Radice n-esima

Sia $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$

$$a^n = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{n \text{ volte}}$$

L' equazione

$$x^n = y$$

- una sola soluzione $x = 0$ se $y = 0$
- una sola soluzione reale positiva se $y > 0$

Tale numero si chiama "radice n-esima" di y

$\sqrt[x]{y}$ oppure $y^{\frac{1}{x}}$

Potenza se $b \in \mathbb{Z}$

$$a^b :=$$

- $a^b = \underbrace{a \times \ldots \times a}_{b \text{ volte}}$ se $b > 0$
- $a^0 := 1$
- $a^b := \left(\frac{1}{a}\right)^{-b}$ se $b < 0$

$$\underbrace{\left(\frac{1}{a}\right) \times \ldots \left(\frac{1}{a}\right)}_{-b \text{ volte}}$$

Questo $\quad a^b$ → potenza $b \in \mathbb{Z}$

↓ base $a \in \mathbb{R}$

Potenza (razionale)

se la base "a" è un reale positivo e $r = \frac{m}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ e $m \in \mathbb{Z}$

$$a^{r = \frac{m}{n}} := \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

basterà il caso $a \geq 1$ quando $a > 0$ poiché $0 < a < 1$

$$a^b := \left(\frac{1}{a}\right)^{-b}$$

Dalla definizione discendono le regole

siano $\begin{cases} a, b > 0 & (a, b \in \mathbb{R}) \\ r, s \in \mathbb{Q} \end{cases}$

$E_0.$ $a^r > 0 \quad \forall r > 0$

$$\begin{cases} a^r \geq 1 & \text{se } a \geq 1 \\ a^r \leq 1 & \text{se } a \leq 1 \end{cases}$$

$E_1.$ $a^{r+s} = a^r + a^s \quad$ se $r, s \in \mathbb{N}$

$$a^{r+s} = \underbrace{a \times \dots \times a}_{n} \times \underbrace{a \times \dots \times a}_{s}$$

$E_2.$ $(ab)^r = a^r \cdot b^r$

E_3. $(a^r)^s = a^{r \cdot s}$

$r, s \in \mathbb{N}$:

$(a^r)^s = (\underbrace{a \times \ldots \times a}_{r})^s$

E_4. se $r < s$

$\Rightarrow \begin{cases} a^r < a^s & \text{se } a > 1 \\ a^s < a^r & \text{se } a < 1 \end{cases}$

N.B. se $r \in \mathbb{Q}$

$1^r = 1^{m/n} = (1^{1/n})^m$

$\forall r > 0$

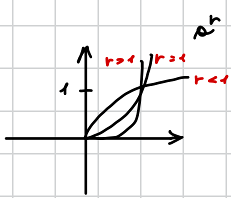
E_5. $0 < a \leq b$

$\Rightarrow a^r \leq b^r$

Osservazione se $r > 0$, $f(a): \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$

$a \to a^r$

è iniettiva



$D(E_s)$

se $b \geq a > 0$

$\left(\frac{b}{a}\right) \geq 1$

$\left(\frac{b}{a}\right)^r \geq 1$

$b^r \left(\frac{b}{a}\right)^r \geq 1$

$b^r \cdot a^{-r} \geq 1$

$b^r \cdot \underbrace{a^{-r} \cdot a^r}_{a^0 = 1} \geq a^r \quad \Rightarrow \quad b^r (a^{\overset{0}{r-r}}) = b^r(1) = b^r$

Potenze (reali)

se $a \in \mathbb{R}_+ \nearrow \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$

$a = \underset{\mathbb{Z}}{P}, \underbrace{\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k}_{\text{parte decimale}}$

$a^{(n)} \nearrow$ non è una potenza

$a^{(n)} := \underbrace{P, \alpha_1 \ldots \alpha_n \underbrace{0 \ldots 0}_{\text{solo } 0}}_{\text{numero razionale}}$

quindi $a^{(n)} \in \mathbb{Q}$

abbiamo dimostrato che $a^{(n)} \leq a^{(n+1)} \leq a$

allora...

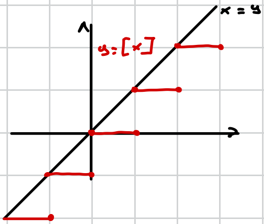
$$a^b := \lim_{n\to\infty} \underbrace{\underbrace{a}_{>0}^{\overbrace{b(n)}^{\in \mathbb{Q}}}}_{\text{ben definito}}$$

tutte le successioni $\{a_n\} \in \mathbb{R}$ non decrescenti e limitate, ha un unico limite

$b(n) \le b(n+1) \Rightarrow b^{(n)} \le b^{(n+1)}$

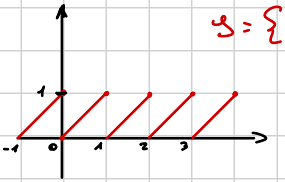
in altre parole

- $\{a^{b(n)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ è non decrescente
- $b(n) \le [b(n)] + 1$



se $x \in \mathbb{Z}$ allora $[x] = x$

$\{x\} := x - [x]$



a^b se $\begin{cases} a \geq 1 \\ b \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$

definiamo

$a^b := (\underbrace{\tfrac{1}{a}}_{>1})^{-b}$ $\qquad 0 < a < 1$

è possibile dimostrare che

$f_b(a) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ $\begin{cases} a \in \mathbb{R}_+ \\ b \in \mathbb{R} \end{cases}$

$a \longrightarrow a^b$

soddisfano

Logaritmi

consideriamo

$a^x = y \qquad a > 0$

dove:
a è una base
y è la variabile nota
x è l'incognita

- se $y = 1$ $\begin{cases} x = 0 \ \wedge \ a \in \mathbb{R} \\ a = 1 \ \wedge \ x \in \mathbb{R} \end{cases}$

per def di radice n-esima, essa non abbia alcuna soluzione se $y < 0$

- c'è una sola soluzione per ogni $y > 0$
"logaritmo in base "a" di "y""
$\log_a y = x$

Dalle proprietà sulle esp. e da def:

$$\begin{cases} x, y \in \mathbb{R}_+ \\ a \in \mathbb{R}_+ \wedge a \neq 1 \end{cases}$$

$\mathcal{L}_1.$ $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

$\boxed{D}$: $\log_a x + \log_a y = \left(a^{\log_a x}\right)\left(a^{\log_a y}\right) = x \cdot y$

$\log_a x + \log_a y = \log_a (x+y)$

$\mathcal{L}_2.$ $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y = \left(a^{\log_a x}\right) \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{\log_a y}$

$\left(a^{\log_a x}\right) \cdot \left(\frac{1}{\log_a y}\right) = x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$

$\mathcal{L}_3.$ $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x \quad \alpha > 0$

$\boxed{D}$ $\alpha = 0$ ✓

$\alpha > 0$

$a^{\alpha \log_a x} = \left(a^{\log_a x}\right)^\alpha = x^\alpha$

Per unicità: $\alpha \log_a x = \log_a x^\alpha$

$\mathcal{L}_4.$ $\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$

$a = x^{\log_x a}$

$= \left(a^{\log_a x}\right)^{\log_x a}$

$= a^{(\log_a x + \log_x a)}$

$a^1 = a$

poiché le potenze sono iniettive

$$1 = (\log_a x)(\log_x a)$$

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$

La disuguaglianza di Bernoulli

$\forall x \geq -1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$(1+x)^n \geq 1+nx$$

Dimostr.

BASE $[n=0]$

$$\begin{cases} (1+x)^n = (1+x)^0 = 1 \\ 1+nx = 1+0x = 1 \end{cases}$$

$$(1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1+nx)\cdot(1+x)$$

$$= 1 + x + nx + nx^2$$

$$= 1 + (n+1)x + \underbrace{nx^2}_{\geq 0}$$

$$\geq 1 + (n+1)x$$

$$(1+x)^n \geq 1+nx, \quad \forall x \geq -1$$

Corollario

$\forall a > 1$
$\forall n \in \mathbb{N}$:

$$0 < \sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n}$$

dim $\quad x = \frac{a-1}{n}$ (Bernoulli)

$$(1+x)^n = \left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^n \geq 1 + nx = 1 + \cancel{n}\left(\frac{a-1}{\cancel{n}}\right)$$
$$= \cancel{1} + a - \cancel{1} = a$$

$$a \leq \left(1 + \frac{a-1}{n}\right)^n$$

$$\sqrt[n]{a} \leq 1 + \frac{a-1}{n}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n}}$$

La media geometrica di due positivi è minore di quella aritmetica

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$$

D:
$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(x^2 + 2xy + y^2\right) =$$
$$= \frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right) + \frac{1}{2}xy \geq \frac{1}{2}xy + \frac{1}{2}xy = xy$$

$$xy \leq \frac{x^2y^2}{2}$$