向量 vector

既有大小，又有方向的量称为向量（矢量），以 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{r}$、$\mathbf{F}$ （或 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{r}$、$\vec{F}$）表示

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 在经过平移后可以完全重合（方向，大小均相同），则称它们相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$

向量的大小叫做向量的模；向量 $\boldsymbol{a}$ 的模记为 $|\boldsymbol{a}|$; 模等于 1 的向量叫做单位向量，一般用 $\boldsymbol{e}$ 表示；模等一 0 的向量叫做零向量，记作 $\mathbf{0}$ 或 $\vec{0}$

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 之间的夹角记为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$ 或 $(\widehat{\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}})$；如果 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$，那么就称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$；如果 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{2}$，那么就称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$；$\mathbf{0}$ 与任意向量平行，也与任意向量垂直

如果 k 个向量的起点为同一点时，它们的终点与起点（共 $k+1$ 点）共线，则称它们为共线；如果 $k\ (k\geq 3)$ 个向量的起点为同一点时，它们的终点与起点共面，则称它们共面

向量的运算

加法

设有两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，它们的和 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 为与 $\boldsymbol{a}$ 共起点，与 $\boldsymbol{b}$ 共终点的一向量，而 $\boldsymbol{a}$ 的终点与 $\boldsymbol{b}$ 的起点共点

向量加法满足**交换律**（$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$）和**结合律**（$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$）

负 & 减法

设 $\boldsymbol{a}$ 为一向量，与 $\boldsymbol{a}$ 大小相同，但方向相反的向量叫做 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$

我们规定向量 $\boldsymbol{b}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的差 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$

与标量的积

向量 $\boldsymbol{a}$ 与实数 λ 的乘积记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，它是一个向量，如果 λ 为正，则与 $\boldsymbol{a}$ 同向，否则与 $-\boldsymbol{a}$ 同向；其模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$

向量与标量的乘法满足**结合律**（$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$）和**分配律**（$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ 且 $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$）

设向量 $\boldsymbol{a}\neq 0$，则向量 $\boldsymbol{b}$ 平行于 $\boldsymbol{a}$ 的充分必要条件是：存在唯一的实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$

点乘（数量积）

定义两向量的数量积为

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=|\boldsymbol{a}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{b}|\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|a|^2$$

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0\quad\text{if } \boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$$

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}$$

数量积满足**交换律**（$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$）和**分配律**（$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$）以及**结合律**（$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$）

叉乘

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \vec{0}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \quad \text{if } \boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$$

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}$$

$$(\lambda \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \lambda(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a} \times (\lambda \boldsymbol{b})$$

混合积

已知三个变量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$，定义它们的混合积 $[\boldsymbol{abc}]$ 为 $[\boldsymbol{abc}] = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$

$$[\boldsymbol{abc}] = \begin{vmatrix} c_x & c_y & c_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

平面及其方程

如果曲面 S 与三元方程

$$F(x, y, z) = 0$$

满足

- 在曲面 S 上的任一点的坐标均满足 $F(x, y, z) = 0$
- 不在曲面 S 上的任一点的坐标均满足 $F(x, y, z) \neq 0$

则称 $F(x, y, z) = 0$ 为曲面 S 的方程，而 S 为 $F(x, y, z) = 0$ 的图形

曲线则可以看作两个曲面的交线，及同时满足 $F(x, y, z) = 0$ 与 $G(x, y, z) = 0$ 的点集

法线 & 平面的法线方程

法线向量是垂直于所在点切面的一非零向量

任意过点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 且有法向量 $\boldsymbol{n} = \langle A, B, C \rangle$ 的平面可表示为

$$F(x, y, z) = \boldsymbol{n} \cdot \langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = 0$$

平面的一般方程

平面的一般方程是

$$F(x,y,z) = Ax + By + Cz + D = 0$$

平面的截距式

$$F(x,y,z) = \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

其中 a,b 与 c 依次为平面在 x，y 与 z 轴上的截距

平面的夹角

两平面的法线向量的夹角称为这两个平面的夹角 $\theta = (\widehat{\boldsymbol{n_1}, \boldsymbol{n_2}})$

空间直线

空间直线的一般方程

空间中的一条直线可表示为满足方程组

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

的点集

对称方程

如果一个非零向量平行于一条直线，那么这个向量为这条直线的方向向量

如果点 $M(x,y,z)$ 在直线 L 上，而 L 过点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 且有方向向量 $\boldsymbol{s} = \langle m,n,p \rangle$，则有

$$\langle x - x_0, y - y_0, z - z_0 \rangle = \lambda \boldsymbol{s} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

或

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

直线的任一方向向量的坐标称为该直线的方向数，其对应的方向余弦称为该直线的方向余弦

参数方程

$$\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + mt \\ z = z_0 + mt \end{cases}$$

夹角

直线与直线的夹角为它们方向向量的夹角

直线与平面的夹角为方向向量与法向量的夹角

曲面及其方程

旋转面

设被旋转的曲线（母线）在 yOz 平面上，其方程为

$$f(y,z)=0$$

绕 z 轴旋转（以 z 轴为轴），得旋转曲面 S 为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$

柱面

直线 L 沿定曲线 C 平行移动形成的轨迹，叫做柱面，定曲线 C 叫做柱面的准线，动直线 L 叫做主线的母线

二次曲面

圆锥曲面 (Cone cylinder)：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$$

平面 $z=c$ 与曲面 $F(x,y,z)=0$ 的交线称为截痕 (contour map)

椭球面 (Ellipsoid cylinder)：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

单叶双曲面 (one sheet Hyperboloid)：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

双叶双曲面 (two sheet Hyperboloid)：

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

椭圆抛物面 (Paraboloid elliptic)：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z$$

双曲抛物面（马鞍面）(Paraboloid hyperbolic)：

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z$$

曲面的参数方程

曲面可看作点集

$$G(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$$

其中 u 与 v 为参数

其法向量为

$$\vec{N}=\frac{\partial G}{\partial u}\times\frac{\partial G}{\partial v}$$

空间曲线

一般方程

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

参数方程

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t) \end{cases}$$

在坐标平面上的投影

如果将空间曲线 C 可消去变量 z 以后，所得方程 $H(x,y)=0$ 是一个母线平行于 z 轴的柱面，称为 C 在 xOy 面上的投影柱面，柱面与 xOy 的交线叫做空间曲线 C 在 xOy 上的投影曲线