线性方程组

消元法

对于线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

其矩阵形式为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$$

其中

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{b}=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

称矩阵 $\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}\end{bmatrix}$（有时记为 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$）为线性方程组的**增广矩阵**

当 $b_i=0$ 时，线性方程组称为齐次的，否则称为非齐次的；显然，齐次线性方程组的矩阵形式为

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$$

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$n$ 元齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 有非零解的充要条件是系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $r(\boldsymbol{A})<n$

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$n$ 元非齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解的充要条件是系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩等于增广矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{b}\end{bmatrix}$ 的秩，即 $r(\boldsymbol{A})=r(\widetilde{\boldsymbol{A}})$

	$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$	
$r(\boldsymbol{A})=r(\widetilde{\boldsymbol{A}})=n$	有唯一解	唯一 0 解	$r(\boldsymbol{A})=n$
$r(\boldsymbol{A})=r(\widetilde{\boldsymbol{A}})<n$	欠定方程组（无穷多解）	有非 0 解	$r(\boldsymbol{A})<n$
$r(\boldsymbol{A})\neq r(\widetilde{\boldsymbol{A}})$	矛盾方程组（无解）		

有非齐次线性方程组，将增广矩阵 $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 化为行阶梯形矩阵，便可直接判断其是否有解，若有解，化为行最简形矩阵，便可直接写出其全部解；其中要注意，当 $r(\boldsymbol{A})=r(\widetilde{\boldsymbol{A}})<n$ 时，$\widetilde{\boldsymbol{A}}$ 的行阶梯形矩阵中含有 s 个非零行，把这 s 行的第一个非零元所对应的未知量作为非自由量，其余 $n-s$ 个作为自由未知量

向量组的线性组合

n 维向量及其线性运算

n 个有次序的数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 所组成的数组称为 n 维向量，这 n 个数称为该向量的 n 个分量，第 i 个数 a_i 称为第 i 个分量

分量全为实数的向量称为实向量，分量为复数的向量称为复向量

n 为向量可写成一行，也可写成一列；分别称为行向量与列向量，也就是行矩阵与列矩阵，并规定行向量与列向量都按矩阵的运算法则进行计算；因此，n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}$ 与 n 维行向量 $\boldsymbol{\alpha}^T=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{bmatrix}$ 总被视为是两个不同的向量

通常用黑体小写字母 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 等表示列向量，用 $\boldsymbol{\alpha}^T$，$\boldsymbol{\beta}^T$，$\boldsymbol{a}^T$，$\boldsymbol{b}^T$ 等表示行向量，所讨论的向量在没有特别指明的情况下都被视为列向量

“空间”通常作为点的集合，称为点空间；n 维向量的全体所组成的集合 $\boldsymbol{R}^n=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T|x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbb{R}\}$ 称为 n 维向量空间

若干个同维数的列向量（或行向量）所组成的集合称为**向量组**一个 $m\times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\\vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{bmatrix}$ 的每一列

$$\boldsymbol{\alpha}_j=\begin{bmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\\vdots\\a_{mj}\end{bmatrix}$$

组成的向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1$， $\boldsymbol{\alpha}_2$， $\cdots$， $\boldsymbol{\alpha}_n$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组，而由矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的每一行

$$\boldsymbol{\beta}_i=\begin{bmatrix}a_{i1}, & a_{i2}, & \cdots, & a_{in}\end{bmatrix}$$

组成的向量组 $\boldsymbol{\beta}_1$， $\boldsymbol{\beta}_2$， $\cdots$， $\boldsymbol{\beta}_m$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组

因而矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可记为

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1 & \boldsymbol{\alpha}_2 & \cdots & \boldsymbol{\alpha}_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\\boldsymbol{\beta}_2\\\cdots\\\boldsymbol{\beta}_m\end{bmatrix}$$

矩阵的列向量组和行向量组都是只含有限个向量的向量组，而线性方程组

$$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$$

的全部解（$\boldsymbol{x}$）当 $r(\boldsymbol{A})<n$ 时是一个含有无限多个 n 维列向量的向量组

两个 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{bmatrix}^T$ 与 $\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & \cdots & b_n\end{bmatrix}^T$ 的各对应分量之和组成的向量，称为向量 α 与 β 的和，记为 $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}$，即

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}a_1+b_1 & a_2+b_2 & \cdots & a_n+b_n\end{bmatrix}^T$$

向量的减法

$$\boldsymbol{\alpha}-\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\beta})=\begin{bmatrix}a_1-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_n-b_n\end{bmatrix}^T$$

n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & \cdots & a_n\end{bmatrix}^T$ 的各个分量都乘以实数 k 所组成的向量，称为数 k 与向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的乘积（又简称为数乘），记为 $k\boldsymbol{\alpha}$，即

$$\boldsymbol{k\alpha}=\begin{bmatrix}ka_1 & ka_2 & \cdots & ka_n\end{bmatrix}^T$$

向量的加法和数乘运算统称为向量的线性运算

向量的线性运算与行（列）矩阵的运算规则相同

- $\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$
- $(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$
- $\boldsymbol{\alpha}+\mathbf{0}=\boldsymbol{\alpha}$
- $\boldsymbol{\alpha}+(-\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{0}$
- $1\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$
- $k(l\boldsymbol{\alpha})=(kl)\boldsymbol{\alpha}$
- $k(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})=k\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}$
- $(k+l)\boldsymbol{\alpha}=k\boldsymbol{\alpha}+l\boldsymbol{\alpha}$

给定向量组 $\boldsymbol{A}:\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$，对于任一组实数 $k_1,k_2,\cdots,k_s$，表达式 $k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s$ 称为向量组 $\boldsymbol{A}$ 的一个线性组合，$k_1,k_2,\cdots,k_s$ 称为这个线性组合的系数，也成为该线性组合的权重