《集合论与图论》课堂练习 1

（2019 年 10 月 29 日 13:30-15:10　复旦大学计算机科学技术学院 2019 级）

学号________________姓名________________成绩____________

一、　填空题（30 分，每格 3 分）

1．令 $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$，$Y=\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$，则有____________________个不同的由 X 到 Y 的关系，有____________________个不同的由 X 到 Y 的函数。

2．设 R 是 A 上的二元关系，R 的自反（对称，传递）闭包，记为 R'，满足下列 3 个条件：

（1）____；

（2）____；

（3）____。

3．集合 A 的递归（归纳）定义由三部分组成：

（1）____；

（2）____；

（3）____。

4．设 $R=\{(x, y) \mid x, y\in N$ 并且 $x+3y=12\}$，求 $R^2=$____。

5．设 f_1 是从 A 到 B 的函数，f_2 是从 B 到 C 的函数，则从 A 到 C 的 f_1 和 f_2 的复合函数定义为____。

二、是非判断题（18 分，每题 6 分，其中判断 3 分，论述 3 分）

1．$A\cup(B\oplus C)=(A\cup B)\oplus(A\cup C)$

（×）

2．$(A\oplus B)\times C=(A\times C)\oplus(B\times C)$

（√）

$[(A-B)\cup(B-A)]\times C$

$[(A\times C)-(B\times C)]\cup[(B\times C)-(A\times C)]$

3．设 A 是一个集合，R 是 A 的幂集 $P(A)$ 上的二元关系，对所有 S、$T\in P(A)$，$(S, T)\in P(A)$ 当且仅当 $|S|\le|T|$，则 R 是偏序关系。
（　）

三、综合题（52 分）

1．若一个数能表示成某个整数的平方的形式，则称这个数为完全平方数。完全立方数是指当一个整数如果是另一个整数的完全立方，那么就称这个数为完全立方数。在 1 到 1000000 之间（包括 1 和 1000000 在内），有多少个整数既不是完全平方数，也不是完全立方数？（8 分）

2．设函数 $f: A\to B$，并定义 $g: B\to P(A)$，对于 $b\in B$，$g(b)=\{x\,|\,x\in A, f(x)=b\}$。

（1）　证明：如果 f 是 A 到 B 的满射，则 g 是内射的；

（2）　（1）的逆命题成立吗？

（12 分，（1），8 分；（2），4 分）

3．已知集合 A 和 B，其中 $A\ne\varnothing$，$(B, \le)$ 是偏序集. 定义从 A 到 B 的所有函数的集合 B^A 上的二元关系 R 如下：$(f,g)\in R \Leftrightarrow f(x)\le g(x), \forall x\in A$。

1)　证明 R 为 B^A 上的偏序.

2)　给出 (B^A, R) 存在最大元的充要条件是 $(B, \le)$ 中有最大元，并写出 (B^A, R) 中最大元的形式。

（共 20 分，每小题 10 分）

4. 某一个市镇只有一家旅馆：希尔伯特旅馆，这个旅馆与通常旅馆没有不同，只是房间数不是有限而是无穷多间，房间号码为 1，2，3，4，……。这个旅馆的房间可排成一列的无穷集合{1，2，3，4，…}，称为可列集。

有一天，所有房间都住满了。后来来了一位客人，坚持要住房间。旅馆老板于是引用"旅馆公理"说："满了就是满了，非常对不起！"。正好这时候，聪明的旅馆老板的女儿来了，她看见客人和她爸爸都很着急，就说："这好办，请每位顾客都搬一下，从这间房搬到下一间"。于是 1 号房间的客人搬到 2 号房间，2 号房间的客人搬到 3 号房间……依此类推。最后 1 号房间空出来，请这位迟到的客人住下了。

第二天，希尔伯特旅馆又来了一个庞大的代表团要求住旅馆，他们声称有可数无穷多位代表一定要住，这又把旅馆经理难住了。老板的女儿再一次来解围，她说："您让 1 号房间客人搬到 2 号，2 号房间客人搬到 4 号……，k 号房间客人搬到 2k 号，这样，1 号，3 号，5 号，……房间就都空出来了，代表团的代表都能住下了。"

第三天，这个代表团每位代表又出新花招，他们想每个人占可数无穷多间房来安排他们的亲戚朋友，这回不仅把老板难住了，连老板的女儿也被难住了。

（1）现在您担任希尔伯特旅馆的客房经理，您准备采取什么方法解决当前的住宿问题？

（2）后来老板的女儿进了大学数学系。有一天，康托尔教授来上课，他问老板的女儿："要是区间[0，1]上每一点都占一个房间，是不是还能安排？"也请您回答康托尔教授的这一问题，并论证。

（12 分，两小题各 6 分）

《集合论与图论》课堂练习 2

（2020 年 11 月 9 日　13:30-15:10　复旦大学计算机学院）

学号________________姓名________________成绩____________

注意：有关计数的答案可用 P(n,k), C(n,r), n^k, k!, 及数字等表示

一、　填空题（40 分，每个填空格 5 分）

1．　多重集 S={3•a, 2•b, 4•c}，则 S 的 8-排列数是________________。

2．5 对夫妻出席一宴会，围一圆桌坐下。有____________________种不同的方案。若要求夫妻相邻，有____________________种不同的方案。

3．从 1 到 300 间任取 3 个不同的数，使得这 3 个数的和正好被 3 除尽，有____________________种方案。

4．$(x+y+z)^{10}$ 有____________________项。

5．排列字母 ILLINOIS 可以得到____________________个不同的字符串；如果要求某个 I 排在某个 L 之前，可以得到________________个不同的字符串。

6. 整除 510510 的正奇数有____________________个。

二、综合题（60 分，5×12 分=60 分）

1．给出 n 个正整数 $a_1, a_2, \ldots, a_n$，这些数可以相同。在这些数中必然存在连续的一段 $a_l \ldots a_r$，使得 $\sum_{i=l}^{r} a_i$ 可以被 n 整除。

2. n 个元素依次标号 1,2,…,n，求每个元素都不在自己原来位置的排列数。

分

3．从 20 人中募集 15 美元；其中，前 19 人中每人可以捐 1 美元，或者不捐；第 20 个人或者捐 1 美元，或者捐 5 美元，或者不捐。实现这一募捐的方法数是多少？

4．求解递推关系 $a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}, n\geq 3$，且 $a_0 = a_1 = 1$ 的 a_n 的公式。

5．求有偶数个 0 和奇数个 1 的第 n 位四进制序列（其数字为 0, 1, 2, 3）的个数。

《集合论与图论》课堂练习 3

（2020 年 12 月 21 日　13:10-15:10　复旦大学计算机学院 2019 级）

学号____________________ 姓名____________________

一、判断下列命题是否正确，并说明理由。(括号内写"是"或"否")（32 分，每题 8 分，是非判断 4 分，证明或反例 4 分）

1　如果在一个地图上任何两个地区都相邻，问在该地图上最多有 4 个地区。
（　　）

2　若 G 是简单连通图，边数为 e，结点数为 n。若 $e \geq n$，则 G 至少有 3 棵生成树。
（　　）

3　一个有向图 G 中仅有一个顶点的入度为 0，其余顶点的入度均为 1，则 G 是有向树。
（　　）

4　设 C 是简单连通图 G 的回路，若删去 C 中任一边后所得到的路 C'为 G 中的最长路，则 C 是图 G 的哈密顿回路。
（　）

二、综合题（68 分，前 4 题，每题 12 分；第 5 题，20 分）

1．生成一个带权连通图的最小生成树的 prim 算法如下：

假设 $G(V, E)$是带权连通图，TE 是 G 上最小生成树中边的集合。

设 $U=\{u_0\}$（$u_0\in V$），$TE=\{\}$；

重复执行下述操作：

在所有 $u\in V$，$v\in V-U$ 的边$\{u, v\}\in E$ 中找一条权值最小的边$\{u_0, v_0\}$并入集合 TE，同时 v_0 并入 U，直至 $U=V$ 为止。

此时 TE 中必有 n-1 条边，则 $T(V, TE)$为 G 的最小生成树。

请证明 prim 算法的正确性。

2．平面上有 n（$n\geq 2$）个圆，任何两个圆都相交但无 3 个圆共点，问这 n 个圆把平面划分成多少个不连通的区域？给出递推式。

3．如果图 G 是 k 色的，则 G 中至少有 $k(k-1)/2$ 条边。

4. 三对夫妇到达一条河流的岸边，对于每个妻子，当她的丈夫与其他人的妻子在一起而她不在场时，她就无法忍受。只用一条只能运载两个人的船，如何能使三对夫妇到达河的另一边，且没有一个丈夫在他妻子不在场时与他的妻子之外的女人相处？使用图论模型解答。

5. k（k>2）叉哈夫曼树是一棵正则 k 叉树，每个节点要么是叶子节点，要么它有 k 个子节点，并且树的权最小。设给出 m 个节点，其权值为 w_1, w_2, ……, w_m。构造以此 m 个节点为叶节点的 k 叉哈夫曼树，给出的 m 个节点构成 m 棵 k 叉树的集合 $F=\{T_1, T_2, \ldots, T_m\}$。其中，每棵 k 叉树 T_i 中只有一个权值为 w_i 的根节点，子树为空，$1 \le i \le m$。如果$(m-1)\%(k-1) \neq 0$，就要在集合 F 中增加 $k-1-(m-1)\%(k-1)$ 个权值为 0 的"虚叶节点"。然后，重复做以下两步：

(1) 在 F 中选取根节点权值最小的 k 棵 k 叉树作为子树，构造一棵新的 k 叉树，并且置新的 k 叉树的根节点的权值为其子树根节点的权值之和；

(2) 在 F 中删除选取的这 k 棵 k 叉树，同时将新得到的 k 叉树加入 F 中；

重复(1)、(2)，直到在 F 中只含有一棵 k 叉树为止。这棵 k 叉树便是 k 叉哈夫曼树。

【1】 证明：如果$(m-1)\%(k-1) \neq 0$，就要在集合 F 中增加 $k-1-(m-1)\%(k-1)$ 个权值为 0 的"虚叶节点"。

【2】 在【1】的基础上，证明产生 k（k>2）叉哈夫曼树的算法的正确性。

4．三对夫妇到达一条河流的岸边，对于每个妻子，当她的丈夫与其他人的妻子在一起而她不在场时，她就无法忍受。只用一条只能运载两个人的船，如何能使三对夫妇到达河的另一边，且没有一个丈夫在他妻子不在场时与他的妻子之外的女人相处？使用图论模型解答。

5． k（k>2）叉哈夫曼树是一棵正则 k 叉树，每个节点要么是叶子节点，要么它有 k 个子节点，并且树的权最小。设给出 m 个节点，其权值为 w_1, w_2, ……, w_m。构造以此 m 个节点为叶节点的 k 叉哈夫曼树，给出的 m 个节点构成 m 棵 k 叉树的集合 $F=\{T_1, T_2, \ldots\ldots, T_m\}$。其中，每棵 k 叉树 T_i 中只有一个权值为 w_i 的根节点，子树为空，$1 \le i \le m$。如果$(m-1)\%(k-1) \neq 0$，就要在集合 F 中增加 $k-1-(m-1)\%(k-1)$个权值为 0 的“虚叶节点”。然后，重复做以下两步：

(1) 在 F 中选取根节点权值最小的 k 棵 k 叉树作为子树，构造一棵新的 k 叉树，并且置新的 k 叉树的根节点的权值为其子树根节点的权值之和；

(2) 在 F 中删除选取的这 k 棵 k 叉树，同时将新得到的 k 叉树加入 F 中；

重复(1)、(2)，直到在 F 中只含有一棵 k 叉树为止。这棵 k 叉树便是 k 叉哈夫曼树。

【1】 证明：如果$(m-1)\%(k-1) \neq 0$，就要在集合 F 中增加 $k-1-(m-1)\%(k-1)$个权值为 0 的“虚叶节点”。

【2】 在【1】的基础上，证明产生 k（k>2）叉哈夫曼树的算法的正确性。