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个非空子集，称映射 $f: D \to \mathbb{R}$ 为定义在 D 上的 n 元函数，通常记为

$$z = f(P), P \in D$$

其中点集 D 称为该函数的定义域，P 称为自变量，z 称为因变量

多元函数的值域

$$f(D) = z \,|\, z = f(P), P \in D$$

多元函数的极限

设 n 元函数 $f(P)$ 的定义域为 D，点 P_0 为 D 的聚点，如果存在常数 A，对于任意给定的正数 ϵ，总存在正数 δ, 使得当点 $P(x, y) \in D \cap \mathring{U}(P_0, \delta)$ 时，都有

$$|f(P) - A| < \epsilon$$

成立，那么就称常数 A 为函数 $f(P)$ 当 $P \to P_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = A \text{ or } f(P) \to A(P \to P_0)$$

多元函数的连续性

设多元函数 $f(P)$ 的定义域为 D，P_0 为 D 的聚点，且 $P_0 \in D$，如果

$$\lim_{P \to P_0} f(P) = f(P_0)$$

那么称函数 $f(x)$ 在点 P_0 连续

设函数 $f(P)$ 的定义域为 D，P_0 是 D 的聚点，如果函数 $f(P)$ 在点 P_0 不连续，那么称 P_0 为函数 $f(P)$ 的断点

性质

- 在有界闭区间 D 上的多元连续函数，必定在 D 上有界，且能取得它的最大值与最小值
- 在有界闭区间 D 上的多元连续函数必取得介于最大值与最小值之间的任意值

- 在有界闭区间 D 上的多元连续函数必定在 D 上一致连续 ($\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0,\ \text{let } |f(P_1) - f(P_2)| < \epsilon \text{ when } \|\boldsymbol{P_1} - \boldsymbol{P_2}\| < \delta$)

偏导数

设函数 $z = f(P)$ 在点 P_0 的某一邻域内有定义，对于变元 x_i 有增量 h，对应函数的增量

$$f(P_0 + (0, 0, \cdots, h, \cdots, 0)) - f(P_0)$$

如果

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(P_0 + (0, 0, \cdots, h, \cdots, 0)) - f(P_0)}{h}$$

存在，那么称此极限为函数 $z = f(P)$ 在点 P_0 处对于 x_i 的偏导数 (partial derivative)，记作

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x_i}\right|_{P=P_0}, \left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{P=P_0} \text{ or } f_{x_i}(P_0)$$

如果函数 $z = f(P)$ 在区间 D 内任意点均可导，那么这些点位置与其对应的偏导数可以构成一个新的函数，称为偏导函数，记为

$$\frac{\partial z}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_i} \text{ or } f_{x_i}(P)$$

高阶偏导数

设函数 $z = f(P)$ 在区域 D 内具有偏导函数，如果对该偏导函数继续求偏导，得二阶偏导函数，如果求导对象不同则称为混合偏导，如

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = f_{x_i x_j} f(P)$$

如果函数 $z = f(P)$ 的两个二阶混合偏导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}$ 与 $\frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i}$ 在区域 D 内连续，那么在该区间内这两个二阶混合偏导函数必定相等

拉普拉斯 (Laplace) 方程

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (z = \ln\sqrt{x^2 + y^2})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \left(z = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right)$$

全微分 total derivative

设函数 $z=f(x)$ 在点 P 的某邻域内有定义，如果函数在点 P 的某邻域内有定义，如果函数在点 P 的全增量

$$\Delta z = f(P+(\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n)) - f(P)$$

维实数坐标空间可表示为

$$\Delta z = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i + o(\rho)$$

其中 A_i 不依赖与 Δx_i 而仅与 P 有关，$\rho = \|(\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_n)\|$，那么称函数 $z=f(P)$ 在点 P 可微分，而 $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i$ 称为函数 $f(P)$ 在点 P 的全微分，记作 $\mathrm{d}z$

$$\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} A_i \Delta x_i$$

如果函数在区域 D 内各点处都可微分，那么称这函数在 D 内可微分

如果函数 $z=f(P)$ 在点 P 可微分，那么该函数在点 P 的偏导 $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ 必定存在，且函数 $z=f(P)$ 在点 P 的全微分为

$$\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_i} \Delta x_i$$

如果函数 $z=f(P)$ 的偏导数 $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ 在点 P 连续，那么函数在改点可微分

多元复合函数的求导法则

一元函数与多元函数复合的情形

如果函数 $u_i=\varphi_i(t)$ 在点 t 可导，函数 $z=f(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 在对应点 $(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 具有连续的偏导数，那么复合函数 $z=f[\varphi_1(t)],\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)]$ 在点 t 可导，且有

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial u_i} \frac{\mathrm{d}u_i}{\mathrm{d}t}$$

多元函数与多元函数复合的情形

如果函数 $v_i=\psi_i(P)$ 都在点 $P=(u_1,u_2,\cdots,u_n)$ 具有对其各个分量的偏导，函数 $z=f(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 在对应点 $(v_1,v_2,\cdots,v_n)$ 具有连续偏导数，那么复合函数 $z=f(\psi_1(P),\psi_2(P),\cdots,\psi_n(P))$ 在点 P 的各个偏导数均存在，且

$$\frac{\partial z}{\partial u_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial v_i} \frac{\partial v_i}{\partial u_i}$$

其他情况

其他任意情况均可通过构造中间函数，将其转化为多元函数与多元函数复合的情形

隐函数的求导公式

二元函数

设函数 $F(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 的某一邻域内具有连续的偏导数，且 $F(x_0,y_0)=0$，$F_y(x_0,y_0)\neq 0$，则方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域内恒能唯一确定一个连续且具有连续导数的函数 $y=f(x)$，它满足条件 $y_0=f(x_0)$，并有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}$$

多元函数

设函数 $F(P)$ 在点 $P=(x_i,x_j,\cdots)$ 的某一邻域内具有连续的偏导数，且 $F(P_0)=0$，$F_{x_j}(P_0)\neq 0$, 则方程 $F(P)=0$ 在点 P_0 的某一邻域内恒能确定唯一的连续且具有连续偏导的函数 $x_j=f(x_i,\cdots)$，它满足条件 $x_{j0}=f(x_{i0},\cdots)$，且有

$$\frac{\partial x_j}{\partial x_i}=-\frac{F_{x_i}}{F_{x_j}}$$

方程组

设一方程组 $\begin{cases}F_1(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_k)=0\\F_2(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_k)=0\\\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\F_k(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_k)=0\end{cases}$ ，其中 $F_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,y_1,y_2,\cdots,y_k)$ 在点 P_0 具有连续的偏导数，又 $F_i(P_0)=0$，且雅可比 (Jacobi) 行列式

$$Jac(P)=\frac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_k)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_k)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial y_1}&\frac{\partial F_1}{\partial y_2}&\cdots&\frac{\partial F_1}{\partial y_k}\\\frac{\partial F_2}{\partial y_1}&\frac{\partial F_2}{\partial y_2}&\cdots&\frac{\partial F_2}{\partial y_k}\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\\frac{\partial F_k}{\partial y_1}&\frac{\partial F_k}{\partial y_2}&\cdots&\frac{\partial F_k}{\partial y_k}\end{vmatrix}$$

在点 P_0 不为 0 ($Jac(P_0)\neq 0$)，则方程组在点 P_0 的某一邻域内恒能唯一确定一组连续且具有连续偏导数的函数 $y_i=f_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，它们满足条件 $y_{i0}=f_i(x_{10},x_{20},\cdots,x_{n0})$，并有

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}=-\frac{1}{Jac(P_0)}\frac{\partial(F_1,F_2,\cdots,F_k)}{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_{i-1},x_j,y_{i+1},\cdots,y_k)}$$

多元函数微分学的几何应用

一元向量值函数与导数

设数集 $D\subset\mathbb{R}$，则称映射 $f:D\to\mathbb{R}^n$ 为一元向量值函数，通常记为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{f}(t)\quad t\in D$$

其中数集 D 称为该函数的定义域，t 称为自变量，$\boldsymbol{r}$ 称为因变量

设向量函数 $\boldsymbol{f}(t)$ 在点 t_0 的某一去心邻域内有定义，如果存在一个常向量 $\boldsymbol{r}_0$ 对于任意给定正数 ϵ，总存在正数 δ，使得当 $t \in \mathring{U}(t_0, \delta)$ 时，对应函数值 $\boldsymbol{f}(t)$ 都满足不等式

$$|\boldsymbol{f}(t) - \boldsymbol{r}_0| < \epsilon$$

那么，常向量 $\boldsymbol{r}_0$ 就叫做向量值函数 $\boldsymbol{f}(t)$ 当 $t \to t_0$ 时的极限，记作

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{f}(t) = \boldsymbol{r}_0 \text{ or } \boldsymbol{f}(t) \to \boldsymbol{r}_0, t \to t_0$$

如果 $\boldsymbol{f}(t) = \langle f_1(t), f_2(t), \cdots, f_n(t) \rangle$

$$\lim_{t \to t_0} \boldsymbol{f}(t) = \left\langle \lim_{t \to t_0} f_1(t), \lim_{t \to t_0} f_2(t), \cdots, \lim_{t \to t_0} f_n(t) \right\rangle$$

设向量值函数 $\boldsymbol{f}(t)$ 在点 t_0 的某一邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{f}(t_0 + \Delta t) - \boldsymbol{f}(t_0)}{\Delta t}$$

存在，那么就称这个极限向量为向量函数 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(t)$ 在 t_0 处的导数或导向量，记作 $\boldsymbol{f}'(t)$ 或 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=t_0}$

设向量函数 $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{f}(t)$，$t \in D$，若 $D_1 \subset D$，$\boldsymbol{f}(t)$ 在 D_1 中的每一点 t 处都存在导向量 $\boldsymbol{f}'(t)$，则称 $\boldsymbol{f}(t)$ 在 D_1 上可导

设向量值函数 $\boldsymbol{f}(t)$ 在点 t_0 可导的充分必要条件是其各个分类在 t_0 都可导，且

$$\boldsymbol{f}'(t) = \langle f_1'(t), f_2'(t), \cdots, f_n'(t) \rangle$$

一元向量值函数导数的性质

- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{C} = \boldsymbol{0}$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [c\boldsymbol{u}(t)] = c\boldsymbol{u}'(t)$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [\boldsymbol{u}(t) \pm \boldsymbol{v}(t)] = \boldsymbol{u}'(t) \pm \boldsymbol{v}'(t)$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [\varphi(t)\boldsymbol{u}(t)] = \varphi'(t)\boldsymbol{u}(t) + \varphi(t)\boldsymbol{u}'(t)$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [\boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{v}(t)] = \boldsymbol{u}'(t) \cdot \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{u}(t) \cdot \boldsymbol{v}'(t)$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} [\boldsymbol{u}(t) \times \boldsymbol{v}(t)] = \boldsymbol{u}'(t) \times \boldsymbol{v}(t) + \boldsymbol{u}(t) \times \boldsymbol{v}'(t)$
- $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{u}[\varphi(t)] = \varphi'(t)\boldsymbol{u}'[\varphi(t)]$

空间曲线的切线与法平面

设空间曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \\ z = \omega(t) \end{cases}$$

其中 $t \in [\alpha, \beta]$，则向量 $\boldsymbol{T} = \boldsymbol{f'}(t_0) = \langle \varphi'(t_0), \psi'(t_0), \omega'(t_0) \rangle$ 就是曲线 Γ 在点 M 处的一个切向量，从而曲线 Γ 在点 $M(x_0, y_0, z_0)$ 处的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{\varphi'(t_0)} = \frac{y - y_0}{\psi'(t_0)} = \frac{z - z_0}{\omega'(t_0)}$$

通过点 M 且与切线垂直的平面称为曲线 $Gamma$ 在点 M 处的法平面，它是通过点 M，以 $\boldsymbol{T}$ 为法向量的平面

$$\varphi'(t_0)(x - x_0) + \psi'(t_0)(y - y_0) + \omega'(t_0)(z - z_0) = 0$$

- unit tangent vector $\quad \boldsymbol{T}(t) = \dfrac{\boldsymbol{f'}(t)}{\|\boldsymbol{f'}(t)\|}$
- unit normal vector $\quad \boldsymbol{N}(t) = \dfrac{\boldsymbol{T'}(t)}{\|\boldsymbol{T'}(t)\|}$
- binormal vector $\quad \boldsymbol{B}(t) = \boldsymbol{T} \times \boldsymbol{N}$

曲面的切平面与法线

引入向量

$$\boldsymbol{n} = \langle F_x(P), F_y(P), F_z(P) \rangle$$

为曲面的法向量，它垂直于曲面 $F(x, y, z) = 0$ 上任意一条过点 P 的曲线，而曲面的切平面为

$$\boldsymbol{n} \cdot ((x, y, z) - P_0) = 0$$

方向导数与梯度

方向导数 directional derivative

如果函数 f 在点 P_0 可微分，那么函数在该点沿任一方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数存在，且有

$$D_{\boldsymbol{l}} f(P_0) = \left. \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} \right|_{P_0} = \sum_{i=1}^{n} f_{x_i}(P_0) \cos \alpha_i$$

其中 $\cos \alpha_i$ 是方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦

梯度 gradient

对于任一函数 $f(P)$ 可定出一向量

$$\langle f_{x_1}(P_0), f_{x_2}(P_0), \cdots, f_{x_n}(P_0)\rangle$$

这个向量称为函数 $f(P)$ 在点 P_0 的梯度，记作 $\mathbf{grad}f(P_0)$ 或 $\nabla f(P_0)$，即

$$\mathbf{grad}f(P_0) = \nabla f(P_0) = \langle f_{x_1}(P_0), f_{x_2}(P_0), \cdots, f_{x_n}(P_0)\rangle$$

其中 $\nabla = \left\langle \dfrac{\partial}{\partial x_1}, \dfrac{\partial}{\partial x_2}, \cdots, \dfrac{\partial}{\partial x_n} \right\rangle$ 称为向量微分算子或 Nabla 算子

因而，方向导数也可表示为

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{P_0} = \nabla f(P_0) \cdot \boldsymbol{l}$$

数量场与向量场 scalar field & vector field

如果对于空间区域 G 内的任一点 M，都有一个确定的数量 $f(M)$，那么称在这空间区域 G 内确定了一个数量场，一个数量场可以用一个数量函数 $f(M)$ 表示；如果点 M 对应一个确定的矢量 $\boldsymbol{F}(M)$，那么称在着空间区域 G 内确定了一个向量场，一个向量场可以用一个向量值函数 $\boldsymbol{F}(M)$ 表示

势函数与势场 Scalar potential

若矢量场 $\boldsymbol{F}(M)$ 是某个数量函数 $f(M)$ 的梯度（$\nabla f(M) = \boldsymbol{F}(M)$），则称 $f(M)$ 是向量场 $\boldsymbol{F}(M)$ 的一个势函数，并称向量场 $\boldsymbol{F}(M)$ 为势场

多元函数的极值及其求法

多元函数的极值与最大最小值

设函数 $z = f(P)$ 的定义域为 D，P_0 为 D 的内点，若存在 P_0 的某个邻域 $U(P_0) \subset D$，使得对于该区间内异于 P_0 的任何点 P，都有

$$f(P) < f(P_0)$$

则称函数 $f(P)$ 在点 P_0 有极大值 $f(P_0)$，点 P_0 称为函数 $f(P)$ 的极大值点；若存在 P_0 的某个邻域 $U(P_0) \subset D$，使得对于该区间内异于 P_0 的任何点 P，都有

$$f(P) > f(P_0)$$

则称函数 $f(P)$ 在点 P_0 有极小值 $f(P_0)$，点 P_0 称为函数 $f(P)$ 的极小值点；极大值与极小值统称为极值，使 i 函数取得极值的点称为极值点

极值判断

设函数 $z = f(P)$ 在点 P_0 具有偏导数，且在点 P_0 取得极值，那么 $f(P)$ 在这个点的各个偏导数均为 0

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内连续且有一阶及二阶连续偏导数，又 $f_x(x_0, y_0) = 0, f_y(x_0, y_0) = 0$，令

$$D = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$$

则 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处是否取得极值的条件如下：

- $D > 0$ 具有极值；$f_{xx} < 0$ 为极大值，$f_{xx} > 0$ 为极小值
- $D < 0$ 不具有极值 (saddle)
- $D = 0$ 均有可能，需另行判断

条件极值拉格朗日乘数 Lagrange Multipliers

对于函数 $f(P)$ 在满足条件 $g(P) = 0$ 下的极值点 P_0 需满足

$$\nabla f(P_0) = \lambda \nabla g(P_0)$$

其中 λ 为拉格朗日乘数

拉格朗日乘数可以有个（每个对于一个限制条件）

二元函数的泰勒公式

设 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内连续且有 $(n+1)$ 阶连续偏导数，$(x_0 + h, y_0 + k)$ 为此领域内任一点，则有

$$\begin{aligned} f(x_0+h, y_0+k) =& f(x_0, y_0) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) + \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0) + \cdots + \\ & \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0) + \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1} f(x_0 + \theta h, y_0 + \theta k) \quad (0 < \theta < 1) \end{aligned}$$

其中记号

$$\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m \Leftrightarrow \sum_{p=0}^{m} \mathrm{C}_m^p h^p k^{m-p} \frac{\partial^m f}{\partial x^p \partial y^{m-p}}\bigg|_{(x_0, y_0)}$$