

# КОНВЕКЦИЯ ТРЕХКОМПОНЕНТНЫХ ЖИДКИХ СМЕСЕЙ В СВЯЗАННЫХ КАНАЛАХ

студент 5 курса М. С. Солодовников

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор В. А. Демин

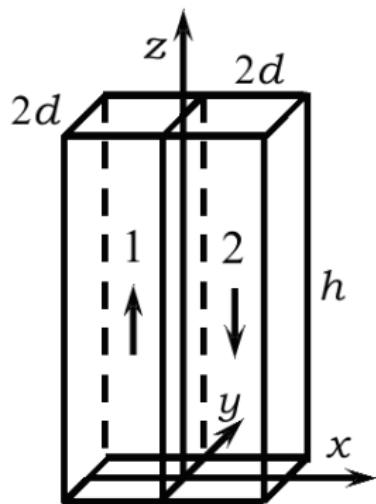
Пермский государственный национальный исследовательский университет

Физический факультет

Кафедра теоретической физики

Пермь 2012

## Геометрия задачи



# Образмеренная система уравнений в приближении Буссинеска

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla p + \Delta \vec{v} + \frac{RaH}{Pr} [(1 + \varepsilon) T - F - \phi] \vec{\gamma} \quad (1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) T = \frac{1}{Pr} \Delta T, \quad \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) F = \frac{1}{Sc} \Delta F + \frac{\varepsilon}{Pr} \Delta T \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \phi = \frac{1}{Sc_\phi} (\Delta \phi + B / \nabla \phi \cdot \vec{\gamma}) \quad (4)$$

## Единицы измерения, безразмерные параметры

При обезразмеривании уравнений (5) — (8) в качестве единицы длины выбрана полутолщина канала  $d$ , времени —  $\frac{d^2}{\nu}$ , скорости —  $\frac{\nu}{d}$ , температуры —  $\theta$ , концентрации жидкой фазы —  $\theta \frac{\beta_t}{\beta_c}$ , концентрации твердой фазы —  $\theta \frac{\beta_t}{\beta_\phi}$ , давления —  $\frac{\rho\nu^2}{d^2}$ .

В уравнения входят безразмерные параметры

$$Ra = \frac{g\beta_t\theta d^3}{\nu\chi}, \quad Sc = \frac{\nu}{D}, \quad Sc_\phi = \frac{\nu}{D_\phi}, \quad Pr = \frac{\nu}{\chi},$$

$$Bl = \frac{d(\rho_\phi - \rho)gV_0}{k_B \bar{T}},$$

$$\varepsilon = \frac{\alpha\beta_c}{\beta_t},$$

где  $Ra$ ,  $Sc$ ,  $Sc_\phi$ ,  $Pr$ ,  $Bl$  — числа Рэлея, Шмидта (для жидкой и твердой фазы соответственно), Прандтля, Больцмана;  $\varepsilon$  — термодиффузионный параметр,  $H$  — безразмерная высота каналов.

## Граничные условия

На твердых границах каналов ставится условие прилипания для скорости и равенство нулю нормальной компоненты потока вещества:

$$\vec{v}|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial \vec{n}}|_{\Gamma} = \left( \frac{\partial C}{\partial \vec{n}} + \varepsilon \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \right)|_{\Gamma} = 0.$$

В дополнение стенки каналов считаются идеально теплопроводными, поэтому возмущения температуры на вертикальных границах расчетной области равны нулю и накладывается условие нулевого расхода через сечение обоих каналов.

# Состояние механического равновесия

$$(\nabla T_0 - \nabla C_0 - \nabla \phi_0) \times \vec{\gamma} = 0 \quad (5)$$

$$\Delta T_0 = 0, \Delta C_0 = 0 \quad (6)$$

$$\Delta \phi_0 + BI \nabla \phi_0 \cdot \vec{\gamma} = 0 \quad (7)$$

$$T_0 = -z/H \quad (8)$$

$$C_0 = \varepsilon z/H \quad (9)$$

$$\phi_0 = \xi_0 e^{-BI \cdot z} \quad (10)$$

## Решение стационарной задачи

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \frac{Ra}{2Pr} \left( (1+\varepsilon) \int_0^H (T_1 - T_2) dz - \int_0^H (F_1 - F_2) dz - \int_0^H (\phi_1 - \phi_2) dz \right), \quad (11)$$

$$v_z = u(z) \sin(\pi x/2) \cos(\pi y/2), \quad (12)$$

$$T = \theta(z) \sin(\pi x/2) \cos(\pi y/2). \quad (13)$$

$$F = f(z) C_{13}(y) S_{13}(x), \quad \phi = \varphi(z) C_{13}(y) S_{13}(x). \quad (14)$$

$$S_{13}(x) = \sin(\pi x/2) - \frac{1}{3} \sin(3\pi x/2), \quad C_{13}(x) = \cos(\pi x/2) + \frac{1}{3} \cos(3\pi x/2) \quad (15)$$

# Система уравнений <sup>1</sup>

$$\frac{1}{Pr} \theta_{1,2}'' \mp \frac{64}{9\pi^2} u \theta_{1,2}' - \frac{\pi^2}{2Pr} \theta_{1,2} \pm \frac{u}{H} = 0 \quad (16)$$

$$f_{1,2}'' \mp \frac{8.56 Sc}{\pi^2} u f_{1,2}' - \frac{9\pi^2}{10} f_{1,2} = \frac{81\varepsilon Sc}{100 Pr} \left( \frac{\pi^2}{2} \theta_{1,2} - \theta_{1,2}'' \right) \quad (17)$$

$$\varphi_{1,2}'' + (Bl \mp \frac{8.56 Sc_\phi u}{\pi^2}) \varphi_{1,2}' - \frac{9\pi^2}{10} \varphi_{1,2} \pm \frac{81\xi_0 Bl Sc_\phi}{100} u e^{-Blz} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\pi^2}{2} u - \frac{Ra}{2Pr} \left( (1+\varepsilon) \int_0^H (\theta_1 - \theta_2) dz - \int_0^H (f_1 - f_2) dz - \int_0^H (\varphi_1 - \varphi_2) dz \right) = 0 \quad (19)$$

<sup>1</sup> Метод решения подобной системы уравнений подробно описан в статье Глухов А.Ф., Демин В.А., Путин Г.Ф. О разделении смесей в связанных каналах // ПМТФ, 2009, т. 50, № 1, с. 68-77.

## Дополнительные предположения, граничные условия

$$BI = \frac{1.5 \cdot 10^{-3} \cdot (7800 - 800) \cdot 9.8 \cdot 4\pi (10 \cdot 10^{-9})^3}{3 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 300} \cong 0.013$$

$$\frac{1}{H} \int_0^H e^{-BIZ} dz = \frac{1 - e^{-BZH}}{HBI} \cong 0.75$$

$$\varphi_{1,2}'' \mp \frac{8.56 Sc_\phi u}{\pi^2} \varphi_{1,2}' - \frac{9\pi^2}{10} \varphi_{1,2} \pm 0.75 \frac{81\xi_0 BI Sc_\phi}{100} u = 0 \quad (20)$$

$$z = 0, H : \theta_1 = \theta_2, f_1 = f_2, \varphi_1 = \varphi_2, \theta'_1 = -\theta'_2, f'_1 = -f'_2, \varphi'_1 = -\varphi'_2. \quad (21)$$

## Аналитическое решение стационарной задачи<sup>1</sup>

$$\theta_1 = \frac{Pru}{aqH} \left( \frac{2\gamma e^{2dz}}{e^{2dH} + 1} - \frac{2de^{2\gamma z}}{e^{2\gamma H} + 1} + q \right), \quad \theta_2 = -\theta_1(H - z); \quad (22)$$

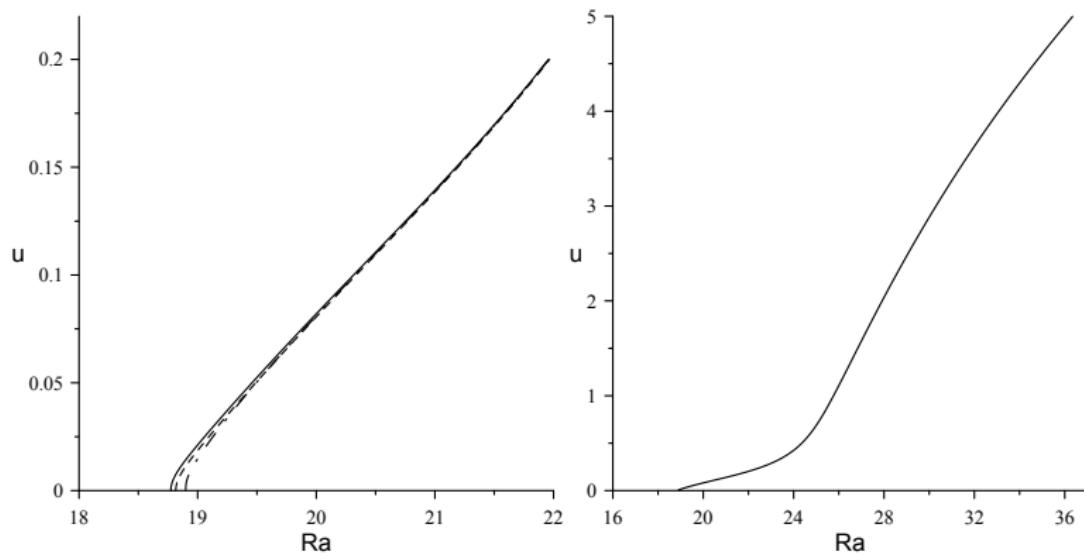
$$f_1 = \frac{Ae^{2\delta z}}{e^{2\delta H} + 1} + \frac{Be^{2\epsilon z}}{e^{2\epsilon H} + 1} + \frac{\xi e^{2dz}}{e^{2dH} + 1} + \frac{\eta e^{2\gamma z}}{e^{2\gamma H} + 1} + \chi, \quad f_2 = -f_1(H - z); \quad (23)$$

$$\varphi_1 = \frac{2R}{\alpha - \beta} \left( \frac{\beta e^{\alpha z}}{e^{\alpha H} + 1} - \frac{\alpha e^{\beta z}}{e^{2\beta H} + 1} + 1 \right), \quad \varphi_2 = -\varphi_1(H - z); \quad (24)$$

$$\begin{aligned} & \frac{Ra(1 + \varepsilon)u}{Ha^2q} (4d^2 \operatorname{th}(\gamma H) - 4\gamma^2 \operatorname{th}(dH) + Haq) - \\ & - \frac{Ra}{2Pr} \left( \frac{A}{\delta} \operatorname{th}(2\delta H) + \frac{B}{\epsilon} \operatorname{th}(2\epsilon H) + \frac{\xi}{d} \operatorname{th}(2dH) + \frac{\eta}{\gamma} \operatorname{th}(2\gamma H) + 2\chi H \right) - \\ & - \frac{2Ra R}{Pr\alpha\beta(\alpha - \beta)} (\beta^2 \operatorname{th}(\alpha H/2) - \alpha^2 \operatorname{th}(\beta H/2) + \frac{\alpha\beta}{2}(\alpha - \beta)H) - au = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

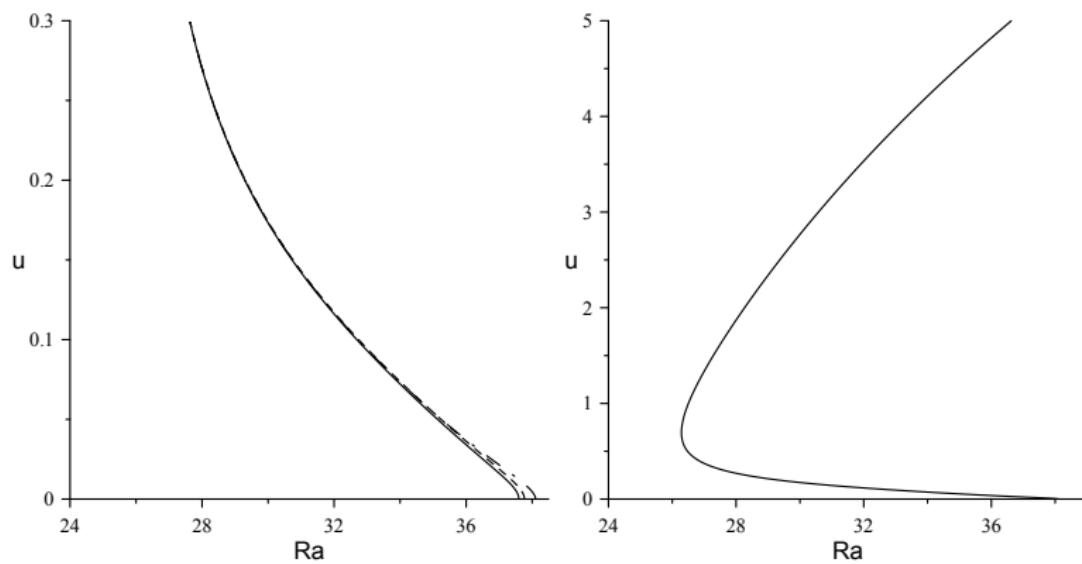
<sup>1</sup> Значение используемых констант приведены в Приложении 1

# Амплитудные кривые



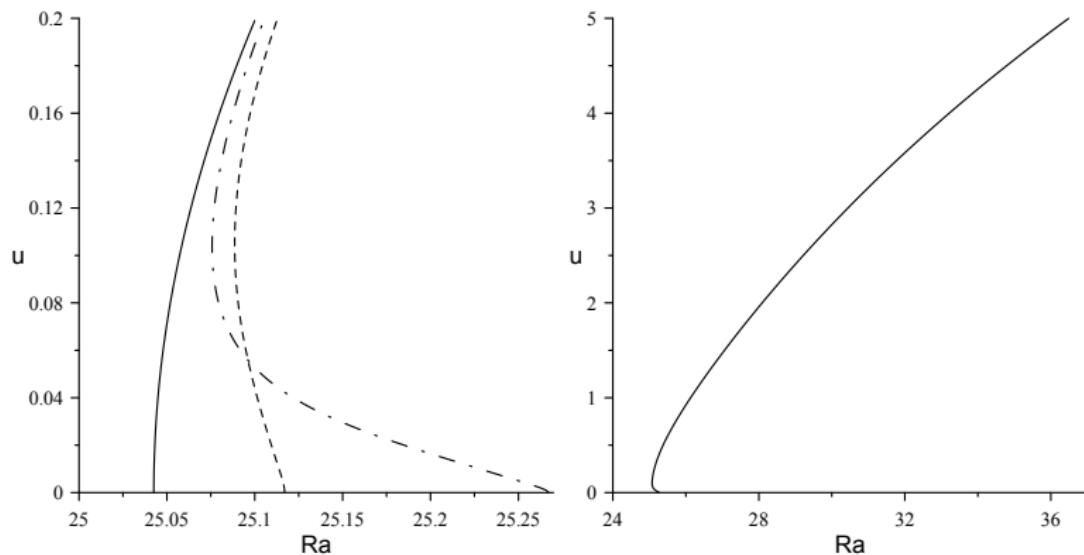
**Рис. 1:** Зависимость амплитуды скорости от числа Рэлея для положительной термодиффузии: правый рисунок — при значениях чисел  $Bl = 0.02, Sc = 500, Pr = 7, \varepsilon = 0.01, Sc_\phi = 3000$ ; левый рисунок — носик правой кривой при различных значениях числа  $Sc_\phi$  ( $Bl = 0.02, Sc = 500, Pr = 7, \varepsilon = 0.01$ ): — без учета седиментации, - -  $Sc_\phi = 1000$ , — · —  $Sc_\phi = 3000$

## Амплитудные кривые



**Рис. 2:** Зависимость амплитуды скорости от числа Рэлея для отрицательной термодиффузии: правый рисунок — при значениях чисел  $Bl = 0.02, Sc = 500, Pr = 7, \varepsilon = -0.01, Sc_\phi = 3000$ ; левый рисунок — носик правой кривой при различных значениях числа  $Sc_\phi$  ( $Bl = 0.02, Sc = 500, Pr = 7, \varepsilon = -0.01$ ): — без учета седimentации, - -  $Sc_\phi = 1000$ , — · —  $Sc_\phi = 3000$

## Амплитудные кривые



**Рис. 3:** Зависимость амплитуды скорости от числа Рэлея без термодиффузии: правый рисунок — при значениях чисел  $Bl = 0.02, Sc = 500, Pr = 7, \varepsilon = 0, Sc_\phi = 3000$ ; левый рисунок — носик правой кривой при различных значениях числа  $Sc_\phi$  ( $Bl = 0.02, Sc = 500, Pr = 7, \varepsilon = 0$ ): — без учета седиментации, - -  $Sc_\phi = 1000$ , — · —  $Sc_\phi = 3000$

# Нестационарное надкритическое движение

$$T = T_1(x, y, t) \sin(\pi z/H) + T_2(x, y, t) \cos(\pi z/H). \quad (26)$$

$$F = F_1(x, y, t) + F_2(x, y, t) \cos(\pi z/H) + F_3(x, y, t) \cos(2\pi z/H), \quad (27)$$

$$\phi = \Phi_1(x, y, t) + \Phi_2(x, y, t) \cos(\pi z/H) + \Phi_3(x, y, t) \cos(2\pi z/H). \quad (28)$$

# Уравнения в частных производных для амплитуд скорости и температуры

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + \frac{2RaH}{Pr\pi} ((1 + \varepsilon) T_1 - \frac{\pi}{2} F_1 - \frac{\pi}{2} \Phi_1) \quad (29)$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial t} - \frac{\pi}{H} u T_2 = \frac{1}{Pr} \Delta_1 T_1 - \frac{\pi^2}{PrH^2} T_1 + \frac{4}{\pi H} u \quad (30)$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial t} + \frac{\pi}{H} u T_1 = \frac{1}{Pr} \Delta_1 T_2 - \frac{\pi^2}{PrH^2} T_2 \quad (31)$$

$$\Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (32)$$

# Уравнения в частных производных для амплитуд $F^1$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} - \frac{2}{H} u F_2 = \frac{1}{Sc} \Delta_1 F_1 - \frac{2\varepsilon}{\pi Pr} \Delta_1 T_1 - \frac{2\pi\varepsilon}{PrH^2} T_1 \quad (33)$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} - \frac{16}{3H} u F_3 = \frac{1}{Sc} \Delta_1 F_2 + \frac{\varepsilon}{Pr} \Delta_1 T_2 - \frac{\pi^2}{ScH^2} F_2 - \frac{\pi^2\varepsilon}{PrH^2} T_2 \quad (34)$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial t} + \frac{4}{3H} u F_2 = \frac{1}{Sc} \Delta_1 F_3 - \frac{4\varepsilon}{3\pi Pr} \Delta_1 T_1 - \frac{4\pi^2}{ScH^2} F_3 + \frac{4\pi\varepsilon}{3PrH^2} T_1 \quad (35)$$

<sup>1</sup> Метод решения этой системы уравнений подробно описан в статье Глухов А.Ф., Демин В.А., Путин Г.Ф. Конвекция бинарной смеси в связанных каналах при подогреве снизу // Изв. РАН, МЖГ, № 2, 2007, с. 13-23.

# Уравнения в частных производных для амплитуд $\phi$ , граничные условия

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial t} - \frac{2}{H} u \Phi_2 = \frac{1}{Sc_\phi} \Delta_1 \Phi_1 - \frac{2Bl}{Sc_\phi H} \Phi_2 + \frac{\xi_0}{H} u (1 - e^{-BlH}) \quad (36)$$

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial t} - \frac{16}{3H} u \Phi_3 = \frac{1}{Sc_\phi} \Delta_1 \Phi_2 - \frac{\pi^2}{Sc_\phi H^2} \Phi_2 - \frac{16Bl}{3Sc_\phi H} \Phi_3 + \frac{2\xi_0}{H} u \frac{(1 + e^{-BlH})}{(1 + \frac{\pi^2}{Bl^2 H^2})} \quad (37)$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial t} + \frac{4}{3H} u \Phi_2 = \frac{1}{Sc_\phi} \Delta_1 \Phi_3 - \frac{4\pi^2}{Sc_\phi H^2} \Phi_3 + \frac{4Bl}{3Sc_\phi H} \Phi_2 + \frac{2\xi_0}{H} u \frac{(1 - e^{-BlH})}{(1 + \frac{4\pi^2}{Bl^2 H^2})} \quad (38)$$

$$x = 0, -2; \quad y = \pm 1 : \quad u = 0, \quad T_1 = T_2 = 0, \quad F'_1 = F'_2 = F'_3 = 0,$$

$$\Phi'_1 = \Phi'_2 = \Phi'_3 = 0,$$

## Результаты численного счета

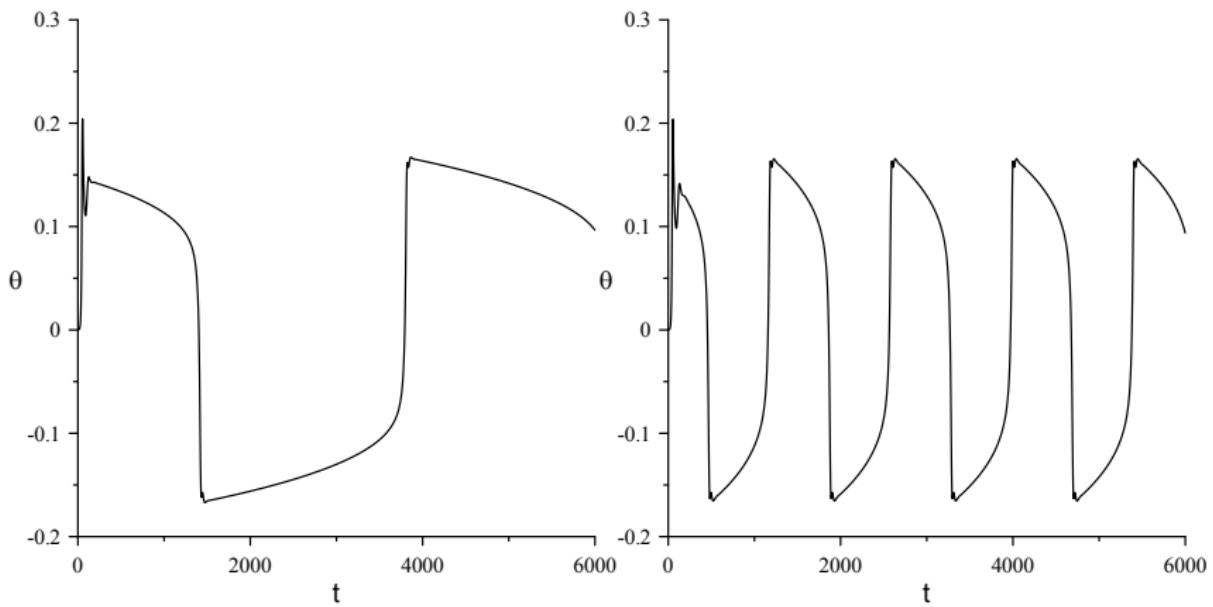


Рис. 4: Временная зависимость амплитуды  $\theta$  ( $Bl = 0.1$ ,  $Ra = 33$ ) : левый график —  $\xi_0 = 10^{-5}$ , правый график —  $\xi_0 = 10^{-4}$

## Результаты численного счета

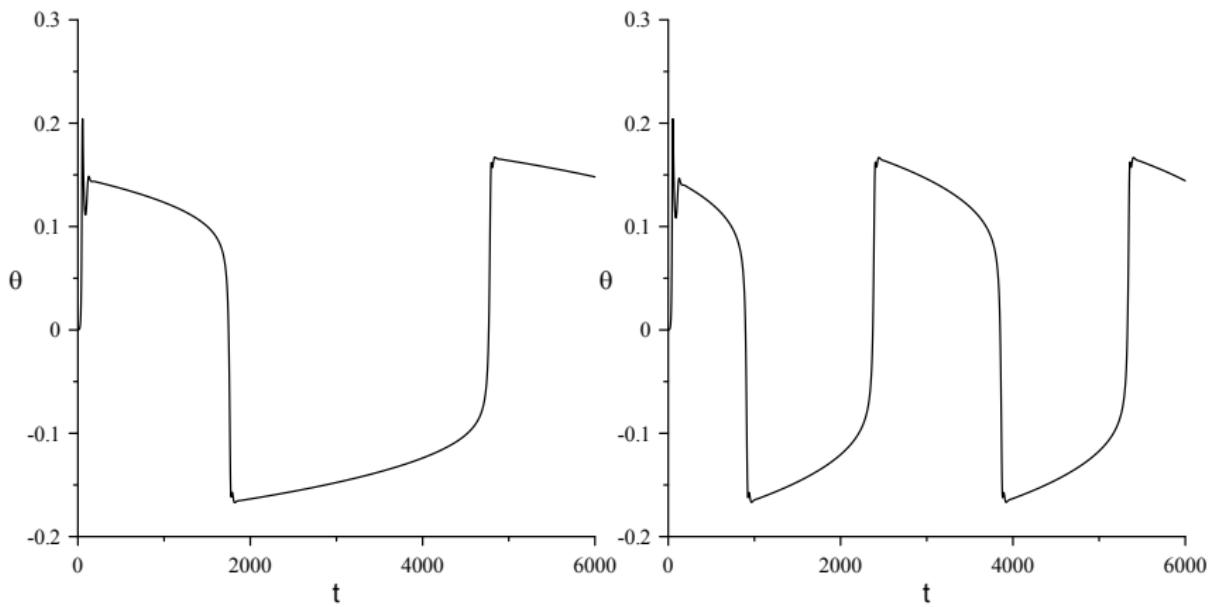


Рис. 5: Временная зависимость амплитуды  $\theta$  ( $Bl = 0.02$ ,  $Ra = 33$ ) : левый график —  $\xi_0 = 10^{-5}$ , правый график —  $\xi_0 = 10^{-4}$

## Результаты численного счета

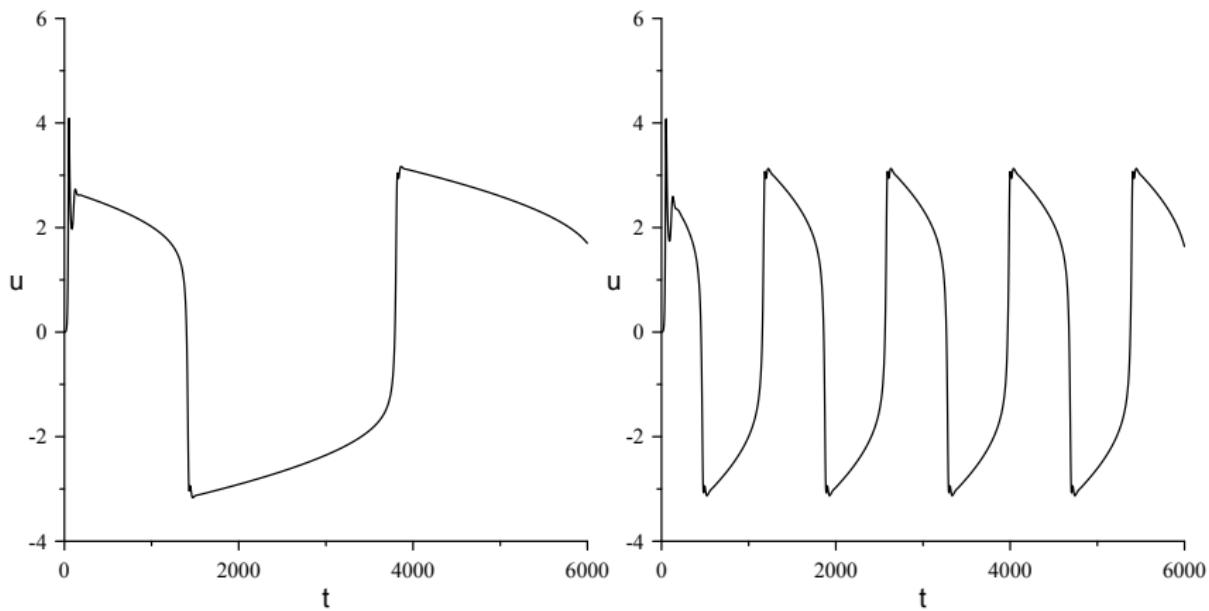


Рис. 6: Временная зависимость скорости ( $Bl = 0.1$ ,  $Ra = 33$ ) : левый график —  $\xi_0 = 10^{-5}$ , правый график —  $\xi_0 = 10^{-4}$

## Результаты численного счета

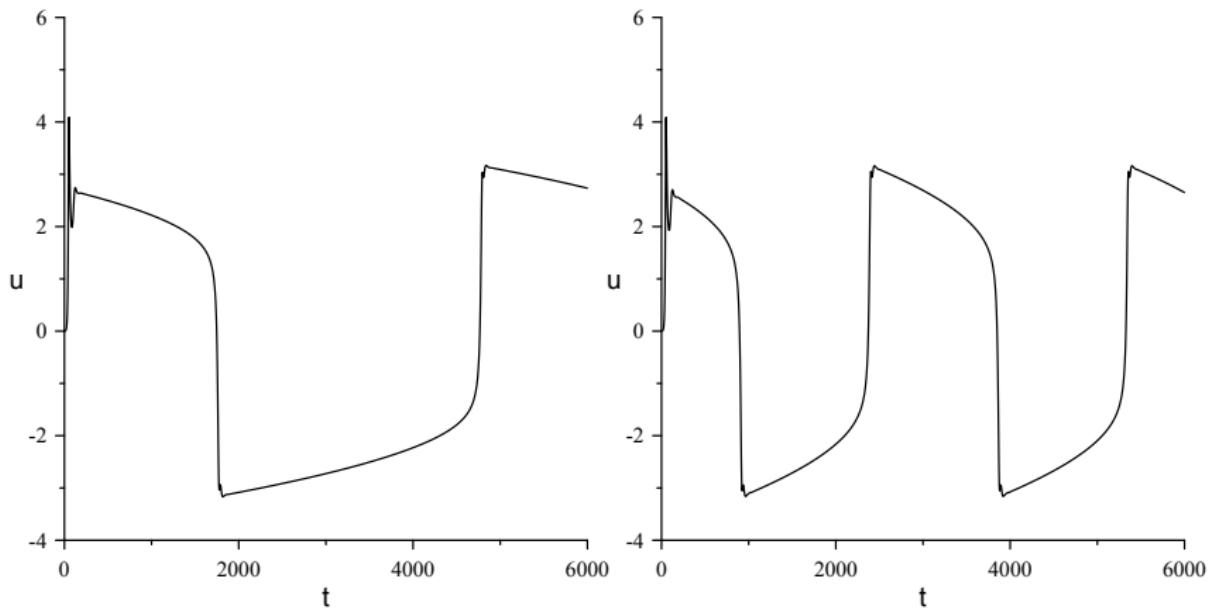


Рис. 7: Временная зависимость скорости ( $Bl = 0.02$ ,  $Ra = 33$ ) : левый график —  $\xi_0 = 10^{-5}$ , правый график —  $\xi_0 = 10^{-4}$

## Результаты численного счета

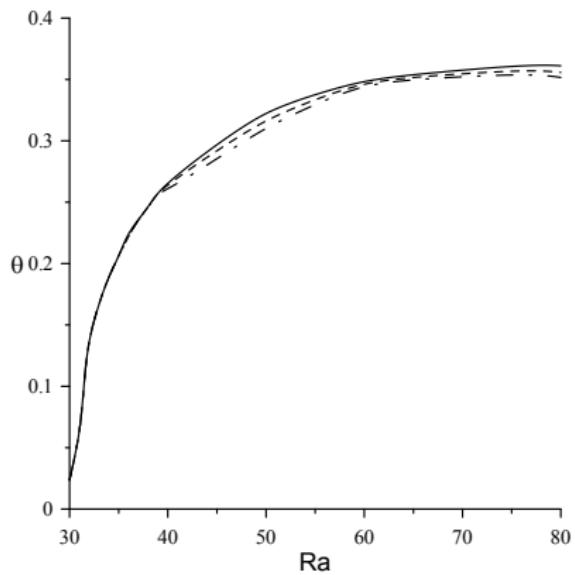


Рис. 8: Зависимость амплитуды  $\theta$  от числа Рэлея ( $B/I = 0.02$ ) с применением сплайн интерполяции: —  $\xi_0 = 10^{-4}$ , - -  $\xi_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ , - · -  $\xi_0 = 10^{-5}$

## Результаты численного счета

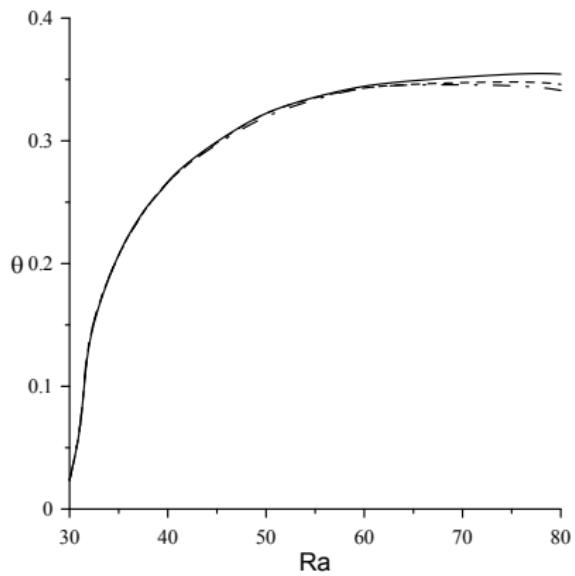


Рис. 9: Зависимость амплитуды  $\theta$  от числа Рэлея ( $Bl = 0.1$ ) с применением сплайн интерполяции: —  $\xi_0 = 10^{-4}$ , - -  $\xi_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ , - · -  $\xi_0 = 10^{-5}$

## Результаты численного счета

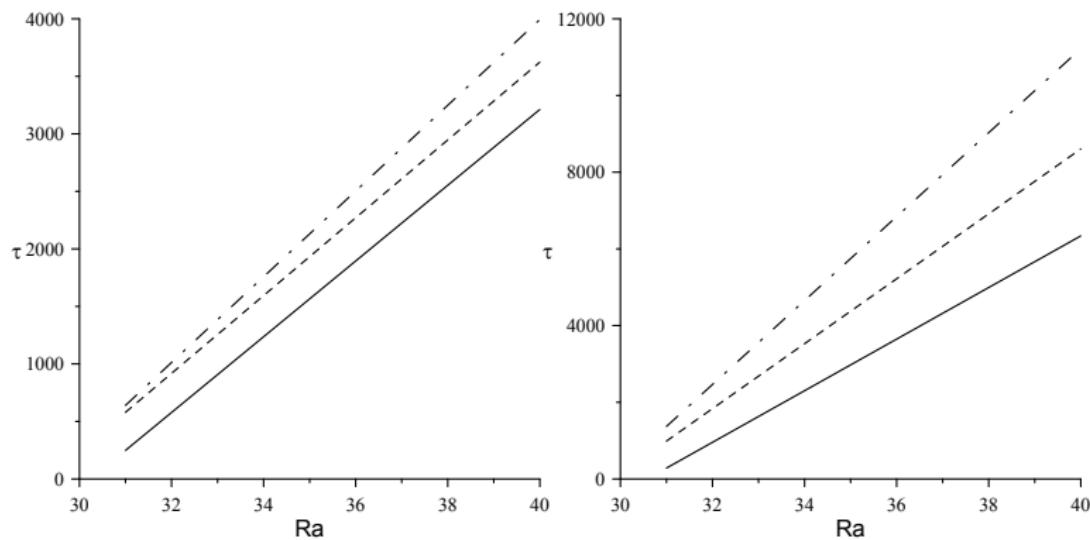


Рис. 10: Зависимость периода колебаний от числа Рэлея для различных значений чисел Шмидта ( $Pr = 7, \xi_0 = 10^{-4}$ ) (Выполнена линейная интерполяция): левый график —  $Bl = 0.1$ ; правый график —  $Bl = 0.02$ ; —  $Sc = 50$ , - -  $Sc = 100$ , — · —  $Sc = 300$

## Результаты численного счета

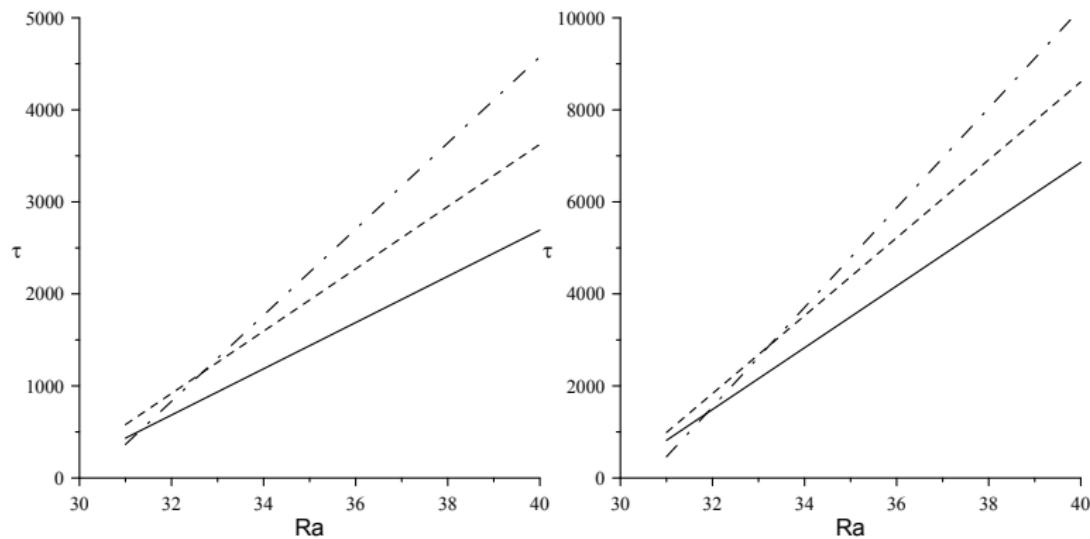
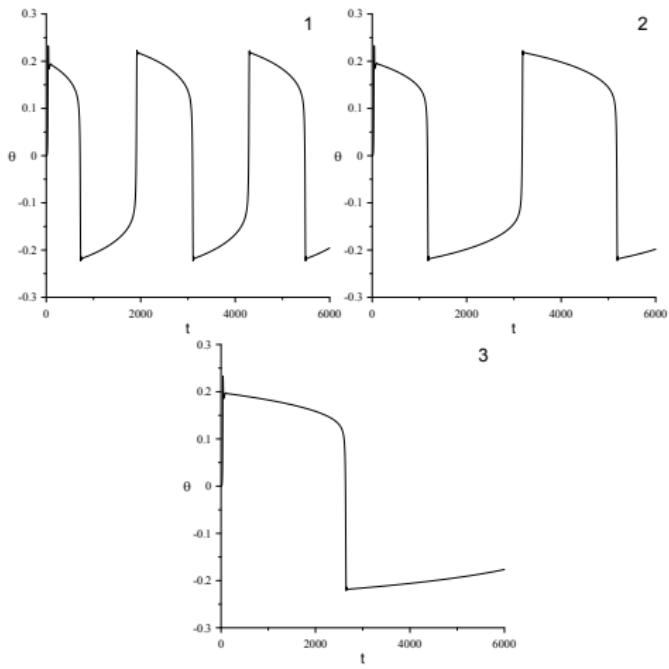


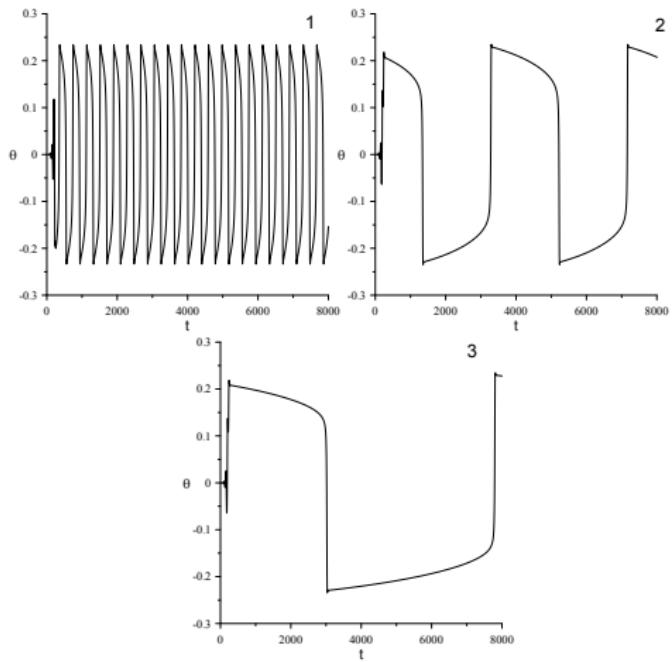
Рис. 11: Зависимость периода колебаний от числа Рэлея для различных значений чисел Прандтля ( $Sc = 100, \xi_0 = 10^{-4}$ ) (Выполнена линейная интерполяция): левый график —  $Bl = 0.1$ ; правый график —  $Bl = 0.02$ ; —  $Pr = 5$ , - -  $Pr = 7$ , - · -  $Pr = 9$

# Результаты численного счета



**Рис. 12:** Зависимость амплитуды  $\theta$  от времени, для положительной термодиффузии, при различных значениях числа  $\xi_0$  ( $Bl = 0.1$ ,  $Sc = 100$ ,  $Pr = 7$ ,  $Ra = 36$ ,  $\varepsilon = 0.04$ ), график 1 —  $\xi_0 = 10^{-4}$ , 2 —  $\xi_0 = 5 \cdot 10^{-5}$ , 3 —  $\xi_0 = 10^{-5}$

# Результаты численного счета



**Рис. 13:** Зависимость амплитуды  $\theta$  от времени, для отрицательной термодиффузии, при различных значениях числа  $\xi_0$  ( $Bl = 0.1$ ,  $Sc = 100$ ,  $Pr = 7$ ,  $Ra = 36$ ,  $\varepsilon = -0.04$ ), график 1 —  $\xi_0 = 10^{-3}$ , 2 —  $\xi_0 = 10^{-4}$ , 3 —  $\xi_0 = 5 \cdot 10^{-5}$

Решена задача о тепловой конвекции смеси, представляющей собой коллоидный раствор на основе бинарной молекулярной жидкости в связанных каналах при подогреве снизу. Получено аналитическое решение стационарной задачи в приближении прямолинейных траекторий. Численно методом конечных разностей проведено моделирование нестационарных режимов. В надкритической области наблюдались перебросовые колебания. Исследовано влияние изменения различных параметров на характер течения. Объяснен механизм влияния седиментации на перебросовые колебания.

Результаты расчетов показывают, что при увеличении неоднородности распределения концентрации твердых частиц по вертикали, увеличивается период и амплитуда перебросовых колебаний. Показано, что при усилении вязкого механизма переноса вещества по отношению к диффузионному и теплопроводному увеличивается период перебросовых колебаний. Обнаружено возникновение перебросовых колебаний при отрицательной термодиффузии.

Спасибо за внимание!

# Приложение 1

$$d = \frac{buPr + q}{2}, \gamma = \frac{buPr - q}{2}, \delta = \frac{suSc + l}{2}, \epsilon = \frac{suSc - l}{2},$$

$$\alpha = \frac{214uSc_\phi - \sqrt{(214uSc_\phi)^2 + (45\pi)^2}}{50\pi^2},$$

$$\beta = \frac{214uSc_\phi + \sqrt{(214uSc_\phi)^2 + (45\pi)^2}}{50\pi^2},$$

$$R = \frac{27\xi_0 Sc_\phi Bl}{40\pi^2} u.$$

Здесь  $q = \sqrt{(buPr)^2 + a}$ ;  $a = \pi^2/2$ ;  $l = \sqrt{(suSc)^2 + g}$ ;  $g = 9\pi^2/10$ ;  $b = 32/(9\pi^2)$ ;  $s = 0.434/\pi^2$ .

# Приложение 1

$$\xi = \frac{0.81\varepsilon\gamma Scu(\pi^2 - 8d^2)}{aqH(4d - 4sdScu - g)}, \quad \eta = -\frac{0.81\varepsilon d Scu(\pi^2 - 8\gamma^2)}{aqH(4\gamma^2 - 4s\gamma Scu - g)}$$

$$\chi = -\frac{0.45\epsilon Scu}{aH}$$

$$A = [\eta(\epsilon - \gamma) + \xi(\epsilon - d) + 2\chi\epsilon]/I$$

$$B = [\eta(\delta - \gamma) + \xi(\delta - d) + 2\chi\delta]/I$$

## Приложение 2

Для положительной терможиффузии произведен расчет критического числа Рэлея при учете седиментации и без нее:

Без учета седиментации  $Ra_c = 18.77$ .

С учетом седиментации ( $Sc_\phi = 1000$ )  $Ra_c = 18.98$ .

С учетом седиментации ( $Sc_\phi = 3000$ )  $Ra_c = 19.42$ .