V sp. vett.

$\text{SPAN}(v_1, v_2, v_3) =$

$= \{ a v_1 + b v_2 + c v_3 \mid a, b, c \in \mathbb{R} \}$

$V = \mathbb{R}^3$

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -15 \end{pmatrix}$

$\text{SPAN}(v_1, v_2, v_3) =$

$= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -15 \end{pmatrix} \mid a, b, c \right\}$

$15 v_1 - 8 v_2 = 15\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 8\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -15 \end{pmatrix} = v_3$

quindi se ho una combinazione lineare di v_1, v_2, v_3

$a v_1 + b v_2 + c v_3 = a v_1 + b v_2 + c(15 v_1 - 8 v_2) =$

$= (a + 15c) v_1 + (b - 8c) v_2$

allora in questo caso

$\text{SPAN}(v_1, v_2, v_3) = \underline{\text{SPAN}(v_1, v_2)}$ la vera dimensione è 2

possiamo ridurre fino a quando nessuno di loro potrebbe essere scritto come combinazione degli altri.

$SPAN(v_1, \dots, v_{10})$

se v_{10} è combinazione degli altri

$SPAN(v_1, \dots, v_9)$

se v_9 è combinazione degli altri

$SPAN(v_1, \dots, v_8)$

se v_8 è combinazione degli altri

si dice che $v_1, v_2, \dots, v_8$ sono vettori linearmente dipendenti

definizione

Sia V spazio vett. su $\mathbb{K}$ e siano $v_1, v_2 \in V$ alcuni vett.
diciamo che $v_1, \dots, v_K$ sono linearm. dipend. se $\exists \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ non tutti nulli
tali che $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \quad + \lambda_K v_K = 0$

<u>OSS</u> se $\lambda_3 \neq 0$

$$\lambda_3 v_3 = -\lambda_1 v_1 - \lambda_2 v_2 - \lambda_4 v_4 - \dots - \lambda_K v_K$$

$$v_3 = \frac{-\lambda_1}{\lambda_3} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_3} v_2 \dots - \frac{\lambda_K}{\lambda_3} v_K$$

<u>DEF</u> se $v_1, v_K \in V$ NON SONO linearm. dipend. allora SONO LIN. INDIPEND.

NOTA dunque se $v_1, \dots, v_k$ sono LIN. INDIP.

1 nessuno di loro può essere espresso come comb. lineare degli altri
o equivalentemente

2 se $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0$
allora $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$

BASI

Sia V spazio vettoriale
Siano $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$
dirò che $v_1, v_2, \dots, v_m$ SONO UNA base di V se accadono entrambe

1. $v_1, \dots, v_m$ SONO LIN. INDIP.
2. $\text{SPAN}(v_1, v_2, \dots, v_m) = V$
   "$v_1, v_2, \dots, v_m$ generano V"

<u>Esempio</u> $V = \mathbb{R}^3$

$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

SONO base di $\mathbb{R}^3$
la "base canonica", "base standard"

ANCHE

$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}$

È base di $\mathbb{R}^3$

SONO IND.

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0\\0\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

è poss. solo se $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$

GENERANO

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0\\0\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\\9\end{pmatrix}$$

$$4\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}0\\0\\7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\6\\9\end{pmatrix}$$

$$4+7\lambda_3=9$$

$$7\lambda_3=5$$

$$\lambda_3=\frac{5}{7}$$