Prodotto cartesiano

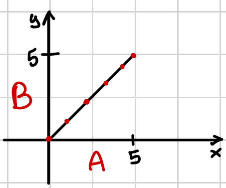
$A_1 = \{Lu, Ma, Me\}$
$A_2 = \{Juve, Napoli\}$

$A_1 \times A_2 = \{(a,b) \mid a \in A_1, b \in A_2\}$
$A_1 \times A_2 = \{(Lu, Juve), (Ma, Juve), (Me, Juve), (Lu, Napoli), (Ma, Napoli), (Me, Napoli)\}$

Il grafico di una determinata funzione è un sottoinsieme del prodotto cartesiano fra il suo dominio e il suo codominio.

$f: A \to B$
$G(f) = A \times B$

$$G(f) := \{(a,b) \in A \times B \mid f(a) = b\}$$



$f(x) = x$

$A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
$B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

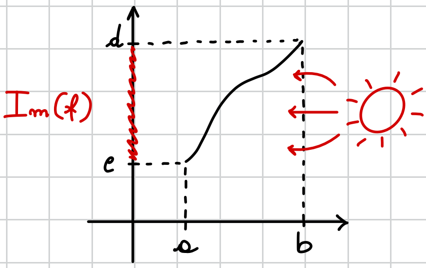
$$G(f) = \{(0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5)\}$$

ricorda che esiste la condizione $f(a) = b$ e con $f(x) = x$ si formano solo coppie con $a = b$.

Il piano cartesiano è il prodotto di $A \times B = \mathbb{R}^2$ $\quad A = \mathbb{R} \quad B = \mathbb{R}$

Immagine di f

$f: A \to B$ $\qquad A = [a, b] \qquad B = [c, d]$



è una funzione biettiva, ovvero sia iniettiva che suriettiva.

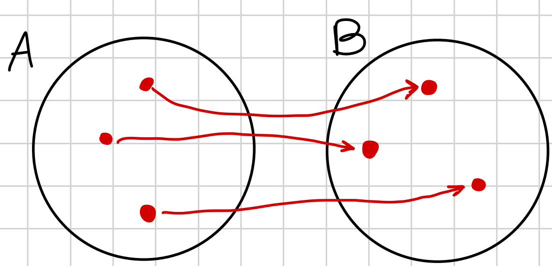
Per poter definire una funzione come biettiva, dobbiamo prima parlare delle funzioni inverse.

Una funzione inversa può esistere solo se f è biettiva.

L'inverso di f è proprio f^{-1}, che chiameremo g.

$$\begin{aligned} g(b) &= a \\ f(a) &= b \end{aligned} \quad \longrightarrow \quad \begin{aligned} g(f(a)) &= a \quad \forall a \in A \\ f(g(b)) &= b \quad \forall b \in A \end{aligned}$$

Per definirsi biettiva, ogni valore del dominio A, deve avere un immagine nel codominio B diverso da tutte le altre.



1 : 1

Numeri

$\mathbb{N}$ = numeri naturali = $\{1, 2, 3, 4, \dots\}$

Nel seguente insieme numerico troviamo due operazioni che possono essere eseguite al suo interno, chiamate binarie.

- Somma => $n + m = m + n$
- Moltiplicazione => $n \cdot m = \underbrace{n + \dots + n}_{m \text{ volte}}$

Proprietà dell'ordinamento.

$n, m \in \mathbb{N}$, vale $n \leq m$ oppure $m \leq n$

fra due numeri naturali distinti, c'è sempre un maggiore ed un minore

$n \geq m \quad \wedge \quad m \geq n \quad \Rightarrow \quad m = n$

e cong.

se entrambi sono $\geq$ allora saranno $=$

$K \in \mathbb{N} \qquad n + K \geq m + K \iff nK \geq mK$

aggiungendo o moltiplicando lo stesso valore a entrambi n continuerà ad essere $\geq m$

$n \geq K \geq m \Rightarrow n \geq m$

se n è maggiore di K che è maggiore di m, n sarà maggiore pure di m.

Divisione

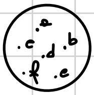
È possibile effettuare la divisione nel campo dei naturali solo se troviamo q ed r tali che:

$a : b = q \Rightarrow a = bq + r \qquad \forall a, b \in \mathbb{N} \quad q \in \mathbb{N} \quad b \neq 0 \quad r = 0$

In matematica un insieme A si dice numerabile se i suoi elementi possono essere messi in corrispondenza 1 : 1 con i numeri naturali.
Quindi se esiste $f : \mathbb{N} \to A$ biiettiva

Cardinalità

In un insieme finito la cardinalità è il numero di elementi contenuti al suo interno.

es. A 

$$A = \{\underset{1}{a}, \underset{2}{b}, \underset{3}{c}, \underset{4}{d}, \underset{5}{e}, \underset{6}{f}\} \qquad \#A = 6$$

!! Se una $f: A \to B$ è biettiva allora $\#A = \#B$

Polinomio

Un polinomio è in realtà:

$$A(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k \qquad deg(A(x)) = n$$

es. grado $n = 2 \Rightarrow b_0 + b_1 x + b_2 x^2$

se dividiamo due polinomi:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ P(x)}}{\sum_{k=0}^{n}(b_k x^k)} : \underset{\substack{\uparrow \\ D(x)}}{\sum_{k=0}^{m}(b_k x^k)} \qquad n \geq m \qquad b_m \neq 0 \qquad deg(P(x)) > deg(D(x))$$

$$P(x) : D(x) = Q(x)$$

$\mathbb{Z}$ = numeri interi = $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

Ordinamento

$a, b \in \mathbb{Z} \wedge a \leq b \wedge b \leq a$ allora $a = b$
$a \leq b \wedge b \leq c \wedge c \in \mathbb{Z}$ allora $a \leq c$
$a \leq b$ allora $a + c \leq b + c$
$a \leq b$ e $0 \leq c$ allora $a \cdot c \leq b \cdot c$

$\mathbb{Q}$ = numeri razionali = $\left\{\frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N}\right\}$

$x \in \mathbb{Q} \wedge x \neq 0 \qquad x = n \qquad x^{-1} = \frac{1}{n} \qquad x \cdot x^{-1} = n \frac{1}{n} = 1$

Una frazione può assumere solamente un valore decimale finito o periodico.

$\frac{1}{2} = 0,5 \qquad \frac{1}{3} = 0,\overline{3}$

$\sqrt{2} \neq \frac{p}{q}$ non esistono $p, q \rightarrow p, q \in \mathbb{N}$

$\frac{p}{q} = \begin{cases} \text{numero decimale periodico} \\ \text{numero finito} \end{cases} \qquad \sqrt{2}$ = numero decimale finito

$\sqrt{2} + \sqrt{3}$ -> quando lo calcoliamo con un calcolatore il risultato non è mai esatto, ma è il massimo che il nostro calcolatore riesce a calcolare.