Q1.4

$$P(A|B,C) > P(A|B)$$

$$\frac{P(A,B|C)}{P(B)} > \frac{P(A,B)}{P(B)}$$

$$P(A,B|C) > P(A,B)$$

$$\frac{P(C|A,B) \cdot P(A,B)}{P(C)} > P(A,B)$$

$$P(C|A,B) > P(C)$$

To prove $P(A|B,C^c) < P(A|B)$

we can prove $\frac{P(A|B,C^c)}{P(A|B)} < 1$ instead.

$$\frac{P(A|B,C^c)}{P(A|B)}$$

$$= \frac{P(C^c|AB)}{P(C^c)}$$

$$= \frac{1 - P(C|A,B)}{1 - P(C)}$$

Because $P(C|A,B) > P(C)$

$$\frac{1-P(C|A,B)}{1-P(C)} < 1 \Rightarrow \frac{P(A|B,C^c)}{P(A|B)} < 1 \Rightarrow P(A|B,C^c) < P(A|B)$$