

# Математический анализ

1 семестр

24 февраля 2025 г.

# Содержание

<b>1. Введение</b>	<b>3</b>
1.1. Элементы математической логики . . . . .	3
1.2. Наивная теория множеств . . . . .	3
1.3. Декартово произведение множеств. Бинарные отношения . . . . .	5
1.4. Вещественные числа . . . . .	6

## 1. Введение

### 1.1. Элементы математической логики

Используем распространенные символы математической логики  $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$  для обозначения соответственно отрицания «не» и связок «и», «или», «влечет», «равносильно».

Записи  $A \Rightarrow B$ , означающей, что  $A$  влечет  $B$  или, что то же самое,  $B$  следует из  $A$ , мы часто будем придавать другую словесную интерпретацию, говоря, что  $B$  есть *необходимый признак* или *необходимое условие*  $A$  и, в свою очередь,  $A$  – *достаточное условие* или *достаточный признак*  $B$ . Таким образом, соотношение  $A \Leftrightarrow B$  можно прочесть любым из следующих способов:

$A$  необходимо и достаточно для  $B$ ;

$A$  тогда и только тогда, когда  $B$ ;

$A$ , если и только если  $B$ ;

$A$  равносильно  $B$ .

Некоторые логические законы:

$$(A \Leftrightarrow B) \equiv ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$$

$$(A \Rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B) \equiv (B \vee \neg A) \equiv (\neg(\neg B) \vee \neg A) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

$$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$$

$$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$$

### 1.2. Наивная теория множеств

«Под *множеством* мы понимаем объединение в одно целое определенных, вполне различных объектов нашей интуиции или нашей мысли» – так описал понятие «множество» Георг Кантор, основатель теории множеств. Это описание нельзя назвать определением, поскольку оно апеллирует к понятиям, ранее не определенным.

Основные предпосылки канторовской («наивной») теории множеств:

1° множество может состоять из любых различных объектов;

2° множество однозначно определяется набором составляющих его объектов;

3° любое свойство определяет множество объектов, которые этим свойством обладают.

Если  $x$  – объект,  $P$  – свойство,  $P(x)$  – обозначение того, что  $x$  обладает свойством  $P$ , то через  $\{x \mid P(x)\}$  обозначают весь класс объектов, обладающих свойством  $P$ . Объекты, составляющие класс или множество, называют *элементами* класса или множества. Слова «класс», «семейство», «совокупность», «набор» в наивной теории множеств употребляют как синонимы термина «множество».

*Замечание* (Парадокс Рассела). Множество всех множеств – противоречивое понятие.

*Доказательство.* Пусть  $K = \{M \mid P(M)\}$ , где  $P(M)$  означает, что  $M$  не содержит себя в качестве своего элемента.

Тогда, если  $K$  – множество, то верно или  $P(K)$ , или  $\neg P(K)$ . Действительно,  $P(K)$  невозможно, так как из определения  $K$  тогда бы следовало, что  $K$  содержит  $K$ , то есть что верно  $\neg P(K)$ ; с другой стороны,  $\neg P(K)$  тоже невозможно, поскольку это означает, что  $K$  содержит  $K$ , а это противоречит определению  $K$  как класса тех множеств, которые сами себя не содержат. Следовательно,  $K$  – не множество. ■

То, что  $x$  принадлежит множеству  $X$ , то есть является его элементом, обозначают  $x \in X$  (или  $X \ni x$ ), а отрицание этого утверждения  $x \notin X$  (или  $X \not\ni x$ ).

Горорят, что множества *равны*, если они состоят из одних и тех же элементов, то есть  $A = B \Leftrightarrow \forall x((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B))$ . Отрицание равенства обозначают  $A \neq B$ .

Говорят, что  $A$  является *подмножеством* множества  $B$ , или что  $B$  включает  $A$ , или что  $B$  содержит  $A$ , если каждый элемент  $A$  является элементом множества  $B$ . Обозначают  $A \subset B$  или  $A \supset B$ .

$$(A \subset B) := \forall x((x \in A) \Rightarrow (x \in B)).$$

Если  $A \subset B$  и  $A \neq B$ , то будем говорить, что включение  $A \subset B$  *строгое* или что  $A$  – *собственное* подмножество  $B$ . Используя приведенные определения, можно заключить, что

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A).$$

*Пустым* называется множество, не содержащее элементов. Обозначается символом  $\emptyset$ . Пустое множество является подмножеством любого множества.

Основные операции над множествами:

$$\text{Пересечение множеств } (A \cap B) := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

$$\text{Объединение множеств } (A \cup B) := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

$$\text{Разность множеств } (A \setminus B) := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

$$\text{Симметрическая разность } (A \Delta B) := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

$$\text{Дизъюнктивное объединение } A \sqcup B = A \cup B \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$$

$$\text{Объединение } N \text{ множеств } \bigcup_{n=1}^N A_n := \{x \mid \exists n_0 : x \in A_{n_0}\}$$

$$\text{Пересечение } N \text{ множеств } \bigcap_{n=1}^N A_n := \{x \mid \forall n \in \{1, \dots, N\} : x \in A_n\}$$

Пусть  $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$  – семейство множеств, тогда

$$\text{Объединение семейства множеств } \bigcup_{\alpha \in I} X_\alpha := \{x \mid \exists \alpha \in I : x \in X_\alpha\}$$

$$\text{Пересечение семейства множеств } \bigcap_{\alpha \in I} X_\alpha := \{x \mid \forall \alpha \in I : x \in X_\alpha\}$$

**Теорема 1.1** (Законы де Моргана). Пусть  $X$  – множество,  $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$  – семейство множеств. Тогда

$$X \setminus \left( \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha \quad (1)$$

$$X \setminus \left( \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \bigcup_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha \quad (2)$$

*Доказательство.*

$$X \setminus \left( \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \{x \mid x \in X \wedge \forall \alpha \in I \ x \notin A_\alpha\} = \{x \mid \forall \alpha \in I \ x \in X \setminus A_\alpha\} = \bigcap_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$$

$$X \setminus \left( \bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha \right) = \{x \mid x \in X \wedge \exists \alpha \in I \ x \notin A_\alpha\} = \{x \mid \exists \alpha \in I \ x \in X \setminus A_\alpha\} = \bigcup_{\alpha \in I} X \setminus A_\alpha$$

■

### 1.3. Декартово произведение множеств. Бинарные отношения

**Определение 1.1.** Пусть  $X$  и  $Y$  – множества. Множество образованное всеми упорядоченными парами  $(x, y)$ , первый член которых есть элемент из  $X$ , а второй – элемент из  $Y$ , называется *прямым* или *декартовым произведением множеств  $X$  и  $Y$* .

$$X \times Y := \{(x, y) \mid x \in X \wedge y \in Y\}$$

Для семейства из  $n$  множеств:

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i\}$$

**Определение 1.2.** Бинарным отношением  $\mathcal{R}$  на множестве  $X$  называют любое подмножество  $X \times X$ .

$$\mathcal{R} \subset X \times X$$

То что  $(x, y) \in \mathcal{R}$  обозначают  $x\mathcal{R}y$ .

Свойства бинарных отношений:

1.  $\mathcal{R}$  – рефлексивное, если  $\forall x \in X \ x\mathcal{R}x$ ;
- 1'.  $\mathcal{R}$  – иррефлексивное, если  $\forall x \in X \ \neg(x\mathcal{R}x)$ ;
2.  $\mathcal{R}$  – симметричное, если  $\forall x, y \in X \ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$
- 2'.  $\mathcal{R}$  – антисимметричное, если  $\forall x, y \in X \ (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x = y$
3.  $\mathcal{R}$  – транзитивно, если  $\forall x, y, z \in X \ (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Rightarrow x\mathcal{R}z$

**Определение 1.3.** Бинарное отношение, которое рефлексивно, симметрично и транзитивно, называется *отношением эквивалентности*.

**Утверждение.** Если бинарное отношении иррефлексивно и транзитивно, то оно и антисимметрично.

*Доказательство.* О/п: Пусть  $\mathcal{R}$  – симметрично, то есть  $\forall x, y \in X \ x\mathcal{R}y \Rightarrow y\mathcal{R}x$ . Тогда по транзитивности  $(x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}x) \Rightarrow x\mathcal{R}x$ , что противоречит с иррефлексивностью.

Следовательно,  $\mathcal{R}$  – антисимметрично. ■

## 1.4. Вещественные числа

**Определение 1.4.** Множество  $\mathbb{R}$  называется множеством **вещественных чисел**, а его элементы – **вещественными числами**, если выполнен следующий набор условий, называемый *аксиоматикой вещественных чисел*:

I. Есть две бинарные операции такие, что  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  – **поле**, то есть выполнены **аксиомы поля**:

$$\text{I.1 } \forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x + (y + z) = (x + y) + z$$

$$\text{I.2 } \forall x, y \in \mathbb{R} \quad x + y = y + x$$

$$\text{I.3 } \exists 0 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \quad x + 0 = x$$

$$\text{I.4 } \forall x \in \mathbb{R} \exists (-x) \in \mathbb{R} : x + (-x) = 0$$

$$\text{I.5 } \forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

$$\text{I.6 } \forall x, y \in \mathbb{R} \quad x \cdot y = y \cdot x$$

$$\text{I.7 } \exists 1 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R} \quad x \cdot 1 = x$$

$$\text{I.8 } \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists (x^{-1}) \in \mathbb{R} : x \cdot x^{-1} = 1$$

$$\text{I.9 } \forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$$

II.  $\mathbb{R}$  – **линейно упорядоченное множество**, то есть между элементами  $\mathbb{R}$  определено бинарное отношение  $\leq$  со следующими свойствами:

$$\text{II.1 } \forall x, y \in \mathbb{R} \quad ((x \leq y) \vee (y \leq x)) \equiv 1$$

$$\text{II.2 } \forall x \in \mathbb{R} \quad x \leq x$$

$$\text{II.3 } \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow (x = y)$$

$$\text{II.4 } \forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad (x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$$

$$\text{II.5 } \forall x, y, z \in \mathbb{R} \quad x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$$

$$\text{II.6 } 0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$$

III. **Аксиома полноты (непрерывности)**

Если  $A$  и  $B$  – непустые подмножества  $\mathbb{R}$  и  $\forall a \in A, \forall b \in B$  верно, что  $a \leq b$ , тогда  $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b$ .

## Список литературы

- [1] **Виноградов О.Л., Громов А. Л.** Курс математического анализа: В 5 частях.
- [2] **Зорич В. А.** Математический анализ.
- [3] **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т.
- [4] [Математический анализ\(stepic\)](#)