Spazio

Sia $\mathbb{K}$ un campo. $(\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C})$

Uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$ è un insieme con due operazioni:

- Somma : $V_1 + V_2$ con $V_1, V_2 \in V$
- Moltiplicazione per scalare : λv con $\lambda \in K$, $v \in V$

Gli elementi di V si chiamano vettori.

Queste operazioni hanno le

1) $\forall v_1, v_2 \in V \quad v_1 + v_2 = v_2 + v_1$

2) $\forall v_1, v_2, v_3 \in V \quad (v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3)$

3) L'elemento neutro della somma $O \qquad O + v = v + O = v$

4) $\forall v \in V$ esiste l'opposto. $\quad v + w = w + v = O$

5) $\forall \lambda \in \mathbb{K} \quad \forall v \in V, \forall w \in V \qquad \lambda$

6) $\forall \lambda, \gamma \in \mathbb{K} \quad \forall v \in V \quad (\lambda + \gamma) v = \lambda v + \gamma v$

7) $\forall \lambda, \gamma \in \mathbb{K}$

8) $\forall v \in V \qquad 1 v = v$

$v \in V \qquad 0 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} = \mathbf{0}$

In $\mathbb{R}^3 \quad 0 = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

$0v = ?$

$0\begin{pmatrix}7\\4\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

in teoria $0v = \mathbf{0}$ vero ✓

$0v = (0+0)v = 0v + 0v$

$0v = 0v + 0v$

w l'opposto di $0v$

$0v + w = 0v + 0v + w$

$\mathbf{0} = 0v + \mathbf{0}$

$\mathbf{0} = 0v$ ✓

$v \in V \qquad (-1)v = ?$

$\mathbf{0} = 0v = (1 + (-1))v =$

$= 1v + (-1)v = v + (-1)v$

$\mathbf{0} = v + (-1)v = w$ opposto di v $\quad \forall v \in V$

d'ora in avanti $(-1)v = -v$

$\mathbb{R}[x]$ è l'insieme dei polinomi (è uno spazio vettoriale

c'è la somma:
$(x^2+x+7)+(x^3+10x-2) = x^3+x^2+11x+5$

moltiplicazione
$7(x^3+x-1) = 7x^3+7x-7$

entrambe godono delle 8 proprietà

es. $\mathbb{R}[x]^{\leq 5}$ fino al grado 5

un polinomio è pure un vettore (non lo chiameremo mai così

es. $x^3-7x^2+2 \;\;\text{->}\;\; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}[x]^{\leq 5}$ (da non considerare)

$F(\mathbb{R},\mathbb{R})$ le funzioni da $\mathbb{R} \Rightarrow \mathbb{R}$

$f(x)+g(x)$
$7 \cdot e^x$

anche le funzioni le troviamo uno spazio vettoriale

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -7 & \sqrt{2} \\ -3 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ \pi & 2 & -1 \end{pmatrix}$$ si dice che A è una matrice 4×3

<u>def</u> chiamo $M(4,3,\mathbb{R})$ l'insieme di tutte le matrici 4×3 a coefficienti in $\mathbb{R}$.

Osserviamo che $M(4,3,\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale

es. $$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ \pi & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 6 & 6 & 6 \\ -2 & -2 & -2 \\ \sqrt{7} & \sqrt{7} & \sqrt{5} \end{pmatrix} =$$

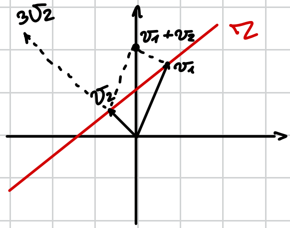
$$= \begin{pmatrix} 6 & 4 & 5 \\ \pi+6 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & 3 \\ \sqrt{7}+3 & \sqrt{7}-1 & \sqrt{5}-1 \end{pmatrix}$$

es. $$5 \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 7 & -2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -5 & 0 \\ 35 & -10 & 5\sqrt{2} \\ 5\sqrt{3} & 20 & 15 \\ 10 & 5 & 45 \end{pmatrix}$$

In generale si definisce lo spazio vettoriale $M(m,n,K)$

Sotto spazio vettoriale

$\mathbb{R}^2$



$v_1 + v_2 \notin \mathbb{R}$

$3\, v_2 \notin \mathbb{R}$

in r non troviamo l'elemento neutro

$\binom{0}{0} \notin r$

$$0 + 0' = 0$$

def Dato V, un sott. ins. $W \subseteq V$ se soddisfa

1) $0 \in W$
2) $\forall w_1, w_2 \in W$ vale $w_1 + w_2 \in W$
3) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall w \in W$ $\lambda w \in W$ $\Rightarrow$ $0w \in W$, $0w = 0$, $0 \in W$

? per il sottospazio vett. non vogliamo un $\emptyset$, per questo la 3ª

In V il sott. vett. più piccolo è $\{0\}$

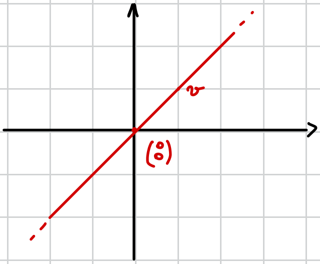
$5\,0 = ?$

$5\,0 = 5(0+0) =$

$= 5\,0 + 5\,0$

$5\,0 = 0$

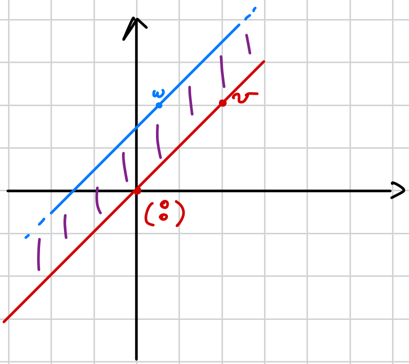
$\mathbb{R}^2$



creare un sott. vett.

$\left\{\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right\}$ ✓

tutte le rette passanti per l'origine. ✓



non esistono sottospazi intermedi fra rette passanti per $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ e $\mathbb{R}^2$

i sottospazi di $\mathbb{R}^2$ sono:

- $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$
- rette passanti per l'origine
- $\mathbb{R}^2$

lo spazio vettoriale si collega al concetto di dimensione.

Sistemi lineari omogenei

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$ OMOGENEO

Le soluzioni sono le terne (x, y, z) che rendono vere entrambe le equazioni

$$\begin{cases} 7y - 3z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7y = 3z \\ x = -1 \end{cases}$$

$y = 3$
$z = 7$
$x = -1$

Per esempio $(-1, 3, 7)$ è soluzione

$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

In questo modo identifico le soluzioni come vettori di $\mathbb{R}^3$

Quindi l'insieme delle soluzioni sarà un sottoinsieme S di $\mathbb{R}^3$

Ma S è sott. VETTORIALE ?

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in S$

$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$

$$2(a + a') + 3(b + b') - (c + c') = \overbrace{2a + 3b - c}^{0} + \overbrace{2a' + 3b' - c'}^{0}$$