Интегральное исчисление.

Первообразная функция.

Задача нахождения первообразной есть задача, обратная задаче дифференцирования: по заданной производной или по заданному дифференциалу найти саму функцию.

Функцию, восстанавливаемую по заданной производной или дифференциалу, называют **первообразной функцией.**

Опр. Функция $F(x)$ называется **первообразной** функцией для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если $F'(x)=f(x)$ для любого x из этого промежутка.

Рассмотрим функции:

$F_1(x)=x^4$ $\qquad F_2(x)=x^4+3$ $\qquad F_3(x)=x^4-7$

Все они являются первообразными для одной и той же функции: $f(x)=4x^3$.

$F_1{}'(x)=4x^3=f(x)$, $\quad F_2{}'(x)=(x^4+3)'=4x^3=f(x)$, $\quad F_3{}'(x)=(x^4-7)'=4x^3=f(x)$

Заметим, что эти функции отличаются друг от друга только константами, имея общую часть $F(x)=x^4$.

Таким образом, все первообразные функции $f(x)$ можно записать с помощью одной формулы, которую называют **общим видом первообразных для функции** $f(x)$.

Справедлива следующая теорема (основное свойство первообразных).

Теорема: Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, то множество всех первообразных для функции $f(x)$ задается формулой: $F(x)+C$, где C - произвольная постоянная.

Операция нахождения первообразной функции по ее производной (или ее дифференциалу) называется **интегрированием.**

Правильность интегрирования проверяется дифференцированием.

1.Неопределенный интеграл.

Опр: Неопределенным интегралом функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением: F(x) + C.

Записывают: $\int f(x)dx = F(x)+C;$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

$1^0.$ $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x);$ $\qquad 2^0.$ $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$

$3^0.$ $\int dF(x) = F(x)+C;$ $\qquad 4^0.$ $\int (u+v-w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ где u, v, w – нек. функ. от x.

$5^0.$ $\int C\cdot f(x)dx = C\cdot\int f(x)dx;$

Замечание 1. Дифференцирование и интегрирование функций являются взаимно обратными операциями.

Замечание 2. Последовательное применение операций дифференцирования и интегрирования $\left(\int d, d\int\ \right)$ взаимно уничтожает друг друга.

Замечание 3. Неопределенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования. Он зависит только от вида подынтегральной функции.

Пример1: $\int (x^2-2\sin x+1)dx=\int x^2dx-2\int \sin xdx+\int dx=\frac{1}{3}x^3+2\cos x+x+C$;

Нахождение значения неопределенного интеграла связано главным образом с нахождением первообразной функции. Для некоторых функций это достаточно сложная задача. Ниже будут рассмотрены способы нахождения неопределенных интегралов для основных классов функций – рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и др.

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

1. $\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \alpha\neq -1$	6. $\int \sin xdx$ =-cosx + C	11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left\|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\|+C$
2. $\int \frac{dx}{x}=\ln\|x\|+C$	7. $\int tgxdx=$ -ln | cosx | +C	12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ = arcsin $\frac{x}{a}$ + C
3. $\int e^x dx$ = e^x + C	8. $\int ctgxdx$ = ln | sinx | + C	13. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$ = tgx + C
4. $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$	9. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$	14. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$ =-ctgx + C
5. $\int \cos xdx$ = sinx + C	10. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x+a}{x-a}\right\|+C$	15. $\int \frac{1}{\cos x}dx=\ln\left\|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\|+C$

16. $\int \frac{1}{\sin x}dx=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+C$.

Методы интегрирования.

Рассмотрим три основных метода интегрирования.

1.Непосредственное интегрирование.

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Или при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральных функций и применением свойств неопределенных интегралов приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется непосредственным интегрированием. Часто используется операция «внесение под знак интеграла» Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x+C$, где С – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))'=-\frac{1}{x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод: $\int \frac{dx}{x}=\ln|x|+C$.

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Пример1. $\int \frac{dx}{x^2-6x+25} = \int \frac{dx}{(x-3)^2+16} = \frac{1}{4} arctg\left(\frac{x-3}{4}\right) + C.$

Пример2.

$$\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx = \int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{2+x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right| +$$

$$+\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

2. Способ подстановки (замены переменных).

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dt получается: $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$

Пример1. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Сделаем замену *t = sinx, dt = cosxdx*. $\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$

Пример2. $\int x(x^2+1)^{3/2}dx = \begin{vmatrix} t = x^2+1 \\ dt = 2xdx \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{vmatrix} = \int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C =$

$$= \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C\cdot$$

Пример3.

$$\int (2x+1)^{20}dx = \{2x+1 = t; \quad dt = 2dx;\} = \int t^{20}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{21}t^{21}\cdot\frac{1}{2} + C = \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C.$$

Пример4.

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}dx = \int \sin^{-3/2} x\cos x dx = \{\sin x = t; \quad dt = \cos x dx\} = \int t^{-3/2}dt = -2t^{-1/2} + C =$$

$$= -2\sin^{-1/2} x + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C.$$

Пример5. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x-1+9}} = \{dx = d(x+1)\} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{9-(x+1)^2}} = \{x+1 = t\} =$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{3^2-t^2}} = \arcsin\frac{t}{3} + C = \arcsin\frac{x+1}{3} + C.$$

Пример 6. $\int e^{\cos^2 x}\sin 2x dx = \left\{t = e^{\cos^2 x}; \quad dt = -e^{\cos^2 x}\cdot 2\cos x\sin x = -\sin 2x\cdot e^{\cos^2 x}dx;\right\} =$

$$= -\int dt = -t + C = -e^{\cos^2 x} + C.$$

Пример7.

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \left\{ \sqrt{x} = t; \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2t} \right\} = \int \frac{2tdt}{(t^2+1)t} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2arctgt + C = 2arctg\sqrt{x} + C.$$

3. Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения: (uv)′ = u′v + v′u, где u и v – некоторые функции от x.

В дифференциальной форме: d(uv) = udv + vdu

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла: $uv = \int udv + \int vdu$ или $\int udv = uv - \int vdu$;

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример 1. $\int x \ln x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = \ln x; & dv = xdx; \\ du = \frac{1}{x}dx; & v = \frac{x^2}{2}; \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int xdx =$

$$= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C = +\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right] + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

Пример2. $\int e^{2x}\cos x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \cos x dx; & v = \sin x \end{array} \right\} = e^{2x}\sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x}dx =$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x; \end{array} \right\} = e^{2x}\sin x - 2\left[-e^{2x}\cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x}dx\right] = e^{2x}\sin x +$$

$$+ 2e^{2x}\cos x - 4\int \cos x e^{2x}dx$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}(\sin x + 2\cos x), \quad \int e^{2x}\cos x dx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Пример3. $\int x^2 \sin x dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x^2; & dv = \sin x dx; \\ du = 2xdx; & v = -\cos x \end{array} \right\} = -x^2\cos x + \int \cos x \cdot 2xdx =$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} u = x; & dv = \cos x dx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{array} \right\} = -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin x dx\right] = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Пример4. $\int x^2 e^{5x}dx = \left\{ \begin{array}{ll} u = x^2; & dv = e^{5x}dx; \\ du = 2xdx; & v = \frac{e^{5x}}{5}; \end{array} \right\} = \frac{1}{5}e^{5x}x^2 - \int \frac{1}{5}e^{5x}2xdx = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\int xe^{5x}dx =$

$$=\left\{\begin{matrix} u=x; & dv=e^{5x}dx; \\ du=dx; & v=\frac{1}{5}e^{5x}; \end{matrix}\right\}=\frac{x^2e^{5x}}{5}-\frac{2}{5}\left[\frac{xe^{5x}}{5}-\int\frac{1}{5}e^{5x}dx\right]=\frac{x^2e^{5x}}{5}-\frac{2xe^{5x}}{25}+\frac{2}{25}\int e^{5x}dx=$$

$$=\frac{x^2e^{5x}}{5}-\frac{2xe^{5x}}{25}+\frac{2e^{5x}}{125}=\frac{e^{5x}}{5}\left(x^2-\frac{2x}{5}+\frac{2}{25}\right).$$

Пример5.

$$\int\frac{\ln x}{x^3}dx=\left\{\begin{matrix} u=\ln x; & dv=\frac{1}{x^3}dx; \\ du=\frac{1}{x}dx; & v=-\frac{1}{2x^2}; \end{matrix}\right\}=-\frac{\ln x}{2x^2}-\int -\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{x}dx=-\frac{\ln x}{2x^2}+\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^3}=-\frac{\ln x}{2x^2}+$$

$$+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right]+C=-\frac{\ln x}{2x^2}-\frac{1}{4x^2}+C.$$

Идея применения формулы заключается в следующем. Подынтегральная выражение всегда можно представить как произведение некоторой функции u и на дифференциал другой функции v. В левой части формулы записан именно такой интеграл. Обратите внимание на интеграл, стоящий в правой части формулы. Его подынтегральное выражение представляет собой произведение функции v на дифференциал du функции u. То есть функции u, v поменялись ролями, в результате чего интеграл, стоящий справа может оказаться более простым и даже табличным. Иначе говоря, формула позволяет интегрирование данной функции заменить интегрированием другой функции. Техника интегрирования сводится к тому, что за u берется такая часть подынтегральной функции, которая при дифференцировании сильно не усложняется, а за dv такая часть подынтегрального выражения, которая легко интегрируется. При интегрировании dv получается $\int dv=v+C$, то есть бесконечное множество первообразных. Для применения формулы интегрирования по частям можно взять любую из первообразных, в частности ту, для которой C=0.

Это упрощает решение. Поэтому при нахождении функции v произвольную постоянную C вводить не следует.

Чтобы предупредить неудачные действия при интегрировании по частям, рекомендуем:

1. в интегралах вида, $\int P(x)a^{kx}dx, \int P(x)e^{kx}dx, \int P(x)\sin kxdx, \int P(x)\cos kxdx,$ где $P(x)$ - многочлен, $k=const$, принимать $u=P(x),$ а dv равным остальной части подынтегрального выражения, включая dx.
2. в интегралах вида $\int P(x)\ln xdx, \int P(x)\arcsin xdx, P(x)\arccos xdx, P(x)arctgxdx, P(x)arctgxdx, P(x)arcctgxdx$ за u принимают логарифм или аркфункцию, а $dv=P(x)dx$;
3. в интегралах $\int e^{kx}\sin pxdx, \int e^{kx}\cos pxdx$ за u можно принять либо e^{kx}, либо $\sin px$ или $(\cos px)$. Остальная часть подынтегрального выражения принимается за dv.

В некоторых случаях интегрирование по частям приходится применять повторно, последовательно упрощая интеграл.