



Matemática Discreta 1 Equivalência, Contradição, Contingência e Implicação Lógicas

AULA 3a

Professor: Luiz Augusto Laranjeira

<u>luiz.laranjeira@gmail.com</u>



Fautologia



Tautologia

Equivalência
Contradição
Contingência
Implicação

- É toda proposição composta cujo valor lógico é sempre V.
- Exemplos: $p + \sim p = V$ $\sim (p \cdot \sim p) = V$
- Somente simplificar um expressão não é tautologia.

Deve-se chegar ao valor lógico V para todas as combinações de valores lógicos das proposições simples que compõe a proposição composta.



Exemplo 1



Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

$$\circ$$
 p + \sim p

$$\circ$$
 V + F = V; F + V = V

Logo, p + ~p é tautologia!!!



Exemplo 2



Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

$$\circ$$
 ~ $(p \cdot ~p)$

$$\circ$$
 $V \cdot F = F ; F \cdot V = F$

$$\circ \sim (p \cdot \sim p) = \sim F$$

Logo, ~(p • ~p) é tautologia!!!



Equivalência Lógica



Tautologia

Equivalência

Contradição
Contingência
Implicação

- $\circ P(p,q,r,...) \iff Q(p,q,r,...)$
- Uma proposição P é equivalente a uma outra proposição Q se as suas tabelas verdade são idênticas.
- Propriedade ReflexivaP(p,q,r,...) ⇔ P(p,q,r,...)



Equivalência Lógica (cont.)



Tautologia

Equivalência

Contradição Contingência Implicação

Propriedade Simétrica:

Se
$$P(p,q,r,...) \iff Q(p,q,r,...)$$

então
$$Q(p,q,r,...) \iff P(p,q,r,...)$$

Propriedade Transitiva:

Se
$$P(p,q,r,...) \iff Q(p,q,r,...)$$

e
$$Q(p,q,r,...) \iff R(p,q,r,...)$$

então
$$P(p,q,r,...) \iff R(p,q,r,...)$$







Tautologia

Equivalência

Contradição Contingência Implicação

Os símbolos ↔ e <=> são distintos:

- 1) O símbolo ↔ é de *operação* lógica
- 2)O símbolo <=> é de *relação*, pois estabelece que duas proposições

$$P(p,q,r,...)$$
 e $Q(p,q,r,...)$

têm tabelas verdade idênticas.





Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência Implicação

A proposição P(p,q,r,...) é equivalente à proposição Q(p,q,r,...), isto é

$$P(p,q,r,...) \iff Q(p,q,r,...)$$

Se e somente se a bicondicional

$$P(p,q,r,...) \leftrightarrow Q(p,q,r,...)$$

é tautológica.



Teorema 1 - Demo (a)



Tautologia

Equivalência

Contradição Contingência Implicação

Se P(p,q,r,...) é equivalente a Q(p,q,r,...), então, suas tabelas verdade são idênticas, e por consequinte o valor lógico da bicondicional é sempre V, isto é, a bicondicional é tautológica.

р	q	$p \leftrightarrow q$	
V	V	V	
V	F	F	
F	V	F	
F	F	V	

Р	Q	$P \leftrightarrow Q$	
V	V	V	
F	F	V	



Teorema 1 - Demo (b)



Tautologia

Equivalência

Contradição
Contingência
Implicação

Se a bicondicional é tautológica, isto é, se a última coluna de sua tabela verdade encerra somente o valor V, então os valores lógicos respectivos das proposições P(p,q,r,...) e Q(p,q,r,...) são ambos V ou ambos F, isto é, as duas proposições são equivalentes.





Tautologia

Equivalência

Contradição Contingência Implicação Propriedades comutativas

$$A+B \iff B+A$$

$$A \cdot B \iff B \cdot A$$

Propriedades associativas

$$(A+B) + C \iff A + (B+C)$$

$$(A \cdot B) \cdot C \iff A \cdot (B \cdot C)$$

Propriedades distributivas

$$A + (B \cdot C) \iff (A + B) \cdot (A + C)$$

$$A \cdot (B + C) \iff (A \cdot B) + (A \cdot C)$$





Tautologia

Equivalência

Contradição
Contingência
Implicação

Propriedades de identidade

$$A + F \iff A$$

$$A \cdot V \iff A$$

Propriedades complementativas

$$A + \sim A \iff V$$

Leis de Morgan

$$\sim$$
(A + B) \iff \sim A • \sim B

$$\sim$$
(A • B) \iff \sim A + \sim B





Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Propriedade reflexiva

$$A \iff A$$

Propriedades idempotentes

$$A + A \iff A$$

$$A \cdot A \iff A$$

Dupla negativa

$$\sim$$
(\sim A) \iff A





Tautologia

Equivalência

Contradição Contingência Implicação

Reescrevendo a condicional

$$A \rightarrow B <=> \sim A + B$$

 $\sim B \rightarrow \sim A <=> \sim (\sim B) + \sim A$

$$\sim B \rightarrow \sim A \iff \sim A + B$$

$$A \rightarrow B \iff \sim B \rightarrow \sim A$$

(Contraposição)





Tautologia

Equivalência

Contradição
Contingência
Implicação

Reescrevendo a bicondicional

$$A \leftrightarrow B \iff (A \rightarrow B) \bullet (B \rightarrow A)$$

 $(\sim A + B) \bullet (\sim B + A)$

$$\sim A \cdot \sim B + \sim A \cdot A + \sim B \cdot B + A \cdot B$$

 $\sim A \cdot \sim B + F + F + A \cdot B$

$$A \leftrightarrow B \iff (A \cdot B) + (A \cdot B)$$





Tautologia

Equivalência

Contradição Contingência

Implicação

Exportação-Importação

$$A \rightarrow (B \rightarrow C) \iff (A \bullet B) \rightarrow C$$

Α	В	С	$B \rightarrow C$	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	A • B	(A • B) → C
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	V	V	F	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	V	F	V
F	V	F	F	V	F	V
F	F	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	F	V





Tautologia

Equivalência

Contradição
Contingência
Implicação

o Equivalência de simplificação

$$A + \sim A \cdot B \iff A + B$$

A	В	~A	~A • B	A + ~A • B	A + B
V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	F	F





- Propriedade reflexiva A⇔A
- 2) Props de identidade $A + F \Leftrightarrow A \qquad A \cdot V \Leftrightarrow A$
- 3) Props complementativas $A + \sim A \Leftrightarrow V$ $A \bullet \sim A \Leftrightarrow F$
- 4) Leis de Morgan \sim (A + B) \Leftrightarrow \sim A • \sim B ~(A • B) ⇔ ~A + ~B
- 5) Propriedades idempotentes $A + A \Leftrightarrow A \qquad A \cdot A \Leftrightarrow A$
- 6) Dupla negativa ~(~A)⇔A
- 7) Exportação-Importação $(A \bullet B) \rightarrow C \iff A \rightarrow (B \rightarrow C)$

- 8) Propriedades comutativas $A+B \Leftrightarrow B+A \quad A \bullet B \Leftrightarrow B \bullet A$
- 9) Propriedades associativas

$$(A + B) + C \Leftrightarrow A + (B + C)$$

$$(A \cdot B) \cdot C \Leftrightarrow A \cdot (B \cdot C)$$

10) Propriedades distributivas

$$A + (B \cdot C) \Leftrightarrow (A+B) \cdot (A+C)$$

$$A \bullet (B+C) \Leftrightarrow (A \bullet B) + (A \bullet C)$$

11) Condicional e Contraposição

$$A \rightarrow B \Longleftrightarrow \sim A + B \Longleftrightarrow \sim B \rightarrow \sim A$$

12) Bicondicional

$$A \leftrightarrow B \iff (A \rightarrow B) \bullet (B \rightarrow A)$$

$$A \leftrightarrow B \iff (A \bullet B) + (\sim A \bullet \sim B)$$

13) Equiv de Simplificação

$$A + \sim A \cdot B \iff A + B$$

9/3/201





Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

$$p + (q \cdot \sim q) \leftrightarrow p \in tautologia?$$





Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

$$p + (q \cdot \sim q) \leftrightarrow p$$

$$(q \cdot \sim q) \equiv F$$

$$p + F \leftrightarrow p$$

4)
$$p + F \equiv p$$

Obs.:
$$F \leftrightarrow F = V$$

$$V \leftrightarrow V = V$$

Logo, a proposição é tautologia!!!







Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

$$(p \cdot r) \rightarrow (\sim q + r)$$
 é tautologia?





Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

(p • r)
$$\rightarrow$$
 (\sim q + r)

$$(p \cdot r) + (\sim q + r)$$





Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

(p • r)
$$\rightarrow$$
 (\sim q + r)

$$(p \cdot r) + (\sim q + r)$$

$$p - p + r + q + r$$





Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

$$(p \cdot r) \rightarrow (\sim q + r)$$

$$\sim (p \cdot r) + (\sim q + r)$$

$$^{3)}$$
 $\sim p + \sim r + \sim q + r$

4)
$$\sim p + \sim q + \sim r + r$$





Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

(p • r)
$$\rightarrow$$
 (\sim q + r)

$$(p \cdot r) + (\sim q + r)$$

$$p - p + r + q + r$$

$$-p + -q + -r + r$$

$$\sim p + \sim q + V$$





Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

(p • r)
$$\rightarrow$$
 (\sim q + r)

$$\sim (p \cdot r) + (\sim q + r)$$

$$\sim p + \sim r + \sim q + r$$

$$^{4)}$$
 $\sim p + \sim q + \sim r + r$

$$\sim p + \sim q + V$$

6) **V**

Logo, a proposição é tautologia!!!





Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

$$((p \rightarrow q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))$$

É tautologia?





Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

((p
$$\rightarrow$$
 q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))

((
$$\sim p + q$$
) $\rightarrow r$) $\rightarrow (p \rightarrow (\sim q + r))$





Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

((p
$$\rightarrow$$
 q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))

((
$$\sim p + q) \rightarrow r$$
) $\rightarrow (p \rightarrow (\sim q + r))$

$$(\sim(\sim p + q) + r) \rightarrow (\sim p + \sim q + r)$$





Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

((p
$$\rightarrow$$
 q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))

((
$$\sim p + q) \rightarrow r$$
) $\rightarrow (p \rightarrow (\sim q + r))$

(
$$\sim$$
(\sim p + q) + r) \rightarrow (\sim p + \sim q + r)

((p •
$$\sim$$
q) + r) \rightarrow (\sim p + \sim q + r)





Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

((p
$$\rightarrow$$
 q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))

((
$$\sim p + q) \rightarrow r$$
) $\rightarrow (p \rightarrow (\sim q + r))$

(
$$\sim$$
(\sim p + q) + r) \rightarrow (\sim p + \sim q + r)

((p • ~q) + r)
$$\rightarrow$$
 (~p + ~q + r)

$$\sim ((p \cdot \sim q) + r) + (\sim p + \sim q + r)$$





Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

((p
$$\rightarrow$$
 q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))

$$((\sim p + q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (\sim q + r))$$

(
$$\sim$$
(\sim p + q) + r) \rightarrow (\sim p + \sim q + r)

((p • ~q) + r)
$$\rightarrow$$
 (~p + ~q + r)

$$\sim ((p \cdot \sim q) + r) + (\sim p + \sim q + r)$$

6)
$$\sim (p \cdot \sim q) \cdot \sim r + \sim p + \sim q + r$$





Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

((p
$$\rightarrow$$
 q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))

$$((\sim p + q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (\sim q + r))$$

(
$$\sim$$
(\sim p + q) + r) \rightarrow (\sim p + \sim q + r)

((p •
$$\sim$$
q) + r) \rightarrow (\sim p + \sim q + r)

$$\sim ((p \cdot \sim q) + r) + (\sim p + \sim q + r)$$

$$\sim$$
 (p \sim q) \sim r + \sim p + \sim q + r

$$(\sim p + q) \cdot \sim r + \sim p + \sim q + r$$





Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

((p
$$\rightarrow$$
 q) \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow (q \rightarrow r))

((
$$\sim p + q$$
) $\rightarrow r$) $\rightarrow (p \rightarrow (\sim q + r))$

$$(\sim(\sim p+q)+r)\rightarrow(\sim p+\sim q+r)$$

((p •
$$\sim$$
q) + r) \rightarrow (\sim p + \sim q + r)

$$\sim ((p \cdot \sim q) + r) + (\sim p + \sim q + r)$$

$$\sim$$
 (p \sim q) \sim r + \sim p + \sim q + r

(
$$\sim p + q$$
) • $\sim r + r + \sim p + \sim q$



Exercício 3 (cont.)



Tautologia

Equivalência Contradição Contingência

Implicação

9)
$$(\sim p + q) \cdot \sim r + r + \sim p + \sim q$$

aplicando a Equivalência de Simplificação

$$_{10)} (\sim p + q) + r + \sim p + \sim q$$



Exercício 3 (cont.)



Tautologia

Equivalência
Contradição
Contingência
Implicação

9)
$$(\sim p + q) \cdot \sim r + r + \sim p + \sim q$$

aplicando a Equivalência de Simplificação

$$(\sim p + q) + r + \sim p + \sim q$$

$$^{11)}$$
 ~p + ~p + q + ~q + r



Exercício 3 (cont.)



Tautologia

Equivalência
Contradição
Contingência
Implicação

9)
$$(\sim p + q) \cdot \sim r + r + \sim p + \sim q$$

aplicando a Equivalência de Simplificação

$$(\sim p + q) + r + \sim p + \sim q$$

$$^{11)}$$
 ~p + ~p + q + ~q + r

$$_{12)} \sim p + V + r$$



Exercício 3 (cont.)



Tautologia

Equivalência
Contradição
Contingência
Implicação

9)
$$(\sim p + q) \cdot \sim r + r + \sim p + \sim q$$

aplicando a Equivalência de Simplificação

$$(\sim p + q) + r + \sim p + \sim q$$

$$^{11)}$$
 ~p + ~p + q + ~q + r

$$_{12)} \sim p + V + r$$

$$_{13)} \sim p + r + V$$



Exercício 3 (cont.)



Tautologia

Equivalência
Contradição
Contingência
Implicação

9)
$$(\sim p + q) \cdot \sim r + r + \sim p + \sim q$$

aplicando a Equivalência de Simplificação

$$(\sim p + q) + r + \sim p + \sim q$$

$$^{11)}$$
 ~p + ~p + q + ~q + r

$$_{12)} \sim p + V + r$$

$$_{13)} \sim p + r + V$$

14) **V**

Logo a proposição é tautologia!!!



Exercício 3 (cont



Tautologia

Equivalência
Contradição
Contingência
Implicação

9)
$$(\sim p + q) \cdot \sim r + r + \sim p + \sim q$$

$$_{10)} (\sim p + q) \cdot V + \sim p + \sim q$$

$$^{11)}$$
 ~p + q + ~p + ~q

$$^{12)}$$
 ~p + ~p + ~q + q

$$_{13)} \sim p + V$$

Logo a proposição é tautologia!!!



Contradição



Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência Implicação É toda proposição composta cujo valor lógico é sempre F.

Contradição = ~ Tautologia



Exemplo 3



Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência Implicação

$$\circ$$
 F • V = F; V • F = F

Logo, p • ~p é contradição!!!

~Contradição = Tautologia
 ~
$$(p \cdot ~p) = ~p + p = V$$



Exemplo 4



Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência Implicação o p ↔ ~p é contradição?

$$\circ$$
 $V \leftrightarrow F = F$; $F \leftrightarrow V = F$

Logo, p ↔ ~p é contradição!!!





Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

$$\sim (p \leftrightarrow \sim p)$$

É contradição ou tautologia?





Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

$$\circ \quad \sim (p \leftrightarrow \sim p)$$

$$\circ \quad \sim ((p \rightarrow \sim p) \cdot (\sim p \rightarrow p))$$





Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

$$\circ \quad \sim (p \leftrightarrow \sim p)$$

$$\circ \qquad \sim ((p \rightarrow \sim p) \bullet (\sim p \rightarrow p))$$

$$\circ \quad \sim ((\sim p + \sim p) \cdot (p + p))$$





Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

$$\circ \quad \sim (p \leftrightarrow \sim p)$$

$$\circ \quad \sim ((p \to \sim p) \bullet (\sim p \to p))$$

$$\circ \quad \sim ((\sim p + \sim p) \cdot (p + p))$$

$$\circ \quad \sim (\sim p \cdot p)$$





Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

$$\circ \quad \sim (p \leftrightarrow \sim p)$$

$$\circ \quad \sim ((p \to \sim p) \cdot (\sim p \to p))$$

$$\circ \quad \sim ((\sim p + \sim p) \cdot (p + p))$$

$$\circ \quad \sim (\sim p \cdot p)$$





Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

$$\circ \quad \sim (p \leftrightarrow \sim p)$$

$$\circ \quad \sim ((p \to \sim p) \bullet (\sim p \to p))$$

$$\circ \quad \sim ((\sim p + \sim p) \cdot (p + p))$$

$$\circ \quad \sim (\sim p \cdot p)$$

$$\circ$$
 V

Logo, ~(p ↔ ~p) é tautologia!!!





Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

$$(p \cdot q) \cdot \sim (p + q) \in contradição?$$





Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

- (p q) ~(p + q) é contradição?
- o p q ~p ~q





Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

o
$$(p \cdot q) \cdot \sim (p + q)$$
 é contradição?

- o p q ~p ~q
- $\circ (p \bullet \sim p) \bullet (q \bullet \sim q)$





Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

- o $(p \cdot q) \cdot \sim (p + q)$ é contradição?
- o p q ~p ~q
- $\circ (p \cdot \sim p) \cdot (q \cdot \sim q)$
- \circ p \bullet \sim p = F e q \bullet \sim q = F





Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

- o $(p \cdot q) \cdot \sim (p + q)$ é contradição?
- o p q ~p ~q
- $\circ (p \bullet \sim p) \bullet (q \bullet \sim q)$
- \circ p \bullet \sim p = F e q \bullet \sim q = F
- o **F F**





Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

- (p q) ~(p + q) é contradição?
- o p q ~p ~q
- $\circ (p \bullet \sim p) \bullet (q \bullet \sim q)$
- \circ p \bullet \sim p = F e q \bullet \sim q = F
- o **F F**
- o F

Logo, a proposição é contradição!!!



Contingência



Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

 Quando a proposição composta não possui valor lógico fixo ela é uma contingência, ou seja, quando a proposição não é nem tautologia nem contradição.



Implicação Lógica



Tautologia Equivalência

Contradição

Contingência

$$\circ P(p,q,r,...) \Rightarrow Q(p,q,r,...)$$

- Na tabela verdade de P e Q não pode haver uma linha em que P tenha valor V e Q tenha valor F.
- Propriedade Reflexiva $P(p,q,r,...) \Rightarrow P(p,q,r,...)$



Implicação Lógica (cont.



Tautologia
Equivalência
Contradição
Contingência
Implicação

Propriedade Transitiva:

Se
$$P(p,q,r,...) \Rightarrow Q(p,q,r,...)$$

e $Q(p,q,r,...) \Rightarrow R(p,q,r,...)$

então $P(p,q,r,...) \Rightarrow R(p,q,r,...)$

- Toda proposição implica uma tautologia, isto é P(p,q,r,...) ⇒ V





Tautologia
Equivalência
Contradição
Contingência
Implicação

Os símbolos → e => são distintos:

- O símbolo → é de operação lógica
- 2)O símbolo => é de *relação*, pois estabelece que a condicional

 $P(p,q,r,...) \rightarrow Q(p,q,r,...)$

é tautológica.



Feorema 2



Tautologia
Equivalência
Contradição
Contingência

Implicação

A proposição P(p,q,r,...) implica a proposição Q(p,q,r,...), isto é

$$P(p,q,r,...) \Rightarrow Q(p,q,r,...)$$

Se e somente se a condicional

$$P(p,q,r,...) \rightarrow Q(p,q,r,...)$$

é tautológica.



Teorema 2 - Demo (a



Tautologia

Equivalência

Contradição

Contingência

Implicação

Se P(p,q,r,...) implica Q(p,q,r,...), então, não ocorre que os valores lógicos destas duas proposições sejam respectivamente V e F, e por consequinte a última coluna da tabela verdade da condicional encerra somente o valor V, isto é, a condicional é tautológica.

р	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

V V .

V

Equivalência-Contradição-Contingência-Implicação F

61



Teorema 2 - Demo (b)



Tautologia
Equivalência
Contradição
Contingência
Implicação

Se a condicional é tautológica, isto é, se a última coluna de sua tabela verdade encerra somente o valor V, então, não ocorre que os valores lógicos simultâneos das proposições P(p,q,r,...) e Q(p,q,r,...) sejam respectivamente V e F, e, por consequinte, a primeira proposição implica a segunda.