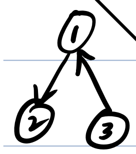
22.1.7



-1或1都表示有一条边

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

若有边相连则不为0

$$BB^T(i,j) = \sum_{e \in E} b_{ie} b^T_{ej} = \sum_{e \in E} b_{ie} b_{je}$$

对于BB^T中对角线上的点 表示点i的度

$BB^T(i,i)$

其余点 $BB^T(i,j)$ $(i \neq j)$ 表示连接i,j两点的边的条数的相反数

22.3-7 重写DFS 用栈消除递归调用

```
DFS-VISIT(G, u)
let S be a new Stack
time = time + 1
u.d = time
u.color = GRAY
S.push(u)
while S is not empty:
    v = S.top
    for k in G:Adj[v]    //找到第一个v的白色邻居
        if k.color == WHITE
            break
    if k is not NULL
        time = time + 1
        k.d = time
        k.π = v
        k.color = GRAY
        S.push(k)
    else                 //v的所有邻居扫描完毕
        time = time + 1
        v.f = time
        v.color = BLACK
        S.pop()
```

~~DFS(G)~~函数不用改

22.4.3

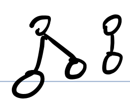
判定 G=(V,E)无向图是否存在环路 O(V),与|E|无关

类似22.11,易证无向图有环当且仅当DFS过程中有后向边:

由22.10,无后向边→只有树边 ∴无环

假设无环,若有后向边,类似22.11的⇒部分,存在矛盾　　得证

DFS 开销 Θ(V+E)

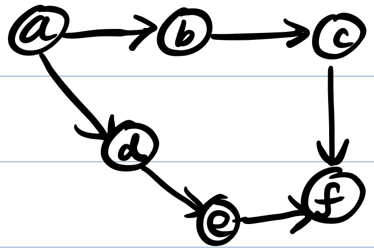


对于无环图可看作森林,|E|≤|V|-1. 性能仍为 O(V)

若有环,在访问|V|条不同边后一定会发现

故直接利用DFS算法,在发现后向边即停止即可

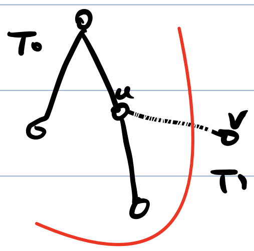
2. 对有向图找出所有拓扑排序



abdcef adbcef abcdef

abdecf abdecf adebcf

23.1.3 证明G的边(u,v)在G某最小生成树中,则该边是横跨图G的某切割的轻量级边



假设删除(u,v)边,最小生成树变为 T_0 T_1 两树

两树的结点集合分别为 V_0 和 V_1

此时两树都是各自节点集合的最小生成树

若要构建整个集合 $V=V_0 \cup V_1$ 的最小生成树,只需找到切割 $(V_0, V-V_0)$ 的一个轻量级边.

若(u,v)不是该边,则有 (u',v'), $u' \in V_0$, $v' \in V_1$, $w(u',v') < w(u,v)$

则将(u',v')加入树中,得到新树权重和小于原最小生成树 矛盾.

$\therefore$ (u,v)是 $(V_0, V-V_0)$ 分割的一个轻量级边

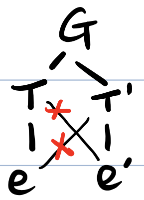
2.

假如给你一边cost不同的连通图G,证明G有唯一最小生成树 $A \to B$, $\neg B \to \neg A$

证明若连通图G有不唯一的MST,则一定有边权重相同

设G有T树 T'树 两个不同MST. 存在两个边集合: $T \setminus T'$ 和 $T' \setminus T$

设e边为 $T \setminus T'$ 中权重最小的, ① e'为 $T' \setminus T$ 中权重最小的,不失一般性令 $e \leq e'$ 权重



考察 $T' \cup \{e\}$, 树加边不加点,必有环. 环中必有e,令e''为环中一个不在T中的边(必存在e''且e''不为e,否则T中有环)

$e'' \notin T$, $e'' \in T'$ $\therefore e'' \in T' \setminus T$ $\therefore w(e'') \geq w(e') \geq w(e)$ (由①)

在T'中将e''删除,加入e,明显形成一棵新树T''. $w(T'') \leq w(T')$

由于T'是MST $\therefore w(T'') = w(T')$ $\therefore w(e'') = w(e)$, $e'' \neq e$. 得证