Cálculo de posiciones con GPS

José Escuadra Burrieza

1 de diciembre de 2010

1. Plantemiento del problema

Supongamos que tenemos N observaciones de GPS realizadas en el mismo momento, y vamos a suponer también que tenemos un reloj exacto (para ahorrarnos tener que corregir el tiempo), en ese caso, si suponemos que conocemos las coordenadas del satélite i-ésmo $P_i = (X_i, Y_i, Z_i)$, la hora de la salida de la señal del satélite (t_i), y la hora de llegada a nuestro receptor GPS (T), que como hemos dicho es común para todas las observaciones de los satélites, podemos calcular la distancia del punto desconocido $P = (X, Y, Z)$ en el que nos encontramos al satélite i de dos formas distintas:

1. Aplicando el teorema de Pitágoras:

$$d_i = \sqrt{(X - X_i)^2 + (Y - Y_i)^2 + (Z - Z_i)^2}$$

2. Usando que las ondas electromagnéticas se desplazan a velocidad constante, concretamente a la velocidad de la luz c:

$$\rho_i = c(T - t_i)$$

Si nos olvidamos de los errores que se producen en el proceso (error de la posición y el reloj de los satélites, que la velocidad de la luz es c en el vacio, pero no en la atmósfera, etc.), podemos suponer que dichas dos cantidades coinciden, es decir que debe cumplirse:

$$d_i = \rho_i$$

de donde obtenemos un sistema de N ecuaciones con 3 incógnitas, pero que por desgracia no es lineal, para resolverlo, lo primero que se hace es obtener una aproximación lineal de la raíz cuadrada:

$$d_i \simeq D_i + \frac{X(X_0 - X_i) + Y(Y_0 - Y_i) + Z(Z_0 - Z_i)}{D_i},$$

suponiendo que ponemos la solución de la forma $(X_0 + X, Y_0 + Y, Z_0 + Z)$, siendo (X_0, Y_0, Z_0) un punto próximo a la solución y

$$D_i = \sqrt{(X_0 - X_i)^2 + (Y_0 - Y_i)^2 + (Z_0 - Z_i)^2}.$$

Dado que en ambos miembros podemos cometer errores, incluido el de la aproximación que acabamos de hacer de la raíz cuadrada, vamos a emplear el método de mínimos cuadrados, es decir consideremos la función:

$$f(X,Y,Z) = \sum_{i=1}^{N} \left(D_i + \frac{X(X_0 - X_i) + Y(Y_0 - Y_i) + Z(Z_0 - Z_i)}{D_i} - \rho_i \right)^2$$

y la solución buscada es el vector (X,Y,Z) en el que la función f tenga un mínimo.

No vamos a detallar aquí el proceso para obtener la solución, simplemente vamos a indicar que la solución buscada se obtiene resolviendo el siguiente sistema lineal de 3 ecuaciones con 3 incógnitas:

$$\begin{array}{rcl}
\sum_{i=0}^{N} \frac{(\rho_i - D_i)(X_0 - X_i)}{D_i} & = & \sum_{i=0}^{N} \frac{(X_0 - X_i)^2}{D_i^2} X + \sum_{i=0}^{N} \frac{(Y_0 - Y_i)(X_0 - X_i)}{D_i^2} Y + \sum_{i=0}^{N} \frac{(Z_0 - Z_i)(X_0 - X_i)}{D_i^2} Z \\
\sum_{i=0}^{N} \frac{(\rho_i - D_i)(Y_0 - Y_i)}{D_i} & = & \sum_{i=0}^{N} \frac{(X_0 - X_i)(Y_0 - Y_i)}{D_i^2} X + \sum_{i=0}^{N} \frac{(Y_0 - Y_i)^2}{D_i^2} Y + \sum_{i=0}^{N} \frac{(Z_0 - Z_i)(Y_0 - Y_i)}{D_i^2} Z \\
\sum_{i=0}^{N} \frac{(\rho_i - D_i)(Z_0 - Z_i)}{D_i} & = & \sum_{i=0}^{N} \frac{(X_0 - X_i)(Z_0 - Z_i)}{D_i^2} X + \sum_{i=0}^{N} \frac{(Y_0 - Y_i)(Z_0 - Z_i)}{D_i^2} Y + \sum_{i=0}^{N} \frac{(Z_0 - Z_i)^2}{D_i^2} Z
\end{array}$$

Dado que, como dijimos al comienzo, hemos aproximado la raíz, la solución obtenida no es la solución real, sólo es más aproximada a la solución real que la solución aproximada de partida (X_0, Y_0, Z_0), de modo que hay que tomar como nuevo punto de partida el valor $(X_0 + X, Y_0 + Y, Z_0 + Z)$ e iterar el proceso varias veces (con 5 es suficiente), hasta que la solución obtenida tenga un error menor que el que hayamos prefijado (o hasta que no mejore más).

2. Cálculo del tiempo

Dado que la luz recorre 30cm por nanosegundo, un pequeño error en el reloj del GPS produciría un gran error en la posición, por lo que el tiempo se obtiene también de la observación de los satélites, es decir no tenemos 3 incógnitas (X,Y,Z), sino cuatro incógnitas (X,Y,Z,T), y si llamamos t a la hora que marca el reloj del GPS cuando se reciben todas las señales (que seguimos suponiendo es común para todas las observaciones), $T = t + \alpha$, y por tanto $\rho_i = c(T - t_i) = c(t + \alpha - t_i)$, y por tanto todas las ecuaciones tienen sumada una constante desconocida $(c\alpha)$ en el segundo miembro. Si restamos a la ecuación i con $i > 1$ la ecuación 1, dichas constantes se van, y ya sólo tenemos 3 incógnitas (X,Y,Z), con lo que el problema se resuelve como hemos indicado en el apartado anterior, pero con una ecuación menos, es decir $N - 1$.

Una vez resuelto, y calculadas las (X,Y,Z) que minimizan el error, el tiempo puede calcularse despejando de las ecuaciones de partida, es decir:

$$T = t_i + \frac{d_i}{c},$$

aunque, debido a los errores, cada ecuación dará un resultado distinto, y se puede tomar por ejemplo como valor del tiempo la media de todos ellos.

3. Ejercicio

Supongamos que, usando las notaciones anteriores, tenemos las siguientes observaciones (en Km), hechas todas en el mismo tiempo, en las que ya está corregido el reloj del GPS (es decir, nos dan ya ρ_i, para que no tengamos que calcular el tiempo siguiendo lo dicho en el apartado anterior).

ρ_i	X_i	Y_i	Z_i	S_i
21057.03	-13390.83	-7562.59	21667.66	SV8
23958.97	13656.43	-8417.90	20832.66	SV3
23309.59	-19604.67	2072.25	18538.30	SV27
21908.49	4330.53	-21168.70	15931.59	SV25
22331.39	8354.68	-19574.32	15809.66	SV19
21742.09	-22346.04	-13025.10	7169.90	SV28
21984.68	-5149.30	-26026.13	1273.32	SV13
23471.16	-21335.91	4063.36	15363.91	SV10
20833.14	-1280.49	-17495.18	19894.8	SV7
24369.68	678.86	-24951.50	-8716.32	SV23

Se pide calcular la posición desde la que se hicieron las observaciones de modo que las diferencias $\rho_i - d_i$ sean en todos los casos inferiores en valor absoluto a 10m.