



Matemática Discreta 1

Introdução à Lógica

Matemática 2

AULA 02

Professor: Luiz Augusto Laranjeira
luiz.laranjeira@gmail.com



- Negação
- Conjunção (E)
- Disjunção (OU)
- Disjunção Exclusiva (XOR)
- Condicional
- Bicondicional



- Símbolo $\sim p$, p' , \bar{p} ou $\neg p$
- A negação de uma proposição p é representada por “não p ”, cujo valor lógico é a verdade (V) quando p é falsa e a falsidade (F) quando p é verdadeira.
- Não Não = Sim
- Ex.: João não é gordo = João é magro.



- Tabela verdade

p	$\sim p$
V	F
F	V

$$\sim V = F, \sim F = V$$

$$\text{e } \forall(\sim p) = \sim \forall(p)$$



- Vide exemplos página 18 do livro texto (Iniciação à Lógica Matemática – Edgard A. Filho).



- A conjunção de duas proposições p e q representada por “ p e q ”, cujo valor lógico é a verdade (V) quando as proposições p e q são ambas verdadeiras e a falsidade (F) nos demais casos
- Símbolo:
 $p \bullet q$ ou $p \wedge q$ (onde lê-se p e q)



- Tabela verdade

p	q	$p \cdot q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ou seja:

$$V \cdot V = V, V \cdot F = F, F \cdot V = F, F \cdot F = F$$

$$\text{e } \mathbb{V}(p \cdot q) = \mathbb{V}(p) \cdot \mathbb{V}(q)$$



- Olhar exemplos do LT página 19.



- Chama-se disjunção de duas proposições p e q a proposição representada por “ p ou q ”, cujo valor lógico é a verdade (V) quando ao menos uma das proposições p e q é verdadeira e a falsidade (F) quando as proposições p e q são ambas falsas.



- Símbolo: $p + q$ ou $p \vee q$
- Tabela verdade

p	q	$p + q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Onde: $V + V = V$, $V + F = V$,

$F + V = V$, $F + F = F$

e $\mathbb{V}(p + q) = \mathbb{V}(p) + \mathbb{V}(q)$



- Vide exemplos do LT pág. 20.



- “ p ou q , mas não ambos”, cujo valor lógico é a verdade (V) somente quando p é verdadeira ou q é verdadeira, mas não quando p e q são ambas verdadeiras, e a falsidade (F) quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas.



- Símbolo: $p \oplus q$
- Tabela verdade

p	q	$p \oplus q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Onde: $V \oplus V = F$, $V \oplus F = V$, $F \oplus V = V$, $F \oplus F = F$

$$\text{e } \forall(p \oplus q) = \forall(p) \oplus \forall(q)$$

$$p \oplus q \equiv (p \cdot q') + (p' \cdot q)$$

P: Maria é médica ou¹ escritora

- Maria pode ser médica e escritora ao mesmo tempo

Q: Jorge é mineiro ou² carioca

- Jorge não pode ser mineiro e carioca ao mesmo tempo
- (¹) ou inclusivo
- (²) ou exclusivo



Não confundir

Disjunção

$$p + q$$

$$V + V = V$$

Disjunção Exclusiva

$$p \oplus q$$

$$V \oplus V = F$$



- Chama-se proposição condicional uma proposição representada por “se p então q ”, cujo valor lógico é a falsidade (F) no caso em que p é verdadeira e q é falsa e a verdade (V) nos demais casos.
- Símbolo: $p \rightarrow q$



- Onde lê-se:
 - p é condição suficiente para q
 - q é condição necessária para p
- Diz-se que p é o antecedente e q o consequente. O símbolo \rightarrow é chamado de símbolo de implicação.

- Tabela verdade

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Onde: $V \rightarrow V = V$, $V \rightarrow F = F$,

$F \rightarrow V = V$, $F \rightarrow F = V$

e $\mathbb{V}(p \rightarrow q) = \mathbb{V}(p) \rightarrow \mathbb{V}(q)$



- **Cuidado**
- Uma condicional $p \rightarrow q$ não afirma tão somente que o conseqüente q se deduz ou é consequência do antecedente p .
- De forma mais geral, o condicional é uma relação entre os valores lógicos do antecedente e do conseqüente de acordo com sua **Tabela Verdade**.



- Vide exemplos da página 23 do LT.



Mostrar que $A \rightarrow B$ é equivalente a $\sim A + B$

Exercício 1



Mostrar que $A \rightarrow B$ é equivalente a $\sim A + B$

A	$\sim A$	B	$\sim A + B$
V		V	
V		F	
F		V	
F		F	

Exercício 1



Mostrar que $A \rightarrow B$ é equivalente a $\sim A + B$

A	$\sim A$	B	$\sim A + B$
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	

Exercício 1



Mostrar que $A \rightarrow B$ é equivalente a $\sim A + B$

A	$\sim A$	B	$\sim A + B$
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	V



Mostrar que $A \rightarrow B$ é equivalente a $\sim A + B$

A	$\sim A$	B	$\sim A + B$
V	F	V	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	V	F	V

A	B	$A \rightarrow B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exercício 1



Mostrar que $A \rightarrow B$ é equivalente a $\sim A + B$

A	$\sim A$	B	$\sim A + B$	$A \rightarrow B$
V	F	V	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V



- Chama-se proposição bicondicional uma proposição representada por “p se e somente se q”, cujo valor lógico é a verdade (V) quando p e q são ambas verdadeiras ou ambas falsas, e a falsidade (F) nos demais casos.
- Símbolo: $p \leftrightarrow q$



- Onde lê-se:
 - p é condição necessária e suficiente para q
 - q é condição necessária e suficiente para p



- Tabela verdade

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Onde: $V \leftrightarrow V = V$, $V \leftrightarrow F = F$,

$F \leftrightarrow V = F$, $F \leftrightarrow F = V$

e $\forall(p \leftrightarrow q) = \forall(p) \leftrightarrow \forall(q)$



- A bicondicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeira quando também o são as condicionais:

$$p \rightarrow q \quad \text{e} \quad q \rightarrow p$$

$$(p \leftrightarrow q) \equiv (p' + q) \cdot (p + q')$$

$$(p \leftrightarrow q)' \equiv (p \cdot q') + (p' \cdot q)$$



- É possível construir a tabela-verdade de toda proposição composta a partir dos valores lógicos das proposições simples componentes.
- Dada uma proposição composta com n proposições simples sua tabela verdade terá 2^n linhas:

$$N_L = A_{2,n} = 2^n$$



Construir a tabela verdade da proposição:

$$P(p, q) = \sim(p \bullet \sim q)$$



Construir a tabela verdade da proposição:

$$P(p, q) = \sim(p \bullet \sim q)$$

p	q	$\sim q$	$p \bullet \sim q$	$\sim(p \bullet \sim q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	V	F
F	V	F	F	V
F	F	V	F	V



Construir a tabela verdade da proposição:

$$P(p, q) = \sim(p + q) \cdot (q \rightarrow p)$$



Sejam as proposições

p : Cláudio fala inglês e q : Cláudio fala alemão.

Traduzir as seguintes proposições em linguagem simbólica para a linguagem corrente:

$p + q$

$p \cdot q$

$p \cdot q'$

$p' \cdot q'$

$(p')'$

$(p' \cdot q')'$

Exercício 4 (solução)



Sejam as proposições

p : Cláudio fala inglês e q : Cláudio fala alemão.

Traduzir as seguintes proposições em linguagem simbólica para a linguagem corrente:

$p + q$: Cláudio fala inglês ou alemão

$p . q$:

$p . q'$:

$p' . q'$:

$(p')'$:

$(p' . q')'$:

Exercício 4 (solução)



Sejam as proposições

p : Cláudio fala inglês e q : Cláudio fala alemão.

Traduzir as seguintes proposições em linguagem simbólica para a linguagem corrente:

$p + q$: Cláudio fala inglês ou alemão

$p . q$: Cláudio fala inglês e alemão

$p . q'$:

$p' . q'$:

$(p')'$:

$(p' . q')'$:

Exercício 4 (solução)



Sejam as proposições

p : Cláudio fala inglês e q : Cláudio fala alemão.

Traduzir as seguintes proposições em linguagem simbólica para a linguagem corrente:

$p + q$: Cláudio fala inglês ou alemão

$p . q$: Cláudio fala inglês e alemão

$p . q'$: Cláudio fala inglês mas não fala alemão

$p' . q'$:

$(p')'$:

$(p' . q')'$:

Exercício 4 (solução)



Sejam as proposições

p : Cláudio fala inglês e q : Cláudio fala alemão.

Traduzir as seguintes proposições em linguagem simbólica para a linguagem corrente:

$p + q$: Cláudio fala inglês ou alemão

$p . q$: Cláudio fala inglês e alemão

$p . q'$: Cláudio fala inglês mas não fala alemão

$p' . q'$: Cláudio não fala nem inglês nem alemão

$(p')'$:

$(p' . q')'$:

Exercício 4 (solução)



Sejam as proposições

p : Cláudio fala inglês e q : Cláudio fala alemão.

Traduzir as seguintes proposições em linguagem simbólica para a linguagem corrente:

$p + q$: Cláudio fala inglês ou alemão

$p . q$: Cláudio fala inglês e alemão

$p . q'$: Cláudio fala inglês mas não fala alemão

$p' . q'$: Cláudio não fala nem inglês nem alemão

$(p')'$: Não é verdade que Cláudio não fala inglês

$(p' . q')'$:

Exercício 4 (solução)



Sejam as proposições

p : Cláudio fala inglês e q : Cláudio fala alemão.

Traduzir as seguintes proposições em linguagem simbólica para a linguagem corrente:

$p + q$: Cláudio fala inglês ou alemão

$p . q$: Cláudio fala inglês e alemão

$p . q'$: Cláudio fala inglês mas não fala alemão

$p' . q'$: Cláudio não fala nem inglês nem alemão

$(p')'$: Não é verdade que Cláudio não fala inglês

$(p' . q')'$: Não é verdade que Cláudio não fala nem inglês
nem alemão



Sejam as proposições

p : Marcos é alto e q : Marcos é elegante.

Traduzir as seguintes proposições em linguagem corrente para a linguagem simbólica:

Marcos é alto e elegante

Marcos é alto, mas não é elegante

Não é verdade que Marcos é baixo ou elegante

Marcos não é nem alto nem elegante

Marcos é alto ou é baixo e elegante

É falso que Marcos é baixo ou que não é elegante

Exercício 5 (solução)



Sejam as proposições

p : Marcos é alto e q : Marcos é elegante.

Traduzir as seguintes proposições em linguagem corrente para a linguagem simbólica:

Marcos é alto e elegante: $p \wedge q$

Marcos é alto, mas não é elegante:

Não é verdade que Marcos é baixo ou elegante:

Marcos não é nem alto nem elegante:

Marcos é alto ou é baixo e elegante:

É falso que Marcos é baixo ou que não é elegante:

Exercício 5 (solução)



Sejam as proposições

p : Marcos é alto e q : Marcos é elegante.

Traduzir as seguintes proposições em linguagem corrente para a linguagem simbólica:

Marcos é alto e elegante: $p \wedge q$

Marcos é alto, mas não é elegante: $p \wedge q'$

Não é verdade que Marcos é baixo ou elegante:

Marcos não é nem alto nem elegante:

Marcos é alto ou é baixo e elegante:

É falso que Marcos é baixo ou que não é elegante:

Exercício 5 (solução)



Sejam as proposições

p : Marcos é alto e q : Marcos é elegante.

Traduzir as seguintes proposições em linguagem corrente para a linguagem simbólica:

Marcos é alto e elegante: $p \cdot q$

Marcos é alto, mas não é elegante: $p \cdot q'$

Não é verdade que Marcos é baixo ou elegante: $(p' + q)'$

Marcos não é nem alto nem elegante:

Marcos é alto ou é baixo e elegante:

É falso que Marcos é baixo ou que não é elegante:

Exercício 5 (solução)



Sejam as proposições

p : Marcos é alto e q : Marcos é elegante.

Traduzir as seguintes proposições em linguagem corrente para a linguagem simbólica:

Marcos é alto e elegante: $p \cdot q$

Marcos é alto, mas não é elegante: $p \cdot q'$

Não é verdade que Marcos é baixo ou elegante: $(p' + q)'$

Marcos não é nem alto nem elegante: $p' \cdot q'$

Marcos é alto ou é baixo e elegante:

É falso que Marcos é baixo ou que não é elegante:

Exercício 5 (solução)



Sejam as proposições

p : Marcos é alto e q : Marcos é elegante.

Traduzir as seguintes proposições em linguagem corrente para a linguagem simbólica:

Marcos é alto e elegante: $p \cdot q$

Marcos é alto, mas não é elegante: $p \cdot q'$

Não é verdade que Marcos é baixo ou elegante: $(p' + q)'$

Marcos não é nem alto nem elegante: $p' \cdot q'$

Marcos é alto ou é baixo e elegante: $p + (p' \cdot q)$

É falso que Marcos é baixo ou que não é elegante:

Exercício 5 (solução)



Sejam as proposições

p : Marcos é alto e q : Marcos é elegante.

Traduzir as seguintes proposições em linguagem corrente para a linguagem simbólica:

Marcos é alto e elegante: $p \cdot q$

Marcos é alto, mas não é elegante: $p \cdot q'$

Não é verdade que Marcos é baixo ou elegante: $(p' + q)'$

Marcos não é nem alto nem elegante: $p' \cdot q'$

Marcos é alto ou é baixo e elegante: $p + (p' \cdot q)$

É falso que Marcos é baixo ou que não é elegante: $(p' + q')'$



- É toda proposição composta cujo valor lógico é sempre V.
- Exemplos: $p + \sim p = V$
 $\sim (p \cdot \sim p) = V$
- Somente simplificar um expressão não é tautologia. Deve-se chegar ao valor lógico V.



Mostrar que a proposição seguinte é uma tautologia:

$$A \oplus B \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)'$$

Exercício 6



Mostrar que a proposição seguinte é uma tautologia: $A \oplus B \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)'$

A	B	$A \oplus B$	$A \leftrightarrow B$	$(A \leftrightarrow B)'$
V	V	F	V	F
V	F	V	F	V
F	V	V	F	V
F	F	F	V	F

Exercício 6 (solução)



Mostrar que a proposição seguinte é uma tautologia: $A \oplus B \leftrightarrow (A \leftrightarrow B)'$

De sua tabela verdade podemos inferir que:

$$A \oplus B \equiv (A \cdot B') + (A' \cdot B) \equiv C$$

Vamos mostrar ainda também que:

$$(A \leftrightarrow B)' \equiv (A \cdot B') + (A' \cdot B) \equiv C$$

Começamos lembrando que:

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \cdot (B \rightarrow A) \equiv (A' + B) \cdot (B' + A)$$

Daí vem que : $(A \leftrightarrow B)' \equiv (A \cdot B') + (A' \cdot B) \equiv C$

E a expressão inicial se reduz a:

$$C \leftrightarrow C \equiv (C \rightarrow C) \cdot (C \rightarrow C) \equiv (C \rightarrow C) \equiv (C' + C) \equiv V$$

CQD



Mostrar que: $p + p'.q \equiv p + q$

p	q	p + q	p'	p' . q	p + p'.q
V	V	V	F	F	V
V	F	V	F	F	V
F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	F





Mostrar que a proposição seguinte é uma tautologia:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (p.r \rightarrow q.r)$$



Mostrar que a proposição seguinte é uma tautologia:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (p.r \rightarrow q.r)$$

$$(p' + q) \rightarrow (p' + r') + q.r$$

$$(p' + q)' + (p' + r') + q.r$$

$$p.q' + p' + r' + q.r \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{(utilizando a regra da simplificação)}$$

$$p' + q' + r' + q$$

$$p' + r' + q' + q$$

$$p' + r' + V$$

$$V$$



Mostrar que a proposição seguinte é uma tautologia:

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (p.r \rightarrow q.r)$$

$$(\sim p + q) \rightarrow (\sim p + \sim r) + q.r$$

$$\sim(\sim p + q) + (\sim p + \sim r) + q.r$$

$$p.\sim q + \sim p + \sim r + q.r$$

$$\sim p + \sim q + \sim r + q$$

$$\sim p + \sim r + \sim q + q$$

$$\sim p + \sim r + V$$

$$V$$

(utilizando a regra da simplificação)



- Mostrar que $A + B$ é equivalente a $(A' \cdot B')'$
- Mostrar que $A \rightarrow B$ é equivalente a $(A \cdot B')'$

Este exercício demonstra que para toda proposição composta existe uma proposição equivalente formada apenas pelos conectivos de conjunção e negação.



- O conetivo binário \perp é definido por:

p	q	$p \perp q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

- Mostrar que qualquer proposição pode ser expressa em termos deste conetivo (usar o resultado do exercício anterior).

Exercício 9 (solução)



- O conetivo binário \perp é definido por:
- Mostrar que qualquer proposição pode ser expressa em termos deste conetivo (usar o resultado do exercício anterior).

p	q	$p \perp q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

A prova consiste em se mostrar que os conetivos de negação e de conjunção (\sim e \wedge) podem ser expressos em função do conetivo \perp

a) $p \perp p \equiv \sim p$

b) $p \perp q \equiv \sim(p + q)$

$$\sim p \perp \sim q \equiv \sim(\sim p + \sim q) \equiv p \wedge q$$



- Provar que existem proposições que não podem ser expressas somente em termos dos conectivos \rightarrow e $+$

Exercício 10 (solução)



- Provar que existem proposições que não podem ser expressas somente em termos dos conectivos \rightarrow e $+$.

A prova consiste em se mostrar que não há meios de se expressar a operação de negação com estes dois conectivos:

$$p \rightarrow p = \sim p + p = V$$

$$p + p = p$$