

二阶与三阶行列式

二阶行列式 Second-order determinant

记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 表示代数和 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ ，称为二阶行列式，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

其中数 a_{11} , a_{22} , a_{12} , a_{21} 称为行列式的元素，横排叫做行，竖排叫做列；元素 a_{ij} 的第一个下标 i 称为行标，表明该元素位于第 i 行，第二个下标 j 叫做列标，表明该元素位于第 j 列；行列式是一个代数和

这个规则称为“对角线法则”，把从 a_{11} 到 a_{22} 的连线叫做主对角线，把 a_{12} 到 a_{21} 的连线交副对角线

二元线性方程

对于二元线性方程

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

定义

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$
$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

则二元线性方程组可改写为

$$\begin{cases} Dx_1 = D_1 \\ Dx_2 = D_2 \end{cases}$$

于是，当 $D \neq 0$ 时，该二元线性方程有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \quad x_2 = \frac{D_2}{D}$$

三阶行列式 Third-order determinant

记号 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 表示代数和

$$a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

称为三阶行列式

三阶行列式有 6 项，每一项均为不同行不同列的三个元素之积，在按一定法则冠以正负号

三元线性方程组

类似于二元线性方程组，对于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

同时记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_3 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & b_1 \\ b_2 & a_{22} & b_2 \\ b_3 & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

若系数行列式 $D \neq 0$ ，则该方程组有唯一解

$$x_1 = \frac{D_1}{D} \quad x_2 = \frac{D_2}{D} \quad x_3 = \frac{D_3}{D}$$

排列

定义

由自然数 $1, 2, \dots, n$ 组成的不重复的每一种有确定次序的排列，称为 n 级排列（简称为排列）

逆序

在一个 n 级排列 $(i_1 i_2 \cdots i_t \cdots i_s \cdots i_n)$ 中，若 $i_t > i_s$ ，则称数 i_t 与数 i_s 构成一个逆序；一个 n 级排列中逆序的总数称为该排列的逆序数，记为 $N(i_1 i_2 \cdots i_n)$

即一个 n 级排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中，设比 i_k 大的且排在 i_k 前的数共有 t_k 各，则 i_k 的逆序的个数为 t_k ，而该排列中所有自然数的逆序的个数之和就是这个排列的逆序数，即

$$N(i_1 i_2 \cdots i_n) = \sum_{k=1}^n t_k$$

逆序数为奇数的排列称为奇排列；逆序数为偶数的排列称为偶排列

对换

在排列中，将任意两个元素对调，其余元素不动，这种作出新排列的方法称为对换；将两个相邻元素对换，称为相邻对换

任意一个排列经过一次对换后，其奇偶性改变

奇排列经过奇数词对换后可变为自然数顺序排列，而偶排列经过偶数次对换后可变为自然数顺序排列
 n 个自然数 ($n > 1$) 共有 $n!$ 个 n 级排列，其中奇偶排列各占一半

n 阶行列式

定义

有 n^2 各元素 a_{ij} 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式，其中横排称为行，竖排称为列；它表示所有取自不同行且不同列的 n 个元素的乘积 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的代数和，其各项的符号为：当该项的各个元素的行标按自然数排列后 $(a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n})$ ，其对应的列标所构成的排列 $(j_1 j_2 \cdots j_n)$ 是偶排列则符号取正，否则（是奇排列）则符号取负，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

其中 $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 求和；行列式有时也简记为 $\det(a_{ij})$ 或 $|a_{ij}|$ ，这里数 a_{ij} 称为行列式的元素，称

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$$

为行列式的一般项

要点

- n 阶行列式是 $n!$ 项的代数和，被冠以正号与负号的项各占其一半
- 行列式的本质是一个数，一个按照特殊定义规定的数
- 元素 $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$ 的符号为
- 一阶行列式 $|a| = a$
- n 阶行列式也定义为

$$D = \sum (-1)^S a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_n j_n}$$

其中 S 为行标与列标的逆序之和，即

$$S = N(i_1 i_2 \cdots i_n) + N(j_1 j_2 \cdots j_n)$$

- n 阶行列式也定义为

$$D = \sum (-1)^{N(i_1 i_2 \cdots i_n)} a_{i_1 1} a_{i_2 2} \cdots a_{i_n n}$$

特殊行列式与其计算

- 副对角线行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2(n-1)} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2(n-1)} \cdots a_{n1}$$

- 对角行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

- 上三角（形）行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

- 下三角（形）行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}$$

- 反对称行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ -a_{12} & 0 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ -a_{13} & -a_{23} & 0 & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & -a_{3n} & \cdots & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{if } n \text{ is odd}$$

- 范德蒙 (Vandermonde) 行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{n \geq i \geq j \geq 1} (x_i - x_j)$$

•

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix} = [a + (n+1)b](a-b)^{n-1}$$

•

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1n} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

性质

- 转置

将行列式 D 的行与列呼唤后得到的行列式，称为 D 的转置行列式，记为 D^T 或 D' ，即若 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$,

$$\text{则 } D^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

- 行列式与其转置行列式相等，即 $D = D^T$
- 交换行列式的两行（列），行列式变号
交换 i, j 两行（列）记为， $r_i \leftrightarrow r_j (c_i \leftrightarrow c_j)$
- 若行列式中有两行（或两列）的对应元素相同，则该行列式为 0
- 用数 k 乘行列式的某一行（列），等于用数 k 乘该行列式，即

$$D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & ka_{i3} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = kD$$

- 行列式的某一行（列）中所有元素的公因子可以提到行列式符号外面
- 行列式中若有两行（列）元素对应成比例，则该行列式为 0
- 若行列式的某一行（列）的元素都是两数之和，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} + c_{i1} & b_{i2} + c_{i2} & b_{i3} + c_{i3} & \cdots & b_{in} + c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则有，

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & b_{i3} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & c_{i3} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D_1 + D_2$$

- 将行列式的某一行（列）的所有元素都乘以数 k 后加到另一行（列）对应位置的元素上，行列式的值不变，即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} + ka_{1j} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} + ka_{2j} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} + ka_{nj} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_n \end{vmatrix} \quad (i \neq j)$$

以数 k 乘以第 j 行加到第 i 行上记为 $r_i + kr_j$; 以数 k 乘以第 j 列加到第 i 列上记为 $c_i + kc_j$

利用行列式三角化计算其值

1. 若 $a_{11} = 0$, 则检查第一行中是否有非零元素, 若没有, 则该行行列式值为零, 若有非零元素则将其所在列与第一列对换, 使得第一个元素不为零 (行列式需变号)
2. 用第一行乘上适当的数加到其余行上, 使除 a_{11} 外第一列的元素全为 0, 即 $r_i + (-\frac{a_{i1}}{a_{11}})r_1 \quad (i \neq 1)$
3. 对于所得行列式除第一行与第一列的低一阶的行列式重复步骤 1&2, 直到所得行列式为一上三角行列式
4. 该上三角行列式的对角线上元素的乘积即是所求行列式的值

行列式按行 (列) 展开

代数余子式

在 n 阶行列式 D 中, 去掉元素 a_{ij} 所在的行与列 (第 i 行与第 j 列) 后, 余下的 $n-1$ 阶行列式, 称为 D 中元素 a_{ij} 的余子式, 记为 M_{ij} ; 再记 $a_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, 称 a_{ij} 为元素 a_{ij} 的代数余子式

在 n 阶行列式 D 中, 任一选定 k 行与 k 列 ($1 \leq k \leq n$) r_{i_1}, \dots, r_{i_k} 与 c_{j_1}, \dots, c_{j_k} , 位于这些行与列交叉处的 k^2 个元素按原有顺序构成一个新的 k 阶行列式 $M = \begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix}$, 称其为 D 的一个 k 阶子式; 划去这 k 行与 k 列, 余下的元素按原有顺序构成一个新的 $n-k$ 阶行列式, 在其前面冠以符号 $(-1)^{i_1+\dots+i_k+j_1+\dots+j_k}$, 称为 M 的代数余子式

代数余子式与行列式的值

一个 n 阶行列式 D , 若其中第 i 行所有元素除 a_{ij} 外都为零, 则该行行列式等于 a_{ij} 与它的代数余子式 A_{ij} 的乘积, 即 $D = a_{ij}A_{ij}$

行列式等于它的任一行或列的各元素与其对应的代数余子式乘积之和, 即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$$

行列式某一行 (列) 的元素与另一行 (列) 的对应元素的代数余子式乘积之和等于零, 即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j)$$

拉普拉斯定理 Laplace expansion

在 n 阶行列式 D 中, 任意取定 k 行 (列) ($a \leq k \leq n-1$), 有这 k 行 (列) 组成的所有 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积之和等于行列式 D

克莱姆法则 Cramer's Rule

含有 n 个未知数 x_1, x_2, \dots, x_n 的线性方程组

[illegible]

称为 n 元线性方程组；其右端常数 b_1, b_2, \dots, b_n 不全为零时，称其为非齐次线性方程组，当 b_1, b_2, \dots, b_n 全为零时，称为齐次线性方程组，即

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{array} \right.$$

将它的系数 a_{ij} 构成的行列式称为该方程组的系数行列式 D , 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

若线性方程组的系数行列式 $D \neq 0$ ，则线性方程组有唯一解，其解为

$$x_j = \frac{D_j}{D}$$

其中 D_j 是将 D 中第 j 列元素 $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj}$ 对应地替换成常数 b_1, b_2, \dots, b_n , 而其余项保持不变所组成的行列式