

Таблица подстановок для некоторых видов  
неопределенных интегралов

	Вид интеграла	Вид подстановки
1. Интегралы от элементарных дробей:	1). $\int \frac{dx}{ax+b}$	$t = ax + b.$
	2). $\int \frac{dx}{(ax+b)^m}$	$t = ax + b.$
	3). $\int \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c} dx$	
	4). $\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n} dx$	$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{2n-3}{s(2n-2)} \int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}.$
2. Интегралы от рациональных дробей:	<p>Знаменатель разлагается лишь на:</p> <p>1) неповторяющиеся множители первой степени;</p> <p>2) множители первой степени, среди которых есть повторяющиеся;</p> <p>3) неповторяющиеся множители второй степени и, возможно, множители первой степени;</p> <p>4) повторяющиеся множители второй степени.</p>	$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-b)} + \dots$ $\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \dots + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \dots$ $\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{(x-b)} + \frac{Mx+N}{x^2+px+q} + \frac{Rx+S}{x^2+rx+s} +$ $\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s} + \frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2} + \dots$
3. Интегралы от тригонометрических функций:	1). $\int R(\sin x, \cos x) dx$	$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$
	2). $\int R(\sin x, \cos x) dx$ ( <i>cos нечетн</i> )	$t = \sin x, dt = \cos x dx.$
	3). $\int R(\sin x, \cos x) dx$ ( <i>sin нечетн</i> )	$t = \cos x, dt = -\sin x dx.$
	4). $\int R(\sin x, \cos x) dx$ ( <i>sin и cos четн</i> )	$t = \operatorname{tg} x, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, dx = \frac{dt}{1+t^2}.$
	5). $\int \cos mx \cos nxdx$	$\frac{1}{2} [\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$
	6). $\int \sin mx \cos nxdx$	$\frac{1}{2} [\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$
	7). $\int \sin mx \sin nxdx$	$\frac{1}{2} [-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]$
	8). $\int \sin^m x \cos^n x dx :$ <div style="margin-left: 20px;"> m или n – нечет. полож. цел. число  m+ n – чет. отриц. цел. число  m и n – чет. неотриц. числа </div>	<p>за t принимаем другую функцию.</p> <p><math>t = \operatorname{tg} x.</math></p> <p><math>\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.</math></p>

4. Интегралы от иррациональных функций:	1). $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right) dx$ где n- натур. число	$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n; x = \frac{t^n - b}{a - ct^n}; dx = \left(\frac{t^n - b}{a - ct^n}\right)' dt;$
	2). $x^m(a + bx^n)^p dx$ : $p$ – целое число $\frac{m+1}{n}$ – целое число $\frac{m+1}{n} + p$ – целое число	$t = \sqrt[n]{x}$ , где $\lambda$ – общий знаменатель $m$ и $n$ . $t = \sqrt[s]{a + bx^n}$ , где $s$ – знаменатель числа $p$ . $t = \sqrt[s]{\frac{a + bx^n}{x^n}}$ , где $s$ – знаменатель числа $p$ .
	3). $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ : $\int R(u, \sqrt{m^2 - u^2}) du$ $\int R(u, \sqrt{m^2 + u^2}) du$ $\int R(u, \sqrt{u^2 - m^2}) du$	$u = m \sin t$ или $u = m \cos t$ , $u = mtgt$ или $u = mctgt$ , $u = \frac{m}{\sin t}$ или $u = \frac{m}{\cos t}$
	4). $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$ : если $a > 0$ если $a < 0$ и $c > 0$ если $a < 0$	$\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}$ $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$ $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_1)$

**Несколько примеров интегралов, не выражающихся через  
элементарные функции.**

К таким интегралам относится интеграл вида  $\int R(x, \sqrt{P(x)}) dx$ , где  $P(x)$  – многочлен степени выше второй. Эти интегралы называются **эллиптическими**.

Если степень многочлена  $P(x)$  выше четвертой, то интеграл называется **ультраэллиптическим**.

Если все – таки интеграл такого вида выражается через элементарные функции, то он называется **псевдоэллиптическим**.

Не могут быть выражены через элементарные функции следующие интегралы:

- 1)  $\int e^{-x^2} dx$  – интеграл Пуассона (Симеон Дени Пуассон – французский математик (1781-1840))
- 2)  $\int \sin x^2 dx$ ;  $\int \cos x^2 dx$  – интегралы Френеля (Жан Огюстен Френель – французский ученый (1788-1827) – теория волновой оптики и др.)
- 3)  $\int \frac{dx}{\ln x}$  – интегральный логарифм
- 4)  $\int \frac{e^x}{x} dx$  – приводится к интегральному логарифму
- 5)  $\int \frac{\sin x}{x} dx$  – интегральный синус
- 6)  $\int \frac{\cos x}{x} dx$  – интегральный косинус