Математический анализ

1 семестр

24 февраля 2025 г.

Содержание

1. Введение

1.1. Элементы математической логики

Используем распространенные символы математической логики $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ для обозначения соответственно отрицания «не» и связок «и», «или», «влечет», «равносильно».

Записи $A \Rightarrow B$, означающей, что A влечет B или, что то же самое, B следует из A, мы часто будем придавать другую словесную интерпретацию, говоря, что B есть *необходимый признак* или *необходимое условие* A и, в свою очередь, A – *достаточное условие* или *достаточный признак* B. Таким образом, соотношение $A \Leftrightarrow B$ можно прочитать любым из следующих способов:

A необходимо и достаточно для B;

A тогда и только тогда, когда B;

A, если и только если B;

A равносильно B.

Некоторые логические законы:

$(A \Leftrightarrow B) \equiv ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A))$

$(A \Rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B) \equiv (B \vee \neg A) \equiv (\neg(\neg B) \vee \neg A) \equiv (\neg B \Rightarrow \neg A)$

$\neg(A \vee B) \equiv (\neg A \wedge \neg B)$

$\neg(A \wedge B) \equiv (\neg A \vee \neg B)$

1.2. Наивная теория множеств

«Под *множеством* мы понимаем объединение в одно целое определенных, вполне различимых объектов нашей интуиции или нашей мысли» – так описал понятие «множество» Георг Кантор, основатель теории множеств. Это описание нельзя назвать определением, поскольку оно апеллирует к понятиям, ранее не определенным.

Основные предпосылки канторовской («наивной») теории множеств:

1° множество может состоять из любых различимых объектов;

2° множество однозначно определяется набором составляющих его объектов;

3° любое свойство определяет множество объектов, которые этим свойством обладают.

Если x – объект, P – свойство, $P(x)$ – обозначение того, что x обладает свойством P, то через $\{x \mid P(x)\}$ обозначают весь класс объектов, обладающих свойством P. Объекты, составляющие класс или множество, называют *элементами* класса или множества. Слова «класс», «семейство», «совокупность», «набор» в наивной теории множеств употребляют как синонимы термина «множество».

Замечание (Парадокс Рассела). Множество всех множеств – противоречивое понятие.

Доказательство. Пусть $K = \{M \mid P(M)\ \}$, где $P(M)$ означает, что M не содержит себя в качестве своего элемента.

Тогда, если K – множество, то верно или $P(K)$, или $\neg P(K)$. Действительно, $P(K)$ невозможно, так как из определения K тогда бы следовало, что K содержит K, то есть что верно $\neg P(K)$; с другой стороны, $\neg P(K)$ тоже невозможно, поскольку это означает, что K содержит K, а это противоречит определению K как класса тех множеств, которые сами себя не содержат. Следовательно, K – не множество. ■

То, что x пренадлежит множеству X, то есть является его элементом, обозначают $x \in X$ (или $X \ni x$), а отрицание этого утверждения $x \notin X$ (или $X \not\ni x$).

Горорят, что множества *равны*, если они состоят из одних и тех же элементов, то есть $A = B \ \Leftrightarrow \forall x((x \in A) \Leftrightarrow (x \in B))$. Отрицание равенства обозначают $A \neq B$.

Говорят, что A является *подмножеством* множества B, или что B включает A, или что B содержит A, если каждый элемент A является элеметнтом множества B. Обозначают $A \subset B$ или $A \supset B$.

$$(A \subset B) := \forall x((x \in A) \Rightarrow (x \in B)).$$

Если $A \subset B$ и $A \neq B$, то будем говорить, что включение $A \subset B$ *строгое* или что A – *собственное* подмножество B. Используя приведенные определения, можно заключить, что

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subset B) \wedge (B \subset A).$$

Пустым называется множество, несодержащее элементов. Обозначается символом $\varnothing$. Пустое множество является подмножеством любого множества.

Основные операции над множествами:

Пересечение множеств $(A \cap B) := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

Объединение множеств $(A \cup B) := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$

Разность множнеств $(A \backslash B) := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$

Симметрическая разность $(A \triangle B) := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$

Дизъюнктное объединение $A \sqcup B = A \cup B \ \Leftrightarrow \ A \cap B = \varnothing$

Объединение N множеств $\bigcup\limits_{n=1}^{N} A_n := \{x \mid \exists n_0 : x \in A_{n_0}\}$

Пересечение N множеств $\bigcap\limits_{n=1}^{N} A_n := \{x \mid \forall n \in \{1, ..., N\} : x \in A_n\}$

Пусть $\{X_\alpha\}_{\alpha \in I}$ – семейство множеств, тогда

Объединение семейства множеств $\bigcup\limits_{\alpha \in I} X_\alpha := \{x \mid \exists \alpha \in I : x \in X_\alpha\}$

Пересечение семейства множеств $\bigcap\limits_{\alpha \in I} X_\alpha := \{x \mid \forall \alpha \in I : x \in X_\alpha\}$

Теорема 1.1 (Законы де Моргана)**.** *Пусть X – множество, $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ – семейство множеств. Тогда*

$$X\backslash\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcap_{\alpha\in I} X\backslash A_\alpha \tag{1}$$

$$X\backslash\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \bigcup_{\alpha\in I} X\backslash A_\alpha \tag{2}$$

Доказательство.

$$X\backslash\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \{x \mid x\in X \wedge \forall\alpha\in I\ x\notin A_\alpha\} = \{x \mid \forall\alpha\in I\ x\in X\backslash A_\alpha\} = \bigcap_{\alpha\in I} X\backslash A_\alpha$$

$$X\backslash\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right) = \{x \mid x\in X \wedge \exists\alpha\in I\ x\notin A_\alpha\} = \{x \mid \exists\alpha\in I\ x\in X\backslash A_\alpha\} = \bigcup_{\alpha\in I} X\backslash A_\alpha$$

■

1.3. Декартово произведение множеств. Бинарные отношения

Определение 1.1. Пусть X и Y – множества. Множество образованное всеми упорядоченными парами (x,y), первый член которых есть элемент из X, а второй – элемент из Y, называется *прямым* или *декартовым произведением множеств* X и Y.

$$X\times Y := \{(x,y) \mid x\in X \wedge y\in Y\}$$

Для семейства из n множеств:

$$A_1\times A_2\times ...\times A_n = \{(a_1,a_2,...,a_n) \mid a_i\in A_i\}$$

Определение 1.2. *Бинарным отношением* $\mathcal{R}$ на множестве X называют любое подмножество $X\times X$.

$$\mathcal{R}\subset X\times X$$

То что $(x,y)\in\mathcal{R}$ обозначают $x\mathcal{R}y$.

Свойства бинарных отношений:

1. $\mathcal{R}$ – рефлексивное, если $\forall x\in X\ x\mathcal{R}x$;

1'. $\mathcal{R}$ – иррефлексивное, если $\forall x\in X\ \neg(x\mathcal{R}x)$;

2. $\mathcal{R}$ – симметричное, если $\forall x,y\in X\ x\mathcal{R}y\Rightarrow y\mathcal{R}x$

2'. $\mathcal{R}$ – антисимметричное, если $\forall x,y\in X\ (x\mathcal{R}y\wedge y\mathcal{R}x)\Rightarrow x=y$

3. $\mathcal{R}$ – транзитивно, если $\forall x,y,z\in X(x\mathcal{R}y\wedge y\mathcal{R}z)\Rightarrow x\mathcal{R}z$

Определение 1.3. Бинарное отношение, которое рефлексивно, симметрично и транзитивно, называется *отношением эквивалентности.*

Утверждение. Если бинарное отношени иррефлексивно и транзитивно, то оно и антисимметрично.

Доказательство. О/п: Пусть $\mathcal{R}$ – симметрично, то есть $\forall x,y\in X\ x\mathcal{R}y\Rightarrow y\mathcal{R}x$. Тогда по транзитивности $(x\mathcal{R}y\wedge y\mathcal{R}x)\Rightarrow x\mathcal{R}x$, что противоречит с иррефлексивностью.

Следовательно, $\mathcal{R}$ – антисимметрично. ■

1.4. Вещественные числа

Определение 1.4. Множество $\mathbb{R}$ называется множеством **вещественных чисел**, а его элементы – **вещественными числами**, если выполнен следующий набор условий, называемый *аксиоматикой вещественных чисел*:

I. Есть две бинарные операции такие, что $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ – **поле**, то есть выполнены **аксиомы поля**:

I.1 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ \ x + (y + z) = (x + y) + z$

I.2 $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \ x + y = y + x$

I.3 $\exists 0 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}\ \ x + 0 = x$

I.4 $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists(-x) \in \mathbb{R}\ :\ x + (-x) = 0$

I.5 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ \ x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

I.6 $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \ x \cdot y = y \cdot x$

I.7 $\exists 1 \in \mathbb{R} : \forall x \in \mathbb{R}\ \ x \cdot 1 = x$

I.8 $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}\ \exists(x^{-1}) \in \mathbb{R}\ :\ x \cdot x^{-1} = 1$

I.9 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ \ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

II. $\mathbb{R}$ – **линейно упорядоченное множество**, то есть между элементами $\mathbb{R}$ определено бинарное отношение $\leq$ со следующими свойствами:

II.1 $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \ ((x \leq y) \vee (y \leq x)) \equiv 1$

II.2 $\forall x \in \mathbb{R}\ \ x \leq x$

II.3 $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \ (x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow (x = y)$

II.4 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ \ (x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)$

II.5 $\forall x, y, z \in \mathbb{R}\ \ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z$

II.6 $0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq x \cdot y$

III. **Аксиома полноты (непрерывности)**
Если A и B – непустые подмножества $\mathbb{R}$ и $\forall a \in A, \forall b \in B$ верно, что $a \leq b$, тогда $\exists c \in \mathbb{R}\ :\ a \leq c \leq b$.

Список литературы

[1] **Виноградов О.Л., Громов А. Л.** Курс математического анализа: В 5 частях.

[2] **Зорич В. А.** Математический анализ.

[3] **Фихтенгольц Г. М.** Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т.

[4] Математический анализ(stepic)