Elmar Schömer
Ann-Christin Wörl

Zwischenklausur

Datum: 19.12.2023 Beginn: 14:20 Uhr Ende: 15:20 Uhr

Angaben über den/die TeilnehmerIn:

Name: Vorname:

Fachbereich: Semesterzahl:

Matrikelnummer: Studiengang:

Bewertung:

Aufgabe	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	$\sum$
Punkte (max.)	18	12	25	16	14	8	7	**100**
Erreichte Punkte								

Bemerkungen:

- Kontrollieren Sie die Zwischenklausur auf Vollständigkeit und einwandfreies Druckbild.
- Vergessen Sie nicht, die Angaben zur Person auf dem Deckblatt zu machen, und schreiben Sie auf **jedes** Blatt Ihren Namen. Verwenden Sie keinen Bleistift.
- Als Hilfsmittel ist lediglich ein beidseitig beschriebenes DIN A4 Blatt zulässig.
- Notieren Sie Ihre Antworten und Ergebnisse nach Möglichkeit auf dem Aufgabenblatt.
- **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1: (6 + 6 + 6 Punkte)

1. Schreiben Sie eine iterative Funktion `f(n)`, die eine positive reelle Zahl n solange halbiert, bis ihr Wert kleiner oder gleich 1 wird. Die Funktion soll die Anzahl von Teilungsschritten zurückgeben.
2. Schreiben Sie eine rekursive Funktion `r(n)`, so dass $r(n) = f(n)$ für $n \in \mathbb{R}^+$, d.h. die Funktion `r` hat die gleiche Rückgabe wie `f`.
3. Schreiben Sie eine Funktion `c(n)` mit konstanter Laufzeit, so dass $c(n) = f(n)$ für $n \in \mathbb{R}^+$, d.h. `c` hat ebenfalls die gleiche Rückgabe wie `f`.

Aufgabe 2: (6 + 6 Punkte)

Gegeben sei ein Feld a der Länge n mit ganzzahligen Feldeinträgen. Wenn für alle Indizes $0 \leq i < n - k$ gilt, dass $a_i = a_{i+k}$, dann nennen wir die Folge der Feldeinträge periodisch mit einer Periode der Länge $k \in \mathbb{N}_0$, d.h. die ersten k Zeichen wiederholen sich.

1. Schreiben Sie eine Funktion `hatPeriode(a,k)`, die entscheiden kann, ob die Feldeinträge eine Periode der Länge k aufweisen.

2. Schreiben Sie eine Funktion `kleinstePeriode(a)` die den kleinsten Wert k berechnet, sodass das Feld periodisch ist, d.h. $\forall\, 0 \leq i < n - k : \; a_i = a_{i+k}$.

Beispiel:

`a = [2,3,1,2,2,3,1,2,2,3,1,2,2,3]`

`hatPeriode(a,3)` $\rightarrow$ `False`   `hatPeriode(a,8)` $\rightarrow$ `True`   `kleinstePeriode(a)` $\rightarrow$ `4`

Aufgabe 3: (5 + 5 + 5 + 6 + 4 Punkte)

Gegeben sei eine zweidimensionale Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{N}^{n \times n}$, deren Einträge natürliche Zahlen sind.

1. Schreiben Sie eine Funktion `zeilensumme(M,i)`, die die Summe der Zahlen der i-ten Zeile berechnet.
2. Schreiben Sie eine Funktion `spaltensumme(M,j)`, die die Summe der Zahlen der j-ten Spalte berechnet.
3. Schreiben Sie eine Funktion `istMagisch(M)`, die überprüft, ob **M** ein magisches Quadrat ist. Dazu müssen alle Spaltensummen, alle Zeilensummen und die Summen der beiden Diagonalen übereinstimmen.
4. Schreiben Sie ein Programm, das ein magisches Quadrat der Größe $n \times n$ mit Hilfe von Backtracking finden kann. Als Feldeinträge sollen die Zahlen von 1 bis n^2 jeweils einmal verwendet werden.
5. Zeigen Sie, dass die Zeilen- und Spaltensummen in Teilaufgabe 4 dann den Wert $\frac{n(n^2+1)}{2}$ annehmen.

Beispiel:

$\mathbf{M} =$

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Aufgabe 4: (6 + 6 + 4 Punkte)

1. Schreiben Sie eine Funktion `erzeuge3DFeld(n)`, die ein dreidimensionales Feld **F** der Dimension $n \times n \times n$ erzeugt und alle Feldelemente $\mathbf{F}_{i,j,k}$ für $0 \leq i, j, k < n$ mit dem Wert $i + j + k$ initialisiert. Der Rückgabewert der Funktion soll das erzeugte Feld **F** sein.

2. Schreiben Sie ein Programm, das mittels der Funktion `erzeuge3DFeld` ein dreidimensionales Feld der obigen Form für $n = 4$ erzeugt und anschließend die Summe s aller Feldelemente berechnet und mit Hilfe des `print`-Kommandos ausgibt.

$$s = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} F_{i,j,k}$$

3. Beweisen Sie, dass Folgendes gilt:

$$s = \frac{3}{2} n^3 (n-1)$$

Aufgabe 5: (8 + 6 Punkte)

Gegeben sei die Adjazenzmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{B}^{n \times n}$ eines ungerichteten Graphen $G = (V, E)$. Die Knotenmenge V sei die Menge $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Wir repräsentieren $\mathbf{A}$ in Form eines zweidimensionalen Feldes `A` von booleschen Werten. Eine Kante (u, v) zwischen den Knoten u und v existiere genau dann, wenn der Feldeintrag `A[u][v]` den Wert `True` hat.

1. Schreiben Sie eine Funktion `konvertiere(A,G)`, die aus einer Adjazenzmatrix $\mathbf{A}$ eine Adjazenzliste $\mathbf{G}$ für den Graphen erstellt. Dabei repräsentieren wir die Adjazenzliste $\mathbf{G}$ als ein Feld `G` von Feldern mit der Eigenschaft, dass das Feld `G[u]` alle Knoten `v` enthält, für die `A[u][v] == True` gilt, d.h. $(u, v) \in E$.

2. Ein ungerichteter Graph $G = (V, E)$ heißt zweifärbbar, wenn man jedem Knoten $v \in V$ eine von zwei Farben geben kann, so dass alle Kanten $(u, v) \in E$ stets Knoten mit unterschiedlichen Farben miteinander verbinden. Schreiben Sie eine Funktion `istZweiFaerbbar(G)`, die einen ungerichteten, zusammenhängenden Graphen $G = (V, E)$ daraufhin untersucht, ob er zweifärbar ist. Verwenden Sie zur Lösung eine modifizierte Breitensuche.

Aufgabe 6: (8 Punkte)

Gegeben sei eine Folge von kleinen Buchstaben des deutschen Alphabets. Zum Beispiel folgender Satz: `"franz jagt im komplett verwahrlosten taxi quer durch bayern"`.
Schreiben Sie eine Funktion `pangramm(satz)`, die überprüft, ob die gegebene Buchstabenfolge `satz` ein Pangramm ist. Das heißt, dass jeder Buchstabe des Alphabets (mit Ausnahme der Umlaute) in der Buchstabenfolge vorkommen muss.

Aufgabe 7: (7 Punkte)

Wir betrachten eine Treppe mit n Stufen. Beim Ersteigen der Treppe kann man eine Treppenstufe oder auch zwei Treppenstufen in einem Schritt nehmen. Schreiben Sie eine Funktion `zahlDerSchrittfolgen(n)`, die die Zahl der unterschiedlichen Schrittfolgen berechnet, um eine Treppe mit n Stufen zu ersteigen.
Hinweis: Fibonacci-Folge