# 导数 Derivative

设函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 的某个邻域内有定义，当自变量 $x$ 在 $x_0$ 处取得增量 $\Delta x$ （点 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内）时，相应地，因变量取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$；如果 $\Delta y$ 与 $\Delta x$ 之比当 $\Delta x\to 0$ 时的极限存在，那么称函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处可导，并称这个极限为函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 处的导数 (Derivative)，记为 $f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

也可记为 $y'|_{x=x_0}$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$ 或 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$

如果函数 $f(x)$ 在开区间 $I$ 内的每一点都可导，那么就称函数 $f(x)$ 在开区间 $I$ 内可导 (derivatived function)；这时，$\forall x\in I$ 都存在一个 $f(x)$ 的导数值，这些值构成了一个新的函数，这个函数交原来函数 $y=f(x)$ 的导函数 (Derived function)，记作 $y'$，$f'(x)$，$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 或 $\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$

左导数：$f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
右导数：$f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

切线方程：$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$
法线方程：$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$

**可导必定连续**

# 函数求导法则

如果函数 $u=u(x)$ 及 $v=v(x)$ 都在点 $x$ 具有导数，那么它们的和、差、积和差（除分母为零的点外）都在点 $x$ 具有导数，且

- $[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x)$
- $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v(x)$
- $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v(x)}{v^2(x)}\quad (v(x)\neq 0)$

如果函数 $x=f(x)$ 在区间 $I_y$ 内单调、可导且 $f'(y)\neq 0$，那么它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在区间 $I_x=x|x=f(y),\ y\in I_y$ 内也可导，且

$$\left[f^{-1}(x)\right]'=\frac{1}{f^{-1}(y)}$$

如果 $u=g(x)$ 在点 $x$ 可导，而 $y=f(x)$ 在点 $u=g(x)$ 可导，那么复合函数 $y=f\circ g(x)$ 在点 $x$ 可导，且其函数为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$$

# 常数和基本初等函数的求导公式

$$
\begin{aligned}
&(C)' = 0' && (x^\mu)' = \mu x^{\mu-1} \\
&(\sin x)' = \cos x' && (\cos x)' = -\sin x \\
&(\tan x)' = \sec^2 x && (\cot x)' = -\csc^2 x \\
&(\sec x)' = \sec x \tan x && (\csc x)' = -\csc x \cot x \\
&(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0, a \neq 1) && (e^x)' = e^x \\
&(\log_a x)' = \tfrac{1}{x \ln a} \quad (a > 0, a \neq 1) && (\ln x)' = \tfrac{1}{x} \\
&(\arcsin x)' = \tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} && (\arccos x)' = -\tfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\
&(\arctan x)' = \tfrac{1}{1+x^2} && (\text{arccot} x)' = \tfrac{1}{1+x^2} \\
&(e^x)^{(n)} = e^x && [\ln(x+1)]^{(n)} = (-1)^{n-1}\tfrac{(n-1)!}{(x+1)^n} \\
&(\sin x)^{(n)} = \sin(x + n \cdot \tfrac{\pi}{2}) && (\cos x)^{(n)} = \cos(x + n \cdot \tfrac{\pi}{2}) \\
&(x^\mu)^{(n)} = \begin{cases} \tfrac{\mu!}{(\mu-n)!} x^{\mu-n} & \text{if } \mu > n \\ n! = \mu! & \text{if } \mu = n \\ 0 & \text{if } \mu < n \end{cases} && (uv)^{(n)} = \textstyle\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{n-k} v^k
\end{aligned}
$$

# 高阶函数

函数 $y = f(x)$ 的导数 $y' = f'(x)$ 依然时 $x$ 的函数，我们把 $y' = f'(x)$ 的导数叫做函数 $y = f(x)$ 的二阶导数，记作 $y''$ 或 $\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

**(n-1) 阶导数的导数叫做 n 阶导数，二阶及二阶以上的导数统称高阶导数**

$$y,\, y',\, y'',\, y''',\, y^{(4)}, \cdots, y^{(n)}$$

# 参数方程求导

参数方程 $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ 确定 $x$ 与 $y$ 之间的函数关系，则称此函数关系锁表达的函数为由参数方程所确定的函数。

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{1}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

# 函数的微分

设函数 $y=f(x)$ 在某区间内有定义，$x_0$ 及 $x_0+\Delta x$ 在这区间内，如果函数的增量

$$\Delta y=f(x_0+\Delta)-f(x_0)$$

可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x)$$

其中 $A$ 是不依赖于 $\Delta x$ 的常数，那么称函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 是可微的，而 $A\Delta x$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在点 $x_0$ 相应于自变量增量 $\Delta x$ 的微分，记作 $\mathrm{d}y$，即

$$\mathrm{d}y=A\Delta x \quad A=f'(x_0)$$

$$\Delta y=\mathrm{d}y+o(\mathrm{d}y)$$

即 $\mathrm{d}y$ 是 $\Delta y$ 的主部；函数 $y=f(x)$ 在任意点 $x$ 的微分，称为函数微分，记作 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$，即

$$\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x$$

通常把自变量 $x$ 的增量 $\Delta x$ 称为自变量的微分，记作 $\mathrm{d}x$，即 $\mathrm{d}x=\Delta x$ 于是函数 $y=f(x)$ 的微分又可记作

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x$$