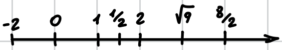
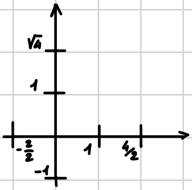
# Spazio vettoriale

$\mathbb{R}$



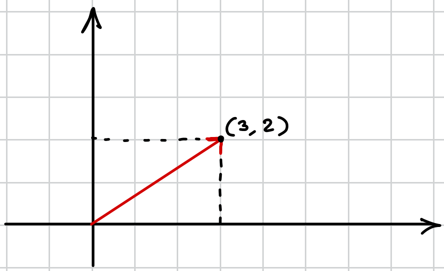

$\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali che possiamo vedere come una retta.

$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$




$\mathbb{R}^2$, geometricamente è il piano cartesiano.

Se noi definiamo $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, ci riferiamo al vettore che parte da 0 e termina nelle coordinate $(3, 2)$.



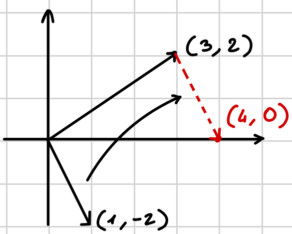

$\mathbb{R}^2$ non è soltanto un insieme, al suo interno possiamo anche effettuare delle operazioni.

La SOMMA e la MOLTIPLICAZIONE PER SCALARE.

# Operazioni

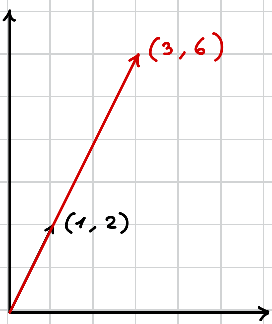
All'interno di $\mathbb{R}^2$ possiamo sommare due vettori grazie al metodo del parallelogramma.

es. $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$




Possiamo anche moltiplicare un vettore per una grandezza scalare.

es. $3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$



# Proprietà

Queste due operazioni hanno diverse proprietà:

- La somma è associativa, cambiando i raggruppamenti delle somme il risultato non cambia.

es. $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}$ $\quad\quad$ $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}+\left(\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}7\\10\end{pmatrix}$

- Sono entrambe commutative, cambiando l'ordine dei vettori il risultato non cambia.

es. $\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$ $\quad\quad$ $\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$

es. $2\cdot\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\14\end{pmatrix}$ $\quad\quad$ $\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}\cdot 2=\begin{pmatrix}10\\14\end{pmatrix}$

- Esiste un elemento neutro $\longrightarrow \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$

- Per ogni elemento esiste anche il suo opposto.

es. $\begin{pmatrix}8\\9\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}-8\\-9\end{pmatrix}$

- Proprietà distributiva

es. $4\cdot\left(\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}\right)=4\cdot\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}7\\4\end{pmatrix}$

es. $\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\cdot(5+7)=5\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}+7\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

- $\forall \lambda,\gamma\in\mathbb{R}\ \ \forall\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2 \ \longrightarrow\ (\lambda\gamma)\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\lambda\left(\gamma\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right)$