



Tautologia
Equivalência
Contradição
Contingência
Implicação
Argumento

Matemática Discreta 1

Introdução à Lógica

Matemática 3

AULA 03

Professor: Luiz Augusto Laranjeira

luiz.laranjeira@gmail.com



Tautologia

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

- É toda proposição composta cujo valor lógico é sempre V.
- Exemplos: $p + \sim p = V$
 $\sim (p \cdot \sim p) = V$
- Somente simplificar um expressão não é tautologia.

Deve-se chegar ao valor lógico V para todas as combinações de valores lógicos das proposições simples que compõe a proposição composta.



Exemplo 1

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

- $p + \sim p$

- $V + F = V ; F + V = V$

Logo, $p + \sim p$ é tautologia!!!



Exemplo 2

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

- $\sim(p \cdot \sim p)$
- $V \cdot F = F ; F \cdot V = F$
- $\sim(p \cdot \sim p) = \sim F$
- V

Logo, $\sim(p \cdot \sim p)$ é tautologia!!!

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

Equivalência Lógica

- $P(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow Q(p,q,r,\dots)$
- Uma proposição P é equivalente a uma outra proposição Q se as suas tabelas verdade são idênticas.
- Propriedade Reflexiva
$$P(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow P(p,q,r,\dots)$$

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

Equivalência Lógica (cont.)

- Propriedade Simétrica:

Se $P(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow Q(p,q,r,\dots)$

então $Q(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow P(p,q,r,\dots)$

- Propriedade Transitiva:

Se $P(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow Q(p,q,r,\dots)$

e $Q(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow R(p,q,r,\dots)$

então $P(p,q,r,\dots) \Leftrightarrow R(p,q,r,\dots)$



Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

Nota 1

Os símbolos \leftrightarrow e \Leftrightarrow são distintos:

- 1) O símbolo \leftrightarrow é de **operação lógica**
- 2) O símbolo \Leftrightarrow é de **relação**, pois estabelece que duas proposições

$P(p,q,r,...)$ e $Q(p,q,r,...)$

têm tabelas verdade idênticas.

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

Teorema 1

A proposição $P(p,q,r,...)$ é equivalente à proposição $Q(p,q,r,...)$, isto é

$$P(p,q,r,...) \Leftrightarrow Q(p,q,r,...)$$

Se e somente se a bicondicional

$$P(p,q,r,...) \leftrightarrow Q(p,q,r,...)$$

é tautológica.

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

Teorema 1 - Demo (a)

Se $P(p,q,r,\dots)$ é equivalente a $Q(p,q,r,\dots)$, então, suas tabelas verdade são idênticas, e por consequente o valor lógico da bicondicional é sempre V, isto é, a bicondicional é tautológica.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
F	F	V

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

Teorema 1 - Demo (b)

Se a bicondicional é tautológica, isto é, se a última coluna de sua tabela verdade encerra somente o valor V, então os valores lógicos respectivos das proposições $P(p,q,r,\dots)$ e $Q(p,q,r,\dots)$ são ambos V ou ambos F, isto é, as duas proposições são equivalentes.

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

Equivalências Tautológicas

- Propriedades comutativas

$$A+B \Leftrightarrow B+A$$

$$A \cdot B \Leftrightarrow B \cdot A$$

- Propriedades associativas

$$(A+B) + C \Leftrightarrow A + (B+C)$$

$$(A \cdot B) \cdot C \Leftrightarrow A \cdot (B \cdot C)$$

- Propriedades distributivas

$$A + (B \cdot C) \Leftrightarrow (A+B) \cdot (A+C)$$

$$A \cdot (B + C) \Leftrightarrow (A \cdot B) + (A \cdot C)$$

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

Equivalências Tautológicas

○ Propriedades de identidade

$$A + \textcolor{red}{F} \Leftrightarrow A$$

$$A \cdot \textcolor{red}{V} \Leftrightarrow A$$

○ Propriedades complementativas

$$A + \sim A \Leftrightarrow \textcolor{red}{V}$$

$$A \cdot \sim A \Leftrightarrow \textcolor{red}{F}$$

○ Leis de Morgan

$$\sim(A + B) \Leftrightarrow \sim A \cdot \sim B$$

$$\sim(A \cdot B) \Leftrightarrow \sim A + \sim B$$

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

Equivalências Tautológicas

- Propriedades idempotentes

$$A + A \Leftrightarrow A$$

$$A \cdot A \Leftrightarrow A$$

- Dupla negativa

$$\sim(\sim A) \Leftrightarrow A$$

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

Equivalências Tautológicas

- Reescrevendo a condicional

$$A \rightarrow B \iff \sim A + B$$

$$\sim B \rightarrow \sim A \iff \sim(\sim B) + \sim A$$

$$\sim B \rightarrow \sim A \iff \sim A + B$$

$$A \rightarrow B \iff \sim B \rightarrow \sim A$$

(Contraposição)



Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

○ Prova condicional

$$A \rightarrow (B \rightarrow C) \Leftrightarrow (A \cdot B) \rightarrow C$$

A	B	C	$B \rightarrow C$	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	$A \cdot B$	$(A \cdot B) \rightarrow C$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	V	V	F	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	F	V
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	F	V

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

Equivalências Tautológicas

- Equivalência de simplificação

$$A + \sim A \cdot B \Leftrightarrow A + B$$

A	B	$\sim A$	$\sim A \cdot B$	$A + \sim A \cdot B$	$A + B$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F



Exercício 1

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

$p + (q \cdot \sim q) \leftrightarrow p$ é tautologia?



Exercício 1

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

$$1) \quad p + (q \cdot \sim q) \leftrightarrow p$$

$$2) \quad (q \cdot \sim q) \equiv F$$

$$3) \quad p + F \leftrightarrow p$$

$$4) \quad p + F \equiv p$$

$$5) \quad p \leftrightarrow p$$

$$6) \quad V$$

$$\text{Obs.:} \quad F \leftrightarrow F = V$$

$$V \leftrightarrow V = V$$

Logo, a proposição é tautologia!!!



Exercício 2

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

$(p \cdot r) \rightarrow (\sim q + r)$ é tautologia?



Exercício 2

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

1) $(p \cdot r) \rightarrow (\sim q + r)$

2) $\sim(p \cdot r) + (\sim q + r)$



Exercício 2

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

1) $(p \cdot r) \rightarrow (\sim q + r)$

2) $\sim(p \cdot r) + (\sim q + r)$

3) $\sim p + \sim r + \sim q + r$



Exercício 2

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

1) $(p \cdot r) \rightarrow (\sim q + r)$

2) $\sim(p \cdot r) + (\sim q + r)$

3) $\sim p + \sim r + \sim q + r$

4) $\sim p + \sim q + \sim r + r$

Exercício 2

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

$$1) (p \cdot r) \rightarrow (\sim q + r)$$

$$2) \sim(p \cdot r) + (\sim q + r)$$

$$3) \sim p + \sim r + \sim q + r$$

$$4) \sim p + \sim q + \sim r + r$$

$$5) \sim p + \sim q + V$$

Exercício 2

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

$$1) (p \cdot r) \rightarrow (\sim q + r)$$

$$2) \sim(p \cdot r) + (\sim q + r)$$

$$3) \sim p + \sim r + \sim q + r$$

$$4) \sim p + \sim q + \sim r + r$$

$$5) \sim p + \sim q + V$$

$$6) V$$

Logo, a proposição é tautologia!!!



Exercício 3

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

$$((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$$

É tautologia?



Exercício 3

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

1) $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$

2) $((\sim p + q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (\sim q + r))$



Exercício 3

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

- 1) $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
- 2) $((\sim p + q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (\sim q + r))$
- 3) $(\sim(\sim p + q) + r) \rightarrow (\sim p + \sim q + r)$



Exercício 3

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

- 1) $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
- 2) $((\sim p + q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (\sim q + r))$
- 3) $(\sim(\sim p + q) + r) \rightarrow (\sim p + \sim q + r)$
- 4) $((p \cdot \sim q) + r) \rightarrow (\sim p + \sim q + r)$

Exercício 3

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

- 1) $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
- 2) $((\sim p + q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (\sim q + r))$
- 3) $(\sim(\sim p + q) + r) \rightarrow (\sim p + \sim q + r)$
- 4) $((p \cdot \sim q) + r) \rightarrow (\sim p + \sim q + r)$
- 5) $\sim((p \cdot \sim q) + r) + (\sim p + \sim q + r)$

Exercício 3

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

- 1) $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
- 2) $((\sim p + q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (\sim q + r))$
- 3) $(\sim(\sim p + q) + r) \rightarrow (\sim p + \sim q + r)$
- 4) $((p \cdot \sim q) + r) \rightarrow (\sim p + \sim q + r)$
- 5) $\sim((p \cdot \sim q) + r) + (\sim p + \sim q + r)$
- 6) $\sim(p \cdot \sim q) \cdot \sim r + \sim p + \sim q + r$

Exercício 3

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

- 1) $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
- 2) $((\sim p + q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (\sim q + r))$
- 3) $(\sim(\sim p + q) + r) \rightarrow (\sim p + \sim q + r)$
- 4) $((p \cdot \sim q) + r) \rightarrow (\sim p + \sim q + r)$
- 5) $\sim((p \cdot \sim q) + r) + (\sim p + \sim q + r)$
- 6) $\sim(p \cdot \sim q) \cdot \sim r + \sim p + \sim q + r$
- 7) $(\sim p + q) \cdot \sim r + \sim p + \sim q + r$

Exercício 3

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

- 1) $((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$
- 2) $((\sim p + q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (\sim q + r))$
- 3) $(\sim(\sim p + q) + r) \rightarrow (\sim p + \sim q + r)$
- 4) $((p \cdot \sim q) + r) \rightarrow (\sim p + \sim q + r)$
- 5) $\sim((p \cdot \sim q) + r) + (\sim p + \sim q + r)$
- 6) $\sim(p \cdot \sim q) \cdot \sim r + \sim p + \sim q + r$
- 7) $(\sim p + q) \cdot \sim r + \sim p + \sim q + r$
- 8) $(\sim p + q) \cdot \sim r + r + \sim p + \sim q$

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

Exercício 3 (cont.)

$$9) \quad (\sim p + q) \cdot \sim r + r + \sim p + \sim q$$

aplicando a Equivalência de Simplificação

$$10) \quad (\sim p + q) + r + \sim p + \sim q$$

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

Exercício 3 (cont.)

$$9) \quad (\sim p + q) \cdot \sim r + r + \sim p + \sim q$$

aplicando a Equivalência de Simplificação

$$10) \quad (\sim p + q) + r + \sim p + \sim q$$

$$11) \quad \sim p + \sim p + q + \sim q + r$$

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

Exercício 3 (cont.)

$$9) \quad (\sim p + q) \cdot \sim r + r + \sim p + \sim q$$

aplicando a Equivalência de Simplificação

$$10) \quad (\sim p + q) + r + \sim p + \sim q$$

$$11) \quad \sim p + \sim p + q + \sim q + r$$

$$12) \quad \sim p + V + r$$

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

Exercício 3 (cont.)

$$9) \quad (\sim p + q) \cdot \sim r + r + \sim p + \sim q$$

aplicando a Equivalência de Simplificação

$$10) \quad (\sim p + q) + r + \sim p + \sim q$$

$$11) \quad \sim p + \sim p + q + \sim q + r$$

$$12) \quad \sim p + V + r$$

$$13) \quad \sim p + r + V$$

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

Exercício 3 (cont.)

$$9) \quad (\sim p + q) \cdot \sim r + r + \sim p + \sim q$$

aplicando a Equivalência de Simplificação

$$10) \quad (\sim p + q) + r + \sim p + \sim q$$

$$11) \quad \sim p + \sim p + q + \sim q + r$$

$$12) \quad \sim p + V + r$$

$$13) \quad \sim p + r + V$$

$$14) \quad V$$

Logo a proposição é tautologia!!!

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

Exercício 3 (cont.)

$$9) (\sim p + q) \cdot \underbrace{\sim r + r}_V + \sim p + \sim q$$

$$10) (\sim p + q) \cdot V + \sim p + \sim q$$

$$11) \sim p + q + \sim p + \sim q$$

$$12) \sim p + \sim p + \sim q + q$$

$$13) \sim p + V$$

$$14) V$$

Logo a proposição é tautologia!!!



Contradição

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

- É toda proposição composta cujo valor lógico é sempre F.
- Contradição = \sim Tautologia
- $V(c) = \sim V(t)$



Exemplo 3

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

- $p \cdot \sim p$

- $F \cdot V = F ; V \cdot F = F$

Logo, $p \cdot \sim p$ é contradição!!!

\sim Contradição = Tautologia

$$\sim(p \cdot \sim p) = \sim p + p = V$$



Exemplo 4

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

- $p \leftrightarrow \sim p$ é contradição?
- $V \leftrightarrow F = F$; $F \leftrightarrow V = F$

Logo, $p \leftrightarrow \sim p$ é contradição!!!



Exercício 4

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

$$\sim(p \leftrightarrow \sim p)$$

É contradição ou tautologia?



Exercício 4

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

- $\sim(p \leftrightarrow \sim p)$
- $\sim((p \rightarrow \sim p) \cdot (\sim p \rightarrow p))$

Exercício 4

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

- $\sim(p \leftrightarrow \sim p)$
- $\sim((p \rightarrow \sim p) \cdot (\sim p \rightarrow p))$
- $\sim((\sim p + \sim p) \cdot (p + p))$

Exercício 4

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

- $\sim(p \leftrightarrow \sim p)$
- $\sim((p \rightarrow \sim p) \cdot (\sim p \rightarrow p))$
- $\sim((\sim p + \sim p) \cdot (p + p))$
- $\sim(\sim p \cdot p)$

Exercício 4

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

- $\sim(p \leftrightarrow \sim p)$
- $\sim((p \rightarrow \sim p) \cdot (\sim p \rightarrow p))$
- $\sim((\sim p + \sim p) \cdot (p + p))$
- $\sim(\sim p \cdot p)$
- $\sim F$

Exercício 4

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

- $\sim(p \leftrightarrow \sim p)$
- $\sim((p \rightarrow \sim p) \cdot (\sim p \rightarrow p))$
- $\sim((\sim p + \sim p) \cdot (p + p))$
- $\sim(\sim p \cdot p)$
- $\sim F$
- V

Logo, $\sim(p \leftrightarrow \sim p)$ é tautologia!!!



Exercício 5

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

$(p \cdot q) \cdot \sim(p + q)$ é contradição?



Exercício 5

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

- $(p \cdot q) \cdot \sim(p + q)$ é contradição?
- $p \cdot q \cdot \sim p \cdot \sim q$



Exercício 5

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

- $(p \cdot q) \cdot \sim(p + q)$ é contradição?
- $p \cdot q \cdot \sim p \cdot \sim q$
- $(p \cdot \sim p) \cdot (q \cdot \sim q)$



Exercício 5

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

- $(p \cdot q) \cdot \sim(p + q)$ é contradição?
- $p \cdot q \cdot \sim p \cdot \sim q$
- $(p \cdot \sim p) \cdot (q \cdot \sim q)$
- $p \cdot \sim p = F$ e $q \cdot \sim q = F$



Exercício 5

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

- $(p \cdot q) \cdot \sim(p + q)$ é contradição?
- $p \cdot q \cdot \sim p \cdot \sim q$
- $(p \cdot \sim p) \cdot (q \cdot \sim q)$
- $p \cdot \sim p = F$ e $q \cdot \sim q = F$
- $F \cdot F$



Exercício 5

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

- $(p \cdot q) \cdot \sim(p + q)$ é contradição?
- $p \cdot q \cdot \sim p \cdot \sim q$
- $(p \cdot \sim p) \cdot (q \cdot \sim q)$
- $p \cdot \sim p = F$ e $q \cdot \sim q = F$
- $F \cdot F$
- F

Logo, a proposição é contradição!!!



Contingência

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

- Quando a proposição composta não possui valor lógico fixo ela é uma contingência, ou seja, quando a proposição não é nem tautologia nem contradição.



Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

Implicação Lógica

- $P(p,q,r,\dots) \Rightarrow Q(p,q,r,\dots)$
- Na tabela verdade de P e Q não pode haver uma linha em que P tenha valor V e Q tenha valor F.
- Propriedade Reflexiva
$$P(p,q,r,\dots) \Rightarrow P(p,q,r,\dots)$$



Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

Implicação Lógica (cont.)

- Propriedade Transitiva:

Se $P(p,q,r,\dots) \Rightarrow Q(p,q,r,\dots)$

e $Q(p,q,r,\dots) \Rightarrow R(p,q,r,\dots)$

então $P(p,q,r,\dots) \Rightarrow R(p,q,r,\dots)$

- Toda proposição implica uma tautologia, isto é $P(p,q,r,\dots) \Rightarrow V$
- Somente uma contradição implica uma contradição, isto é $F \Rightarrow F$



Tautologia
Equivalência
Contradição
Contingência
Implicação
Argumento

Nota 2

Os símbolos \rightarrow e \Rightarrow são distintos:

- 1) O símbolo \rightarrow é de **operação lógica**
- 2) O símbolo \Rightarrow é de **relação**, pois estabelece que a condicional

$$P(p,q,r,\dots) \rightarrow Q(p,q,r,\dots)$$

é tautológica.

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

Teorema 2

A proposição $P(p,q,r,\dots)$ implica a proposição $Q(p,q,r,\dots)$, isto é

$$P(p,q,r,\dots) \Rightarrow Q(p,q,r,\dots)$$

Se e somente se a condicional

$$P(p,q,r,\dots) \rightarrow Q(p,q,r,\dots)$$

é tautológica.



- Tautologia
- Equivalência
- Contradição
- Contingência
- Implicação**
- Argumento

Teorema 2 - Demo (a)

Se $P(p,q,r,\dots)$ implica $Q(p,q,r,\dots)$, então, não ocorre que os valores lógicos destas duas proposições sejam respectivamente V e F, e por conseguinte a última coluna da tabela verdade da condicional encerra somente o valor V, isto é, a condicional é tautológica.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
F	V	V
F	F	V



Tautologia
Equivalência
Contradição
Contingência
Implicação
Argumento

Teorema 2 – Demo (b)

Se a condicional é tautológica, isto é, se a última coluna de sua tabela verdade encerra somente o valor V, então, não ocorre que os valores lógicos simultâneos das proposições $P(p,q,r,\dots)$ e $Q(p,q,r,\dots)$ sejam respectivamente V e F, e, por consequente, a primeira proposição implica a segunda.



Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

Definição:

Regras de Inferência são implicações lógicas utilizadas para executar os passos de uma dedução ou demonstração.



Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

p	q	$p \cdot q$	$p + q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	F	V

Regras de Inferência

Adição: $p \Rightarrow p + q$ e $q \Rightarrow p + q$

Simplificação: $p \cdot q \Rightarrow p$ e $p \cdot q \Rightarrow q$



Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

p	q	$p \cdot q$	$p + q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	F	F	V

Regras de Inferência

$$p \cdot q \Rightarrow p + q$$

$$p \cdot q \Rightarrow p \leftrightarrow q$$

Tautologia
Equivalência
Contradição
Contingência
Implicação
Argumento

Exemplo 6

p	q	$p + q$	$\sim p$	$(p + q) \cdot \sim p$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

Regra do Silogismo Disjuntivo (1)

$$(p + q) \cdot \sim p \Rightarrow q$$

Tautologia
Equivalência
Contradição
Contingência
Implicação
Argumento

Exemplo 6 (cont.)

p	q	$p + q$	$\sim p$	$(p + q) \cdot \sim p$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

Regra de Simplificação (aplicação)

$$(p + q) \cdot \sim p \Rightarrow (p + q) \quad e$$

$$(p + q) \cdot \sim p \Rightarrow \sim p$$

Tautologia
Equivalência
Contradição
Contingência
Implicação
Argumento

Exemplo 7

p	q	$p + q$	$\sim q$	$(p + q) \cdot \sim q$
V	V	V	F	F
V	F	V	V	V
F	V	V	F	F
F	F	F	V	F

Regra do Silogismo Disjuntivo (2)

$$(p + q) \cdot \sim q \Rightarrow p$$

Tautologia
Equivalência
Contradição
Contingência
Implicação
Argumento

Exemplo 8

p	q	$p \rightarrow q$	$(p \rightarrow q) \cdot p$
V	V	V	F
V	F	V	F
F	V	V	V
F	F	F	F

Regra Modus Ponens (Modo que afirma)

$$(p \rightarrow q) \cdot p \Rightarrow q$$

Exemplo 9

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$(p \rightarrow q) \cdot \sim q$	$\sim p$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

Regra Modus Tollens (Modo que nega)

$$(p \rightarrow q) \cdot \sim q \Rightarrow \sim p$$

Tautologia
 Equivalência
 Contradição
 Contingência
Implicação
 Argumento

Exemplo 9 (cont.)

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$(p \rightarrow q) \cdot \sim q$	$\sim p$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

$$\sim p \Rightarrow (p \rightarrow q)$$



Tautologia
Equivalência
Contradição
Contingência
Implicação
Argumento

p	q	r	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow r$	$(p \rightarrow q) \cdot (q \rightarrow r)$	$p \rightarrow r$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Regra do Silogismo Hipotético

$$(p \rightarrow q) \cdot (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$$



Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

As condicionais $p \rightarrow (p \cdot q)$ e $p \rightarrow q$ tem tabelas verdade idênticas:

p	q	$p \cdot q$	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$p \rightarrow (p \cdot q)$
V	V	V	V	F	V
V	F	F	F	F	F
F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V

Por conseguinte elas são equivalentes:

$$p \rightarrow (p \cdot q) \Leftrightarrow p \rightarrow q$$

Daí: $p \rightarrow q \Rightarrow p \rightarrow (p \cdot q)$ e

$$p \rightarrow (p \cdot q) \Rightarrow p \rightarrow q$$

(Regra de Absorção)



Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

A bicondicional $p \leftrightarrow q$ e a conjunção $(p \rightarrow q) \cdot (q \rightarrow p)$ têm tabelas verdade idênticas

p	q	$p \leftrightarrow q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \cdot (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F
F	V	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V

Por conseguinte elas são equivalentes:

$$p \leftrightarrow q \iff (p \rightarrow q) \cdot (q \rightarrow p)$$

Daí: $p \leftrightarrow q \Rightarrow (p \rightarrow q)$ e $p \leftrightarrow q \Rightarrow (q \rightarrow p)$



Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

Exercício 6

Mostre que a bicondicional $p \leftrightarrow q$ e a disjunção $(p \cdot q) + (\sim p \cdot \sim q)$ são equivalentes.



Exercício 6

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

1) $(p \cdot q) + (\sim p \cdot \sim q)$



Exercício 6

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

1) $(p \cdot q) + (\sim p \cdot \sim q)$

2) $((p \cdot q) + \sim p) \cdot ((p \cdot q) + \sim q)$



Exercício 6

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

- 1) $(p \cdot q) + (\sim p \cdot \sim q)$
- 2) $((p \cdot q) + \sim p) \cdot ((p \cdot q) + \sim q)$
- 3) $((p + \sim p) \cdot (q + \sim p)) \cdot$
 $((p + \sim q) \cdot (q + \sim q))$



Exercício 6

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

- 1) $(p \cdot q) + (\sim p \cdot \sim q)$
- 2) $((p \cdot q) + \sim p) \cdot ((p \cdot q) + \sim q)$
- 3) $((p + \sim p) \cdot (q + \sim p)) \cdot$
 $((p + \sim q) \cdot (q + \sim q))$
- 4) $(V \cdot (q + \sim p)) \cdot ((p + \sim q) \cdot V)$



Exercício 6

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

- 1) $(p \cdot q) + (\sim p \cdot \sim q)$
- 2) $((p \cdot q) + \sim p) \cdot ((p \cdot q) + \sim q)$
- 3) $((p + \sim p) \cdot (q + \sim p)) \cdot$
 $((p + \sim q) \cdot (q + \sim q))$
- 4) $(V \cdot (q + \sim p)) \cdot ((p + \sim q) \cdot V)$
- 5) $(q + \sim p) \cdot (p + \sim q)$

Exercício 6

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

- 1) $(p \cdot q) + (\sim p \cdot \sim q)$
- 2) $((p \cdot q) + \sim p) \cdot ((p \cdot q) + \sim q)$
- 3) $((p + \sim p) \cdot (q + \sim p)) \cdot ((p + \sim q) \cdot (q + \sim q))$
- 4) $(V \cdot (q + \sim p)) \cdot ((p + \sim q) \cdot V)$
- 5) $(q + \sim p) \cdot (p + \sim q)$
- 6) $(\sim p + q) \cdot (\sim q + p)$

Exercício 6

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

- 1) $(p \cdot q) + (\sim p \cdot \sim q)$
- 2) $((p \cdot q) + \sim p) \cdot ((p \cdot q) + \sim q)$
- 3) $((p + \sim p) \cdot (q + \sim p)) \cdot ((p + \sim q) \cdot (q + \sim q))$
- 4) $(V \cdot (q + \sim p)) \cdot ((p + \sim q) \cdot V)$
- 5) $(q + \sim p) \cdot (p + \sim q)$
- 6) $(\sim p + q) \cdot (\sim q + p)$
- 7) $(p \rightarrow q) \cdot (q \rightarrow p)$

Exercício 6

Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

- 1) $(p \cdot q) + (\sim p \cdot \sim q)$
- 2) $((p \cdot q) + \sim p) \cdot ((p \cdot q) + \sim q)$
- 3) $((p + \sim p) \cdot (q + \sim p)) \cdot ((p + \sim q) \cdot (q + \sim q))$
- 4) $(V \cdot (q + \sim p)) \cdot ((p + \sim q) \cdot V)$
- 5) $(q + \sim p) \cdot (p + \sim q)$
- 6) $(\sim p + q) \cdot (\sim q + p)$
- 7) $(p \rightarrow q) \cdot (q \rightarrow p) \leq \Rightarrow (p \leftrightarrow q)$



Tautologia
Equivalência
Contradição
Contingência
Implicação
Argumento

Exercício 7

Mostre que a expressão seguinte é uma tautologia:

$$(p \rightarrow q) \cdot (r \rightarrow s) \cdot (p + r) \rightarrow (q + s)$$

Regra do Dilema Construtivo

$$(p \rightarrow q) \cdot (r \rightarrow s) \cdot (p + r) \Rightarrow (q + s)$$



Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

Exercício 8

Mostre que a expressão seguinte é uma tautologia:

$$(p \rightarrow q) \cdot (r \rightarrow s) \cdot (\sim q + \sim s) \rightarrow (\sim p + \sim r)$$

Regra do Dilema Destrutivo

$$(p \rightarrow q) \cdot (r \rightarrow s) \cdot (\sim q + \sim s) \rightarrow (\sim p + \sim r)$$



Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

Definição (recordação):

Sejam P_1, P_2, \dots, P_n ($n \geq 1$) e Q proposições quaisquer, simples ou compostas.

Chama-se argumento à afirmação que a sequência finita de proposições P_1, P_2, \dots, P_n (chamadas premissas), tem como consequência ou acarreta a proposição final Q (chamada conclusão).

Um argumento de premissas P_1, P_2, \dots, P_n e conclusão Q é indicado por:

$$P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$$

Diz-se que P_1, P_2, \dots, P_n **acarretam** Q , ou que Q **decorre de** P_1, P_2, \dots, P_n .



Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

Definição:

Um argumento $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$ diz-se **válido** se e somente se a conclusão Q é verdadeira todas as vezes que as premissas P_1, P_2, \dots, P_n são verdadeiras.

Um argumento que não é válido é chamado **sofisma**.



Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Argumento

Teorema:

Um argumento $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$ é **válido** se e somente se a condicional

$$(P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_n) \rightarrow Q$$

é tautológica.

Diz-se que ao argumento $P_1, P_2, \dots, P_n \vdash Q$ *corresponde* a condicional $(P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_n) \rightarrow Q$, ou que esta é a condicional *associada ao* argumento.

Como consequência do teorema pode-se também expressar um argumento válido como:

$$(P_1 \cdot P_2 \cdot \dots \cdot P_n) \Rightarrow Q$$



Tautologia
Equivalência
Contradição
Contingência
Implicação
Argumento

Argumentos Válidos e Regras de Inferência

As regras de inferência vistas até aqui
são todas argumentos válidos.



- I. Regra da Adição: $p \Rightarrow p + q$ e $q \Rightarrow p + q$
- II. Regra da Simplificação: $p \cdot q \Rightarrow p$ e $p \cdot q \Rightarrow q$
- III. Regra da Conjunção: $p \cdot q \Rightarrow p \cdot q$ e $p \cdot q \Rightarrow q \cdot p$
- IV. Regra da Absorção: $p \rightarrow q \Rightarrow p \rightarrow (p + q)$ e
 $p \rightarrow q \Rightarrow p \rightarrow (p \cdot q)$
- VI. Modus Ponens: $(p \rightarrow q) \cdot p \Rightarrow q$
- VII. Modus Tollens: $(p \rightarrow q) \cdot \sim q \Rightarrow \sim p$
- VIII. Silogismo Disjuntivo: $(p + q) \cdot \sim p \Rightarrow q$ e $(p + q) \cdot \sim q \Rightarrow p$
- IX. Silogismo Hipotético: $(p \rightarrow q) \cdot (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \rightarrow r)$
- X. Dilema Construtivo: $(p \rightarrow q) \cdot (r \rightarrow s) \cdot (p + r) \Rightarrow (q + s)$
- XI. Dilema Destrutivo: $(p \rightarrow q) \cdot (r \rightarrow s) \cdot (\sim q + \sim s) \Rightarrow (\sim p + \sim r)$



Método Dedutivo

Regra Modus Tollens

- $$\begin{array}{ll} (1) & q \cdot r \rightarrow s \quad \mathbf{P} \\ (2) & \sim s \quad \mathbf{P} \\ \hline (3) & \sim(q \cdot r) \quad \mathbf{Q} \end{array}$$

Regra do Dilema Construtivo

- $$\begin{array}{ll} (1) & (p \cdot q) \rightarrow \sim r \quad \mathbf{P} \\ (2) & s \rightarrow t \quad \mathbf{P} \\ (3) & (p \cdot q) + s \quad \mathbf{P} \\ \hline (4) & \sim r + t \quad \mathbf{Q} \end{array}$$

Regra do Silogismo Hipotético

- $$\begin{array}{ll} (1) & |x| = 0 \rightarrow x = 0 \quad \mathbf{P} \\ (2) & x = 0 \rightarrow x + 1 = 1 \quad \mathbf{P} \\ \hline (3) & |x| = 0 \rightarrow x + 1 = 1 \quad \mathbf{Q} \end{array}$$

Regra Modus Ponens

- $$\begin{array}{ll} (1) & x \in (A \cap B) \rightarrow x \in A \quad \mathbf{P} \\ (2) & x \in (A \cap B) \quad \mathbf{P} \\ \hline (3) & x \in A \quad \mathbf{Q} \end{array}$$



Verificar a validade do argumento:

$$p \cdot q, p + r \rightarrow s \mid\text{---} p \cdot s$$

$$(1) \quad p \cdot q \quad \quad \quad \mathbf{P}$$

$$(2) \quad p + r \rightarrow s \quad \quad \quad \mathbf{P}$$



Verificar a validade do argumento:

$$p \cdot q, p + r \rightarrow s \mid\text{---} p \cdot s$$

(1) $p \cdot q$ **P**

(2) $p + r \rightarrow s$ **P**

(3) p **1 - SIMP**



Verificar a validade do argumento:

$$p \cdot q, p + r \rightarrow s \mid\text{---} p \cdot s$$

(1) $p \cdot q$	P
(2) $p + r \rightarrow s$	P
<hr/>	
(3) p	1 - SIMP
(4) $p + r$	3 - AD



Verificar a validade do argumento:

$$p \cdot q, p + r \rightarrow s \mid\text{---} p \cdot s$$

(1) $p \cdot q$	P
(2) $p + r \rightarrow s$	P
<hr/>	
(3) p	1 - SIMP
(4) $p + r$	3 - AD
(5) s	2,4 - MP



Verificar a validade do argumento:

$$p \cdot q, p+r \rightarrow s \mid \text{---} p \cdot s$$

(1) $p \cdot q$	P
(2) $p+r \rightarrow s$	P
<hr/>	
(3) p	1 - SIMP
(4) $p + r$	3 - AD
(5) s	2,4 - MP
(6) $p \cdot s$	3,5 - CONJ



Verificar a validade do argumento:

$x=y \rightarrow x=z, x \neq y \rightarrow x < z, x < z \rightarrow y > z, y \neq z \cdot x \neq z \vdash y > z$

(1) $x = y \rightarrow x = z$ **P**

(2) $x \neq y \rightarrow x < z$ **P**

(3) $x < z \rightarrow y > z$ **P**

(4) $y \neq z \cdot x \neq z$ **P**



Verificar a validade do argumento:

$x=y \rightarrow x=z, x \neq y \rightarrow x < z, x < z \rightarrow y > z, y \neq z \cdot x \neq z \vdash y > z$

(1) $x = y \rightarrow x = z$ **P**

(2) $x \neq y \rightarrow x < z$ **P**

(3) $x < z \rightarrow y > z$ **P**

(4) $y \neq z \cdot x \neq z$ **P**

(5) $x \neq z$ **4 - SIMP**

Verificar a validade do argumento:

$x=y \rightarrow x=z, x \neq y \rightarrow x < z, x < z \rightarrow y > z, y \neq z \cdot x \neq z \vdash y > z$

- (1) $x = y \rightarrow x = z$

P
- (2) $x \neq y \rightarrow x < z$

P
- (3) $x < z \rightarrow y > z$

P
- (4) $y \neq z \cdot x \neq z$

P
- (5) $x \neq z$

4 - SIMP
- (6) $x \neq y$

1,5 - MT



Verificar a validade do argumento:

$x=y \rightarrow x=z, x \neq y \rightarrow x < z, x < z \rightarrow y > z, y \neq z \cdot x \neq z \vdash y > z$

(1) $x = y \rightarrow x = z$ **P**

(2) $x \neq y \rightarrow x < z$ **P**

(3) $x < z \rightarrow y > z$ **P**

(4) $y \neq z \cdot x \neq z$ **P**

(5) $x \neq z$ **4 - SIMP**

(6) $x \neq y$ **1,5 - MT**

(7) $x < z$ **2,6 - MP**



Verificar a validade do argumento:

$x=y \rightarrow x=z, x \neq y \rightarrow x < z, x < z \rightarrow y > z, y \neq z \cdot x \neq z \vdash y > z$

(1) $x = y \rightarrow x = z$ **P**

(2) $x \neq y \rightarrow x < z$ **P**

(3) $x < z \rightarrow y > z$ **P**

(4) $y \neq z \cdot x \neq z$ **P**

(5) $x \neq z$ **4 - SIMP**

(6) $x \neq y$ **1,5 - MT**

(7) $x < z$ **2,6 - MP**

(8) $y > z$ **3,7 - MP**