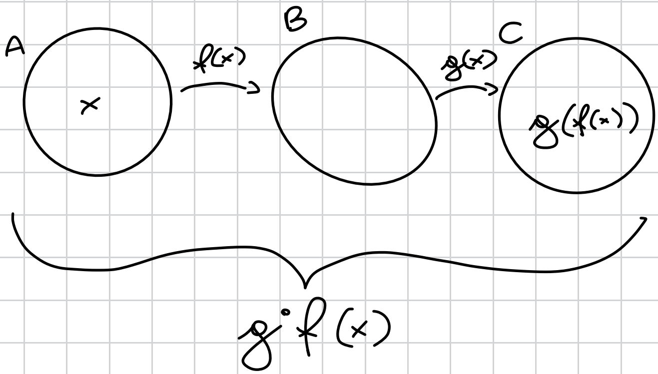
Composizione

Sia $f: A \to B$ $\qquad Im(f) \subseteq dom(g)$
$\quad g: B \to C$

allora possiamo ricorrere alla composizione

$g \circ f: A \to C \qquad g \circ f(x) = g(f(x)) \qquad x \in A$



Successioni

Le successioni sono delle semplici funzioni che associano ad ogni numero naturale n un elemento.

$f: \mathbb{N} \to B \qquad f(n) = b \qquad b \in B \wedge n \in \mathbb{N}$

es. $f(n) \in \{$ testa, croce $\}$

Numeri reali

$\mathbb{R} = \{\ldots, -5, -\frac{1}{2}, 0, \sqrt{2}, \frac{7}{3}, \pi \ldots\}$

Scrivere un numero decimale significa scrivere la parte intera + la parte decimale

es. $\underbrace{1}_{\text{intero}},\underbrace{5234}_{\text{decimale}}$ parte intera $= t \in \mathbb{Z}$ parte decimale $= a_0, a_1, a_2, \ldots \in \{0, \ldots, 9\}$

la parte decimale non è sempre finita...

es. $1,\overline{3} = 1,333333333\ldots$ la cifra 3 in questo caso prende il nome di "periodica"

Tutti i reali che non sono razionali si dicono "irrazionali".
Questi numeri non sono frazioni, in decimale non finiscono e non sono periodici.

es. $\sqrt{2} = 1,41421356\ldots$ senza uno schema logico

Quindi... $0,\overline{9} = 1$ perché...

$0.9999\ldots = x$
$10x = 9.9999\ldots$
$10x - x = 9.9999\ldots - 0.9999\ldots = 9$
$9x = 9$
$x = 1$

es. $0,\overline{12} = x$
$100x = 12,121212\ldots$
$100x - x = 12,12121212\ldots - 0,12121212\ldots$
$99x = 12$
$x = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$

Lemma ($\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$)

1. $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} \right\}$
$= \left\{ p_0, p_1 \dots p_l \overline{p_{l+1} \dots p_m} \right\} \quad p_0 = \mathbb{Z} \quad p_i \in \{0, \dots, 9\} \wedge \forall i \geq 1$

2. $A \subseteq \mathbb{Q}$

sia $a \in A$:

$a = p_0, p_1 \cdots p_l \overline{p_{l+1} \dots p_m}$

$a \cdot 10^l = p_0 p_1 \dots p_l, \overline{p_{l+1} \dots p_m}$

$a \cdot 10^m = p_0 p_1 \dots p_l p_{l+1} \dots p_m, \overline{p_{l+1} \dots p_m}$

$a \cdot (10^m - 10^l) = \underbrace{p_0 p_1 \dots p_l p_{l+1} \dots p_m - p_0 p_1 \dots p_l}_{r \in \mathbb{Z}}$

$a = \frac{r}{10^m - 10^k}$

$\Rightarrow a \in \mathbb{Q}$

$A \subseteq \mathbb{Q}$

2. Dobbiamo provare che $\mathbb{Q} \subseteq A$

Sia $a = \frac{p}{q}$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ possiamo supporre che $p \geq 0$)

$p = p_0 q + m_1, \ 0 \in m_1 < q$.

$$\begin{array}{r|l} & p_0, p_1 \dots p_l \\ \hline q & p \\ & m_1 0 \\ & m_2 0 \\ & \vdots \\ & m_l 0 \end{array}$$

$\exists k \in \mathbb{N}, \ k \leq q$, t.c.

$$p_0, p_1 \dots p_l \dots p_k \overset{= p_l}{} p_{l+1} \dots p_k \, p_{l+1} \dots p_k$$

$9 \,|\, p$

$m_1 0$

$\dots$

$m_l 0$

$\dots$

$m_n 0$

esempio

$9,750000$

$4 \,|\, 39$

30

20

||

$39 \,|\, 4$

$30 \quad 9,750\dots$

20

00

$\dots$

AMMAZZATO

LUI

Dimostrazione parte 2

- $A \subseteq \mathbb{Q}$ ✓
- $\mathbb{Q} \subseteq A$

$a \in \mathbb{Q}, \quad a \geq 0$

$$a = \frac{p}{q}, \quad \begin{cases} p \in \mathbb{Z}, p \geq 0 \\ q \in \mathbb{N} \end{cases}$$

algoritmo della divisione

$p = p_0 q + m_1 \qquad 0 \leq m_1 < q$

$$\begin{array}{l|l} p & q \\ \hline m_1 0 & p_0, p_1, \dots \\ m_2 & \\ \vdots & \\ m_l & \\ \vdots & \\ m_k & \end{array}$$

si ripetono

$m_2 < q$

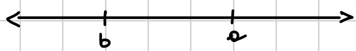
$$\frac{m_1 0}{q} < \frac{q0}{q} = \frac{q \cdot 10}{q} = 10$$

induttivamente $\quad 0 \leq m_n < q \quad \Rightarrow \exists$

$m_n \in \{0, \dots, q+1\}$

$$
\begin{array}{c|l}
p & q \\
\hline
m_1 & p_0, p_1 \dots \boxed{p_l \; p_{l+1} \dots p_k} \\
\vdots & \\
\boxed{\begin{matrix} m_l \\ m_{l+1} \\ \vdots \\ m_k \end{matrix}} &
\end{array}
$$

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$



- due numeri reali

$a = p, \alpha_1, \alpha_2 \dots$

$b = q, \beta_1, \beta_2 \dots$

sono uguali se

$p = q \quad \wedge \quad e \quad \alpha = \beta$

Convenzione

- $0,\overline{9} = 1$
- $p,\overline{9} = p+1$
- se $\alpha_n < 9$, allora

$1, \alpha_1 \dots (\alpha_{n+1})\overline{0}$

Ordine

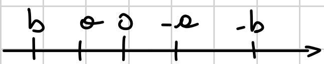
1. per $a, b \in \mathbb{R}$ $\quad a, b \geq 0.$

$$a > b \text{ se e solo se } \quad p > q \ \vee \ \begin{cases} p = q \\ \exists k \in \mathbb{N} \text{ t.c.} \\ \alpha_n = \beta_n \ \forall n \in \{1, \dots, k\} \\ \alpha_{k+1} \geq \beta_{k+1} \end{cases}$$

- $3{,}8340 < 3{,}8341$
- $4{,}34 > 3{,}34$

2. se $a \geq 0$
e $b < 0$ $\implies a > b$

3.



$$a > b \iff -b > -a$$

$$|b| > |a|$$

$$|a| = \begin{cases} a & \text{se } a \text{ è positivo} \\ -a & \text{se } a \text{ è negativo} \end{cases}$$

Somma e moltiplicazione in $\mathbb{R}$

$1 - 0,\bar{9} = 0$?

se $a \in \mathbb{R}$ possiamo incontrare una successione di reali $\{a^{(n)}\}$ t.c.

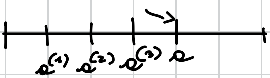
$$a^{(n)} \to a$$

$$a + b = \lim_{n \to \infty} a^n + b^n$$

Sia $\begin{cases} a = p, \alpha_1 \dots \alpha_n \dots \in \mathbb{R} \\ a \geq 0 \end{cases}$

$a^{(n)} := p, \alpha_1 \dots \alpha_n \bar{0}$

$a^{(n)} \leq a^{(n+1)} \leq a$



$$\left| a - a^{(n)} \right| = a - a^{(n)}$$

$$= p, \alpha_1 \dots \alpha_n \alpha_{n+1} \dots$$

$$- p, \alpha_1 \dots \alpha_n 0000 =$$

$$= 0, \underbrace{0 \dots 0}_{n \text{ volte}} \alpha_{n+1} \alpha_{n+2}$$

$$\leq 0,0 \dots 0\, 10000$$

Definiamo la somma di $a, b \in \mathbb{R}$

$$a + b := \lim_{n \to \infty} \text{segno}(a)\,|a|^{(n)} + \text{segno}(b)\,|b|^{(n)}$$

$$a \cdot b := \text{segno}(a) \cdot \text{segno}(b) \times$$
$$\lim_{n \to \infty} |a|^{n}\,|b|^{n}$$

torniamo a $1 - 0,\overline{9} = 1 + (-0,\overline{9})$

$1^{n} = 1$

$(0,\overline{9})^{n} = 0,\underbrace{9\ldots9}_{n \text{ volte}}$

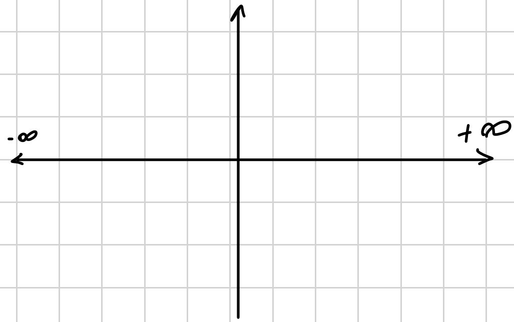
$$1^{(n)} - (0,9)^{(n)} = 0,0\ldots1$$
$$= 10^{-n}$$
$$= \frac{1}{10 \times \ldots \times 10} \to 0$$

$$\lim_{n \to \infty} 1^{(n)} - 0,9^{(n)} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{10^{n}} = 0$$

$$1 - 0,\overline{9} = \lim = 0$$

Curiosità

$\mathbb{I} = \mathbb{R} \times \mathbb{Q}$



Teorema $\forall a, b \in \mathbb{R}$, soddisfano $|a+b| \leq |a| + |b|$

Dimostr.

1. $\forall c \geq 0 \quad |x| \leq c$
   è equivalente a $\begin{cases} x \leq c & x \geq 0 \\ -x \leq c \ (x \geq -c) & x < 0 \end{cases}$

$-c \leq 0 \leq x \leq c$ se $x \geq 0$

$-c \leq x < 0 \leq c$ se $x < 0$

$\iff \boxed{-c \leq x \leq c} \quad \forall x$

$(|a| \leq |a|)$

$-|a| \leq a \leq |a|$

analogamente

sommando

$-|b| \leq b \leq |b|$

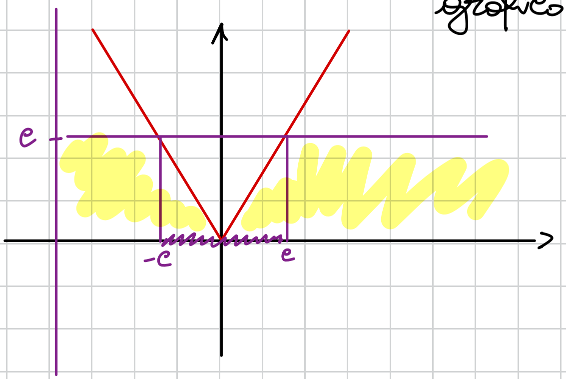
$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$

$|a+b| = |x| \leq c = |a| + |b|$

$|1+2| = 3$

$|-1+2| = |1| = 1$

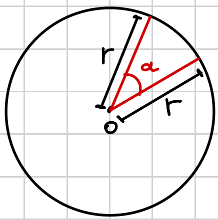
grafico $|\circ|$



$|x| \leq e \iff -e \leq x \leq e$

Radianti e funzione trigonometriche

- Angoli in radianti

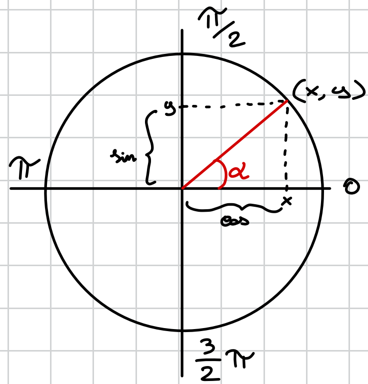


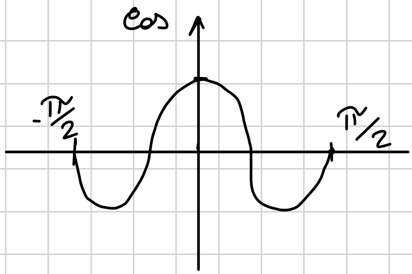
$r = 1$

1 giro completo $\longrightarrow 2\pi$

$180° = \pi$

$1° = \left(\frac{\pi}{180}\right)$ rad





$\cos(\alpha) = x$

$\sin(\alpha) = y$

$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \frac{y}{x}$

$\cos(\alpha) \neq k\frac{\pi}{2}$

con $k \in \mathbb{Z}$