ИНТЕРНЕТ-ТЕСТИРОВАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова»

ИНТЕРНЕТ-ТЕСТИРОВАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие

Чебоксары 2015

УДК 51-37(075.8)
ББК В11я73
И 57

Рецензенты:

Б. Г. Миронов — доктор физ.-мат. наук, профессор ФГБОУ ВПО «Чувашский государственный педагогический университет им. И. Я. Яковлева»;

Е. А. Григорьев — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математических и инструментальных методов экономики Чебоксарского кооперативного института (филиал РУК)

Составители:

В. Г. Агаков, П. С. Атаманов, А. Н. Быкова, Е. В. Володина, И. И. Ильина, Т. В. Картузова, О. И. Кирпикова, Д. Н. Качевский, Н. Я. Попова, С. С. Сайкин, Л. В. Селиверстова, М. Е. Сироткина, С. И. Фролов, Л. Н. Шегай, С. А. Ярдухина

И 57 **Интернет**-тестирование по математике: учеб. пособие / сост. В. Г. Агаков, П. С. Атаманов, А. Н. Быкова и др. — Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2015. — 314 с.

ISBN 978-5-7677-2038-5

Настоящее издание состоит из кратких теоретических сведений по всем разделам высшей математики, изучаемым студентами технических специальностей, набора соответствующих этим разделам стандартных задач, а также подробных решений демонстрационных вариантов тестовых заданий.

Для студентов I и II курсов технических факультетов для подготовки к интернет-тестированию по математике.

Ответственный редактор канд. физ.-мат. наук, профессор В. Г. Агаков

Утверждено Учебно-методическим советом университета

ISBN 978-5-7677-2038-5

УДК 51-37(075.8)
ББК В11я73

Одним из важных моментов при аккредитации вуза является проведение тестирования в рамках федерального интернет-экзамена. Традиционно этот экзамен проводится со студентами старших курсов, достаточное время назад закончивших изучение всех математических дисциплин. Поэтому особенно актуален выбор правильной методики подготовки к интернет-тестированию, которая предполагает восстановление в памяти основных математических понятий в достаточно короткие сроки. Для такой подготовки требуется специальная учебная литература.

Настоящее пособие предназначено для того, чтобы помочь студентам лучше разобраться в особенностях проведения интернет-тестирования. В начале каждой темы кратко изложены основные теоретические сведения (определения, теоремы, формулы), необходимые для решения последующих задач. Приведены решения типовых задач, даны задачи для самостоятельной работы.

Предлагаемое учебное пособие дает возможность студентам и преподавателям познакомиться с требованиями, предъявляемыми к базовому содержанию дисциплины, структурой тестовых материалов, формами тестовых заданий, выполняемыми действиями по выбору правильного ответа на конкретных примерах тестов и другими важными элементами подготовки к тестированию.

Раздел 1
Алгебра и аналитическая геометрия

1.1. Определители, их свойства и вычисление

Определение 1.1. Определителем называется число, которое в зависимости от порядка вычисляется следующим образом:
— определитель второго порядка равен

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

— определитель третьего (или n-го) порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

равен сумме произведений элементов какой-либо строки (или столбца) на свои *алгебраические дополнения* (A_{ij}), например,

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

где $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, M_{ij} — *минор* элемента a_{ij} (например, для элемента a_{12} имеем $M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$).

Основные свойства определителей:

1) определитель равен нулю, если какая-либо строка или столбец целиком состоит из нулей, или две строки или два столбца одинаковы или пропорциональны;

2) определитель не изменит своей величины, если к элементам какой-либо строки или столбца добавить соответствующие элементы другой строки или столбца, умноженные на одно и то же число.

Пример 1.1. Разложение определителя $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ по элементам первой строки имеет вид...

1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Решение. Разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки можно представить как

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Пример 1.2. Определитель $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \\ 7 & -1 & 3 \end{vmatrix}$ равен...

1) 35; 2) -30; 3) 25; 4) -20.

Решение. Определитель третьего порядка вычисляется, например, разложением по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 5 \\ 7 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 44 + 96 - 105 = 35.$$

1.2. Матрицы и действия над ними

Определение 1.2. Линейные операции над матрицами — это поэлементное *сложение* и *вычитание матриц* одинакового размера, а также *умножение матрицы на число*:

1) сложение:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix};$$

2) умножение на число:

$$k\cdot A=\begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & ka_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц. Пусть матрица A_{mn} имеет m строк и n столбцов. Умножение матриц $A_{mk}\times B_{kn}$ возможно, если количество столбцов (длина строк) первого сомножителя (k) равно количеству строк (длине столбцов) второго. В результате получается матрица C_{mn}, каждый элемент которой равен

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+...+a_{ik}b_{kj}\quad (i=1\div m,\, j=1\div n);$$

графически это выглядит как поэлементное наложение и перемножение i-й строки первого сомножителя на j-й столбец второго и сложение получившихся произведений.

Произведение матриц не обладает свойством коммутативности: $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Определение 1.3. Матрица A^T называется *транспонированной* к матрице A, если выполняется условие $a_{ij}^T=a_{ji}$ для всех i, j, т.е. строки матрицы A выстроены в столбцы матрицы A^T с тем же номером.

Определение 1.4. *Рангом* $\operatorname{rang} A$ матрицы A называется наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю.

Минор с наибольшим порядком находим приведением матрицы с помощью элементарных преобразований (перемещение строк и столбцов; поэлементное прибавление какой-либо строки или столбца, умноженного на одно и то же число, к другой строке или столбцу) к треугольному или трапецеидальному виду (когда под главной диагональю матрицы остаются только нулевые элементы). Тогда порядок полученного минора с ненулевой главной диагональю равен рангу матрицы.

Минором матрицы порядка n называется определитель, построенный из элементов матрицы, находящихся на пересечении каких-либо n строк и n столбцов данной матрицы.

Определение 1.5. *Обратной матрицей* матрицы A называется такая матрица A^{-1}, для которой справедливо равенство

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где E — *единичная матрица* (диагональные элементы $a_{ij} = 1$, все остальные — нули) того же порядка, что и A.

Обратной матрицей обладает любая невырожденная ($\Delta_A \neq \neq 0$) квадратная матрица. Один из способов построения обратной матрицы — использование присоединенной матрицы A^V:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad A^V = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix},$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta_A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} — алгебраические дополнения a_{ij}.

Пример 1.3. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда матрица $C = 2A^T - 3B$ равна...

1) $\begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -9 & 6 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 10 & -1 & -2 \\ 9 & -4 & -14 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -8 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 12 & 2 & 2 \\ 8 & -4 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. При умножении матрицы на число каждый элемент матрицы умножается на данное число. При сложении или вычитании матриц одинаковой размерности соответствующие элементы матриц складываются или вычитаются друг из друга. В данном случае

$$2A^T - 3B = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}^T - 3\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= 2\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -9 & 6 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -8 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 3 & 0 \\ -9 & 6 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -1 & -2 \\ 9 & -4 & -14 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.4. Даны матрицы: A размера 3×4, B размера $k \times n$ и C размера 3×5. Если выполняется равенство $A \times B = C$, то сумма $k + n$ равна...

1) 9; 2) 6; 3) 8; 4) 7.

Решение. Произведением матрицы A размера $m \times k$ на матрицу B размера $k \times n$ является матрица C размера $m \times n$. Следовательно, $k = 4$, $n = 5$ и $k + n = 9$.

Пример 1.5. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Тогда матрица $C = 3A \cdot B$ имеет вид...

1) $\begin{pmatrix} 11 & -7 \\ 13 & -6 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 0 & -15 \\ 15 & 15 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 33 & -21 \\ 39 & -18 \end{pmatrix}$.

Решение. Произведением $A \cdot B$ матрицы A размером $m \times n$ на матрицу B размером $n \times l$ называется матрица C размером $m \times l$, элемент которой c_{ij} равен сумме произведений соответственных элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B. Тогда

$$C = 3A \cdot B = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 1 & 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 4 \\ 3 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 & 3 \cdot 3 + (-1) \cdot 4 \end{pmatrix} =$$

$$= 3 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -15 \\ 15 & 15 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.6. Умножение матрицы A на матрицу B **невозможно**, если эти матрицы имеют вид...

1) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$;

3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$;

4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Произведением $A \cdot B$ матрицы A размером $m \times n$ на матрицу B размером $n \times l$ называется матрица C размером $m \times l$, элемент которой c_{ij} равен сумме произведений соответственных элементов i-й строки матрицы A и j-го столбца матрицы B. То есть:

1) произведения матриц $A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 8 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ не существует, так как количество столбцов матрицы A не равно количеству строк матрицы B;

2) произведения матриц $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ не существует, так как количество столбцов матрицы A не равно количеству строк матрицы B;

3) количество столбцов матрицы A равно количеству строк матрицы B, следовательно, произведение $A \cdot B$ существует. Действительно,

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 0 \\ 4 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 5 \cdot 0 \\ -1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix};$$

4) количество столбцов матрицы A равно количеству строк матрицы B, следовательно, произведение $A \cdot B$ существует. Действительно,

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \\ -1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.7. Ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ равен...

1) 1; 2) 3; 3) 0; 4) 4.

Решение. Произведем элементарные преобразования, не изменяющие ранга матрицы, и приведем ее к треугольному виду.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

Прибавим ко второй строке первую строку, умноженную на (-2), а к третьей строке прибавим первую строку, умноженную на (-1):

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2+(-2)\cdot 1 & 1+(-2)\cdot(-1) & 1+(-2)\cdot 1 \\ 1+(-1)\cdot 1 & 1+(-1)\cdot(-1) & 2+(-1)\cdot 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

Прибавим к третьей строке вторую строку, умноженную на $(-2/3)$:

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 2+3\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right) & 1+(-1)\cdot\left(-\dfrac{2}{3}\right) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \dfrac{5}{3} \end{pmatrix}.$$

Рангом матрицы называется наибольший из порядков ее миноров, не равных нулю, а данная матрица содержит ненулевой минор третьего порядка:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & \dfrac{5}{3} \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$$

Следовательно, ранг исходной матрицы равен трем: $\operatorname{rang} A = 3$.

Пример 1.8. Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -1 \\ 5 & 2 & 11 & 1 \end{pmatrix}$ равен...

Решение. Вычислим последовательно миноры:

$$M_1 = 2 \neq 0,$$

следовательно, ранг матрицы $\operatorname{rang} A \geqslant 1$;

$$M_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0,$$

следовательно, ранг матрицы $\operatorname{rang} A \geqslant 2$;

$$M_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 11 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -11 + 8 - 3\cdot(4-5) = 0,$$

следовательно, ранг матрицы $\operatorname{rang} A \geqslant 2$;

$$M_3' = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -0 - 5 + 2 - 0 - 1 + 4 = 0.$$

Следовательно, ранг матрицы $\operatorname{rang} A = 2$, т.к. наивысший порядок минора, не равного нулю, равен двум.

Пример 1.9. Для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ x & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ существует обратная, если значение x **не равно**...

Решение. Матрица имеет обратную, если определитель матрицы не равен нулю, т.е. $\det A \neq 0$:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ x & 4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} x & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} x & 4 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (4 \cdot 0 - 2 \cdot (-2)) - 3 \cdot (x \cdot 0 - 2 \cdot 0) + 1 \cdot (x \cdot (-2) - 4 \cdot 0) =$$

$$= 4 - 0 - 2x = -2x + 4 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 2.$$

Пример 1.10. Для матрицы A **не существует** обратной, если она равна...

1) $\begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} \sin x & \sin x \\ \cos x & \cos x \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} -\sin x & -\cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix}$.

Решение. Всякая невырожденная квадратная матрица имеет обратную матрицу, т.е. матрица не имеет обратную, если определитель матрицы равен нулю:

1) для матрицы $A = \begin{pmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix}$ существует обратная, так как

$$|A| = \begin{vmatrix} \sin x & -\cos x \\ \cos x & \sin x \end{vmatrix} = \sin x \sin x - (-\cos x)\cos x =$$

$$= \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \neq 0;$$

2) для матрицы $A = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$ существует обратная, так как

$$|A| = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos x \cos x - \sin x \cdot (-\sin x) =$$

$$= \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0;$$

3) для матрицы $A = \begin{pmatrix} -\sin x & -\cos x \\ -\cos x & \sin x \end{pmatrix}$ существует обратная, так как

$$|A| = \begin{vmatrix} -\sin x & -\cos x \\ -\cos x & \sin x \end{vmatrix} = -\sin x \sin x - (-\cos x)(-\cos x) =$$

$$= -\sin^2 x - \cos^2 x = -1 \neq 0;$$

4) для матрицы $A = \begin{pmatrix} \sin x & \sin x \\ \cos x & \cos x \end{pmatrix}$ не существует обратной, так как

$$|A| = \begin{vmatrix} \sin x & \sin x \\ \cos x & \cos x \end{vmatrix} = \sin x \cos x - \sin x \cos x = 0.$$

1.3. Системы линейных уравнений

Правило Крамера. Система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

имеет единственное решение (x_1, x_2), если определитель системы $\Delta \neq 0$. Тогда решение определяется формулами

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},$$

где Δ_i (вспомогательные определители) получаются из Δ заменой i-го столбца столбцом свободных элементов $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$. Для $n > 2$ решение строится аналогично.

Метод Гаусса. Системы m уравнений с n неизвестными обычно решают методом последовательных исключений неизвестных — методом Гаусса. С помощью элементарных преобразований над строками и перестановкой столбцов матрица из коэффициентов (A) и расширенная матрица $(\bar{A} = A \mid B)$, в которой присутствует столбец свободных членов (B), могут быть приведены к минимальной форме — треугольной или трапецеидальной, в которых элементы под главной диагональю обращены в нули. При этом определяются ранги матриц и устанавливается разрешимость системы. Условие разрешимости:

$$\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} \bar{A}$$

(теорема Кронекера—Капелли). Если условие выполнено, то последовательно находим неизвестные, начиная с наименьшего по длине уравнения и положив свободными «лишние» неизвестные.

Пример 1.11. Если $\lambda \cdot \mu \neq -6$, то решение системы линейных уравнений $\begin{cases} 3x + \lambda y = 6, \\ \mu x - 2y = 5 \end{cases}$ методом Крамера можно представить в виде...

$$1)\ x = \begin{vmatrix} 3 & \lambda \\ \mu & -2 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ \mu & 5 \end{vmatrix}, \quad y = \begin{vmatrix} 3 & \lambda \\ \mu & -2 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 6 & \lambda \\ 5 & -2 \end{vmatrix};$$

$$2)\ x = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ \mu & 5 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 3 & \lambda \\ \mu & -2 \end{vmatrix}, \quad y = \begin{vmatrix} 6 & \lambda \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 3 & \lambda \\ \mu & -2 \end{vmatrix};$$

$$3)\ x = \begin{vmatrix} 6 & \lambda \\ 5 & -2 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 3 & \lambda \\ \mu & -2 \end{vmatrix}, \quad y = \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ \mu & 5 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 3 & \lambda \\ \mu & -2 \end{vmatrix};$$

$$4)\ x = \begin{vmatrix} 3 & \lambda \\ \mu & -2 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 6 & \lambda \\ 5 & -2 \end{vmatrix}, \quad y = \begin{vmatrix} 3 & \lambda \\ \mu & -2 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ \mu & 5 \end{vmatrix}.$$

Решение. Если определитель матрицы системы не равен нулю, то решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

по правилу Крамера находится в виде

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta},$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 6 & \lambda \\ 5 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & \lambda \\ \mu & -2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 6 \\ \mu & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & \lambda \\ \mu & -2 \end{vmatrix}}.$$

Пример 1.12. После проведения прямого хода метода Гаусса система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 9x_3 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 2 \end{cases}$$

может быть записана в виде...

$$1)\ \begin{cases} x_1+4x_2+9x_3=6, \\ 5x_2+2x_3=4, \\ 3x_3=2; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} x_1+4x_2+9x_3=6, \\ x_2+15x_3=10, \\ -80x_3=-56; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} x_1+4x_2+9x_3=6, \\ x_2 \qquad\quad =1, \\ 8x_3=-56; \end{cases} \qquad 4)\ \begin{cases} x_1+4x_2+9x_3=6, \\ x_2+5x_3=10, \\ x_3=-56. \end{cases}$$

Решение. По методу Гаусса прямой ход состоит в приведении матрицы системы с помощью элементарных преобразований строк к трапецеидальной или треугольной форме. Запишем расширенную матрицу системы и преобразуем ее:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 9 & 6 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 9 & 6 \\ 0 & -7 & -25 & -14 \\ 0 & -1 & -15 & -10 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & 15 & 10 \\ 0 & 7 & 25 & 14 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & 15 & 10 \\ 0 & 0 & -80 & -56 \end{array}\right).$$

Следовательно, система может быть записана в виде

$$\begin{cases} x_1+4x_2+9x_3=6, \\ x_2+15x_3=10, \\ -80x_3=-56. \end{cases}$$

Пример 1.13. Система линейных уравнений $\begin{cases} x+y+z=3, \\ y-z=2, \\ 2y+\lambda z=5 \end{cases}$ несовместна, если λ равно...

1) -2; 2) 5; 3) 2; 4) -5.

Решение. Система линейных уравнений несовместна, если ранг основной матрицы системы уравнений меньше ранга расширенной матрицы. Расширенная матрица системы имеет вид $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & \lambda & 5 \end{array}\right)$. Вычислим минор третьего порядка этой матрицы, не содержащей элемент λ:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 5-4 = 1 \neq 0.$$

Ранг расширенной матрицы системы должен быть равен двум (определитель матрицы системы равен нулю). Из этого условия находим λ:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -2.$$

1.4. Определение и базис линейного (векторного) пространства

Множество L образует *линейное* (или *векторное*) *пространство*, если для любых двух его элементов $\bar{a}$, $\bar{b}$ определены операции сложения (+) и умножения на действительное число ($\cdot$) со следующими аксиомами и следствиями:

1) $\bar{a} + \bar{b} \in L$;

2) $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$ (коммутативность);

3) $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$ (ассоциативность);

4) существует $\bar{x} \in L$: $\bar{a} + \bar{x} = \bar{b}$ (разрешимость), $\bar{x}$ — разность: $\bar{x} = \bar{b} - \bar{a}$;

5) для любых $\bar{a} \in L$ и $\alpha \in R$: $\alpha\bar{a} \in L$;

6) $(\alpha\beta)\bar{a} = \alpha(\beta\bar{a})$ (ассоциативность);

7) $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$;

8) $\alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b}$, $(\alpha + \beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a}$ (дистрибутивность);

9) существует нейтральный по отношению к сложению элемент $\bar{0}$: $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$ для любого $\bar{a} \in L$ (существование нулевого вектора);

10) для каждого $\bar{a} \in L$ существует противоположный элемент $(-\bar{a})$: $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$;

11) $0 \cdot \bar{a} = \bar{0}$, $\alpha\bar{0} = \bar{0}$, $(-1)\bar{a} = -\bar{a}$.

Определение 1.6. Множество векторов $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$, … , $\bar{u}$ называется *линейно независимой системой векторов*, если равенство

$$\alpha_1\bar{x} + \alpha_2\bar{y} + \alpha_3\bar{z} + ... + \alpha_n\bar{u} = 0 \quad (\alpha_i \in R)$$

выполняется лишь при всех $\alpha_i = 0$.

Определение 1.7. Если в линейном пространстве L имеется n линейно независимых векторов, но любые $n + 1$ векторов линейно зависимы, то пространство L называется n-мерным.

Определение 1.8. *Базисом* n-мерного линейного пространства называется совокупность n любых линейно независимых векторов пространства; каждый вектор этого пространства может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации векторов базиса.

Линейная независимость векторов может быть установлена вычислением определителя ($\det$) из координат векторов: если $\det \neq 0$, то система линейно независима.

Пример 1.14. Элементы линейного пространства не обладают свойством...

1) $x + (-x) = 0$ для любого $x \in L$;
2) $x(-y) = -yx$ для любых $x, y \in L$;
3) $x + y = y + x$ для любых $x, y \in L$;
4) $0 \cdot x = \bar{0}$ для любого $x \in L$.

Решение. Учитывая свойства, приведенные в теоретической части, получаем: элементы линейного пространства не обладают свойством $x(-y) = -yx$ для любых $x, y \in L$.

Пример 1.15. Даны векторы $\bar{a} = 2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{i} - \bar{j} + 3\bar{k}$. Тогда линейная комбинация $3\bar{a} - 2\bar{b}$ этих векторов равна...

1) $3\bar{j} - 7\bar{k}$; 2) $\bar{i} + 2\bar{j} - 4\bar{k}$; 3) $4\bar{i} + \bar{j} + 3\bar{k}$; 4) $4\bar{i} + 5\bar{j} - 9\bar{k}$.

Решение. Подставляя векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ в линейную комбинацию и приводя подобные слагаемые, получим:

$$3\bar{a} - 2\bar{b} = 3(2\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}) - 2(\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}) = 6\bar{i} + 3\bar{j} - 3\bar{k} - 2\bar{i} + 2\bar{j} - 6\bar{k} = 4\bar{i} + 5\bar{j} - 9\bar{k}.$$

Пример 1.16. Дано двумерное векторное пространство с базисом $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$. Если вектор $\bar{e}_1 = (-2, 1)$, то вектор $\bar{e}_2$ может иметь координаты...

1) $(2, 1)$; 2) $(2, -1)$; 3) $\left(1, -\dfrac{1}{2}\right)$; 4) $(6, -3)$.

Решение. Пусть $\bar{e}_2 = (x_1, x_2)$. Два вектора образуют базис, если определитель, составленный из координат этих векторов, не равен нулю, т.е. $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Тогда $x_1 + 2x_2 \neq 0$. Этому условию удовлетворяет вектор $(2, 1)$. Остальные векторы, представленные среди вариантов ответов, не удовлетворяют данному условию.

Пример 1.17. Совокупность векторов $\bar{a} = (\lambda - 1; 1; 2)$, $\bar{b} = (0; \lambda - 2; 3)$, $\bar{c} = (0; 0; \lambda + 1)$ может являться базисом трехмерного линейного пространтва, если λ равно...

1) -1; 2) 2; 3) -2; 4) 1.

Решение. Совокупность линейно независимых векторов называется базисом линейного пространства. Значит, совокупность трех векторов является базисом, если векторы линейно независимы, т.е. определитель, составленный из координат этих векторов, не равен нулю. Тогда

$$\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda-2 & 0 \\ 2 & 3 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-1)\cdot\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 \\ 3 & \lambda+1 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 1 & \lambda-2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= (\lambda-1)((\lambda-2)(\lambda+1)-0\cdot 3)-0+0 = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)\neq 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lambda \neq \pm 1;\ 2.$$

1.5. Вектора в евклидовом пространстве

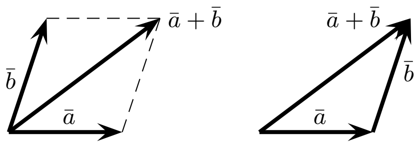
Определение 1.9. *Нормой* (*длиной*) *вектора* называется неотрицательный квадратный корень из скалярного произведения вектора на себя (скалярного квадрата):

$$\|\bar{a}\| = \sqrt{\bar{a}\cdot\bar{a}} = \sqrt{\bar{a}^2} = |\bar{a}|.$$

Норма вектора в координатной форме:

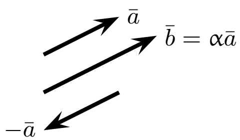
$$\bar{a} = (x_a, y_a, z_a), \quad \|\bar{a}\| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\,.$$

Линейные операции над векторами и их свойства:
1) *сложение* $\bar{a}+\bar{b}$:



а) $\bar{a}+\bar{b} = \bar{b}+\bar{a}$ (коммутативность);
б) $\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c}) = (\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}$ (ассоциативность);
2) *умножение вектора на число* $\alpha\bar{a} = \bar{b}$:

$$\begin{cases} \|\bar{b}\| = \|\bar{a}\|\cdot\alpha; \\ \bar{b} \parallel \bar{a}; \\ (-1)\bar{a} = -\bar{a}. \end{cases}$$



Линейные операции над векторами в координатной форме:

$$\bar{a}+\bar{b} = (x_a+x_b, y_a+y_b, z_a+z_b), \quad \alpha\bar{a} = (\alpha x_a, \alpha y_a, \alpha z_a).$$

Пример 1.18. На векторах $\overline{AB} = \bar{i} + \bar{j}$ и $\overline{AC} = -\bar{k} - 3\bar{j}$ как на сторонах построен треугольник. Тогда длина стороны CB равна...

1) 6; 2) $\sqrt{6}$; 3) $2\sqrt{5}$; 4) $3\sqrt{2}$.

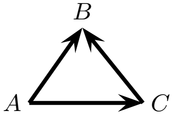


Рис. 1.1

Решение. Сделаем схематический чертеж (рис. 1.1). По правилу вычитания векторов $\overline{CB} = \overline{AB} - \overline{AC}$. Координаты векторов таковы: $\overline{AB} = (1;1;0)$, $\overline{AC} = (0;-3;-1)$. Тогда

$$\overline{CB} = \overline{AB} - \overline{AC} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2) =$$
$$= (1 - 0; 1 - (-3); 0 - (-1)) = (1;4;1).$$

Вычислим требуемую длину стороны CB или, что то же самое, длину вектора $\overline{CB}$:

$$|\overline{CB}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1^2 + 4^2 + 1^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}.$$

Пример 1.19. Вектор $\bar{a} = -3\bar{i} + y_1\bar{j} + 4\bar{k}$ расположен во 2-м октанте и $\|\bar{a}\| = \sqrt{125}$. Вектор $\bar{b} = -2\bar{i} - 6\bar{j} + z_2\bar{k}$ расположен в 7-м октанте и $\|\bar{b}\| = \sqrt{184}$. Тогда $\|\bar{a} + \bar{b}\|$ равна...

1) $\sqrt{125} + \sqrt{184}$; 2) $\sqrt{105}$; 3) $\sqrt{297}$; 4) $\sqrt{345}$.

Решение. По условию вектор $\bar{a} = -3\bar{i} + y_1\bar{j} + 4\bar{k}$ расположен во 2-м октанте, поэтому $y_1 > 0$. Для нормы этого вектора имеем

$$\|\bar{a}\| = \sqrt{(-3)^2 + y_1^2 + 4^2} = \sqrt{25 + y_1^2},$$

а т.к. $\|\bar{a}\| = \sqrt{125}$, то получаем уравнение $25 + y_1^2 = 125$, откуда с учетом неравенства $y_1 > 0$ находим, что $y_1 = 10$. Следовательно, $\bar{a} = -3\bar{i} + 10\bar{j} + 4\bar{k}$.

Вектор $\bar{b} = -2\bar{i} - 6\bar{j} + z_2\bar{k}$ расположен в 7-м октанте. Тогда, учитывая значения известных координат, находим, что $z_2 < 0$. По аналогии с предыдущим имеем:

$$\|\bar{b}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-6)^2 + z_2^2} = \sqrt{40 + z_2^2},$$

$$\|\bar{b}\| = \sqrt{184}, \quad 40 + z_2^2 = 184,$$

откуда с учетом неравенства $z_2 < 0$, имеем $z_2 = -12$. Следовательно, $\bar{b} = -2\bar{i} - 6\bar{j} - 12\bar{k}$. Тогда сумма найденных векторов

$$\bar{a} + \bar{b} = (-3\bar{i} + 10\bar{j} + 4\bar{k}) + (-2\bar{i} - 6\bar{j} - 12\bar{k}) = -5\bar{i} + 4\bar{j} - 8\bar{k},$$

а норма суммы векторов

$$\|\bar{a} + \bar{b}\| = \sqrt{(-5)^2 + 4^2 + (-8)^2} = \sqrt{25 + 16 + 64} = \sqrt{105}.$$

Пример 1.20. Точки A, B, C, D — последовательные вершины параллелограмма. Точка M — точка пересечения его диагоналей. Если $\overline{AB} = \bar{a}$, $\overline{AD} = \bar{b}$, то $\overline{BM}$ равен...

1) $\dfrac{\bar{b}}{2} + \dfrac{\bar{a}}{2}$; 2) $\dfrac{\bar{b}}{2} - \dfrac{\bar{a}}{2}$; 3) $\bar{b} - \bar{a}$; 4) $\dfrac{\bar{a}}{2} - \dfrac{\bar{b}}{2}$.

Решение. Условие задачи полезно проиллюстрировать рисунком, который поможет при решении (рис. 1.2). По правилу вычитания векторов $\overline{BD} = \bar{b} - \bar{a}$. По свойству диагоналей параллелограмма: $\overline{BM} = \frac{1}{2}\overline{BD}$. Тогда

$$\overline{BM} = \frac{\bar{b} - \bar{a}}{2} = \frac{\bar{b}}{2} - \frac{\bar{a}}{2}.$$

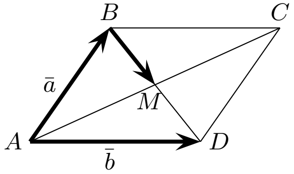


Рис. 1.2

Пример 1.21. Даны векторы $\bar{a} = (-1; 2; -3)$ и $\bar{b} = (1; 1; 1)$. Если $\bar{a} - 2\bar{b} + \bar{c} = \bar{0}$, то вектор $\bar{c}$ равен...

1) $(3; 0; 5)$; 2) $(1; 0; -1)$; 3) $(1; 4; -1)$; 4) $(3; 0; -1)$.

Решение.

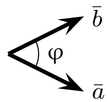
$$\bar{a} - 2\bar{b} + \bar{c} = \bar{0} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \bar{c} = 2\bar{b} - \bar{a} = (2; 2; 2) - (-1; 2; -3) = (3; 0; 5).$$

1.6. Произведения векторов

1. Скалярное произведение векторов. Скалярное произведение векторов — это число, равное

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\| \cdot \cos\varphi,$$



где φ — угол между векторами. Отсюда следует:

1) $\cos\varphi = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\|}$;

2) если $\varphi = \pi/2$, то $\bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ (условие перпендикулярности векторов).

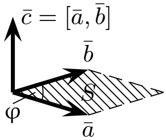
В координатной форме:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b,$$

$$\cos\varphi = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \cdot \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}.$$

Свойства скалярного произведения:
1) $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ (коммутативность);
2) $(\alpha\bar{a}) \cdot \bar{b} = \alpha(\bar{a} \cdot \bar{b})$ (ассоциативность);
3) $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$ (дистрибутивность).

2. Векторное произведение векторов. Векторное произведение векторов — это вектор, равный



$$\bar{a} \times \bar{b} = [\bar{a}, \bar{b}] = \bar{c} : \begin{cases} 1)\ \|\bar{c}\| = \|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\| \cdot \sin\varphi = S; \\ 2)\ \bar{c} \perp \bar{a},\ \bar{c} \perp \bar{b}; \\ 3)\ \bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \text{ образуют правую} \\ \qquad\qquad \text{тройку векторов.} \end{cases}$$

В координатной форме:

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} \cdot \bar{i} + \begin{vmatrix} z_a & x_a \\ z_b & x_b \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} \cdot \bar{k}.$$

Свойства векторного произведения:
1) $[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}]$ (антикоммутативность);
2) $[(\alpha\bar{a}), \bar{b}] = \alpha[\bar{a}, \bar{b}]$ (ассоциативность);
3) $[(\bar{a} + \bar{b}), \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{c}] + [\bar{b}, \bar{c}]$ (дистрибутивность).

3. Смешанное произведение векторов. Смешанное произведение трех векторов — это число, равное

$$[\bar{a}, \bar{b}] \cdot \bar{c} = \bar{a}\bar{b}\bar{c}.$$

Следствия:
1) $|\bar{a}\bar{b}\bar{c}|$ равен объему параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$;
2) если $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0$, то эти три вектора компланарны.
Смешанное произведение в координатной форме:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \\ x_c & y_c & z_c \end{vmatrix}.$$

Пример 1.22. Даны два вектора $\bar{a} = 2\bar{p} - \bar{q}$ и $\bar{b} = 3\bar{p} - 2\bar{q}$, где $\|\bar{p}\| = 3$, $\|\bar{q}\| = 2$, угол между векторами $\bar{p}$ и $\bar{q}$ равен $\pi/3$. Тогда скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ будет равно...

Решение. Скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равно

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (2\bar{p} - \bar{q}) \cdot (3\bar{p} - 2\bar{q}) = 6\bar{p} \cdot \bar{p} - 4\bar{p} \cdot \bar{q} - 3\bar{q} \cdot \bar{p} + 2\bar{q} \cdot \bar{q} =$$
$$= 6\|\bar{p}\|^2 - 7\|\bar{p}\| \cdot \|\bar{q}\| \cdot \cos\frac{\pi}{3} + 2\|\bar{q}\|^2 =$$
$$= 6 \cdot 3^2 - 7 \cdot 3 \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot 2^2 = 41.$$

Пример 1.23. Косинус угла между векторами $\bar{a} = 4\bar{i} + 3\bar{k}$ и $\bar{b} = 3\bar{k}$ равен...

1) 2/3; 2) 3/5; 3) 13/15; 4) 3/7.

Решение. Применим формулу:

$$\cos(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} =$$

$$= \frac{4 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot 3}{\sqrt{4^2 + 0^2 + 3^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 3^2}} = \frac{9}{5 \cdot 3} = \frac{3}{5}.$$

Пример 1.24. Длина стороны квадрата, площадь которого равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = \bar{i} + 2\bar{j}$ и $\bar{b} = -\bar{i} + \bar{k}$, равна...

1) 1; 2) 3; 3) 1/3; 4) $\sqrt{3}$.

Решение. Площадь S параллелограмма вычисляется по формуле $S = |[\bar{a}, \bar{b}]|$, где

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\bar{i} - \bar{j} + 2\bar{k}.$$

Тогда

$$|[\bar{a}, \bar{b}]| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3.$$

Площадь квадрата также равна 3, значит, сторона квадрата равна $\sqrt{3}$.

Пример 1.25. В ортонормированном базисе $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ даны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ своими координатами $(2; 0; -1)$ и $(-3; 1; -1)$ соответственно. Тогда векторное произведение $[\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} - \bar{b}]$ равно...

Решение. Преобразуем выражение $[\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} - \bar{b}]$, используя свойства операции векторного умножения:

$$[\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} - \bar{b}] = [\bar{a}, \bar{a}] - [\bar{a}, \bar{b}] + [\bar{b}, \bar{a}] - [\bar{b}, \bar{b}].$$

Тогда, учитывая, что $[\bar{a}, \bar{a}] = [\bar{b}, \bar{b}] = \bar{0}$, где $\bar{0}$ — нулевой вектор, и $[\bar{b}, \bar{a}] = -[\bar{a}, \bar{b}]$, получим

$$[\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} - \bar{b}] = -[\bar{a}, \bar{b}] - [\bar{a}, \bar{b}] = -2[\bar{a}, \bar{b}].$$

Векторное произведение

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \cdot \bar{k} =$$

$$= \bar{i} - (-2-3)\bar{j} + 2\bar{k} = \bar{i} + 5\bar{j} + 2\bar{k}.$$

Тогда

$$[\bar{a}+\bar{b}, \bar{a}-\bar{b}] = -2 \cdot [\bar{a}, \bar{b}] = -2(\bar{i} + 5\bar{j} + 2\bar{k}) = -2\bar{i} - 10\bar{j} - 4\bar{k}.$$

Задачу можно решить и так:
1) находим $\bar{a} + \bar{b} = (2\bar{i} + 0\bar{j} - \bar{k}) + (-3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}) = -\bar{i} + \bar{j} - 2\bar{k}$;
2) находим $\bar{a} - \bar{b} = (2\bar{i} + 0\bar{j} - \bar{k}) - (-3\bar{i} + \bar{j} - \bar{k}) = 5\bar{i} - \bar{j}$;
3) находим векторное произведение:

$$[\bar{a}+\bar{b}, \bar{a}-\bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 1 & -2 \\ 5 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \bar{i} - \begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \cdot \bar{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \cdot \bar{k} = -2\bar{i} - 10\bar{j} - 4\bar{k}.$$

Пример 1.26. Даны векторы $\bar{a} = (1; -1; 1)$, $\bar{b} = (0; 3; 0)$, $\bar{c} = (1; 1; m)$. Смешанное произведение $\bar{a}\bar{b}\bar{c} = 6$. Тогда значение m равно...

1) 7; 2) -1; 3) 1; 4) 0.

Решение. Смешанное произведение трех векторов вычисляется по формуле

$$\bar{a}\bar{c}\bar{b} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ c_x & c_y & c_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & m \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 6.$$

Вычислив определитель, получим уравнение $-3m+3=0$, откуда $m = -1$.

1.7. Градиент скалярного поля

Скалярное поле — это пространство (двумерное или трехмерное), в каждой точке которого определена скалярная функция $u = u(x, y)$ или $u = u(x, y, z)$.

Определение 1.10. Градиентом скалярного поля u называется вектор

$$\operatorname{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k},$$

направленный в сторону наибыстрейшего возрастания функции u, с модулем, равным скорости этого возрастания.

Пример 1.27. Градиент скалярного поля
$$U = x^2 + 2y^2 + 3z^2 + xy + 3x - 2y - 6z$$
равен нулевому вектору в точке...

1) $(-2;1;1)$; 2) $(0;0;0)$; 3) $(1;0;1)$; 4) $(2;-1;0)$.

Решение. Градиент поля находится по формуле
$$\operatorname{grad} U = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k}.$$
Он равен нулевому вектору тогда и только тогда, когда
$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0.$$
Так как
$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x + y + 3, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = 4y + x - 2, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 6x - 6,$$
то получаем следующую систему линейных уравнений:
$$\begin{cases} 2x + y + 3 = 0, \\ 4y + x - 2 = 0, \\ 6z - 6 = 0, \end{cases}$$
решая которую находим единственное решение: $x = -2$, $y = 1$, $z = 1$. Значит, градиент поля U равен $\bar{0}$ в точке $(-2;1;1)$.

Пример 1.28. Градиент скалярного поля $z = e^{-\frac{x^2}{y}}$ в точке $A(1;1)$ равен...

1) $-\frac{2}{e}\bar{i} + \frac{1}{e}\bar{j}$; 2) $-\frac{2}{e}\bar{i} - \frac{1}{e}\bar{j}$; 3) $\frac{1}{e}\bar{i} + \frac{1}{e}\bar{j}$; 4) $\frac{1}{e}\bar{i} - \frac{2}{e}\bar{j}$.

Решение. Градиент скалярного поля $z = z(x,y)$ в точке A вычисляется по формуле $\operatorname{grad} z|_A = z'_x(A)\bar{i} + z'_y(A)\bar{j}$. Найдем частные производные и их значения в точке A:
$$z'_x = e^{-\frac{x^2}{y}} \cdot \left(-\frac{x^2}{y}\right)'_x = -\frac{2x}{y}e^{-\frac{x^2}{y}}, \quad z'_y(A) = z'_x(1;1) = -2e^{-1} = -\frac{2}{e};$$
$$z'_y = e^{-\frac{x^2}{y}} \cdot \left(-\frac{x^2}{y}\right)'_y = \frac{x^2}{y^2}e^{-\frac{x^2}{y}}, \quad z'_y(A) = e^{-1} = \frac{1}{e};$$
$$\operatorname{grad} z|_A = -\frac{2}{e}\bar{i} + \frac{1}{e}\bar{j}.$$

1.8. Прямоугольные координаты на плоскости

Система прямоугольных координат на плоскости состоит из двух взаимно перпендикулярных числовых осей Ox и Oy, пересекающихся в нулевой точке O — начале координат. Тогда прямоугольные координаты точки M плоскости — это два действительных числа x_M, y_M, являющиеся величинами направленных отрезков OM_x, OM_y от начала координат к основаниям перпендикуляров к координатным осям M_x, M_y.

Основные формулы:

1) длина отрезка AB:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}\,;$$

2) координаты середины $K(x_K, y_K)$ отрезка AB:

$$x_K = \frac{x_A + x_B}{2}, \quad y_K = \frac{y_A + y_B}{2};$$

3) координаты вектора $\overline{AB}$: $\overline{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$.

Пример 1.29. Даны точки $A(2;-2)$, $B(2;-1)$, $C(-1;-1)$ и $D(-3;-3)$. Тогда линии, заданной уравнением $x - y = 0$, принадлежит точка...

1) $D(-3;3)$; 2) $B(2;-1)$; 3) $C(-1;-1)$; 4) $A(2;-2)$.

Решение. Если точка принадлежит линии, то при подстановке ее координат в уравнение линии должно получиться тождество. Уравнению $x - y = 0$ удовлетворяют только координаты точки $C(-1;-1)$, а именно $-1-(-1)=0$.

Пример 1.30. Точки $A(-2;-3)$ и $M(x;y)$ лежат на одной прямой, параллельной оси абсцисс. Расстояние между точками A и M равно 5. Тогда отрицательные координаты точки M равны...

1) $(-3;-7)$; 2) $(-2;-8)$; 3) $(-3;-3)$; 4) $(-7;-3)$.

Решение. Для точек, лежащих на одной прямой, параллельной оси Ox, выполняется условие: их ординаты равны. Следовательно, $y=-3$ и $M(x;-3)$. Расстояние между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ находится по формуле

$$|M_1M_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\,.$$

Тогда расстояние между точками A и M можно найти как

$$|AM| = \sqrt{(x-(-2))^2 + (-3-(-3))^2} = \sqrt{(x+2)^2}\,.$$

Из условия $|AM| = 5$ получаем $|x + 2| = 5$ или $x + 2 = \pm 5$. Следовательно, $x_1 = 3 > 0$, $x_2 = -7 < 0$. Тогда отрицательные координаты точки $M(-7; -3)$.

1.9. Полярные координаты на плоскости

Полярными координатами точки M на плоскости называются радиус-вектор r — расстояние от точки M до заданной точки O — полюса и полярный угол φ — угол между лучом OP (полярной осью) и радиус-вектором r; $\varphi > 0$ при отсчете от полярной оси против хода часовой стрелки и $\varphi < 0$ при отсчете в обратную сторону, $r \geqslant 0$ при любом положении точки M.

Связь между декартовыми и полярными координатами:

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi. \end{cases}$$

Пример 1.31. Точка $M(2; 2\sqrt{3}\,)$ задана в прямоугольной системе координат. Тогда ее полярные кооринаты (r, φ) $(r \geqslant 0$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi)$ при условии, что полюс совпадает с началом координат прямоугольной системы, а полярная ось — с положительной полуосью абсцисс и обе системы координат правые, равны...

1) $r = 4$, $\varphi = \pi/3$; 2) $r = 4$, $\varphi = \pi/6$;
3) $r = \pi/3$, $\varphi = 4$; 4) $r = \sqrt{10}\,$, $\varphi = \pi/3$.

Решение. Находим полярные координаты (r, φ) точки, заданной прямоугольными координатами (x, y):

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{4 + 12} = 4, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\,.$$

Тогда, учитывая, что точка M лежит в первой четверти, получаем $\varphi = \pi/3$. Итак, в полярной системе координат имеем точку с координатами $r = 4$, $\varphi = \pi/3$.

Пример 1.32. Координаты точки, симметричной заданной точке $A(3; -3\pi/4)$ (заданной в полярной системе координат) относительно полярного полюса, равны...

1) $B(3; \pi/4)$; 2) $B(\pi/4; 3)$; 3) $B(3; 3\pi/4)$; 4) $B(-3; 3\pi/4)$.

Решение. Координаты точек, симметричных относительно полярного полюса, отличаются только полярными углами на число π. То есть точка B, симметричная точке A относительно полярного полюса, имеет координаты

$$\left(3; -\frac{3}{4}\pi + \pi\right) = \left(3; \frac{\pi}{4}\right).$$

Пример 1.33. Окружность в полярной системе координат задана уравнением $r = 8\sin\varphi$. Тогда радиус этой окружности равен...

Решение. Перейдем в уравнении окружности к декартовым координатам. Используя формулы взаимосвязи между полярными и декартовыми системами координат

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}\,, \qquad \begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$$

получим

$$\sin\varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Тогда

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 8 \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 = 8y.$$

Выделим в этом уравнении полный квадрат относительно y:

$$x^2 + (y^2 - 8y + 16) = 16.$$

Тогда $x^2 + (y - 4)^2 = 16$, т.е. радиус окружности равен 4.

Пример 1.34. Точка с полярным углом $\varphi = 5\pi/3$ лежит на кривой $r = 6/(1 - \cos\varphi)$. Тогда прямоугольные координаты точки равны...

$$1)\ (-6\sqrt{3}\,; 6); \quad 2)\ (6; 6\sqrt{3}\,); \quad 3)\ (6; -6\sqrt{3}\,); \quad 4)\ \left(\frac{3}{2}; -\frac{3\sqrt{3}}{2}\right).$$

Решение. Так как точка лежит на кривой $r = 6/(1 - \cos\varphi)$, то выполняется равенство $r = 6/(1 - \cos(5\pi/3))$. Отсюда $r = 12$. Прямоугольные координаты точки определяются формулами

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases} \quad \text{т.е.} \quad \begin{cases} x = 12\cos\dfrac{5\pi}{3} = 6, \\ y = 12\sin\dfrac{5\pi}{3} = -6\sqrt{3}\,. \end{cases}$$

1.10. Прямая на плоскости

Прямая на плоскости полностью определяется положением какой-либо точки прямой и направлением, задаваемым углом, образуемым прямой с какой-либо координатной осью, или двумя точками прямой.

Основные виды уравнений прямой на плоскости:

1) уравнение с угловым коэффициентом (рис. 1.3):

$$y = y_0 + k(x - x_0) \quad \text{или} \quad y = kx + b,$$

где $k = \operatorname{tg}\alpha$ — угловой коэффициент; b — начальная ордината;

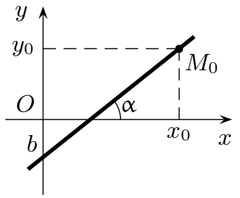


Рис. 1.3

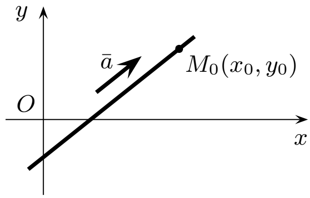


Рис. 1.4

2) каноническое уравнение прямой (рис. 1.4):

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m},$$

где $\bar{a}(l, m)$ — направляющий вектор;

3) уравнение прямой, проходящей через две заданные точки (рис. 1.5):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1};$$

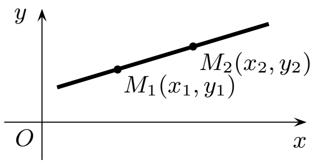


Рис. 1.5

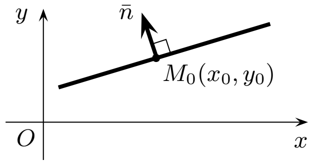


Рис. 1.6

4) общее уравнение прямой (рис. 1.6):

$$Ax + By + C = 0 \quad \text{или} \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0,$$

в котором $\bar{n}(A, B)$ — нормальный вектор.

Взаимное расположение прямых на плоскости:

1) угол между двумя прямыми l_1: $y = k_1x + b_1$, или $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, и l_2: $y = k_2x + b_2$, или $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ (рис. 1.7):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1k_2} \quad \text{или} \quad \cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}};$$

2) условие параллельности двух прямых:

$$k_1 = k_2 \quad \text{или} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2};$$

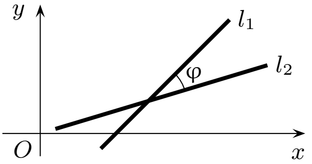


Рис. 1.7

3) условие перпендикулярности двух прямых:

$$k_1 k_2 = -1 \quad \text{или} \quad A_1A_2 + B_1B_2 = 0;$$

4) точка пересечения двух прямых определяется системой

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{cases}$$

Пример 1.35. Угловой коэффициент прямой линии, заданной уравнением $2x + 4y - 5 = 0$, равен...

1) $\dfrac{1}{2}$; 2) $-\dfrac{1}{2}$; 3) -2; 4) $\dfrac{5}{4}$.

Решение. Выразим y из уравнения $2x + 4y - 5 = 0$, а именно $y = -x/2 + 5/4$. Тогда угловой коэффициент $k = -1/2$.

Пример 1.36. Каноническое уравнение прямой линии, проходящей через точку $A(2; -5)$ параллельно прямой $-2x + y - 3 = 0$, имеет вид...

1) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y-5}{2}$; 2) $2x - y - 9 = 0$;

3) $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+5}{2}$; 4) $\dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y+5}{1}$.

Решение. Каноническое уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M(x_0, y_0)$ параллельно направляющему вектору $\bar{a}(l, m)$, имеет вид

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}.$$

Из общего уравнения прямой $-2x + y - 3 = 0$ можно найти нормальный вектор прямой: $\bar{n}(-2; 1)$. Используя связь нормального и направляющего вектора прямой линии, за направляющий вектор прямой можно взять вектор $\bar{a}(1; 2)$. Так как прямые линии параллельны, то $\bar{a}(1; 2)$ будет направляющим вектором и искомой прямой. Следовательно, каноническое уравнение искомой прямой линии имеет вид

$$\frac{x-2}{1} = \frac{y-(-5)}{2} \quad \text{или} \quad \frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{2}.$$

Пример 1.37. Острый угол между прямыми l_1: $x - 2 = 0$ и l_2: $y = x + 1$ равен...

1) $\pi/2$; 2) $3\pi/4$; 3) $\pi/4$; 4) $\pi/3$.

Решение. Искать угол между прямыми через угловые коэффициенты в данном случае неудобно, т.к. угловой коэффициент первой прямой не определен. Угол α между прямыми $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ можно найти как угол между их нормальными векторами $\bar{n}_1(A_1, B_1)$ и $\bar{n}_2(A_2, B_2)$. Угол между векторами находим с помощью скалярного произведения векторов:

$$\cos\alpha = \cos(\bar{n}_1, \bar{n}_2) = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Берем выражение по модулю, т.к. угол острый. Таким образом,

$$\cos\alpha = \frac{|1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1)|}{\sqrt{1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

откуда острый угол $\alpha = \pi/4$.

1.11. Кривые второго порядка

Общее уравнение кривых второго порядка в прямоугольной системе координат:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Канонические уравнения:

1) при $A = C$, $B = 0$ — окружность, точка или пустое множество. Уравнение окружности:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2,$$

где a, b — координаты центра окружности; R — радиус;

2) уравнение эллипса:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

На рис. 1.8 O — центр; A, B, C, D — вершины; F_1, F_2 — фокусы; $AB = 2a$ — большая ось; $CD = 2b$ — малая ось; $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $\varepsilon = c/a$ ($\varepsilon < 1$) — эксцентриситет, определяющее свойство $|F_1M| + |F_2M| = 2a$ ($2a > 2b$);

3) уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

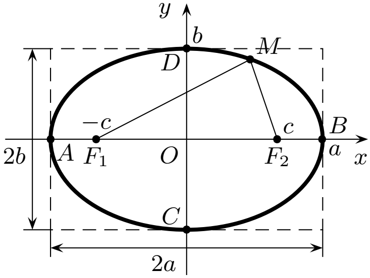


Рис. 1.8

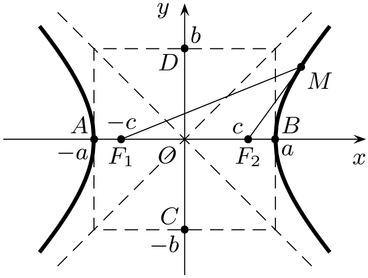


Рис. 1.9

На рис. 1.9 O — центр; A, B — вершины; F_1, F_2 — фокусы; $AB = 2a$ — действительная ось; $CD = 2b$ — мнимая ось; $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varepsilon = c/a$ — эксцентриситет ($\varepsilon > 1$), определяющее свойство $|F_1M - F_2M| = 2a$;

4) уравнение параболы:

$$y^2 = 2px.$$

На рис. 1.10 O — вершина; F — фокус; D — директриса; p — фокальный параметр; $\varepsilon = 1$ — эксцентриситет, определяющее свойство $|FM| = MK$ ($MK \perp D$).

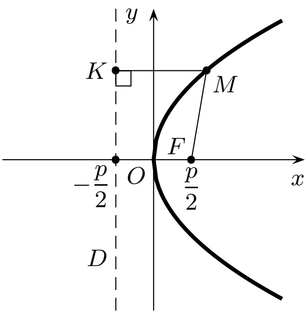


Рис. 1.10

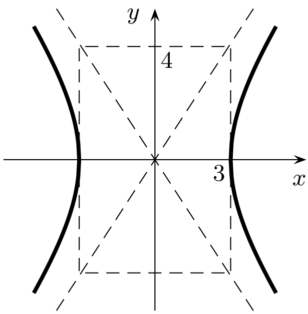


Рис. 1.11

Пример 1.38. Каноническое уравнение гиперболы, изображенной на рис. 1.11, имеет вид...

1) $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$; 2) $\dfrac{x^2}{3} - \dfrac{y^2}{4} = 1$;

3) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{16} = 1$; 4) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{16} = 1$.

Решение. Каноническое уравнение гиперболы с полуосями a и b имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Следовательно, уравнение заданной гиперболы

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

Пример 1.39. С помощью преобразования параллельного переноса осей координат уравнение кривой $x^2-2y^2-6x-8y-3=0$ приводится к каноническому виду...

1) $\dfrac{X^2}{4} - \dfrac{Y^2}{2} = 1$; 2) $\dfrac{X^2}{16} - \dfrac{Y^2}{8} = 1$;

3) $\dfrac{(x-3)^2}{4} - \dfrac{(y+2)^2}{2} = 1$; 4) $X^2 - 2Y^2 = 4$.

Решение. Выделяя полные квадраты относительно переменных x и y, получим

$$[(x^2-6x+9)-9]-2[(y^2+4y+4)-4]-3=0,$$

$$(x-3)^2-9-2(y+2)^2+8-3=0, \quad (x-3)^2-2(y+2)^2=4.$$

Следовательно,

$$\frac{(x-3)^2}{4} - \frac{(y+2)^2}{2} = 1.$$

Тогда координаты центра кривой есть $(3;-2)$. Выполним преобразование параллельного переноса системы координат в центр линии, т.е. в точку $O'(3;-2)$, по формулам $x = X+3$, $y = Y-2$, где X, Y — новые координаты. Тогда уравнение кривой в новой системе координат $O'XY$ примет вид

$$\frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{2} = 1.$$

Это каноническое уравнение гиперболы.

Пример 1.40. Дано уравнение гиперболы $\dfrac{(x-1)^2}{16} - \dfrac{(y+2)^2}{4} = 1$. Тогда расстояние между ее фокусами равно...

1) $4\sqrt{5}$; 2) $4\sqrt{3}$; 3) 2; 4) $\sqrt{5}$.

Решение. Расстояние между фокусами равно $2c$, где значение параметра c находится из выражения, связывающего полуоси гиперболы: $c^2 = a^2 + b^2$, т.е. $c = 2\sqrt{5}$ или $2c = 4\sqrt{5}$.

1.12. Прямая и плоскость в пространстве

Прямая в пространстве, определяемая начальной точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющим вектором $\bar{a}(l, m, n)$, может быть описана *параметрическими уравнениями*

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt,$$

где t — параметр, или *каноническим уравнением*

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}.$$

Углом между прямыми L_1 и L_2 считают угол между их направляющими векторами:

$$\cos(\widehat{L_1, L_2}) = \cos(\widehat{\bar{a}_1, \bar{a}_2}) = \frac{\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2}{|\bar{a}_1| \cdot |\bar{a}_2|} =$$

$$= \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}.$$

Прямые L_1 и L_2 *пересекаются,* если компланарны их направляющие векторы и вектор $\overline{M_1 M_2}$, соединяющий их начальные точки, т.е. $[\bar{a}_1, \bar{a}_2] \cdot \overline{M_1 M_2} = 0$.

Плоскость в пространстве может быть определена какой-либо данной точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и вектором $\bar{n}(A, B, C)$, перпендикулярным (нормальным) этой плоскости:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Общее уравнение плоскости в прямоугольных координатах:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Нормальное уравнение плоскости:

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0,$$

где α, β, γ — углы, составляемые нормальным вектором с осями координат; p — отрезок нормали — расстояние от плоскости до начала координат.

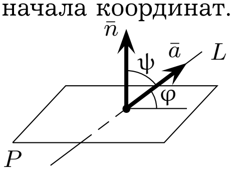


Рис. 1.12

Угол между двумя плоскостями равен углу между их нормальными векторами:

$$\cos(\widehat{\bar{n}_1, \bar{n}_2}) = \frac{\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2}{|\bar{n}_1| \cdot |\bar{n}_2|} =$$

$$= \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Угол между прямой L *и плоскостью* P находится по формуле (рис. 1.12)

$$\sin(\widehat{PL}) = \sin\varphi = \cos\psi = |\cos(\widehat{\bar{n}, \bar{a}})| =$$

$$= \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Точка пересечения прямой и плоскости определяется системой уравнений

$$x = x_0 + lt, \quad y = y_0 + mt, \quad z = z_0 + nt, \quad Ax + By + Cz + D = 0.$$

Пример 1.41. Параметрические уравнения прямой в пространстве, проходящей через точку $M_0(-1; 2; -3)$ перпендикулярно плоскости $2x + y - 6z + 9 = 0$, имеют вид...

1) $\begin{cases} x = -t - 2, \\ y = 2t - 1, \\ z = -3t + 6; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t + 2, \\ z = -6t - 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = t - 2, \\ z = -6t + 3; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = -t + 2, \\ y = 2t + 1, \\ z = -3t - 6. \end{cases}$

Решение. Параметрические уравнения прямой в пространстве, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ с направляющим вектором $\bar{s}(a_1, a_2, a_3)$, имеют вид

$$\begin{cases} x = a_1 t + x_0, \\ y = a_2 t + y_0, \\ z = a_3 t + z_0. \end{cases}$$

Так как по условию прямая и плоскость перпендикулярны, то в качестве направляющего вектора прямой можно взять нормальный вектор плоскости $(2; 1; -6)$. Тогда параметрические уравнения прямой примут вид

$$\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t + 2, \\ z = -6t - 3. \end{cases}$$

Пример 1.42. Угол между прямой $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-5}{0}$ и плоскостью $4x + y + z - 2 = 0$ равен...

1) $\dfrac{2\pi}{3}$; 2) $\dfrac{5\pi}{6}$; 3) $\dfrac{\pi}{3}$; 4) $\dfrac{\pi}{6}$.

Решение. Синус угла между прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ находится как

$$\sin\alpha = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|4 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0|}{\sqrt{1 + 1 + 0} \cdot \sqrt{16 + 1 + 1}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, угол $\alpha = \pi/6$. Заметим, что угол между прямой и плоскостью всегда острый.

Пример 1.43. Плоскости $mx+2y-3z-8 = 0$ и $3x-5y-nz+4 = 0$ параллельны при значениях m и n, равных...

1) $m = 3$, $n = 3$; 2) $m = -\frac{6}{5}$, $n = \frac{15}{2}$;

3) $m = -\frac{5}{6}$, $n = -\frac{2}{15}$; 4) $m = -\frac{6}{5}$, $n = -\frac{15}{2}$.

Решение. Так как нормальные векторы $\bar{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ и $\bar{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ параллельных плоскостей, заданных соответственно уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, коллинеарны, то условие параллельности двух плоскостей имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Таким образом, имеем

$$\frac{m}{3} = \frac{2}{-5} = \frac{-3}{-n}.$$

Отсюда следует $m = -6/5$, $n = -15/2$.

Пример 1.44. Общее уравнение плоскости, проходящей через точку $A(5; -4; 6)$ и отсекающей равные отрезки на координатных осях, имеет вид...

1) $x + y + z - 15 = 0$; 2) $x + y + z - 7 = 0$;

3) $\frac{x}{7} + \frac{y}{7} + \frac{z}{7} = 1$; 4) $7x + 7y + 7z - 1 = 0$.

Решение. Общее уравнение плоскости имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$, где хотя бы один из коэффициентов A, B или C не равен нулю. Исходя из условия задачи, можно легко составить уравнение плоскости в отрезках

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1,$$

где a, b и c — величины отрезков (с учетом знаков), отсекаемых плоскостью на координатных осях Ox, Oy и Oz соответственно, считая каждый от начала координат. Так как величины отрезков равны, т.е. $a = b = c$, то уравнение плоскости в отрезках примет вид

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1.$$

Точка $A(5; -4; 6)$ принадлежит плоскости, поэтому ее координаты удовлетворяют уравнению плоскости:

$$\frac{5}{a} + \frac{-4}{a} + \frac{6}{a} = 1,$$

откуда $7/a = 1$. Следовательно, $a = b = c = 7$. Тогда уравнение плоскости в отрезках имеет вид

$$\frac{x}{7} + \frac{y}{7} + \frac{z}{7} = 1.$$

Перенеся свободный член уравнения в левую часть и умножив обе части уравнения на число 7, получим общее уравнение плоскости $x + y + z - 7 = 0$.

Замечание. Можно воспользоваться уравнением плоскости, проходящей через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и $M_3(x_3, y_3, z_3)$, не лежащие на одной прямой:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

1.13. Поверхности второго порядка

Канонические уравнения поверхностей второго порядка:

1) сфера:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2,$$

где $C(a, b, c)$ — центр; R — радиус;

2) эллипсоид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где a, b, c — полуоси;

3) гиперболоид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

для однополостного гиперболоида; $2c$ — мнимая ось;

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

для двуполостного гиперболоида; $2a$, $2b$ — мнимые оси;

4) конус:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0;$$

5) эллиптический параболоид:

$$z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2};$$

6) гиперболический параболоид:

$$z=\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}.$$

Пример 1.45. Уравнение сферы с центром в $C(-3;4;-2)$ и радиусом $R=4$ имеет вид...

1) $(x+3)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=4$;
2) $(x-3)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=16$;
3) $(x+3)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=16$;
4) $(x-3)^2+(y+4)^2+(z-2)^2=4$.

Решение. Уравнение сферы с центром в точке $C(a,b,c)$ и радиусом R имеет вид $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$. В нашем случае получаем $(x+3)^2+(y-4)^2+(z+2)^2=16$.

Пример 1.46. Даны уравнения поверхностей:

1) $5x^2+6y^2+15z^2-30=0$; 2) $6x^2+5y^2-10z^2-30=0$;

3) $10x^2-9y^2-15z^2-90=0$; 4) $6x^2+3y^2+2z^2+18=0$.

Тогда эллипсоид определяется уравнением...

1) 4; 2) 1; 3) 2; 4) 3.

Решение. Каноническое уравнение эллипсоида имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Сравнивая данные уравнения с каноническим уравнением, видим, что эллипсоид определяется уравнением

$$5x^2+6y^2+15z^2-30=0 \quad\Leftrightarrow\quad 5x^2+6y^2+15z^2=30 \quad\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\quad \frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{2}=1.$$

1.14. Дифференциальная геометрия кривых на плоскости. Кривизна

Пусть уравнение кривой на плоскости в декартовых прямоугольных координатах задано в виде $y = y(x)$ или $F(x, y) = 0$, а $M_0(x_0, y_0)$ является фиксированной точкой кривой.

Уравнение касательной к кривой в точке M_0:

$$y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$$

$$\text{или} \quad F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Уравнение нормали к кривой в точке M_0:

$$y - y_0 = -\frac{1}{y'(x_0)}(x - x_0)$$

$$\text{или} \quad F'_y(x_0, y_0)(x - x_0) - F'_x(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Дифференциал длины дуги плоской кривой:

$$ds = \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx.$$

Кривизна плоской кривой (удельный угол поворота касательной $K = \lim\limits_{\Delta x \to 0} |\Delta\alpha/\Delta s|$):

$$K = \frac{|y''(x)|}{(1 + [y'(x)]^2)^{3/2}}.$$

Радиус кривизны:

$$R = \frac{1}{K}.$$

Пример 1.47. Уравнение касательной к кривой $(x-1)^2 + y^2 = 10$ в точке $(-2; 1)$ имеет вид...

1) $-3x + y - 7 = 0$; 2) $6x + y + 13 = 0$;
3) $-3x + y + 5 = 0$; 4) $2x + y + 3 = 0$.

Решение. Уравнение касательной прямой к функции, неявно заданной уравнением $F(x, y) = 0$ в точке (x_0, y_0), имеет вид

$$F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0.$$

Вычислим частные производные первого порядка функции $F(x, y) = (x - 1)^2 + y^2 - 10$ и найдем их значения в точке $(-2; 1)$:

$$F'_x = 2(x - 1)\Big|_{(-2;1)} = -6, \quad F'_y = 2y\Big|_{(-2;1)} = 2.$$

Так как $x_0 = -2$, $y_0 = 1$, то уравнение касательной примет вид

$$-6(x + 2) + 2(y - 1) = 0 \quad \text{или} \quad -3x + y - 7 = 0.$$

Пример 1.48. Годографом вектор-функции

$$\bar{r} = \bar{r}(t) = \sqrt{1+t^2}\,\bar{i} + \sqrt{1-t^2}\,\bar{j},$$

где $t \in [0;1]$, является...

1) окружность $x^2 + y^2 = 2$ радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке $(0;0)$;

2) дуга окружности $x^2+y^2 = 2$, лежащая в первой четверти;

3) верхняя полуокружность $y = +\sqrt{2-x^2}$ радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке $(0;0)$;

4) дуга окружности $x^2 + y^2 = 2$ между точками $(1;1)$ и $(\sqrt{2}\,;0)$.

Решение. Годографом вектор-функции $\bar{r} = \bar{r}(t) = x(t)\bar{i}+y(t)\bar{j}$, $t \in (\alpha, \beta)$, называется линия, описываемая концом радиус-вектора $\bar{r}(t)$. Из условия задания имеем параметрические уравнения годографа

$$\begin{cases} x = x(t) = \sqrt{1+t^2}\,, \\ y = y(t) = \sqrt{1-t^2}\,, \end{cases}$$

где $t \in [0;1]$. Исключая параметр t, что можно сделать элементарными преобразованиями, получим $x^2 + y^2 = 2$, т.е. получили уравнение окружности. Так как по условию $t \in [0;1]$, то из параметрических уравнений видно, что при изменении параметра t от 0 до 1 значение x изменяется от 1 до $\sqrt{2}$, а y — от 1 до 0. Таким образом, годографом вектор-функции является дуга окружности $x^2 + y^2 = 2$ между точками $(1;1)$ и $(\sqrt{2}\,;0)$, пробегаемая в направлении движения часовой стрелки.

Пример 1.49. Радиус кривизны плоской линии $2x+3y-1 = 0$ равен...

1) -2; 2) 0; 3) $-2/3$; 4) ∞.

Решение. Радиусом кривизны называется величина, обратная кривизне: $R = 1/K$. Кривизна прямой равна нулю, следовательно, радиус кривизны равен ∞.

Пример 1.50. Кривизна K кривой, заданной ее радиус-вектором

$$\bar{r}(s) = \begin{cases} x = R\cos(s/R), \\ y = R\sin(s/R), \end{cases}$$

где R — постоянная величина, не равная нулю, а s — натуральный параметр, равна...

1) 1; 2) $1/R$; 3) R; 4) $1/R^2$.

Решение. Так как $K = |\bar{r}''_{ss}|$, то вычислим последовательно:

$$\bar{r}'_s : \begin{cases} x' = -\sin\dfrac{s}{R}, \\ y' = \cos\dfrac{s}{R} \end{cases} \quad \text{и} \quad \bar{r}''_{ss} : \begin{cases} x'' = -\dfrac{1}{R}\cos\dfrac{s}{R}, \\ y'' = -\dfrac{1}{R}\sin\dfrac{s}{R}. \end{cases}$$

Тогда

$$K = |\bar{r}''_{ss}| = \sqrt{\frac{\cos^2(s/R)}{R^2} + \frac{\sin^2(s/R)}{R^2}} = \frac{1}{R}.$$

При этом можно было заметить, что задано параметрическое уравнение окружности, а кривизна окружности во всех ее точках равна $1/R$.

1.15. Дифференциальная геометрия поверхностей

Пусть уравнение поверхности в прямоугольных координатах задано в виде $z = f(x, y)$ или $F(x, y, z) = 0$, а $M_0(x_0, y_0, z_0)$ является фиксированной точкой поверхности.

Вектор нормали к поверхности:

$$\bar{n} = \{f'_x, f'_y, -1\} \quad \text{или} \quad \bar{n} = \{F'_x, F'_y, F'_z\}.$$

Уравнение касательной плоскости, проходящей через M_0:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$\text{или} \quad F'_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) +$$
$$+ F'_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

Уравнение нормальной прямой, проходящей через M_0:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

$$\text{или} \quad \frac{x - x_0}{F'_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F'_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F'_z(x_0, y_0, z_0)}.$$

Пример 1.51. Уравнение нормали к поверхности $z = 2x + 3xy - 1$ в точке $(1; -1; -2)$ имеет вид...

1) $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-2}{-1}$; 2) $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y-1}{3} = \dfrac{z-2}{1}$;

3) $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+2}{-1}$; 4) $\dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+2}{1}$.

Решение. Уравнение нормали к поверхности $z = z(x, y)$ имеет вид
$$\frac{x - x_0}{z'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{z'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}.$$
Найдем частные производные первого порядка данной функции: $z'_x = 2 + 3y$, $z'_y = 3x$. Вычислим значения частных производных в точке $(1; -1; -2)$: $z'_x = -1$, $z'_y = 3$. Так как $x_0 = 1$, $y_0 = -1$, $z_0 = -2$, то уравнение нормали примет вид
$$\frac{x - 1}{-1} = \frac{y + 1}{3} = \frac{z + 2}{-1}.$$

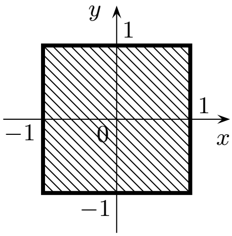
Пример 1.52. Соотношения $\begin{cases} x = \cos\varphi, \\ y = \sin\varphi, \\ z = t \end{cases}$ при $\varphi \in [0; 2\pi]$, $t \in R$, в пространстве $Oxyz$ задает...

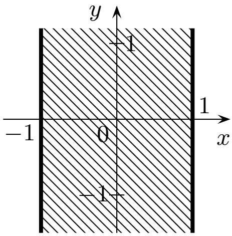
1) параболоид; 2) цилиндр; 3) конус; 4) сферу.

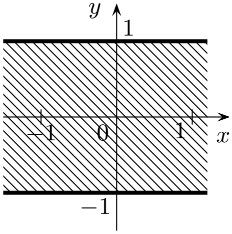
Решение. Так как $x^2 + y^2 = 1$, а это каноническое уравнение окружности на плоскости, и z принимает любые значения из R, то данная система задает цилиндр в пространстве.

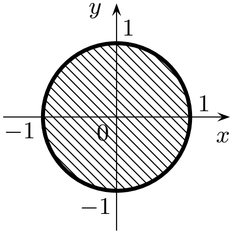
1.16. Элементы топологии

Пример 1.53. Пересечением множеств $A = \{(x, y)\colon\ x \in R,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\}$ и $B = \{(x, y)\colon\ -1 \leqslant x \leqslant 1,\ y \in R\}$ является множество, изображенное на рисунке...

1)


2)


3)


4)


Решение. Пересечением множеств A и B называется совокупность точек, принадлежащих одновременно обоим множествам. Таким образом, пересечением множеств является квадрат $P = \{(x, y)\colon -1 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\}$. Его изображение имеет вид рисунка 1).

Пример 1.54. Область, изображенная на рис. 1.13, описывается множеством...

1) $\{(x, y)\colon x^2 + y^2 \geqslant 2\}$;
2) $\{(x, y)\colon x^2 + y^2 \geqslant 4\}$;
3) $\{(x, y)\colon |x| \geqslant 2,\ |y| \geqslant 2\}$;
4) $\{(x, y)\colon |x| \geqslant 4,\ |y| \geqslant 4\}$.

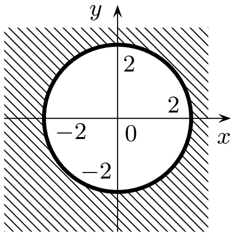


Рис. 1.13

Решение. Границей данной области является окружность $x^2 + y^2 = 4$. Введем функцию $\delta(x, y) = x^2 + y^2 - 4$ и найдем ее значение в точке $(0; 0)$: $\delta(0; 0) = -4 < 0$. Так как точка $(0; 0)$ не принадлежит заштрихованной области, все точки, расположенные в заштрихованной области, удовлетворяют неравенству $\delta(x, y) \geqslant 0$. Таким образом, заштрихованная область описывается множеством $\{(x, y)\colon x^2 + y^2 \geqslant 4\}$.

Пример 1.55. Топологическая структура на множестве $X = \{a, b, c\}$ задается множеством...

1) $\{\varnothing, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c\}\}$;
2) $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$;
3) $\{\varnothing, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c\}\}$;
4) $\{\{a\}, \{a, b, c\}\}$.

Решение. Множество t подмножеств данного множества задает топологию, если выполняются следующие свойства: пустое множество и данное множество входят в t; объединение любого числа и пересечение конечного числа подмножеств из t снова принадлежит t.

Для множества $\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$ эти условия выполняются.

Так как $\{\varnothing, \{a, c\}, \{b, c\}, \{c\}\}$ не содержит само множество X, то не является топологией.

Так как $\{\{a\}, \{a, b, c\}\}$ не содержит пустое множество, то не является топологией.

Так как для $\{\varnothing, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{b, c\}\}$ имеем $\{a, c\} \cap \{b, c\} = \{c\} \notin t$, то данное множество подмножеств не является топологией.

1.17. Абстрактная алгебра

Алгебраические операции. Бинарные операции. Группа. Кольцо. Поле. *Алгебраические операции* представляют собой различные типы «сложения» и «умножения», которые связывают пары математических объектов с соответствующими результатами операций. Такие операции называются *бинарными*.

Определение 1.11. Класс G объектов (элементов) a, b, c, ... называется *группой*, если определена бинарная (двухместная) операция $(*)$, которая каждой паре элементов a, b класса G ставит в соответствие некоторый объект (результат операции) $a*b$, так что:

1) $a * b \in G$;
2) $a * (b * c) = (a * b) * c$ (ассоциативность);
3) $e * a = a$, $e \in G$ (существование единицы);
4) $\forall a$ $(a \in G)$ $\exists a^{-1}$ $(a^{-1} \in G)$: $a^{-1} * a = e$ (существование обратного элемента a^{-1}).

Если $\forall a, b$: $a * b = b * a$ (коммутативность), то группа G называется *коммутативной* или *абелевой группой*.

Операцию, определяющую группу, часто называют (абстрактным) *умножением*; тогда ее результат записывают как произведение ab.

Кратные произведения aa, aaa, ... записывают в виде *целых степеней* a^2, a^3, ..., причем $(a^{-1})^n = a^{-n}$, $a^0 = e$.

Определение 1.12. Класс R объектов (элементов) a, b, c, ... называется *кольцом*, если определены две *бинарные операции*, обычно называемые *сложением* и *умножением*, такие, что для любого a, b, $c \in R$:

1) $a + b = b + a$, $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a + 0 = a$, $a + (-a) = a - a = 0$;
2) $a(b + c) = ab + ac$, $(c + b)a = ca + ba$.

Если существует e $(e \in R)$: $ea = a$, то R — *кольцо с единицей*.

Определение 1.13. Класс F объектов a, b, c, ..., являющийся кольцом с единицей, называется *полем*, если:

1) содержит по крайней мере один элемент, отличный от нуля;
2) для каждого элемента $a \neq 0$ содержит обратный элемент a^{-1} $(a \cdot a^{-1} = E)$;
3) $ab = ba$ (коммутативность).

Линейные отображения. Пусть даны две плоскости с прямоугольными системами координат Ox_1x_2 и Oy_1y_2. Тогда система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = y_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = y_2 \end{cases}$$

ставит каждой точке $M(x_1, x_2)$ в соответствие точку $N(y_1, y_2)$, то рассматриваемая система уравнений есть *линейное преобразование* координат точек плоскости Ox_1x_2, а некоторая область плоскости Oy_1y_2 есть *линейное отображение* области плоскости Ox_1x_2.

Таблица из коэффициентов уравнений $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ — это *матрица линейного преобразования* (отображения Ox_1x_2 на Oy_1y_2).

Пример 1.56. На плоскости Ox_1x_2 вектор

$$\overline{OM} = \bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 = \bar{e}_1 + 2\bar{e}_2, \quad \text{или} \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

отображается в вектор

$$\overline{ON} = \bar{y} = 4\bar{e}_1 + \bar{e}_2, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующая система уравнений отображения $\overline{OM}$ в $\overline{ON}$:

$$\begin{cases} a_{11} \cdot 1 + a_{12} \cdot 2 = 4, \\ a_{21} \cdot 1 + a_{22} \cdot 2 = 1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \; A\bar{x} = \bar{y}.$$

Элементы матрицы A находим из системы двух уравнений с четырьмя неизвестными, например, так: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Проверка:

$$A\bar{x} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \bar{y}.$$

Обратная матрица A^{-1} определяет *обратное преобразование*: $A^{-1}\bar{y} = \bar{x}$. Проверим:

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$A^{-1}\bar{y} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \bar{x}.$$

Произведение двух матриц

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} & b_{11}a_{12} + b_{12}a_{21} \\ b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} & b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} = C$$

определяет *двойное линейное преобразование* $\bar{z} = B\bar{y} = B \cdot A\bar{x} = C\bar{x}$.

Алгебра многочленов. Пусть

$$P_n(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n$$

— многочлен (полином) степени n; a_1, ..., a_n — коэффициенты многочлена.

Основные теоремы:

1) если x_1 — корень уравнения $P_n(x) = 0$, то многочлен $P_n(x)$ делится на $(x - x_1)$ без остатка и частное есть многочлен степени $(n-1)$: $P_n(x) = (x - x_1)P_{n-1}(x)$;

2) если $P_n(x)$ делится на $(x - x_1)^k$, но уже не делится на $(x - x_1)^{k+1}$, то x_1 называется k-кратным корнем уравнения $P_n(x) = 0$. В этом случае x_1 есть общий корень полинома $P_n(x)$ и его производных вплоть до $(k-1)$-го порядка;

3) *основная теорема алгебры*: каждое алгебраическое уравнение n-й степени $P_n(x) = 0$, коэффициенты которого a_i — действительные или комплексные числа, имеют ровно n корней действительных или комплексных, если k-кратный корень считать за k корней.

Пример 1.57. Множество чисел вида $a + \sqrt{2}\,b$, где a и b — рациональные числа, образуют поле. Тогда единицей является элемент...

1) 1; 2) $\sqrt{2}$; 3) 0; 4) $1 + \sqrt{2}$.

Решение. Единицей группы называется элемент 1, удовлетворяющий условию $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$. Единицей данного множества является число 1. Действительно, оно может быть представлено в виде $1 = 1 + 0 \cdot \sqrt{2}$ и, следовательно, принадлежит данному множеству. Кроме того, для произвольного элемента $a + \sqrt{2}\,b$ выполняется $1 \cdot (a + \sqrt{2}\,b) = (a + \sqrt{2}\,b) \cdot 1 = a + \sqrt{2}\,b$.

Пример 1.58. Дано множество вырожденных матриц 2-го порядка. Тогда алгебраическими действиями, всегда выполнимыми на данном множестве, являются...

1) сложение и умножение; 2) вычитание и деление;
3) деление и умножение; 4) сложение и деление.

Решение. Говорят, что в множестве M задано алгебраическое действие, если указано правило, сопоставляющее некоторым парам элементов из M, взятым в определенном порядке, элемент из того же множества M. Действие сложения двум матрицам сопоставляет их сумму:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix},$$

операция умножения — произведение матриц:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{21} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix},$$

операция вычитания — разность $A - B = A + (-B)$.

Операция деления матрицы A на B сопоставляет данной паре матрицу $C = A \cdot B^{-1}$. Так как для вырожденной матрицы не существует обратной, то операция деления на данном множестве не определена.

Пример 1.59. Свойством коммутативности обладает...

1) операция возведения в степень на множестве N;
2) операция умножения матриц порядка 2;
3) операция пересечения множеств;
4) композиция элементарных функций.

Решение. Свойство коммутативности $a * b = b * a$, где a, b — произвольные элементы множества, выполняется лишь для операции пересечения множеств. Действительно, если $x \in A \cap B$, то $x \in A$ и $x \in B$; если $x \in B \cap A$, то $x \in B$ и $x \in A$, т.е. $A \cap B = B \cap A$.

Поскольку матрицы 2-го порядка не всегда перестановочны, то для данной операции свойство коммутативности не выполняется.

Для операции композиция элементарных функций условие коммутативности примет вид $f(g(x)) = g(f(x))$. Но, например, для функции $f(x) = x + 1$ и $g(x) = x^2$ это условие не выполняется: $f(g(x)) = x^2 + 1$, $g(f(x)) = (x + 1)^2$.

Операция возведения в степень на множестве N не является коммутативной, так как, например, $(2^3)^4 \neq 2^{3^4}$.

Пример 1.60. Условию ассоциативности удовлетворяют операции ... множеств.

1) дополнения и пересечения;
2) разности и объединения;
3) дополнения и разности;
4) объединения и пересечения.

Решение. Бинарная операция $(*)$ удовлетворяет условию ассоциативности, если для любых элементов a, b, c множества выполняется $(a * b) * c = a * (b * c)$.

Операция объединения множеств удовлетворяет условию ассоциативности. Действительно, для произвольных множеств A, B и C имеем:

1) если $x \in (A \cup B) \cup C$, то $x \in A \cup B$ или $x \in C$. Если $x \in A \cup B$, то $x \in A$ или $x \in B$. Тогда $x \in A$ или $x \in B$, или $x \in C$;

2) если $x \in A \cup (B \cup C)$, то $x \in A$ или $x \in B \cup C$. Если $x \in B \cup C$, то $x \in B$ или $x \in C$. Тогда $x \in A$ или $x \in B$, или $x \in C$.

Таким образом, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.

Операция пересечения множеств также удовлетворяет условию ассоциативности. Для произвольных множеств A, B и C выполняется:

1) если $x \in (A \cap B) \cap C$, то $x \in A \cap B$ и $x \in C$. Если $x \in A \cap B$, то $x \in A$ и $x \in B$. Тогда $x \in A$, $x \in B$ и $x \in C$ одновременно;

2) если $x \in A \cap (B \cap C)$, то $x \in A$ и $x \in B \cap C$. Если $x \in B \cap C$, то $x \in B$ и $x \in C$. Тогда $x \in A$, $x \in B$ и $x \in C$ одновременно.

То есть $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

Операция разности множеств не удовлетворяет условию ассоциативности:

1) если $x \in (A \backslash B) \backslash C$, $x \in A \backslash B$, но $x \notin C$. Если $x \in A \backslash B$, то $x \in A$, но $x \notin B$. Тогда получаем, что $x \in A$, но $x \notin B$ и $x \notin C$;

2) если $x \in A \backslash (B \backslash C)$, $x \in A$, но $x \notin (B \backslash C)$. Если $x \notin B \backslash C$, то $x \in C$, но $x \notin B$, или $x \notin B$ и $x \notin C$. Тогда $x \in A$, но $x \notin B$ и $x \notin C$, или $x \in A$, и $x \notin C$, и $x \notin B$.

Операция дополнения не является бинарной алгебраической операцией.

Пример 1.61. Множество вырожденных матриц порядка 2 образует абелеву (коммутативную) группу относительно операции...

1) транспонирование матрицы; 2) умножения («·»);
3) сложения («+»); 4) деления («/»).

Решение. Группой называется множество G с одной алгебраической операцией, ассоциативной, причем для этой операции должна существовать обратная операция. Если операция, определенная в группе G, коммутативная, то G называется абелевой группой. Множество вырожденных матриц порядка 2 образует группу относительно операции сложения и умножения. Операция деления определена на данном множестве как произведение $A \cdot B^{-1}$. Относительно операции транспонирования матрицы не являются группой, т.к. данная операция не является бинарной. Однако только относительно операции сложения группа является абелевой, т.к. для произвольных матриц A и B выполняется $A + B = B + A$. Относительно умножения и деления группа не является абелевой, т.к. условие $A \cdot B = B \cdot A$ выполняется не для всех матриц. Например,

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Пример 1.62. Дано разложение многочлена на множители: $f(x) = x^3(x^2+4)(x^2-4)$. Тогда корень $x = 2i$ имеет кратность...

1) 6; 2) 2; 3) 5; 4) 3.

Решение. Многочлен $f(x)$ разложим на простейшие множители, получим $f(x) = x^3(x+2i)^3(x-2i)^3(x-2)(x+2)$. Корню $x = 2i$ соответствует множитель $(x-2i)^3$. Кратность корня совпадает со степенью множителя. Таким образом, кратность корня $x = 2i$ равна 3.

Пример 1.63. Дано линейное пространство векторов $x = x_1e_1 + x_2e_2$, где $x_1, x_2 \in R$, и линейное преобразование этого пространства $\varphi(x) = -x_2e_1 + x_1e_2$. Если $\varphi(x) = Ax$, то матрицей A является...

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Зададим матрицу линейного преобразования φ:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда линейное преобразование примет вид

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

Это произведение эквивалентно системе линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = -x_2, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = x_1. \end{cases}$$

Приравнивая коэффициенты при x_1 и x_2 в обеих частях равенств, получим матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Пример 1.64. В базисе e_1, e_2, e_3 трехмерного линейного пространства линейное преобразование $y = Ax$ задается матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Если $x = e_1 + e_2 - e_3$ и $y = ae_1 + e_2 + e_3$, то a равно...

1) 5; 2) 4; 3) 1; 4) 2.

Решение. Данное линейное преобразование задается произведением

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

которое эквивалентно системе линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = y_1, \\ 2x_1 - x_2 \qquad\quad = y_2, \\ x_1 \qquad\qquad\quad\;\; = y_3. \end{cases}$$

Подставляя координаты x и y в данную систему, получим $a = 5$.

Пример 1.65. Пусть G — группа всех целых чисел относительно операции обычного сложения целых чисел. Тогда подгруппой этой группы является...

1) множество всех целых чисел, кратных числу 17;
2) множество всех нечетных целых чисел;
3) множество всех неположительных целых чисел;
4) множество неотрицательных целых чисел.

Решение. Множество $A \subset G$ является подгруппой группы G тогда и только тогда, когда оно замкнуто (устойчиво) относительно групповых операций группы G, т.е. если выполняются условия:
1) $\forall x, y \in A\ x + y \in A$;
2) $0 \in A$;
3) $\forall x \in A\ (-x) \in A$.

Для каждого предлагаемого множества проверим указанные условия, при этом ясно, что если, например, первое условие не выполняется, то нет смысла проверять другие условия.

Пусть A_1 — множество всех нечетных целых чисел, тогда очевидно, что $1 \in A_1$, но $1 + 1 = 2 \notin A_1$. Итак, условие 1) не выполняется, поэтому множество A_1 не является подгруппой группы G.

Рассмотрим множество A_2 всех неотрицательных целых чисел. Очевидно, что сумма любых двух неотрицательных чисел есть неотрицательное число — первое условие выполняется. Число $0 \in A_2$ — второе условие выполняется. Число, например, $5 \in A_2$, но число $(-5) \notin A_2$ — третье условие не выполняется. Следовательно, множество A_2 не является подгруппой группы G.

Для множества A_3 всех неположительных целых чисел сумма любых двух чисел этого множества является числом этого множества; нуль принадлежит множеству, но, например, если $(-7) \in A_3$, то $(-(-7)) = 7 \notin A_3$. Для этого множества не выполняется третье условие, следовательно, оно не является подгруппой группы G.

Пусть A_4 — множество всех целых чисел, кратных числу 17. Тогда это множество можно представить в виде $A_4 = \{17x |\ x \in G\}$. Возьмем произвольные элементы $y_1, y_2 \in A_4$, тогда существуют такие числа $x_1, x_2 \in G$, то $y_1 = 17x_1$ и $y_2 = 17x_2$. Имеем $y_1 + y_2 = 17x_1 + 17x_2 = 17(x_1 + x_2)$. Но G — группа, поэтому $x_1 + x_2 \in G$, следовательно, $y_1 + y_2 \in A_4$. Используя представление $0 = 17 \cdot 0$, получаем соотношение $0 \in A_4$. Если $y_1 = 17x_1 \in A_4$, то $x_1 \in G$. Тогда $(-y_1) = -17x_1 = 17(-x_1)$, но, поскольку G — группа и $x_1 \in G$, справедливо соотношение $(-x_1) \in G$, а это означает, что $(-y_1) \in A_4$. Множество A_4 удовлетворяет всем трем условиям, следовательно, оно является подгруппой группы G.

Примеры тестовых заданий

Задание 1. Определитель $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 7 & 5 \\ -6 & 3 & -9 \end{vmatrix}$ равен...

Варианты ответов:

1) 0; 2) 8; 3) -3; 4) -120.

Задание 2. Определитель $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ k & 4 & 2 \end{vmatrix}$ равен нулю при k, равном...

Варианты ответов:

1) -3; 2) 2; 3) 0; 4) -2.

Задание 3. Определитель $\begin{vmatrix} \sin 2x & -\cos 2x \\ \cos 2x & \sin 2x \end{vmatrix}$ равен…

Варианты ответов:

1) $2\sin 2x$; 2) 0; 3) 1; 4) $-\cos 4x$.

Задание 4. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Тогда матрица $D = 2A+B-C$ имеет вид…

Варианты ответов:

1) $\begin{pmatrix} -8 & 0 & -6 \\ 7 & 0 & 6 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 \\ 7 & -1 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ -3 & -4 & 6 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 \\ 0 & -6 & 4 \end{pmatrix}$.

Задание 5. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 10 & 5 \\ 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$. Тогда матрица $C = A - 2B$ имеет вид…

Варианты ответов:

1) $\begin{pmatrix} -14 & 6 & 0 \\ 4 & -8 & -10 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 13 & 12 \\ 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 6 & -5 \\ -2 & -9 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 3 & -1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.

Задание 6. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \\ -3 & 4 & 7 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 5 & -6 & -4 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix}$. Тогда матрица $C = A + 2B$ имеет вид…

Варианты ответов:

1) $\begin{pmatrix} 9 & -4 & 4 \\ 8 & -9 & -3 \\ -3 & 8 & -3 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 8 & -6 & 4 \\ 10 & -12 & -8 \\ 0 & 4 & -10 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 6 \\ -6 & 10 & 9 \end{pmatrix}$.

Задание 7. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

Тогда матрица $C = A \cdot B$ имеет вид...

Варианты ответов:

1) $\begin{pmatrix} -7 \\ -11 \\ -13 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -17 & 3 & 13 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} -17 & 1 & 6 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$.

Задание 8. Произведение матриц с размерностями $[2 \times m]$ и $[2k \times 3]$ возможно при...

Варианты ответов:

1) $m = 2$, $k = 1$; 2) $m = 3$, $k = 1$;

3) $m = 1$, $k = 2$; 4) $m = 2$, $k = 3$.

Задание 9. Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 & -6 \end{pmatrix}$ равен...

Варианты ответов:

1) 3; 2) 2; 3) 0; 4) 4.

Задание 10. Ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & 0 \\ 7 & -5 & 9 \\ -3 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$ равен 2 при λ, равном...

Варианты ответов:

1) -18; 2) -6; 3) $29/108$; 4) 0.

Задание 11. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда обратная матрица A^{-1} равна...

Варианты ответов:

1) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; 4) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание 12. Матрица $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & \lambda & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ **не имеет** обратной при λ, равном...

Варианты ответов:

1) 0; 2) 1/2; 3) 2; 4) -2.

Задание 13. Система линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} -8x - 2z = 0, \\ y + \lambda z = 0, \\ 4x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

имеет бесконечное число решений при λ, равном...

Варианты ответов:

1) -1; 2) 1; 3) 0,5; 4) 0,25.

Задание 14. Решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x + y = -1, \\ 5x + 3y = -1 \end{cases}$$

методом Крамера можно представить в виде...

Варианты ответов:

1) $x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$, $y = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \Bigg/ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$;

2) $x = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$, $y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$;

3) $x = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$, $y = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$;

4) $x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$, $y = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$.

Задание 15. Дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x + \lambda y = 5, \\ -y - 3z = -5, \\ 3x - 2y = -7. \end{cases}$$

Тогда систему линейных уравнений нельзя решить методом Крамера при λ, равном...

Варианты ответов:

1) 4; 2) -2; 3) 2; 4) 0.

Задание 16. В базисе $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ двумерного векторного пространства задан вектор $\bar{x} = 3\bar{e}_1 + \bar{e}_2$. Тогда в базисе $\bar{e}_1 + \bar{e}_2$, $\bar{e}_1 - \bar{e}_2$ вектор $\bar{x}$ имеет координаты...

Варианты ответов:

1) $(4; 2)$; 2) $(2; -1)$; 3) $(2; 1)$; 4) $(1; 1)$.

Задание 17. Дано двумерное векторное пространство с базисом $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$. Если вектор $\bar{e}_1 = \{1; -1\}$, то вектор $\bar{e}_2$ может иметь координаты...

Варианты ответов:

1) $(0; 0)$; 2) $(-1; 1)$; 3) $(2; -2)$; 4) $(1; 0)$.

Задание 18. Даны векторы $\bar{a} = \bar{i} - 2\bar{j} + \bar{k}$, $\bar{b} = \bar{j} + 2\bar{k}$. Тогда линейная комбинация $5\bar{a} - 3\bar{b}$ этих векторов равна...

Варианты ответов:

1) $5\bar{i} - 13\bar{j} - \bar{k}$; 2) $5\bar{i} - 13\bar{j} + \bar{k}$;

3) $5\bar{i} - 7\bar{j} + 11\bar{k}$; 4) $5\bar{i} - 7\bar{j} - \bar{k}$.

Задание 19. Длина суммы векторов $\bar{a} = (3; -5; 8)$ и $\bar{b} = (-1; 1; -4)$ равна...

Варианты ответов:

1) 36; 2) 2; 3) 6; 4) 10.

Задание 20. Дан вектор $\bar{a} = (1; -1; 5; -3)$. Тогда норма вектора $2\bar{a}$ в евклидовом пространстве со стандартным скалярным произведением равна...

Варианты ответов:

1) 4; 2) 6; 3) 60; 4) 12.

Задание 21. Вектор $\bar{a}$ составляет с координатными осями Ox и Oy углы $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 120^\circ$. Вычислить его координаты, если $|\bar{a}| = 2$. Укажите не менее двух ответов.

Варианты ответов:

1) $(1; -1; \sqrt{2})$; 2) $(-1; 1; \sqrt{2})$;

3) $(1; -1; -\sqrt{2})$; 4) $(-1; 1; -\sqrt{2})$.

Задание 22. Векторы $\overline{AB} = (2; 6; -4)$ и $\overline{AC} = (4; 2; -2)$ определяют стороны треугольника ABC. Найти длину вектора $\overline{CD}$, совпадающего с медианой, проведенной из вершины C.

Варианты ответов:

1) $\sqrt{10}$; 2) $\sqrt{5}$; 3) 10; 4) 5.

Задание 23. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно перпендикулярны. Их длины: $|\bar{a}| = 2$, $|\bar{b}| = 1$. Тогда скалярный квадрат $(\bar{a} + \bar{b})^2$ равен...

Варианты ответов:

1) 9; 2) 5; 3) 7; 4) 0.

Задание 24. Даны векторы $\bar{a} = (4; -2; -4)$, $\bar{b} = (6; -3; 2)$. Вычислить $\bar{a} \cdot \bar{b}$.

Варианты ответов:

1) 2; 2) 22; 3) 24; 4) -22.

Задание 25. На векторах $(2\bar{m} + 3\bar{n})$ и $(\bar{m} - \bar{n})$ как на сторонах построен параллелограмм. Тогда площадь S параллелограмма равна...

Варианты ответов:

1) $S = |\bar{n} \times \bar{m}|$; 2) $S = 5\bar{n} \times \bar{m}$;

3) $S = 5|\bar{n} \times \bar{m}|$; 4) $S = |2\bar{m}^2 + 5\bar{n} \times \bar{m} - 3\bar{n}^2|$.

Задание 26. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ взаимно перпендикулярны, $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 4$. Вычислить $|\bar{a} \times \bar{b}|$.

Варианты ответов:

1) 7; 2) -12; 3) 12; 4) 6.

Задание 27. Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = (0; -1; 1)$, $\bar{b} = (1; 1; 1)$.

Варианты ответов:

1) 1; 2) 6; 3) 0; 4) 2.

Задание 28. Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ образуют правую тройку векторов и взаимно перпендикулярны. Зная, что $|\bar{a}| = 4$, $|\bar{b}| = 2$, $|\bar{c}| = 3$, вычислить $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$.

Варианты ответов:

1) 24; 2) 18; 3) 96; 4) 48.

Задание 29. Вычислить объем треугольной призмы, построенной на векторах $\bar{a} = (7; 6; 1)$, $\bar{b} = (4; 0; 3)$, $\bar{c} = (3; 6; 4)$.

Варианты ответов:

1) -72; 2) 72; 3) 62; 4) 82.

Задание 30. Найти градиент скалярного поля $u(x, y) = 3x^2y - 3xy^3 + y^4$ в точке $M(1; 2; 0)$.

Задание 31. Найти угол между градиентами поля $u = x^2 + 2y^2 - z^2$ в точках $P_1(2; 3; -1)$ и $P_2(1; -1; 2)$.

Варианты ответов:

1) $\sin \varphi = -4/\sqrt{41}$; 2) $\cos \varphi = -4/\sqrt{41}$;

3) $\cos\varphi = 4/\sqrt{41}$; 4) $\sin\varphi = 4/\sqrt{41}$.

Задание 32. Даны точки $A(3;-1)$ и $B(2;1)$. Тогда координаты точки $C(x,y)$, симметричной точке A относительно точки B, равны...

Варианты ответов:

1) $(2{,}5;0)$; 2) $(4;-3)$; 3) $(-1;2)$; 4) $(1;3)$.

Задание 33. Даны координаты вершин треугольника $A(0;-1)$, $B(-5;3)$ и $C(-3;1)$. Тогда длина медианы AM, опущенной из вершины A, равна...

Варианты ответов:

1) $\sqrt{17}$; 2) 9; 3) $\sqrt{89}$; 4) 5.

Задание 34. Даны точки $A(-9;-5)$, $B(0;-2)$. Тогда координата y точки $C(3;y)$, делящей направленный отрезок AB в отношении $2:1$, равна...

Варианты ответов:

1) $-1/3$; 2) $-7/3$; 3) -3; 4) 4.

Задание 35. Точка $A(-3;-\sqrt{3}\,)$ задана в прямоугольной системе координат. Тогда ее полярные координаты ($0 \leqslant r$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$) равны...

Варианты ответов:

1) $r = 2\sqrt{3}$, $\varphi = -5\pi/6$; 2) $r = 2\sqrt{3}$, $\varphi = \pi/6$;

3) $r = \sqrt{5}$, $\varphi = 4\pi/3$; 4) $r = \pi/6$, $\varphi = 2\sqrt{3}$.

Задание 36. Точка $A(2;5\pi/6)$ задана в полярной системе координат. Тогда в прямоугольной системе координат координаты точки имеют вид...

Варианты ответов:

1) $(\sqrt{3};-1)$; 2) $(2;150)$; 3) $(1;-\sqrt{3}\,)$; 4) $(-\sqrt{3};1)$.

Задание 37. Точка $M(-1;-\sqrt{3}\,)$ задана в прямоугольной системе координат. Тогда ее полярные координаты (r,φ) ($r \geqslant 0$, $-\pi < \varphi \leqslant \pi$), при условии, что полюс совпадает с началом координат прямоугольной системы, а полярная ось — с положительной полуосью абсцисс и обе системы координат правые, равны...

Варианты ответов:

1) $r = 2$, $\varphi = -2\pi/3$; 2) $r = 2$, $\varphi = \pi/3$;

3) $r = 2$, $\varphi = -5\pi/6$; 4) $r = -2\pi/3$, $\varphi = 2$.

Задание 38. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $A(-4;-1)$ и перпендикулярной прямой l_1: $2x - y + 3 = 0$, имеет вид...

Варианты ответов:

1) $2x - y + 7 = 0$; 2) $-4x - y + 3 = 0$;

3) $x + 2y - 2 = 0$; 4) $x + 2y + 6 = 0$.

Задание 39. Общее уравнение прямой, проходящей через точки $A(-2;3)$ и $B(3;-3)$, имеет вид...

Варианты ответов:

1) $6x + 5y - 27 = 0$; 2) $6x + 5y - 3 = 0$;

3) $-5x + 6y = 0$; 4) $-5x - y - 7 = 4$.

Задание 40. Острый угол между прямыми l_1: $2x - y + 4 = 0$ и l_2: $-3x - y + 3 = 0$ равен...

Варианты ответов:

1) $\pi/4$; 2) $-2\pi/3$; 3) $3\pi/4$; 4) $-\pi/4$.

Задание 41. Уравнение параболы с вершиной в начале координат, симметричной относительно оси Ox и проходящей через точку $A(4;-2)$, имеет вид...

Варианты ответов:

1) $y^2 = -x$; 2) $y^2 = 4x$; 3) $x^2 = -8y$; 4) $y^2 = x$.

Задание 42. Соотношения $\begin{cases} x = 2\cos 3t, \\ y = 2\sin 3t \end{cases}$ при $t \in \left[0; \dfrac{2\pi}{3}\right]$ на плоскости Oxy задают...

Варианты ответов:

1) параболу; 2) эллипс; 3) окружность; 4) гиперболу.

Задание 43. Асимптоты гиперболы $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ задаются уравнениями… . Укажите не менее двух вариантов ответа.

Варианты ответов:

1) $y = \dfrac{2}{3}x$; 2) $y = -\dfrac{2}{3}x$; 3) $y = \dfrac{3}{2}x$; 4) $y = -\dfrac{3}{2}x$.

Задание 44. Синус угла между прямой $\dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+1}{-1} = \dfrac{z}{2}$ и плоскостью $x - 2y - 3z + 9 = 0$ равен...

Варианты ответов:

1) $1/196$; 2) $1/14$; 3) $4/\sqrt{70}$; 4) $-1/14$.

Задание 45. Уравнение плоскости, проходящей через ось Oz и точку $M(-2; 3; -5)$, имеет вид...

Варианты ответов:

1) $x + y + z + 4 = 0$; 2) $3x + 2y = 0$;

3) $z + 5 = 0$; 4) $3x - 2y = 0$.

Задание 46. Острый угол между плоскостями $x - 2y - 2z + 8 = 0$ и $x + z - 6 = 0$ равен...

Варианты ответов:

1) $\pi/3$; 2) $\pi/4$; 3) $3\pi/4$; 4) $\arccos[11/(3\sqrt{38})]$.

Задание 47. Угол между прямой $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y+2}{1} = \dfrac{z-5}{0}$ и плоскостью $4x + y + z - 2 = 0$ равен...

Варианты ответов:

1) $\pi/3$; 2) $5\pi/6$; 3) $\pi/6$; 4) $2\pi/3$.

Задание 48. Параметрические уравнения прямой в пространстве, проходящей через точку $M(1; -1; -3)$ перпендикулярно плоскости $2x - 3y + 4z - 5 = 0$, имеют вид...

Варианты ответов:

1) $\begin{cases} x = 2 + t, \\ y = -3 - t, \\ z = 4 - 3t; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x = 2t, \\ y = -3t, \\ z = 4t; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -1 - 3t, \\ z = -3 + 4t; \end{cases}$ 4) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z+3}{4}$.

Задание 49. Прямая $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z}{-4}$ и плоскость $2x - ky + z + 3 = 0$ параллельны при k, равном...

Варианты ответов:

1) $-3/2$; 2) $8/3$; 3) 0; 4) -1.

Задание 50. Каноническое уравнение поверхности $x^2 + y^2 - 10x - 8y - z + 39 = 0$ имеет вид...

Варианты ответов:

1) $(x-5)^2 + (y-4)^2 = z + 2$;

2) $x(x-10) + y(y-8) - z = 39$;

3) $(x+5)^2 + (y+4)^2 = z + 2$;

4) $(x-5)^2 + (y-4)^2 - (z+2)^2 = 0$.

Задание 51. Точка, принадлежащая поверхности

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{25} - \frac{(z-5)^2}{2} = 1,$$

имеет координаты...

Варианты ответов:

1) $(-1; -2; 5)$; 2) $(1; 2; -5)$; 3) $(4; 25; 2)$; 4) $(1; -2; 5)$.

Задание 52. Уравнение касательной к кривой $(x-1)^2 + y^2 = 10$ в точке $(-2; 1)$ имеет вид...

Варианты ответов:

1) $6x + y + 13 = 0$; 2) $-3x + y + 5 = 0$;

3) $2x + y + 3 = 0$; 4) $-3x + y - 7 = 0$.

Задание 53. Уравнение нормали к кривой $y = x^3 + 5x^2 - 3$ в точке $(-1; 1)$ имеет вид...

Варианты ответов:

1) $x - 7y + 6 = 0$; 2) $x - 10y + 11 = 0$;

3) $7x + y + 6 = 0$; 4) $x - 7y + 8 = 0$.

Задание 54. Кривизна кривой $y = y(x)$ равна $-1/3$, тогда радиус кривизны равен...

Варианты ответов:

1) -3; 2) 9; 3) $-1/3$; 4) 3.

Задание 55. Уравнение касательной плоскости к поверхности $z = x^2 - 5y^2$ в точке $(1; 1; -4)$ имеет вид...

Варианты ответов:

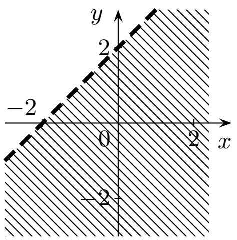
1) $2x - 10y - z = 0$; 2) $2x - 10y - z + 4 = 0$;

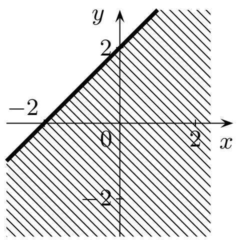
3) $2x + 10y - z - 16 = 0$; 4) $2x - 10y - z + 12 = 0$.

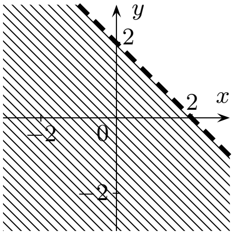
Задание 56. Уравнение нормали к эллипсоиду $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ в точке $M(x, y, z)$ имеет вид...

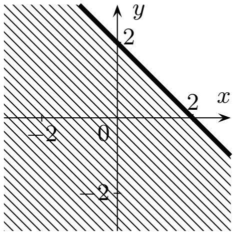
Задание 57. Область, соответствующая неравенству $y < x + 2$, изображена на рисунке...

Варианты ответов:

1) 

2) 

3) 

4) 

Задание 58. Бинарной операцией является...

Варианты ответов:

1) возведение в квадрат действительного числа;

2) наибольший общий делитель двух натуральных чисел;

3) логарифмирование действительного положительного числа;

4) тождественное отображение множества M.

Задание 59. На множестве элементарных функций, определенных на множестве действительных чисел, задана операция композиции элементарных функций. Тогда свойство коммутативности ($f[g(x)] = g[f(x)]$) выполняется для функций...

Варианты ответов:

1) $f(x) = \cos x$, $g(x) = \arccos x$;

2) $f(x) = x^3$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$;

3) $f(x) = \ln x$, $g(x) = e^x$;

4) $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$.

Задание 60. Выяснить, какими из основных свойств (рефлексивность, транзитивность, симметричность, антисимметричность) обладает отношение перпендикулярности, заданное на множестве всех прямых на плоскости.

Задание 61. Дано разложение многочлена на множители: $f(x) = x^3(x^2-9)^4(x^2+9)(x-a)$. Корень $x = 3$ имеет кратность 5, если a равно...

Варианты ответов:

1) $3i$; 2) 3; 3) 0; 4) -3.

Задание 62. Дано линейное пространство векторов $x = x_1e_1 + x_2e_2$, где $x_1, x_2 \in R$, и линейное преобразование этого пространства $\varphi(x) = x_1e_1 - 2x_2e_2$. Если $\varphi(x) = Ax$, то матрицей A является...

Варианты ответов:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Задание 63. Даны линейные преобразования $U = AV$ и $V = BW$, где $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$. Найти матрицу преобразования C, переводящего вектор W в вектор U.

Задание 64. Пусть $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0; 1; 2; 3; ...\}$. Выяснить, являются ли указанные множества подполугруппами полугруппы $(\mathbb{N}_0; +)$. Указать не менее двух ответов.

Варианты ответов:

1) $A = \{0; 1\}$; 2) $B = \{0; 2; 4; 6; ...\}$;

3) $C = \mathbb{N}_0 \backslash \{0; 1; 2; 5\}$.

Раздел 2
Математический анализ

2.1. Функции. Основные понятия и определения

Определение 2.1. Величина y называется *функций* переменной величины x в области D, если каждому значению x из этой области соответствует одно определенное значение величины y.

Символически записывается $y = f(x)$, а область D называется *областью определения функции*.

Способы задания функции: таблица, формула, график.

Основными элементарными функциями называются:

1) степенная функция $y = x^n$, где n — действительное число;

2) показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$;

3) логарифмическая функция $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$;

4) тригонометрические функции $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$, $y = \sec x$, $y = \operatorname{cosec} x$;

5) обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$, $y = \operatorname{arcsec} x$, $y = \operatorname{arccosec} x$.

Определение 2.2. Функции, построенные из основных элементарных функций и постоянных при помощи конечного числа арифметических действий и конечного числа операций взятия функции от функции, называются *элементарными функциями*.

Определение 2.3. Функция $y = f(x)$ называется *четной*, если $f(x) = f(-x)$, и *нечетной*, если $f(-x) = -f(x)$.

Определение 2.4. Функция $y = f(x)$ называется *периодической*, если существует такое $a > 0$, что для любого x справедливо равенство $f(x + a) = f(x)$, а наименьшее положительное число a называется *периодом функции*.

Пример 2.1. Найти область определения функции

$$y = \log_x(6 - x).$$

Решение. Решается система неравенств:

$$\begin{cases} 6 - x > 0, \\ x > 0, \\ x \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 6, \\ x > 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Значит, $x \in (0; 1) \cup (1; 6)$.

Пример 2.2. Найти область определения функции

$$y = \arccos(3x + 4).$$

Решение. Данная функция определена, если $|3x + 4| \leqslant 1$, т.е. $-1 \leqslant 3x + 4 \leqslant 1$. Тогда

$$-5 \leqslant 3x \leqslant -3, \quad -\frac{5}{3} \leqslant x \leqslant -1, \quad x \in \left[-\frac{5}{3}; -1\right].$$

2.2. Предел функции

Определение 2.5. Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to x_0$, если для всех значений x, достаточно мало отличающихся от числа x_0, соответствующие значения функции $f(x)$ как угодно мало отличаются от числа A: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

называется *первым замечательным пределом*.

Предел

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{или} \quad \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

где $e \approx 2{,}718$, называется *вторым замечательным пределом*. Из него следует следующая формула:

$$\lim_{y \to 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

Предел постоянной равен самой постоянной.

Если существуют $\lim u$ и $\lim v$, то

$$\lim(u + v) = \lim u + \lim v, \quad \lim(uv) = \lim u \cdot \lim v,$$

$$\lim \frac{u}{v} = \frac{\lim u}{\lim v}, \quad \lim v \neq 0.$$

При вычислении пределов применяются преобразования выражений, методы раскрытия неопределенностей $0/0$, ∞/∞, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, замечательные пределы.

Пример 2.3. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{4x^3-2x+1}{x+2x^2-3x^3}$.

Решение. Имеем неопределенность ∞/∞. В таких примерах делим почленно числитель и знаменатель на x^n, где n — степень многочлена в знаменателе, т.е. на x^3:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{4x^3-2x+1}{x+2x^2-3x^3} = \lim_{x\to\infty} \frac{4-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}}{\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{2}{x}-3} = \frac{4-0+0}{0+0-3} = -\frac{4}{3}.$$

Пример 2.4. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x+2}{\sqrt{7-x}-3}$.

Решение. Имеем неопределенность $0/0$. Умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю, т.е. на $\sqrt{7-x}+3$. Получим

$$\lim_{x\to-2} \frac{(x+2)}{(\sqrt{7-x}-3)}\frac{(\sqrt{7-x}+3)}{(\sqrt{7-x}+3)} = \lim_{x\to-2} \frac{(x+2)(\sqrt{7-x}+3)}{7-x-9} =$$

$$= \lim_{x\to-2} \frac{(x+2)(\sqrt{7-x}+3)}{-(x+2)} = -\lim_{x\to-2}(\sqrt{7-x}+3) =$$

$$= -(3+3) = -6.$$

Пример 2.5. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to-3} \dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$.

Решение. Имеем неопределенность $0/0$. Разложим числитель и знаменатель на множители:

$$x^2+2x-3 = (x+3)(x-1), \quad x^3+4x^2+3x = x(x+3)(x+1).$$

Подставим их в условие:

$$\lim_{x\to-3} \frac{(x+3)(x-1)}{x(x+3)(x+1)} = \lim_{x\to-3} \frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{-3-1}{-3(-3+1)} = -\frac{2}{3}.$$

2.3. Непрерывность функции. Точки разрыва функции

Определение 2.6. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если эта функция определена в какой-нибудь окрестности точки x_0 и если $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta y = 0$.

Функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0, если она определена в какой-нибудь окрестности этой точки и если предел функции при $x \to x_0$ существует и равен значению функции при $x = x_0$: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Определение 2.7. Если в какой-либо точке x_1 функция не является непрерывной, то точка x_1 называется *точкой разрыва функции*, а сама функция — *разрывной* в этой точке.

Точкой разрыва первого рода функции $f(x)$ называется такая точка x_1, в которой функция имеет левый и правый пределы, не равные между собой. Остальные точки разрыва называются *точками разрыва второго рода*.

Пример 2.6. Найти точку разрыва функции $y = \dfrac{|x-4|}{x-4}$.

Решение. Вычислим односторонние пределы функции в точке $x = 4$:

$$\lim_{x \to 4-0} y = \lim_{x \to 4-0} \frac{|x-4|}{x-4} = \lim_{x \to 4-0} \frac{4-x}{x-4} = -1;$$

$$\lim_{x \to 4+0} y = \lim_{x \to 4+0} \frac{|x-4|}{x-4} = \lim_{x \to 4+0} \frac{x-4}{x-4} = 1.$$

Односторонние пределы существуют, не равны между собой, значит, $x = 4$ — точка разрыва первого рода.

Пример 2.7. Найти точку разрыва функции

$$f(x) = \frac{\ln(9-x^2)}{(x-4)(x-1)(x+4)(x+5)}.$$

Решение. Точки $x_1 = -5$, $x_2 = -4$, $x_3 = 4$ не входят в область определения функции $y = \ln(9-x^2)$, тогда $f(x)$ имеет одну точку разрыва $x = 1$.

Пример 2.8. Показать, что функция $f(x) = \dfrac{x^2-25}{x^2-6x+5}$ непрерывна в точке $x = -5$.

Решение.

$$\lim_{x \to -5-0} f(x) = \lim_{x \to -5-0} \frac{(x-5)(x+5)}{(x-1)(x-5)} = \lim_{x \to -5-0} \frac{x+5}{x-1} = 0;$$

$$\lim_{x \to -5+0} f(x) = \lim_{x \to -5+0} \frac{(x-5)(x+5)}{(x-1)(x-5)} = \lim_{x \to -5+0} \frac{x+5}{x-1} = 0.$$

Заметим, что $f(-5) = 0$. Итак, $\lim\limits_{x \to -5-0} f(x) = \lim\limits_{x \to -5+0} f(x) = f(-5)$, т.е. функция непрерывна в точке $x = -5$.

2.4. Производные первого порядка

Определение 2.8. *Производной функции* $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при $\Delta x \to 0$:

$$f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Значение производной $f'(x_0)$ равно угловому коэффициенту k касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0: $f'(x_0) = k$.

Производная сложной функции равна производной функции по промежуточному аргументу, умноженный на производную этого аргумента по основному аргументу: если $y = f(u)$, $u = \varphi(x)$, то $y' = f'(u)\varphi'(x)$.

При вычислении производных пользуются таблицей производных и правилами дифференцирования.

Пример 2.9. Вычислить производную функции $y = \dfrac{x+2}{\operatorname{ctg} x}$.

Решение.

$$y' = \frac{(x+2)' \operatorname{ctg} x - (x+2)(\operatorname{ctg} x)'}{\operatorname{ctg}^2 x} =$$

$$= \frac{\operatorname{ctg} x + (x+2)\dfrac{1}{\sin^2 x}}{\operatorname{ctg}^2 x} = \frac{\cos x \sin x + x + 2}{\cos^2 x}.$$

Пример 2.10. Вычислить производную функции, заданной неявно с помощью равенства $\sin y = xy^2 + 5$.

Решение. Продифференцируем по x обе части равенства:

$$(\cos y)y' = y^2 + x(2y)y'.$$

Вычисляем y':

$$y' = \frac{y^2}{\cos y - 2xy}.$$

2.5. Производные высших порядков

Производная n-го порядка есть производная от производной $(n-1)$-го порядка: $y^{(n)} = [y^{(n-1)}]'$.

Пример 2.11. Вычислить производную второго порядка функции $y = e^{2x} \cos x$ при $x = 0$.

Решение. Вычислим производную первого порядка:
$$y' = 2e^{2x}\cos x - e^{2x}\sin x = e^{2x}(2\cos x - \sin x).$$
Тогда
$$y'' = (y')' = 2e^{2x}(2\cos x - \sin x) + e^{2x}(-2\sin x - \cos x) = \\ = e^{2x}(3\cos x - 4\sin x).$$
Вычислим $y''(0)$:
$$y''(0) = e^0(3\cos 0 - 3\sin 0) = 3.$$

Пример 2.12. Функция $y = y(x)$ задана параметрически:
$$\begin{cases} x = 1 + \ln t, \\ y = 3t^2 - 2t^3. \end{cases}$$
Найти d^2y/dx^2.

Решение. Формула производной второго порядка функции $y = y(x)$, заданной параметрически, имеет вид
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_t x''_{tt}}{(x'_t)^3}.$$
Вычисляем:
$$x'_t = \frac{1}{t}, \quad x''_{tt} = -\frac{1}{t^2}, \quad y'_t = 6t - 6t^2, \quad y''_{tt} = 6 - 12t.$$
Подставим в формулу:
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{(6-12t)\dfrac{1}{t} + (6t-6t^2)\dfrac{1}{t^2}}{\left(\dfrac{1}{t}\right)^3} = \left(\frac{6-12t}{t} + \frac{6-6t}{t}\right)t^3 = 6(2-3t)t^2.$$

2.6. Дифференциал

Определение 2.9. *Дифференциалом функции* $y = f(x)$ называется главная часть ее приращения, линейная относительно приращения аргумента. *Дифференциалом аргумента* называется приращение аргумента: $dx = \Delta x$.

Дифференциал функции равен произведению ее производной на дифференциал аргумента: $dy = f'(x)\,dx$.

Правила вычисления дифференциалов:

1) $dC = 0$, если $C = \text{const}$;
2) $d(Cu) = C\,du$;
3) $d(u \pm v) = du \pm dv$;
4) $d(uv) = u\,dv + v\,du$;

5) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$, $v \neq 0$;

6) $df(u) = f'(u)\,du$, $u = u(x)$.

Если Δx мало́, то

$$\Delta y \approx dy \quad \text{и} \quad f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x.$$

Дифференциал второго порядка — дифференциал от дифференциала первого порядка: $d^2y = d(dy)$. Вообще, дифференциал n-го порядка — это $d^ny = d(d^{n-1}y)$. Формулы вычисления: $d^2y = y''(dx)^2$, $d^3y = y'''(dx)^3$, ..., $d^ny = y^{(n)}(dx)^n$.

Пример 2.13. Найти дифференциалы первого, второго порядков функции $y = \ln(4x+5)$.

Решение. Вычислим y' и y''. Будем иметь

$$y' = \frac{4}{4x+5}, \quad y'' = -\frac{16}{(4x+5)^2}.$$

Тогда

$$dy = \frac{4}{4x+5}\,dx, \quad d^2y = -\frac{16}{(4x+5)^2}\,dx^2.$$

Пример 2.14. Вычислить приближенное значение $\arcsin 0{,}51$.

Решение. Рассмотрим функцию $y = \arcsin x$. В ней положим $x = 0{,}5$. Тогда $\Delta x = 0{,}01$. Применяем формулу $\Delta y \approx dy$ или $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\,\Delta x$. Будем иметь

$$\arcsin 0{,}51 \approx \arcsin 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{1-0{,}5^2}} \cdot 0{,}01 = \frac{\pi}{6} + 0{,}011 = 0{,}513.$$

2.7. Приложение дифференциального исчисления функции одной переменной

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$, то $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол, образованный положительным направлением оси Ox и касательной к кривой в точке с абсциссой x_0.

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0),$$

где y_0' — значение производной y' при $x = x_0$.

Уравнение нормали в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{1}{y_0'}(x - x_0).$$

Угол между двумя кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ в точке их пересечения $M_0(x_0, y_0)$ находится по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) f_2'(x_0)}.$$

Если при прямолинейном движении точки задан закон движения $s = s(t)$, то скорость движения в момент t есть производная пути по времени: $v = s'(t_0)$, а ускорение вычисляется по формуле $a = s''(t_0)$.

Производная применяется в правиле Лопиталя, в исследовании функции и построении графика функции.

Пример 2.15. Найти уравнение касательной к графику функции $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 2x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение. Вычисляем

$$f(x_0) = f(2) = 1, \quad f'(x) = -3x^2 + 6x - 2, \quad f'(2) = -2.$$

Подставим в уравнение касательной, получим $y = -2x + 5$.

Пример 2.16. Какой угол образует с осью абсцисс касательная к кривой

$$y = \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{9}x^3,$$

проведенная в точке с абсциссой $x = 1$?

Решение. Вычислим

$$y' = \frac{10}{3}x^4 - \frac{1}{3}x^2,$$

тогда $y'(1) = 3$ и $\operatorname{tg}\alpha = 3$. Искомый угол $\alpha = \operatorname{arctg} 3$.

2.8. Асимптоты графика функции

Определение 2.10. Прямая линия L называется *асимптотой* графика функции $y = f(x)$, если расстояние точки графики от прямой L стремится к нулю при неограниченном удалении этой точки от начала координат.

Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$, то график функции $y = f(x)$ имеет асимптоту $x = x_0$ — *вертикальную*.

Если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$, то график функции $y = f(x)$ имеет асимптоту $y = b$ — *горизонтальную*.

Прямая $y = kx + b$ является *наклонной асимптотой* графика функции $y = f(x)$ при $x \to \pm\infty$, если существуют конечные

пределы
$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx], \quad k \neq 0.$$

Пример 2.17. Найти горизонтальную асимптоту графика функции $f(x) = \sin \dfrac{\pi x^2}{1+3x^2}$.

Решение.
$$\lim_{x\to\pm\infty} \sin \frac{\pi x^2}{1+3x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \sin \frac{\pi x^2}{x^2\left(\dfrac{1}{x^2}+3\right)} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$
Тогда $y = \sqrt{3}/2$ — уравнение горизонтальной асимптоты.

Пример 2.18. Найти вертикальную асимптоту функции
$$f(x) = \frac{x-1}{x^2-6x+5}.$$

Решение. Вертикальные асимптоты обычно сопутствуют точкам разрыва второго рода функции. Для этой функции они будут $x_1 = 1$, $x_2 = 5$.

Вычислим односторонние пределы функции в точке $x_1 = 1$:
$$\lim_{x\to 1-0} \frac{x-1}{x^2-6x+5} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1-0} \frac{x-1}{(x-1)(x-5)} =$$
$$= \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{x-5} = -\frac{1}{4};$$
правосторонний предел также равен $-1/4$. Поэтому прямая $x = 1$ не является вертикальной асимптотой.

Вычислим односторонние пределы функции в точке $x_2 = 5$:
$$\lim_{x\to 5-0} \frac{x-1}{x^2-6x+5} = \lim_{x\to 5-0} \frac{1}{x-5} = -\infty,$$
$$\lim_{x\to 5+0} \frac{x-1}{x^2-6x+5} = \lim_{x\to 5+0} \frac{1}{x-5} = \infty.$$
Следовательно, прямая $x = 5$ будет вертикальной асимптотой.

Пример 2.19. Найти наклонную асимптоту графика функции $f(x) = \dfrac{4-5x-3x^3}{2x^2+x+3}$.

Решение. Вычислим k и b, полагая существование у функции наклонной асимптоты $y = kx + b$:
$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4-5x-3x^3}{2x^3+x^2+3x} = \frac{\infty}{\infty} = -\frac{3}{2},$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4-5x-3x^3}{2x^2+x+3} + \frac{3}{2}x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3x^2-x+8}{2(2x^2+x+3)} = \frac{3}{4}.$$

Следовательно, прямая $y = -\frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$ является наклонной асимптотой графика данной функции при $x \to \infty$ и при $x \to -\infty$.

2.9. Свойства определенного интеграла

Если $f(x)$ — нечетная функция, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$. Если $f(x)$ — четная функция, то $\int\limits_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int\limits_{0}^{a} f(x)\,dx$.

Справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx.$$

Если функция $y = f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

Перестановка границ определенного интеграла меняет его знак на противоположный, не меняя его абсолютную величину.

Пример 2.20. Вычислить интеграл $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} x^2 \sin\frac{\pi x}{2}\,dx$.

Решение. Функция под знаком интеграла нечетная, границы его относительно точки $x = 0$ симметричны, тогда интеграл равен нулю.

Пример 2.21. Оценить определенный интеграл $\int\limits_{-1}^{3} e^{2x-x^2} dx$.

Решение. Найдем наименьшее и наибольшее значения (m и M) функции $f(x) = e^{2x-x^2}$ на отрезке $[-1; 3]$. Для этого вычислим $f'(x)$ и решим уравнение $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = e^{2x-x^2}(2-2x), \quad e^{2x-x^2}(2-2x) = 0,$$

$$2 - 2x = 0, \quad x = 1.$$

Заметим, что $x \in [-1; 3]$ и $f(-1) = e^{-3}$, $f(1) = e$, $f(3) = e^{-3}$. Тогда $m = e^{-3}$, $M = e$ и

$$e^{-3}[3-(-1)] \leqslant \int\limits_{-1}^{3} e^{2x-x^2} dx \leqslant e[3-(-1)], \quad \frac{4}{e^3} \leqslant \int\limits_{-1}^{3} e^{2x-x^2} dx \leqslant 4e.$$

Пример 2.22. Вычислить $\int\limits_{0}^{2} \ln(x+2)\, dx$.

Решение. Применяется формула интегрирования по частям:

$$\int\limits_{a}^{b} u\, dv = uv\Big|_a^b - \int\limits_{a}^{b} v\, du.$$

В ней $u = \ln(x+2)$, $du = dx/(x+2)$, $dv = dx$, $v = x$. Тогда

$$\int\limits_{0}^{2} \ln(x+2)\, dx = x\ln(x+2)\Big|_0^2 - \int\limits_{0}^{2} \frac{x\, dx}{x+2} =$$

$$= 2\ln 4 - \int\limits_{0}^{2} \left(1 - \frac{2}{x+2}\right) dx = 2\ln 4 - [x - 2\ln(x+2)]\Big|_0^2 =$$

$$= 2\ln 4 - (2 - 2\ln 4 + 2\ln 2) = 6\ln 2 - 2.$$

Пример 2.23. Вычислить $\int\limits_{1}^{8} \frac{x - 3\sqrt[3]{x} + 2}{\sqrt[3]{x}}$.

Решение. Применяется формула Ньютона—Лейбница

$$\int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

где $F(x)$ — первообразная функции $f(x)$:

$$\int\limits_{1}^{8} \frac{x - 3\sqrt[3]{x} + 2}{\sqrt[3]{x}} = \int\limits_{1}^{8} \left(\sqrt[3]{x^2} - 3 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}}\right) dx =$$

$$= \int\limits_{1}^{8} \left(x^{\frac{2}{3}} - 3 + 2x^{-\frac{1}{3}}\right) dx = \left(\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} - 3x + 3x^{\frac{2}{3}}\right)\Bigg|_1^8 =$$

$$= \left(\frac{3}{5}\sqrt[3]{8^5} - 3\cdot 8 + 3\sqrt[3]{8^2}\right) - \left(\frac{3}{5} - 3 + 3\right) = \frac{36}{5} - \frac{3}{5} = \frac{33}{5}.$$

Пример 2.24. Вычислить $\int\limits_{1/2}^{e/2} \frac{\ln^3 2x}{x} dx.$

Решение. Применяется метод подстановки. Пусть $t = \ln 2x$, $dt = dx/x$. Новые пределы интегрирования: если $x_1 = 1/2$, то $t_1 = 0$; если $x_2 = e/2$, то $t_2 = 1$. Тогда

$$\int\limits_{1/2}^{e/2} \frac{\ln^3 2x}{x} dx = \int\limits_0^1 t^3 dt = \frac{t^4}{4}\bigg|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

2.10. Приложения определенного интеграла

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x) \geqslant 0$, прямыми $x = a$, $x = b$ и отрезком $[a, b]$ оси Ox, вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_a^b f(x)\, dx.$$

Площадь криволинейного сектора, ограниченного кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\theta)$ и двумя полярными радиусами $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$, $\alpha < \beta$, вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2} \int\limits_\alpha^\beta \rho^2 d\theta.$$

Если кривая $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ гладкая, т.е. $y' = f'(x)$ непрерывна, то длина дуги этой кривой вычисляется по формуле

$$L = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

При параметрическом задании кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ длина дуги кривой при изменения параметра t от t_1 до t_2 вычисляется по формуле

$$L = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt.$$

Если гладкая кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\theta)$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, то

$$L = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\; d\theta.$$

Если криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$, прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$, вращается вокруг оси Ox, то объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V_x = \pi \int\limits_{a}^{b} y^2 dx.$$

Если дуга гладкой кривой $y = f(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$ вращается вокруг оси Ox, то площадь поверхности вращения

$$S_x = 2\pi \int\limits_{a}^{b} y\sqrt{1 + (y')^2}\; dx.$$

Работа переменной силы $F = f(x)$, действующей в направлении оси Ox, на отрезке $[x_1, x_2]$ вычисляется по формуле

$$A = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx.$$

Пример 2.25. Найти площадь фигуры D, изображенной на рис. 2.1.

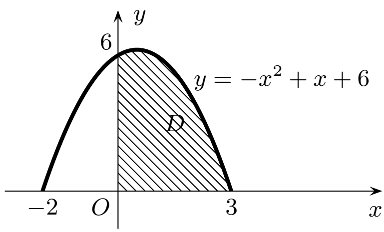


Рис. 2.1

Решение. Площадь фигуры вычисляется по формуле

$$S = \int\limits_{a}^{b} f(x)\, dx,$$

где $a = 0$, $b = 3$, $f(x) = -x^2 + x + 6$:

$$S = \int\limits_{0}^{3} (-x^2 + x + 6)\, dx = \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x\right)\Bigg|_0^3 =$$

$$= (-9 + 4{,}5 + 18) - 0 = 13{,}5.$$

Пример 2.26. Вычислить длину дуги кривой $y^2 = x^3$ от точки $O(0;0)$ до точки $B(4;8)$.

Решение. Длина дуги плоской кривой $y = f(x)$, ограниченной прямыми $x = a$, $x = b$, вычисляется по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

В примере $a = 0$, $b = 4$, $y = x^{\frac{3}{2}}$. Подставим в формулу:

$$l = \int_0^4 \sqrt{1 + [(x^{1,5})']^2}\, dx = \int_0^4 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}\, dx =$$

$$= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9}\left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^4 = \frac{8}{27}(10\sqrt{10} - 1).$$

Пример 2.27. Вычислить объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $xy = 4$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$, вокруг оси Ox.

Решение. Объем тела вращения вычисляется по формуле

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \pi y^2\, dx,$$

если вращение фигуры происходит вокруг оси Ox, и по формуле

$$V = \int_{y_1}^{y_2} \pi x^2\, dy,$$

если вращение происходит вокруг оси Oy. Этот пример решается по первой формуле, в ней $y = 4/x$:

$$V = \int_1^4 \pi\left(\frac{4}{x}\right)^2 dx = 16\pi\int_1^4 \frac{dx}{x^2} = 16\pi\left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^4 =$$

$$= 16\pi\left(-\frac{1}{4} + 1\right) = 16\pi \cdot \frac{3}{4} = 12\pi.$$

2.11. Функции нескольких переменных. Частные производные

Пример 2.28. Найти частную производную $\partial z/\partial y$ функции $z = e^{\sin(3x - 4xy)}$.

Решение. При вычислении частной производной $\partial z/\partial y$ функции $z = f(x, y)$ переменную x рассматриваем как постоянную величину. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial y} = [e^{\sin(3x-4xy)}]'_y = e^{\sin(3x-4xy)}[\sin(3x-4xy)]'_y =$$

$$= e^{\sin(3x-4xy)}\cos(3x-4xy)(3x-4xy)'_y = -4xe^{\sin(3x-4xy)}\cos(3x-4xy).$$

Пример 2.29. Найти частную производную $\partial z/\partial x$ функции $z = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$.

Решение. При вычислении частной производной $\partial z/\partial x$ по переменной x функции $z = f(x, y)$ переменную y рассматриваем как постоянную величину. Тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{1}{1+\dfrac{y^2}{x^2}}\left(\frac{y}{x}\right)'_x = \frac{x^2}{x^2+y^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2+y^2}.$$

Пример 2.30. Найти частную производную $\partial u/\partial z$ функции $u = x^2y - xz^2 + y^2z + 10z$.

Решение. При вычислении частной производной $\partial u/\partial z$ функции $u = f(x, y, z)$ переменные x и y рассматриваем как постоянные величины. Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -2xz + y^2 + 10.$$

Пример 2.31. Найти частную производную второго порядка $\partial^2 z/\partial x^2$ функции $z = e^{xy+1}$.

Решение. Вычислим $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, а затем $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy+1}(xy+1)'_x = ye^{xy+1}; \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = [ye^{xy+1}]'_x = y^2e^{xy+1}.$$

Пример 2.32. Найти частную производную второго порядка функции $z = \ln(2x + 3y)$ по переменной y.

Решение.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3}{2x+3y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{3}{2x+3y}\right)'_y = -\frac{9}{(2x+3y)^2}.$$

Пример 2.33. Вычислить смешанную частную производную второго порядка $\partial^2 z/\partial x\partial y$ функции $z = 1 - 2xy + 3xy^2 - 4x^2y$.

Решение.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -2y + 3y^2 - 8xy.$$

Тогда

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (-2y + 3y^2 - 8xy)'_y = -2 + 6y - 8x.$$

2.12. Полный дифференциал

Пример 2.34. Найти приближенное значение функции $z = f(x, y) = x^2 + 3xy - y^2$ в точке $A(0{,}96; 2{,}95)$.

Решение. Применяется формула

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y.$$

В ней $x_0 = 1$, $y_0 = 3$, $\Delta x = -0{,}04$, $\Delta y = -0{,}05$. Также вычисляем

$$f(1; 3) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y, \quad \frac{\partial f(1; 3)}{\partial x} = 2 + 9 = 11,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x - 2y, \quad \frac{\partial f(1; 3)}{\partial y} = 3 - 6 = -3.$$

Подставим в формулу:

$$f(0{,}96; 2{,}95) \approx 1 + 11 \cdot (-0{,}04) - 3 \cdot (-0{,}05) = 0{,}71.$$

Пример 2.35. Найти полный дифференциал функции $z = \operatorname{arcctg}\dfrac{x}{y}$.

Решение. Применяется формула полного дифференциала функции $z = f(x, y)$:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy, \quad dz = \left(\operatorname{arcctg}\frac{x}{y}\right)'_x dx + \left(\operatorname{arcctg}\frac{x}{y}\right)'_y dy =$$

$$= -\frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{y^2}}\left(\frac{x}{y}\right)'_x dx - \frac{1}{1 + \dfrac{x^2}{y^2}}\left(\frac{x}{y}\right)'_y dy =$$

$$= -\frac{y^2}{x^2 + y^2}\frac{1}{y}dx - \frac{y^2}{x^2 + y^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right)dy = -\frac{y\,dx - x\,dy}{x^2 + y^2}.$$

Пример 2.36. Найти полный дифференциал функции $u = f(x, y, z) = x^2y - xz^2 + y^2z + 10z$.

Решение. Полный дифференциал функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ имеет формулу

$$du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz.$$

Вычисляем

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2xy - z^2, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 2yz, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -2xz + y^2 + 10.$$

Тогда

$$du = (2xy - z^2)dx + (x^2 + 2yz)dy + (-2xz + y^2 + 10)dz.$$

2.13. Элементы теории множеств

Определение 2.11. Любая совокупность объектов называется *множеством*, сами объекты — *элементами множества*.

Запись $a \in A$ означает, что объект a есть элемент множества A, в противном случае пишут $a \notin A$. Множество, не содержащее ни одного элемента, называется *пустым* и обозначается символом $\varnothing$. Запись $A \subset B$ (A содержится в B) означает, что каждый элемент множества A является элементом множества B, в этом случае множество A называется *подмножеством* множества B. Множества A и B называют *равными* ($A = B$), если $A \subset B$ и $B \subset A$.

Основные способы задания множества:

1) множество A определяется непосредственным перечислением всех его элементов: $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$;

2) множество A опеделяется как совокупность тех и только тех элементов из некоторого основного множества T, которые обладают свойством α: $A = \{x \in T| \ \alpha(x)\}$, где запись $\alpha(x)$ означает, что элемент x обладает свойством α.

Пример 2.37. Описать перечислением элементов множество

$$A = \{x \in \mathbb{Z}| \ (x-3)(x^2-1) = 0 \text{ и } x \geqslant 0\}.$$

Решение. A — множество всех целых неотрицательных корней уравнения $(x-3)(x^2-1) = 0$, значит, $A = \{1; 3\}$.

Объединением множеств A и B называется множество

$$A \cup B = \{x| \ x \in A \text{ или } x \in B\}.$$

Пересечением множеств A и B называется множество

$$A \cap B = \{x| \ x \in A \text{ и } x \in B\}.$$

Разностью множеств A и B называется множество

$$A \backslash B = \{x |\ x \in A \text{ и } x \notin B\}.$$

Приняты следующие обозначения: $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел; $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел; $\mathbb{Q}$ — множество рациональных чисел; $\mathbb{R}$ — множество действительных чисел.

Пример 2.38. Описать перечислением всех элементов множества $A \cup B$, $A \cap B$, $A \backslash B$ и $B \backslash A$, если $A = \{x \in \mathbb{R} |\ x^2 + x - 20 = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} |\ x^2 - 7x + 12 = 0\}$.

Решение. Имеем $A = \{-5; 4\}$, $B = \{3; 4\}$. Тогда $A \cup B = \{-5; 3; 4\}$, $A \cap B = \{4\}$, $A \backslash B = \{-5\}$, $B \backslash A = \{3\}$.

Если A — подмножество некоторого универсального множества T, то разность $T \backslash A$ обозначается символом $\bar{A}$ и называется *дополнением* множества A (до множества T).

Пример 2.39. Приняв отрезок $T = [0; 1]$ за универсальное множество, найти дополнение множества $\{0; 1\}$.

Решение. Дополнением множества $\{0; 1\}$ до множества T будет интервал $(0; 1)$.

Операции $\cup$ и $\cap$ обобщаются на случай конечного или бесконечного *семейства множеств*.

Если задано семейство множеств A_n, $n \in \mathbb{N}$, то объединение множеств этого семейства обозначается символом $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ и определяется как множество всех тех элементов, каждый их которых принадлежит по меньшей мере одному из множеств A_n. Пересечение $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ определяется как множество всех элементов, принадлежащих каждому из множеств A_n.

Множество X называется *счетным*, если может быть установлено взаимно однозначное соответствие между элементами этого множества и элементами множества $\mathbb{N}$ всех натуральных чисел. Например, множество $\mathbb{Z}$ всех целых чисел счетно; множество всех точек плоскости с рациональными координатами счетно; множество всех многочленов с рациональными коэффициентами счетно.

Пусть $X \neq \varnothing$ — произвольное множество действительных чисел. Число $M = \max X$ называется *наибольшим* (*максимальным*) *элементом* множества X, если $M \in X$ и для всякого $x \in X$ выполняется неравенство $x \leqslant M$.

Аналогично определяется понятие *наименьшего* (*минимального*) *элемента* $m = \min X$ множества X.

Множество X называется *ограниченным сверху*, если существует действительное число a такое, что $x \leqslant a$ для всех $x \in X$. Всякое число, обладающее этим свойством, называется *верхней гранью* множества X. Для заданного ограниченного сверху множества X множество всех его верхний граней имеет наименьший элемент, который называется *точной верхней гранью* множества X и обозначается символом $\sup X$.

Аналогично определяются понятия *ограниченного снизу множества*, *нижней грани* и *точной нижней грани* $\inf X$ множества X.

Множество X, ограниченное сверху и снизу, называется *ограниченным.*

Пример 2.40. Найти точные верхнюю и нижнюю грани множества $[0;1)$.

Решение. Это множество не имеет наибольшего элемента, т.к. для всякого $x \in [0;1)$ найдется $y \in [0;1)$ такое, что $y > x$. Множество верхних граней для полуинтервала $[0;1)$ — это множество $[1;\infty)$ с наименьшим элементом 1. Поэтому $\sup[0;1) = 1$, причем $1 \notin [0;1)$.

Наименьший элемент для множества $[0;1)$ существует и равен 0. Множество нижних граней — множество $(-\infty;0]$ с наибольшим элементом, равным 0, который является точной нижней гранью полуинтервала $[0;1)$. Таким образом, $\min[0;1) = \inf[0;1) = 0$, причем $0 \in [0;1)$.

2.14. Отображение множеств

При заданных множествах X и Y *отображение* f с областью определения X и областью значений Y сопоставляет каждому элементу $x \in X$ элемент $f(x) \in Y$. В случае $Y = X$ говорят еще о *преобразовании* f множества X в себя. Символически отображение записывается в виде $f\colon\ X \to Y$.

Образом при отображении f называется множество всех элементов $f(x)$ вида $\{f(x)|\ x \in X\} = f(X) \subset Y$. Множество $f^{-1}(y) = \{x \in X|\ f(x) = y\}$ называется *прообразом* элемента $y \in Y$.

Отображение $f\colon\ X \to Y$ — *взаимно однозначное отображение. Единичным* (или *тождественным*) *отображением* $e_x\colon\ X \to X$ называется отображение, переводящее каждый элемент $x \in X$ в себя.

Функция $y = f(x)$ с *областью определения* D и *областью значений* функции E записывается в форме $f\colon\ D \to E$.

Пример 2.41. Найти область определения и множество значений функции $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение. Областью определения будет множество $D = \{x|\ |x| < 1\} = (-1;1)$. Множество значений функции: $E = \{y|\ y \geqslant 1\} = [1;\infty)$.

Примеры тестовых заданий

Задание 1. Найти область определения функции

$$y = \sqrt{\log_{0,5}(2x+3)}\,.$$

Варианты ответов:

1) $(-1{,}5;-1]$; 2) $(-1{,}5;\infty)$; 3) $(-1{,}5;-1)$; 4) $[-1;\infty)$.

Задание 2. Найти область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{x^2-x-6}}{x-3}.$$

Варианты ответов:

1) $(-\infty;-2)\cup(3;\infty)$; 2) $(-\infty;-2]\cup(3;\infty)$;

3) $(-\infty;-2)\cup[3;\infty)$; 4) $(-\infty;-2]\cup[3;\infty)$.

Задание 3. Найти область определения функции

$$y = \frac{x-5}{\sqrt{\log_{0,3}(5-2x)}}.$$

Варианты ответов:

1) $[2;2{,}5)$; 2) $(2;2{,}5]$; 3) $(2;2{,}5)$; 4) $[2;2{,}5]$.

Задание 4. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{x^2}$.

Варианты ответов:

1) -2; 2) $-1/2$; 3) $1/2$; 4) 2.

Задание 5. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{tg}3x}{\cos x-\cos^3 x}$.

Варианты ответов:

1) 3; 2) -3; 3) 1/3; 4) $-1/3$.

Задание 6. Найти предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$.

Варианты ответов:

1) 5; 2) 2,5; 3) 1/2; 4) -5.

Задание 7. Найти предел функции $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n+1}{\sqrt{3n^2+1}}$.

Варианты ответов:

1) 3; 2) -3; 3) $\sqrt{3}$; 4) $-\sqrt{3}$.

Задание 8. Найти точку разрыва функции $y=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$.

Варианты ответов:

1) 2; 2) 1; 3) -1; 4) 0.

Задание 9. Найти точку разрыва функции $y=\dfrac{4}{4-x^2}$.

Варианты ответов:

1) ± 2; 2) 4; 3) -4; 4) 0.

Задание 10. Найти точку разрыва функции

$$y=\begin{cases}0{,}5x^2 \text{ при } |x|<2,\\ 2{,}5 \text{ при } |x|=2,\\ 3 \text{ при } |x|>2.\end{cases}$$

Варианты ответов:

1) 4; 2) ± 2; 3) 3; 4) -3.

Задание 11. Найти точку разрыва функции $y = \dfrac{1}{x^2 - x + 2}$.

Варианты ответов:

1) 1; 2) -2; 3) нет; 4) -1.

Задание 12. Вычислить производную первого порядка функции $y = x\sqrt{x^2 - x + 1}$.

Варианты ответов:

1) $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$; 2) $\dfrac{4x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$;

3) $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$; 4) $\dfrac{4x^2 - 3x + 2}{2\sqrt{x^2 - x + 1}}$.

Задание 13. Вычислить производную первого порядка функции $y = x \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a} - \dfrac{a}{2} \ln(x^2 + a^2)$.

Варианты ответов:

1) $\operatorname{arctg} \dfrac{x}{a}$; 2) $-\operatorname{arctg} \dfrac{x}{a}$; 3) $\operatorname{arctg} x$; 4) $a \operatorname{arctg} \dfrac{x}{a}$.

Задание 14. Вычислить производную первого порядка функции $y = \dfrac{1}{2} \ln \operatorname{tg} x + \ln \cos x$.

Варианты ответов:

1) $-\operatorname{ctg} 2x$; 2) $\operatorname{ctg} 2x$; 3) $2 \operatorname{ctg} 2x$; 4) $\operatorname{ctg} x$.

Задание 15. Вычислить производную первого порядка функции $y = x^2 e^{-2x}$.

Варианты ответов:

1) $x(1 - x)e^{-2x}$; 2) $x(1 + x)e^{-2x}$;

3) $2x(1 - x)e^{-2x}$; 4) $2x(1 + x)e^{-2x}$.

Задание 16. Вычислить производную третьего порядка функции $y = \dfrac{x - 2}{x + 1}$.

Варианты ответов:

1) $-\dfrac{18}{(x+1)^4}$; 2) $\dfrac{18}{(x+1)^3}$; 3) $\dfrac{4}{(x+1)^4}$; 4) $\dfrac{18}{(x+1)^4}$.

Задание 17. Вычислить производную второго порядка функции $y = 3^{x^2}$.

Варианты ответов:

1) $2 \cdot 3^{x^2} \ln 3(1 + 2x^2 \ln 3)$; 2) $3^{x^2} \ln 3(1 + 2x^2 \ln 3)$;

3) $3^{x^2}(1 + 2x^2 \ln 3) \ln 3$; 4) $3^{x^2}(1 + 2x^2) \ln 3$.

Задание 18. Вычислить производную третьего порядка функции $y = \ln(1 + x)$.

Варианты ответов:

1) $\dfrac{1}{(1+x)^3}$; 2) $\dfrac{2}{(1+x)^3}$; 3) $-\dfrac{2}{(1+x)^3}$; 4) $-\dfrac{1}{(1+x)^3}$.

Задание 19. Вычислить d^2y/dx^2, если $y = y(x)$ задана параметрически $\begin{cases} x = \cos t, \\ y = \sin t, \end{cases}$ при $t = \dfrac{3}{2}\pi$.

Варианты ответов:

1) 2; 2) -2; 3) 1; 4) -1.

Задание 20. Найти дифференциал функции dy, если $y = 4^{x^2 - x}$.

Варианты ответов:

1) $4x^2(2x - 1) \ln 4\, dx$; 2) $4^{x^2 - x}(2x - 1)dx$;

3) $4x^2 \ln 4\, dx$; 4) $4^{x^2 - x}(2x - 1) \ln 4\, dx$.

Задание 21. Вычислить дифференциал функции $y = x^{101}$ в точке $x = 1$ и при $\Delta x = 0{,}01$.

Варианты ответов:

1) 1,01; 2) 1; 3) -1; 4) 1,02.

Задание 22. Найти дифференциал второго порядка d^2y функции $y = \cos^2 x$.

Варианты ответов:

1) $2\cos 2x\, dx^2$; 2) $-2\cos 2x\, dx^2$;

3) $\cos 2x\, dx^2$; 4) $2\sin 2x\, dx^2$.

Задание 23. Найти дифференциал второго порядка d^2y функции $y = e^{2x+3}$.

Варианты ответов:

1) $2e^{2x+3}dx^2$; 2) $e^{2x+3}dx^2$; 3) $4e^{2x+3}dx^2$; 4) $4e^{2x}dx^2$.

Задание 24. В какой точке касательная к графику функции $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$ образует с осью Ox угол $\alpha = \pi/4$?

Варианты ответов:

1) $(-1; 5)$; 2) $(1; -5)$; 3) $(-1; -5)$; 4) $(1; 5)$.

Задание 25. Найти промежуток возрастания функции $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x + 5$.

Варианты ответов:

1) $(-\infty; -1) \cup (3; \infty)$; 2) $(-\infty; -1) \cup (5; \infty)$;

3) $(-\infty; 1) \cup (3; \infty)$; 4) $(-\infty; -3) \cup (1; \infty)$.

Задание 26. В какой момент времени скорость материальной точки, движущейся прямолинейно по закону $x(t) = \dfrac{1}{3}t^3 - t^2 + 2t + 6$, равна 10?

Варианты ответов:

1) 2; 2) 4; 3) 3; 4) 1.

Задание 27. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = \dfrac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$. Найти скорость точки в момент времени $t = 2$.

Варианты ответов:

1) 12; 2) 16; 3) 24; 4) 30.

Задание 28. Найти вертикальную асимптоту функции $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

Варианты ответов:

1) $x = 0$; 2) $x = 2$; 3) $x = -2$; 4) $x = \pm 1$.

Задание 29. Найти наклонную асимптоту функции $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$.

Варианты ответов:

1) $y = x$; 2) $y = -x$; 3) $x = 0$; 4) $y = 2x$.

Задание 30. Найти вертикальную асимптоту функции $y=\dfrac{x^2}{1+x}$.

Варианты ответов:

1) $x = 1$; 2) $x = -1$; 3) $x = 0$; 4) $x = 2$.

Задание 31. Найти горизонтальную асимптоту функции

$$y = \frac{x^2}{x^2 - 4}.$$

Варианты ответов:

1) $y = -1$; 2) $y = 2$; 3) $y = 1$; 4) $y = 0$.

Задание 32. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^1 (x+1)e^{2x}\,dx$.

Варианты ответов:

1) $3e^2 - 1$; 2) $3e^2 + 1$; 3) $3e^2$; 4) $\dfrac{1}{4}(3e^2 - 1)$.

Задание 33. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^1 x^3\sqrt{4+5x^4}\,dx$.

Варианты ответов:

1) $\dfrac{19}{30}$; 2) $\dfrac{17}{30}$; 3) $\dfrac{1}{2}$; 4) $-\dfrac{19}{30}$.

Задание 34. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x\, dx$.

Варианты ответов:

1) $\dfrac{2}{3}$; 2) $\dfrac{1}{3}$; 3) $-\dfrac{1}{3}$; 4) $-\dfrac{2}{3}$.

Задание 35. Вычислить определенный интеграл $\int\limits_1^2 \left(x^2 + \dfrac{1}{x^4}\right) dx$.

Варианты ответов:

1) $-\dfrac{21}{8}$; 2) $-\dfrac{17}{8}$; 3) $\dfrac{21}{8}$; 4) $\dfrac{17}{8}$.

Задание 36. С помощью определенного интеграла вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = 0$.

Варианты ответов:

1) $\dfrac{31}{3}$; 2) $\dfrac{19}{3}$; 3) $\dfrac{17}{3}$; 4) $\dfrac{32}{3}$.

Задание 37. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln(\sin x)$ от $x = \pi/3$ до $x = 2\pi/3$.

Варианты ответов:

1) $\ln 3$; 2) $\ln 5$; 3) 3; 4) 5.

Задание 38. С помощью определенного интеграла найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $x = 0$, $y = 8$, вокруг оси Oy.

Варианты ответов:

1) 19π; 2) $19{,}2\pi$; 3) $20{,}2\pi$; 4) 20π.

Задание 39. Найти $\partial z/\partial y$ функции $z = \arccos \dfrac{y}{x}$.

Варианты ответов:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$; 2) $\dfrac{2}{\sqrt{x^2 - y^2}}$;

3) $-\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$; 4) $-\dfrac{2}{\sqrt{x^2-y^2}}$.

Задание 40. Найти частную производную $\partial u/\partial x$ функции $u = x^2y^3 + xz - y^2z + 8y$.

Варианты ответов:

1) $xy^3 + z$; 2) $3xy^3 + z$; 3) $2xy^3 - z$; 4) $2xy^3 + z$.

Задание 41. Найти частную производную второго порядка $\partial^2 z/\partial y^2$ функции $z = \sin(3x + 2y)$.

Варианты ответов:

1) $-4\sin(3x + 2y)$; 2) $4\sin(3x + 2y)$;

3) $\sin(3x + 2y)$; 4) $-\sin(3x + 2y)$.

Задание 42. Проверить формулу $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, если $z = \dfrac{x^2}{y^2}$.

Задание 43. Вычислить полный дифференциал функции $z = \ln(xy - 2y^2)$.

Варианты ответов:

1) $\dfrac{y\,dx - (x - 4y)\,dy}{xy - 2y^2}$; 2) $\dfrac{-y\,dx + (x - y)\,dy}{xy - 2y^2}$;

3) $\dfrac{y\,dx + (x - 4y)\,dy}{xy - 2y^2}$; 4) $\dfrac{y\,dx + (x - y)\,dy}{xy - 2y^2}$.

Задание 44. Вычислить полный дифференциал функции $z = \sin(x^2 + 3xy)$.

Варианты ответов:

1) $-\cos(x^2 + 3xy)[(2x + 3y)\,dx + 3x\,dy]$;

2) $\sin(x^2 + 3xy)[(2x + 3y)\,dx + 3x\,dy]$;

3) $\cos(x^2 + 3xy)[3x\,dx + (2x + 3y)\,dy]$;

4) $\cos(x^2 + 3xy)[(2x + 3y)\,dx + 3x\,dy]$.

Задание 45. Вычислить полный дифференциал функции $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Варианты ответов:

1) $\dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; 2) $\dfrac{2x\,dx + 2y\,dy + 2z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$;

3) $\dfrac{x\,dx + y\,dy + z\,dz}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$; 4) $\dfrac{-x\,dx - y\,dy - z\,dz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Задание 46. Перечислить все элементы множества

$$A = \{x \in \mathbb{R}|\ x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}.$$

Варианты ответов:

1) $\{1; 2\}$; 2) $\{0; 1; 2\}$; 3) $\{0; 1\}$; 4) $\{0; 2\}$.

Задание 47. Пусть множество $A = (-1; 2]$ и множество $B = [1; 4]$. Найти множество $A \cap B$.

Варианты ответов:

1) $[1; 4]$; 2) $(1; 4)$; 3) $[1; 2]$; 4) $[2; 4]$.

Задание 48. Пусть множество $A = (-1; 2]$, множество $B = [1; 4]$. Найти множество $A \cup B$.

Варианты ответов:

1) $(-1; 1)$; 2) $[2; 4]$; 3) $[-1; 1]$; 4) $(-1; 4]$.

Задание 49. Найти множество Q, на которое данная функция $y = x^2$ отображает множество $F = [-1; 2]$.

Варианты ответов:

1) $[0; 4]$; 2) $[1; 4]$; 3) $(0; 4)$; 4) $(0; 4]$.

Раздел 3
Теория функций комплексного переменного

3.1. Комплексные числа и действия над ними

Определение 3.1. *Комплексным числом* z называется выражение вида

$$z = x + iy, \tag{3.1}$$

где x и y — любые действительные числа, а i — мнимая единица, удовлетворяющая условию

$$i^2 = -1. \tag{3.2}$$

Числа x и y называются соответственно *действительной* и *мнимой частями комплексного числа* z и обозначаются $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Выражение (3.1) называется *алгебраической формой комплексного числа*.

Определение 3.2. Комплексное число $\bar{z} = x - iy$ называется *сопряженным* комплексному числу $z = x + iy$.

Два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны тогда и только тогда, когда $\begin{cases} x_1 = x_2, \\ y_1 = y_2. \end{cases}$

Комплексное число $z = x + iy$ изображается на плоскости OXY либо точкой $M(x, y)$, либо вектором $\overline{OM}$, проведенным из начала координат в точку $M(x, y)$.

Определение 3.3. Длина ρ вектора $\overline{OM}$ называется *модулем комплексного числа* и обозначается $|z|$, так что

$$\rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 0 \leqslant \rho < +\infty. \tag{3.3}$$

Угол φ, образованный вектором $\overline{OM}$ и осью OX, называется *аргументом комплексного числа* z и обозначается $\arg z$, где $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, или $-\pi \leqslant \varphi < \pi$.

Любое комплексное число $z = x + iy$ ($z \neq 0$) можно записать как *в тригонометрической форме*

$$z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi), \qquad (3.4)$$

так и *в показательной форме*

$$z = \rho e^{i\varphi}, \qquad (3.5)$$

где ρ, φ — модуль и аргумент комплексного числа.

Пусть даны два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$.

1. Суммой $z_1 + z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$$

2. Разностью $z_1 - z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2).$$

3. Произведением $z_1 z_2$ комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

4. Частным z_1/z_2 от деления комплексного числа z_1 на $z_2 \neq 0$ называется комплексное число

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Если два комплексных числа z_1 и z_2 заданы в тригонометрической форме, то

$$z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)],$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

5. Возведение комплексного числа $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ в натуральную степень n производится по формуле

$$z^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi). \qquad (3.6)$$

6. Корень n-й степени из комплексного числа z имеет n различных значений, которые находятся по формуле

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\rho}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right], \qquad (3.7)$$

где $k = 1, 2, \ldots, n-1$; ρ, φ — модуль и аргумент комплексного числа.

Пример 3.1. Найти мнимую часть комплексного числа $z = (-1 + 2i)^2$.

Решение.
$$z = (-1+2i)^2 = 1 - 4i + 4i^2 = 1 - 4i - 4 = -3 - 4i,$$
$$\text{т.е.} \quad \operatorname{Im} z = -4.$$

Пример 3.2. Найти действительную часть комплексного числа $z = (5+2i)(-3-2i)$.

Решение.
$$z = (5+2i)(-3-2i) = -15 - 6i - 10i - 4i^2 = -11 - 16i,$$
$$\text{т.е.} \quad \operatorname{Re} z = -11.$$

Пример 3.3. Найти $\dfrac{3-i}{1+2i}$.

Решение.
$$\frac{3-i}{1+2i} = \frac{(3-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{3-6i-i-2}{1+4} = \frac{1}{5} - \frac{7}{5}i.$$

Пример 3.4. Какая область в комплексной плоскости z определяется условием $|z-i| \leqslant 1$?

Решение. Имеем
$$z - i = x + yi - i = x + i(y-1),$$
$$|z-i| = \sqrt{x^2+(y-1)^2} \leqslant 1, \quad x^2+(y-1)^2 \leqslant 1.$$
Это круг с границей $x^2+(y-1)^2 = 1$.

Пример 3.5. Записать в тригонометрической форме комплексное число $z = -1 - i\sqrt{3}$.

Решение. Изобразим число z на комплексной плоскости (рис. 3.1). Имеем
$$\rho = |z| = \sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3}\,)^2} = 2, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}\,, \quad \varphi = \frac{4\pi}{3}.$$
Тогда
$$-1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

Пример 3.6. Вычислить $(2-2i)^7$.

Решение. Комплексное число z изобразим на комплексной плоскости (рис. 3.2). Имеем
$$\rho = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8}\,, \quad \operatorname{tg}\varphi = -1, \quad \varphi = \frac{7\pi}{4};$$

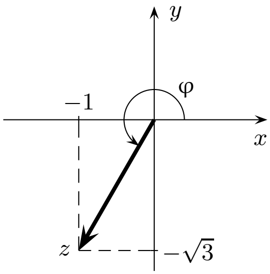


Рис. 3.1

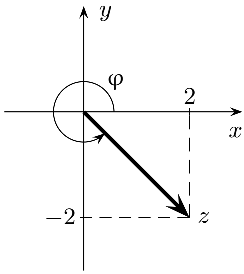


Рис. 3.2

$$(2-2i)^7 = (\sqrt{8}\,)^7\left(\cos\frac{49\pi}{4} + i\sin\frac{49\pi}{4}\right) =$$

$$= 2^7(\sqrt{2}\,)^7\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2^{10}(1+i).$$

Пример 3.7. Вычислить $(1+i)^5$.

Решение.

$$(1+i)^5 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^5 = (\sqrt{2}\,)^5\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) =$$

$$= 4\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -4-4i.$$

Пример 3.8. Найти все значения $\sqrt[3]{-1}$.

Решение.

$$\sqrt[3]{-1} = \sqrt[3]{\cos\pi + i\sin\pi} = \cos\frac{\pi+2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3};$$

$$k=0,\quad \sqrt[3]{-1} = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$k=1,\quad \sqrt[3]{-1} = \cos\pi + i\sin\pi = -1,$$

$$k=2,\quad \sqrt[3]{-1} = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3.2. Основные геометрические понятия

Определение 3.4. ε-*окрестностью точки* z_0 называется множество точек z комплексной плоскости, таких, что $|z-z_0| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — заданное число.

Множество точек комплексной плоскости, удовлетворяющих условию $|z| > R$, где $R > 0$, называется *R-окрестностью бесконечно удаленной точки*.

Под *областью* D в комплексной плоскости понимается множество точек E, таких, что:

а) каждая точка этого множества является внутренней;

б) любые две точки этого множества можно соединить ломаной с конечным числом звеньев, целиком лежащих в множестве E.

Если $x(t)$ и $y(t)$ — действительные непрерывные функции переменной t ($t_1 \leqslant t \leqslant t_2$), то уравнение

$$z(t) = x(t) + iy(t),$$

где $t \in [t_1, t_2]$, дает параметрическое представление непрерывной кривой L на комплексной плоскости.

Пример 3.9. Какое множество на плоскости комплексного переменного определяется условием $\operatorname{Im} z^2 > 2$?

Решение. Пусть $z = x + iy$, тогда

$$z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + i2xy.$$

Следовательно, $\operatorname{Im} z^2 = 2xy$. По условию $2xy > 2$, т.е. $xy > 1$. Это неравенство определяет множество точек в первом и третьем четвертях соответственно над и под гиперболой $xy = 1$ (рис. 3.3).

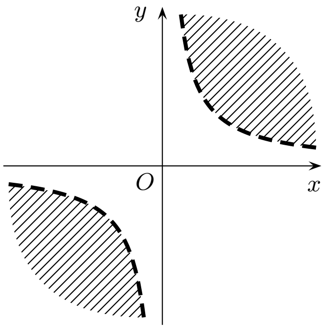


Рис. 3.3

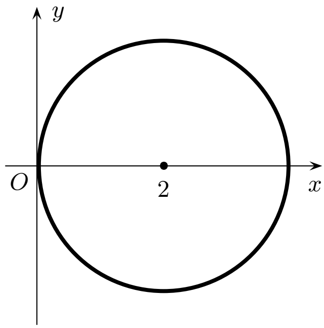


Рис. 3.4

Пример 3.10. Какая кривая определяется уравнением

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{4}?$$

Решение. Пусть $z = x + iy$. Имеем $\operatorname{Re}\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$, так как

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

По условию

$$\frac{x}{x^2 + y^2} = \frac{1}{4}, \quad \text{т.е.} \quad x^2 + y^2 - 4x = 0.$$

Это — окружность $(x-2)^2 + y^2 = 4$ (рис. 3.4).

3.3. Функции комплексного переменного

Определение 3.5. Говорят, что в области D определена функция $w = f(z)$, если каждой точке $z \in D$ поставлено в соответствие одно (однозначная функция) или несколько (многозначная функция) значений w.

Пусть $z = x + iy$ и $w = u + iv$. Тогда зависимость $w = f(z)$ между комплексной функцией w и комплексной переменной z может быть описана с помощью двух действительных функций u и v действительных переменных x и y.

Пример 3.11. Дана функция $f(z) = z^3 - iz$. Найти $f(i)$.

Решение. Имеем $f(i) = i^3 - i \cdot i = -i + 1$.

Основные элементарные функции комплексного переменного. Элементарные функции комплексного переменного определяются как суммы соответствующих рядов Тейлора, сходящихся во всей плоскости z:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots,$$

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots,$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots,$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \ldots,$$

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots.$$

Также справедлива *формула Эйлера*

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Функции, обратные к вышеперечисленным, являются многозначными, например,

$$\ln z = \ln|z| + (\varphi + 2\pi k)i,$$

где $\varphi = \arg z$.

Пример 3.12. Вычислить $\ln(\sqrt{3} + i)$.

Решение. Имеем

$$|z| = 2, \quad \arg z = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}, \quad \ln(\sqrt{3} + i) = \ln 2 + \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi k\right).$$

Пример 3.13. Найти действительную и мнимую части функции $f(z) = e^{3z}$, где $z = x + iy$.

Решение. Имеем

$$f(z) = e^{3(x+iy)} = e^{3x}e^{3iy} = e^{3x}(\cos 3y + i\sin 3y);$$

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = e^{3x}\cos 3y; \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = e^{3x}\sin 3y.$$

В плоскости z в качестве области определения функции w рассматривают некоторую открытую или замкнутую область. Открытая область состоит только из внутренних точек, т.е. таких, которые входят в область вместе с некоторой окрестностью. Внутри этой области можно проводить различные кривые. Замкнутая кривая считается *контуром*, если она спрямляема (имеет длину) и не имеет точек самопересечения за исключением совпадающих начальной и конечной. Обычно контур задается параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$.

Функция $w = f(z)$ называется *дифференцируемой* в точке $z = z_0$, если предел

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

существует и не зависит от способа стремления $\Delta z \to 0$.

Условия Коши—Римана. Для того чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, где $u(x, y)$, $v(x, y)$ — дифференцируемые функции, была дифференцируема в некоторой точке z_0 из области определения, необходимо и достаточно выполнения условий

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Тогда

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Если функция является дифференцируемой в некоторой окрестности точки z_0, то она называется *аналитической* в этой точке. Вещественная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими функциями. Они удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Производные элементарных функций комплексной переменной:

$$(z^n)' = nz^{n-1}, \quad (e^z)' = e^z, \quad (\cos z)' = -\sin z, \quad (\sin z)' = \cos z,$$

$$(\ln z)' = \frac{1}{z}, \quad (\arcsin z)' = \frac{1}{\sqrt{1-z^2}}, \quad (\arccos z)' = -\frac{1}{\sqrt{1-z^2}},$$

$$(\operatorname{arctg} z)' = \frac{1}{1+z^2}, \quad (\operatorname{sh} z)' = \operatorname{ch} z, \quad (\operatorname{ch} z)' = \operatorname{sh} z.$$

Пример 3.14. Найти $f'(1+i)$, если $f(z) = z^3$.

Решение. Имеем $f'(z) = 3z^2$, тогда

$$f'(1+i) = 3(1+i)^2 = 3(1+2i+i^2) = 3(1+2i-1) = 6i.$$

Интегралы от функции комплексной переменной вычисляются по контуру, т.е. являются аналогом линейного интеграла от функции вещественной переменной:

$$\int\limits_{(C)} f(z)\,dz = \int\limits_{(C)} (u+iv)(dx+idy). \tag{3.8}$$

Если область ограничена одним внешним контуром, она считается *односвязной*; если в качестве границы появляются внутренние контуры — *многосвязной* (рис. 3.5).

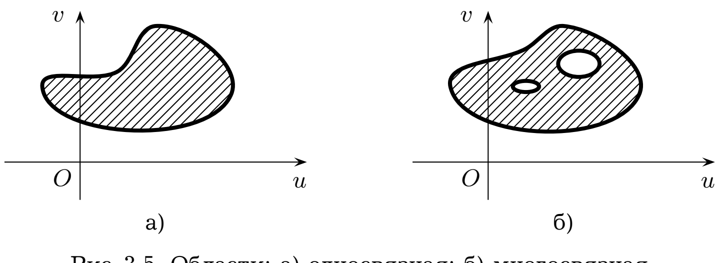


Рис. 3.5. Области: а) односвязная; б) многосвязная

Теорема Коши. Для всякой аналитической функции $f(z)$ в некоторой односвязной области (S) интеграл $\int\limits_{(C)} f(z)\,dz$, взятый по любому замкнутому кусочно-гладкому контуру (C), лежащему в области (S), равен нулю.

Интегральная формула Коши. Пусть $f(z)$ — функция, однозначная и аналитическая в области (S) с границей (контуром) (l). Тогда для всякой точки $z_0 \in (S)$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{(l)} \frac{f(z)\,dz}{z - z_0}. \tag{3.9}$$

Пример 3.15. Вычислить $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{dz}{z^2+1}$.

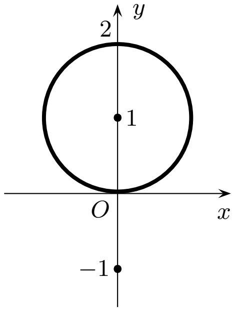


Рис. 3.6

Решение. Контур (l) — окружность с центром в точке $(0;1)$ и радиуса 1 (рис. 3.6). Знаменатель дроби обращается в нуль в двух точках: $z = \pm i$. Внутри окружности лежит одна точка $z = i$. Для применения формулы (3.9) перепишем интеграл в следующем виде:

$$\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{dz}{z^2+1} = \oint\limits_{|z-i|=1} \frac{dz}{(z-i)(z+i)} = \oint\limits_{|z-i|=1} \frac{\frac{dz}{z+i}}{z-i}.$$

Здесь $z_0 = i$ и функция $f(z) = 1/(z+i)$ является аналитической в круге $|z-i| \leqslant 1$. Поэтому

$$\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{dz}{z^2+1} = 2\pi i f(i) = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi.$$

3.4. Ряд Лорана. Вычеты

Рассмотрим два ряда:

$$\frac{A_{-1}}{z-z_0} + \frac{A_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{A_{-3}}{(z-z_0)^3} + \ldots \tag{3.10}$$

и

$$A_0 + A_1(z-z_0) + A_2(z-z_0)^2 + A_3(z-z_0)^3 + \ldots . \tag{3.11}$$

Областью сходимости первого ряда будет $|z-z_0| > r$, второго — $|z-z_0| < R$.

Если $r < R$, то областью сходимости *ряда Лорана*

$$\ldots + \frac{A_{-2}}{(z-z_0)^2} + \frac{A_{-1}}{z-z_0} + A_0 + A_1(z-z_0) + A_2(z-z_0)^2 + \ldots$$

будет кольцо $r < |z-z_0| < R$. Коэффициенты разложения можно вычислить по формуле

$$A_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{(l)} \frac{f(z)\,dz}{(z-z_0)^{n+1}}. \tag{3.12}$$

Слагаемые с отрицательными степенями $(z - z_0)$ составляют *главную часть* ряда Лорана, слагаемые с положительными степенями — *правильную часть*.

Если ряд Лорана содержит главную часть, то z_0 — *изолированная особая точка* функции $f(z)$. В случае, когда главная часть содержит конечное число слагаемых

$$\frac{A_{-n}}{(z-z_0)^n} + \ldots + \frac{A_{-1}}{z-z_0},$$

мы имеем дело с *полюсом* порядка n. При этом

$$\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^n f(z) = C.$$

Коэффициент $A_{-1} = \operatorname*{res}_{z_0} f(z)$ называется *вычетом* функции $f(z)$ в точке z_0.

Если число слагаемых с отрицательными степенями $(z-z_0)$ бесконечно, мы имеем дело с *существенно особой точкой*.

Пример 3.16. Исследовать сходимость ряда

$$\ldots + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1} + 1 + \frac{z-1}{4} + \frac{(z-1)^2}{4^2} + \ldots .$$

Решение. Ряд с отрицательными степенями $z - 1$ представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $1/(z-1)$. Он сходится при $|z-1| > 1$. Ряд с положительными степенями — также геометрическая прогрессия со знаменателем $(z-1)/4$. Он сходится при $|z-1| < 4$. Таким образом, исходный ряд сходится при $1 < |z-1| < 4$.

Пример 3.17. Найти полюсы функции $f(z) = \dfrac{z}{(z^2-4)(z^2+1)^2}$.

Решение. Имеем

$$f(z) = \frac{z}{(z-2)(z+2)(z-i)^2(z+i)^2}.$$

Таким образом, точки $z = \pm 2$ — полюсы первого порядка, а точки $z = \pm i$ — второго.

Вычеты можно вычислять по формуле

$$\operatorname{res} f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{(n-1)}[(z-z_0)^n f(z)]}{dz^{n-1}}.$$

Пример 3.18. Найти вычет функции $\dfrac{z^2}{(z-2)^3}$.

Решение. Точка $z = 2$ является полюсом третьего порядка, тогда

$$\operatorname*{res}_{2} f(z) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 2}\frac{d^2\left[(z-2)^3\dfrac{z^2}{(z-2)^3}\right]}{dz^2} = \frac{1}{2}\lim_{z\to 2}\frac{d^2(z^2)}{dz^2} = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1.$$

Основная теорема о вычетах. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция в области (S) за исключением конечного числа полюсов z_1, z_2, …, $z = z_k$; (C) — целиком лежащий в (S) контур, содержащий внутри себя все полюсы. Тогда $\oint\limits_{(C)} f(z)\,dz$ равен сумме вычетов этой функции в полюсах, умноженной на $2\pi i$:

$$\oint\limits_{(C)} f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{j=1}^{k}\operatorname*{res}_{z_j} f(z). \tag{3.13}$$

Пример 3.19. Вычислить $\oint\limits_{(C)} \dfrac{z^2\,dz}{(z^2+1)(z-2)}$.

Решение. Имеем

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-i)(z+i)(z-2)}.$$

Полюсы и вычеты:

$$z = i, \quad \operatorname*{res}_{i} f(z) = \lim_{z\to i}\frac{(z-i)z^2}{(z-i)(z+i)(z-2)} = \frac{-1}{2i(i-2)};$$

$$z = -i, \quad \operatorname*{res}_{-i} f(z) = \frac{-1}{2i(i+2)}; \quad z = 2, \quad \operatorname*{res}_{2} f(z) = \frac{4}{5}.$$

Окончательно получаем

$$\oint\limits_{(C)} \frac{z^2\,dz}{(z^2+1)(z-2)} = 2\pi i\left[\frac{-1}{2i(i-2)} + \frac{-1}{2i(i+2)} + \frac{4}{5}\right] = 2\pi i.$$

Пример 3.20. Вычислить $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \dfrac{dx}{(x^2+4)^2}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(z) = 1/(z^2+4)^2$. Она является аналитической в верхней полуплоскости за исключением полюса второго порядка $z_1 = 2i$. Вычет в этой точке равен

$$\operatorname*{res}_{2i} f(z) = \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz}\left[\frac{(z-2i)^2}{(z^2+4)^2}\right] = \lim_{z\to 2i} \frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z+2i)^2}\right] =$$

$$= \lim_{z\to 2i} \frac{-2}{(z+2i)^3} = \frac{-i}{32}.$$

В качестве контура интегрирования выберем полуокружность $|z| = R$, $y \geqslant 0$. Затем устремим $R \to \infty$ и учтем, что на бесконечности у функции нет особенностей. В результате получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2} = 2\pi i \frac{-i}{32} = \frac{\pi}{16}.$$

Примеры тестовых заданий

Задание 1. Найти мнимую часть комплексных чисел:

а) $z = (3+i)^2$; б) $z = (4+3i)(-7-i)$;

в) $z = \left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)^4$.

Ответы: а) 6; б) 25; в) $\sin\frac{4\pi}{5}$.

Задание 2. Найти действительную часть комплексных чисел:

а) $z = \dfrac{2+i}{3-2i}$; б) $z = (4-6i)(5-2i)$;

в) $z = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^5$.

Ответы: а) $\frac{4}{13}$; б) 32; в) $\sin\frac{5\pi}{6}$.

Задание 3. Комплексное число $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ можно представить в виде...

Варианты ответов:

1) $-2e^{i\frac{\pi}{4}}$; 2) $2e^{i\frac{3\pi}{4}}$;

3) $2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$; 4) $-2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Задание 4. Значение функции $f(z) = z^2 + i$ в точке $z_0 = 1 + i$ равно...

Варианты ответов:

1) $2 + 3i$; 2) $3 + 2i$; 3) $2i$; 4) $3i$.

Задание 5. Значение производной функции $f(z) = 5z^2 - 7i$ в точке $z_0 = 3 - 3i$ равно...

Варианты ответов:

1) $30 - 3i$; 2) $3 - 3i$; 3) $30 - 30i$; 4) $3 - 30i$.

Задание 6. Модуль комплексного числа $3 - 4i$ равен...

Варианты ответов:

1) 6; 2) 5; 3) 0,5; 4) 7.

Задание 7. Значение функции $f(z) = 2z^2 + i$ при $z_0 = 1 - i$ равно...

Варианты ответов:

1) $-3i$; 2) $4 - 3i$; 3) $3i$; 4) $-4 - 3i$.

Задание 8. Если z — комплексное число, $\operatorname{Im} z = 10$, $\arg z = \arcsin(5/6)$, то модуль числа z равен...

Варианты ответов:

1) 10; 2) 12; 3) -12; 4) 0.

Задание 9. Корнями комплексного числа $z = \sqrt{i}$ являются...

Варианты ответов:

1) $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$; 2) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$;

3) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i)$; 4) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$.

Задание 10. Если $i^2 = -1$, то $(1 + i)^3 =$...

Варианты ответов:

1) $2 + 2i$; 2) $2i - 2$; 3) $-2 - 2i$; 4) $2 - 2i$.

Задание 11. Для комплексного числа $(-1-i)^3$ найти ему сопряженное.

Варианты ответов:

1) $2-2i$; 2) $2+2i$; 3) $-2+2i$; 4) $-2-2i$.

Задание 12. Пусть $z=1+i$. Известно, что $|z|=\sqrt{2}$, $\arg z=\pi/4$, тогда $(1+i)^4$ равно...

Варианты ответов:

1) $-2\sqrt{2}$; 2) -4; 3) $2\sqrt{2}$; 4) 4.

Задание 13. Представить в тригонометрической форме комплексные числа:

а) $z=\dfrac{2}{1+i}$; б) $z=-\sqrt{3}-i$.

Ответы:

а) $\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$; б) $2\left(\cos\dfrac{7\pi}{6}+i\sin\dfrac{7\pi}{6}\right)$.

Задание 14. Представить в показательной форме комплексные числа:

а) $z=-\sqrt{12}-2i$; б) $z=-\cos\dfrac{\pi}{7}+i\sin\dfrac{\pi}{7}$.

Ответы: а) $4e^{\frac{7\pi i}{6}}$; б) $e^{\frac{6\pi i}{7}}$.

Задание 15. Расположить комплексные числа в порядке возрастания их модулей:

1) $2+2i$; 2) i; 3) $-2-i$; 4) $-1+i$.

Ответ:

2	4	3	1

Задание 16. Установить соответствие между комплексными числами z и их модулями ρ:

$\rho=8$ 1) $z=5-\sqrt{24}\,i$

$\rho=-8$ 2) $z=-3\sqrt{2}+\sqrt{7}\,i$

$\rho=5$ 3) $z=-8$

ρ = 7

ρ = 3

Ответ:

8	–8	5	7	3
3	—	2	1	—

Задание 17. Число i^{11} равно...

Варианты ответов:

1) i; 2) -1; 3) $-i$; 4) 1.

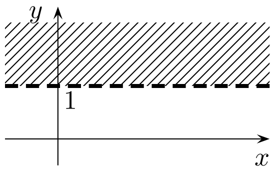
Задание 18. Указать соответствие между областями и их геометрическими интерпретациями:

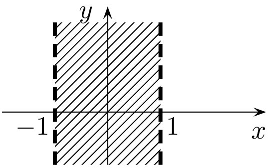
1) $-1 < \operatorname{Re} z < 1$

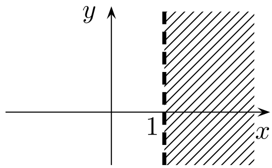
2) $\operatorname{Re} z > 1$

3) $\operatorname{Im} z > 1$

4) $\operatorname{Re} z < 1$

а) 

б) 

в) 

Ответ:

а	б	в
3	1	2

Задание 19. Указать соответствие между функциями комплексной переменной $f(z)$ и их значениями $f(z_0)$ в точке $z_0 = 1 + 3i$:

1) $f(z) = z - 1$ $\qquad$ $f(z_0) = 3i$

2) $f(z) = 5 - 2z$ $\qquad$ $f(z_0) = 3 + 6i$

3) $f(z) = 4z + 3$ $\qquad f(z_0) = 7 + 12i$

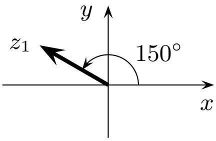
$f(z_0) = 3$

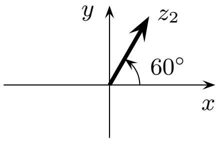
$f(z_0) = 3 - 6i$

Ответ:

$3i$	$3+6i$	$7+12i$	3	$3-6i$
1	—	3	—	2

Задание 20. Даны два комплексных числа z_1 и z_2:





Тогда аргумент частного $\arg(z_1/z_2)$ в градусах равен...

Варианты ответов:

1) 210°; 2) 90°; 3) 100°; 4) 80°.

Задание 21. Найти модуль числа z, если z — комплексное число, $\operatorname{Re} z = 14$, $\arg z = \arccos(7/8)$.

Варианты ответов:

1) 16; 2) -16; 3) 0; 4) 12.

Задание 22. Дано комплексное число $z = 1 - i$. Установить соответствие между операциями над данным числом:

1) $z \cdot \bar{z}$; 2) $\dfrac{z}{|z|}$; 3) $2z + \bar{z}$; 4) $z - \bar{z}$

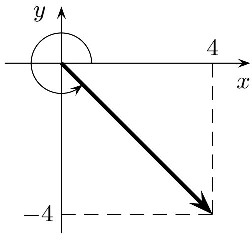
и результатами их выполнения:

а) $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$; б) $3 - i$; в) $-2i$; г) 2; д) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}i$.

Ответ:

а	б	в	г	д
—	3	4	1	2

Задание 23. На рисунке приведено геометрическое изображение комплексного числа:



Его тригонометрическая форма записи имеет вид...

Варианты ответов:

1) $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$; 2) $4\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$;

3) $4\left(\cos\frac{\pi}{4}-i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; 4) $4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$.

Задание 24. Если $z = x + iy$ и $f(z) = e^{4z}$, то $f'(z)$ имеет вид...

Варианты ответов:

1) $4e^{4x}(\cos 4y + i\sin 4y)$; 2) $4e^{4x}(\sin 4y + i\cos 4y)$;

3) $e^{4x}(\sin 4y + i\cos 4y)$; 4) $e^{4x}(\cos 4y + i\sin 4y)$.

Задание 25. Мнимая часть функции $f(z) = e^{3z}$, где $z = x + iy$, имеет вид...

Варианты ответов:

1) $e^{3x}\cos 3y$; 2) $\cos 3y$; 3) $e^{3x}\sin 3y$; 4) $\sin 3y$.

Задание 26. Решением уравнения $(1 + 3i)z - i + 2 = 0$ является комплексное число...

Варианты ответов:

1) $\frac{1+7i}{8}$; 2) $\frac{-5+7i}{10}$; 3) $\frac{1+7i}{10}$; 4) $\frac{-1-7i}{8}$.

Задание 27. Если z — комплексное число и $z - 2 + \frac{64}{z} = 0$, то модуль числа z равен...

Варианты ответов:

1) 10; 2) 0; 3) 8; 4) 4.

Задание 28. Если $f(z) = z^2$ и $z_0 = -9 + 12i$, то $|f'(z_0)|$ равно...

Варианты ответов:

1) 15; 2) 30; 3) 32; 4) 40.

Задание 29. Вычет функции $\dfrac{3z^2 - 3}{z^2 + 9}$ в точке $z = 3i$ равен...

Варианты ответов:

1) -5; 2) $-5i$; 3) $5i$; 4) 5.

Задание 30. Вычет функции $\dfrac{1 - \cos z}{z^3(z - 3)}$ в точке $z = 0$ равен...

Варианты ответов:

1) $-\dfrac{1}{6}$; 2) 0; 3) $\dfrac{1}{6}$; 4) 1.

Задание 31. Вычет функции $z^2 \sin \dfrac{1}{z}$ в точке $z = 0$ равен...

Варианты ответов:

1) $-\dfrac{1}{6}$; 2) $\dfrac{1}{6}$; 3) 0; 4) $\dfrac{1}{3}$.

Раздел 4

Дифференциальные уравнения

4.1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной, имеют вид

$$y' = f(x, y) \quad \text{или} \quad P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0.$$

Общее решение $y = y(x, C)$ содержит произвольную постоянную C. Для постановки задачи Коши необходимо к уравнению добавить условие $y(x_0) = y_0$. При этом константа C должна определяться однозначно. Если решение не может быть получено из общего путем выбора соответствующей постоянной, оно называется *особым решением*.

Обычно рассматривают следующие уравнения, позволяющие получить решение в виде интегралов.

1. Уравнения с разделяющимися переменными

$$A(x)B(y)\,dx + G(x)H(y)\,dy = 0.$$

Пример 4.1. Установите соответствие между дифференциальными уравнениями и их общими решениями:

1) $y' = 2x^2 y$	A) $Ce^{\frac{2x^3}{3}}$
2) $y' = 3x^3 y$	B) $\sqrt{\dfrac{2x^3}{3} + C}$
3) $y' = 3x^2 y^2$	C) $-\dfrac{1}{x^3 + C}$
4) $y' = \dfrac{x^2}{y}$	D) $Ce^{\frac{3x^4}{4}}$
	E) $\sqrt{\dfrac{2x^3}{3} + C}$

Решение. Каждое из уравнений представляет собой уравнение с разделяющимися переменными. Решим каждое из них:

1) $y' = 2x^2 y, \quad \dfrac{dy}{dx} = 2x^2 y, \quad \dfrac{dy}{y} = 2x^2\,dx,$

$$\int \frac{dy}{y} = 2\int x^2\,dx, \quad \ln y = \frac{2x^3}{3} + \ln C, \quad y = Ce^{\frac{2x^3}{3}};$$

2) $y' = 3x^3 y, \quad \dfrac{dy}{y} = 3x^3\,dx, \quad y = Ce^{\frac{3x^4}{4}};$

3) $y' = 3x^2 y^2, \quad \dfrac{dy}{y^2} = 3x^2\,dx, \quad y = -\dfrac{1}{x^3 + C};$

4) $y' = \dfrac{x^2}{y}, \quad y\,dy = x^2\,dx, \quad y = \sqrt{\dfrac{2x^3}{3} + C}\,.$

Пример 4.2. Найти частное решение уравнения $(1 + x^2)\,dy + y\,dx = 0$ при условии $y(1) = 1$.

Решение. Имеем

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{1+x^2}, \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{1+x^2}, \quad \ln|y| = -\operatorname{arctg} x + C.$$

Мы получили общий интеграл уравнения. Для определения константы используем условие Коши:

$$\ln 1 = -\operatorname{arctg} 1 + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{\pi}{4}.$$

Окончательно получаем

$$\ln|y| = -\operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{4}, \quad y = e^{\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x}.$$

Пример 4.3. Установите соответствие между дифференциальным уравнением и его частным решением:

1) $xy' = y$, $y(4) = 8$	A) $y = x + 10$
2) $y' = 2x + 5$, $y(1) = 10$	B) $y = x^2 + 5x + 4$
3) $y' - 4 = 3x^2$, $y(0) = 10$	C) $y = 2x$
	D) $y = x^3 + 4x + 10$

Решение. 1) $xy' = y$, $y(4) = 8$ — уравнение с разделяющимися переменными.

$$x\frac{dy}{dx} = y \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \quad \Rightarrow \quad y = Cx.$$

Подставляя начальные условия, получим значение для C:

$$8 = 4C \quad \Rightarrow \quad C = 2.$$

Следовательно, частным решением данного уравнения является функция $y = 2x$.

2) Продифференцируем равенство $y = x^2 + 5x + 4$ и получим $y' = 2x + 5$. Таким образом, функция $y = x^2 + 5x + 4$ является частным решением уравнения $y' = 2x + 5$.

3) Продифференцируем равенство $y = x^3 + 4x + 10$ и получим $y' = 3x^2 + 4$. Таким образом, функция $y = x^3 + 4x + 10$ является частным решением уравнения $y' - 4 = 3x^2$.

2. Однородные уравнения

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0.$$

Здесь $P(x,y)$, $Q(x,y)$ — однородные многочлены одинаковой степени, а именно $P(tx,ty) = t^k P(x,y)$, $Q(tx,ty) = t^k Q(x,y)$. Например, многочлен $x^3 + 3\dfrac{y^4}{x} - 2xy^2$ можно рассматривать как однородный многочлен третьей степени.

Однородные уравнения решают заменой переменной $y = tx$, $y' = t'x + t$ или $dy = t\,dx + x\,dt$. В результате получается уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 4.4. Из перечисленных дифференциальных уравнений однородными являются… . Укажите не менее двух вариантов ответа.

1) $(x^2y^2 - xy^3)\,dx + x^3y\,dy = 0$; 2) $y' = \dfrac{-2x^2 + 3y - 1}{3x - 3y}$;

3) $y' = x^2 - 5xy$; 4) $y' = \dfrac{y}{x}\left(1 - \ln^2\dfrac{x}{y}\right)$.

Пример 4.5. Найти общий интеграл уравнения

$$(x^2 + 2xy)\,dx + xy\,dy = 0.$$

Решение. Имеем

$$(x^2 + 2x^2t)\,dx + x^2t(t\,dx + x\,dt) = 0, \quad (1 + 2t + t^2)\,dx + tx\,dt = 0,$$

$$\int\frac{dx}{x} + \int\frac{t\,dt}{(t+1)^2} = C, \quad \ln|x| + \int\frac{t+1-1}{(t+1)^2}dt = C,$$

$$\ln|x| + \ln|t+1| + \frac{1}{t+1} = C.$$

С учетом равенства $t = y/x$ получим

$$\ln|x+y| = \frac{x}{x+y} = C.$$

3. Линейные уравнения

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Вначале решается соответствующее однородное уравнение:

$$y' + p(x)y = 0, \quad \frac{dy}{dx} = -p(x)y, \quad \frac{dy}{y} = -p(x)\,dx,$$

$$\ln y = -\int p(x)\,dx + \ln C, \quad y = Ce^{-\int p(x)\,dx}.$$

Затем применяется метод вариации произвольной постоянной, полагая $C = C(x)$. Подставляя полученное выражение в исходное уравнение, получаем искомое решение.

Пример 4.6. Решить уравнение $y' + 2xy = xe^{-x^2}$.

Решение. Решаем однородное уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = -2xy, \quad \frac{dy}{y} - 2x\,dx, \quad \ln|y| = -x^2 + \ln C, \quad y = Ce^{-x^2}.$$

Применяем метод вариации произвольной постоянной:

$$y = C(x)e^{-x^2}, \quad y' = C'(x)e^{-x^2} - 2C(x)xe^{-x^2}.$$

Подставляя в исходное уравнение, получим

$$C'(x)e^{-x^2} - 2C(x)xe^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = xe^{-x^2},$$

$$C'(x) = x, \quad C(x) = \frac{x^2}{2} + C, \quad y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)e^{-x^2}.$$

Уравнения Бернулли $y' + p(x)y = q(x)y^m$ также можно решать методом вариации произвольной постоянной.

4. Уравнения в полных дифференциалах

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$$

при условии, что $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$. Из условия

$$dU = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

получаем решение $U = C$. При вычислении $\int P(x,y)\,dx$ вместо константы интегрирования следует добавить произвольную функцию $\varphi(y)$.

Пример 4.7. Решить уравнение

$$(x^2 + y^2 + y)\,dx + (2xy + x + e^y)\,dy = 0, \quad y(0) = 0.$$

Решение. Имеем

$$U = \int (x^2 + y^2 + y)\,dx = \frac{x^3}{3} + xy^2 + xy + \varphi(y).$$

Для определения $\varphi(y)$ используем условие $\partial U/\partial y = Q(x, y)$, а именно $2xy + x + \varphi'(y) = 2xy + x + e^y$, откуда $\varphi(y) = e^y$. Общее решение уравнения имеет вид $\frac{1}{3}x^3 + xy^2 + xy + e^y = C$. Из условия Коши $C = 1$. Окончательно получаем решение $\frac{1}{3}x^3 + xy^2 + xy + e^y = 1$.

4.2. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

Линейное дифференциальное уравнение имеет вид

$$p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = f(x).$$

Если $f(x) = 0$, то мы имеем дело с *однородным уравнением*. Общее решение линейного однородного уравнения имеет вид

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n.$$

Набор линейно независимых функций y_1, y_2, …, y_n, каждая из которых является решением данного уравнения, называют *фундаментальной системой решений уравнения*. В общем виде такое уравнение не может быть решено. Наиболее важным частным случаем является уравнение с постоянными коэффициентами:

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + ... + a_ny = 0.$$

Для его решения используют *характеристическое уравнение*

$$a_0k^n + a_1k^{n-1} + ... + a_n = 0.$$

Если:

1) корни характеристического уравнения — вещественные простые k_1, k_2, …, k_l, то решения, соответствующие этим корням, имеют вид e^{k_1}, e^{k_2}, …, e^{k_l};

2) среди корней есть кратные $k_i = k_{i+1} = ... = k_{i+s} = k$, то соответствующие им решения имеют вид e^{kx}, xe^{kx}, …, $x^{i+s-1}e^{kx}$;

3) среди корней есть два комплексно сопряженных корня $a + bi$, $a - bi$, то соответствующая им пара решений имеет вид $e^{ax}(C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$;

4) корни характеристического уравнения комплексные кратные, например, имеют вторую кратность, то в этом случае решение имеет вид $e^{ax}[(C_1 + C_2x)\cos bx + (C_3 + C_4x)\sin bx]$.

Пример 4.8. Пусть корень $k = 5$ является корнем третьей кратности характеристического уравнения. Тогда соответствующие решения имеют вид e^{5x}, xe^{5x}, x^2e^{5x}.

Пример 4.9. Решить уравнение $y^{(V)} + y^{(IV)} + y''' = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение имеет вид
$$k^5 + k^4 + k^3 = 0 \quad \text{или} \quad k^3(k^2 + k + 1) = 0.$$
Его корни
$$k_1 = k_2 = k_3 = 0, \quad k_4 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad k_5 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$
Общим решением уравнения будет
$$y = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + e^{-\frac{x}{2}}\left(C_4 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + C_5 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Пример 4.10. Найти частное решение уравнения $y'' + \omega^2 y = 0$, $y(0) = A$, $y'(0) = 0$.

Решение. Имеем
$$k^2 + \omega^2 = 0, \quad k = \pm i\omega, \quad y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x.$$
Вычисляем производную от y и подставляем в условия Коши:
$$y' = -C_1 \omega \sin \omega x + C_2 \omega \cos \omega x, \qquad \begin{cases} A = C_1, \\ 0 = C_2 \omega, \quad C_2 = 0. \end{cases}$$
Тогда $y = A \cos \omega x$. Мы получили уравнение гармонических колебаний с амплитудой A, частотой ω и нулевой начальной фазой.

Пример 4.11. Дано линейное однородное дифференциальное уравнение $y'' + 6y' + 13y = 0$. Тогда его общим решением является...

1) $e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$; 2) $e^{3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$;
3) $e^{-3x}(C_1 \cos 4x + C_2 \sin 4x)$; 4) $C_1 e^{-5x} + C_2 e^{-x}$.

Решение. Данному уравнению соответствует следующее характеристическое уравнение: $k^2 + 6k + 13 = 0$, решая которое, получаем следующие комплексные корни: $k_{1,2} = -3 \pm 2i$. Следовательно, общее решение данного уравнения имеет вид $e^{-3x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Общее решение *линейного неоднородного уравнения* может быть представлено в виде
$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + ... + C_n y_n + \widetilde{y},$$
где $\widetilde{y}$ — любое частное решение неоднородного уравнения. Наиболее просто это решение может быть найдено методом неопределенных коэффициентов в следующих случаях:

1) $f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n = P_n(x)$. Если среди корней характеристического уравнения нет корня $k = 0$, то решение

ищут в виде многочлена той же степени с неопределенными коэффициентами $\widetilde{y} = Q_n(x) = A_0 + A_1x + ... + A_nx^n$. Это решение дифференцируют необходимое число раз, подставляют в исходное уравнение, затем приравнивают коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства. Если среди корней характеристического уравнения есть корень $k = 0$ кратности s, то частное решение ищут в виде $\widetilde{y} = x^sQ_n(x)$;

2) $f(x) = e^{ax}P_n(x)$. Если среди корней характеристического уравнения нет корня $k = a$, то частное решение ищут в виде $\widetilde{y} = e^{ax}Q_n(x)$. Если среди корней характеристического уравнения есть корень $k = a$ кратности s, то частное решение ищут в виде $\widetilde{y} = x^se^{ax}Q_n(x)$;

3) $f(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + R_m(x)\sin bx)$. Если среди корней характеристического уравнения нет корня $k = a + ib$ (или $a - ib$), то решение ищут в виде $\widetilde{y} = e^{ax}(\bar{P}_l(x)\cos bx + \bar{Q}_l(x)\sin bx)$, $l = \max(n, m)$. Если среди корней характеристического уравнения есть корень $k = a + ib$ (или $a - ib$) кратности s, то решение ищут в виде $\widetilde{y} = e^{ax}x^s(\bar{P}_l(x)\cos bx + \bar{Q}_l(x)\sin bx)$, $l = \max(n, m)$.

Если правая часть неоднородного уравнения представляет собой сумму нескольких функций, каждая из которых имеет вид, описанный ранее, $f(x) = f_1(x) + ... + f_r(x)$, то частные решения ищут для каждого из слагаемых, а затем берут их сумму.

Пример 4.12. Указать вид частного решения для линейного неоднородного дифференциального уравнения с правой частью $f(x) = x^2 + 3e^{-2x} + x\sin x$, если корни характеристического уравнения $k_1 = 0$, $k_2 = 2$, $k_3 = i$, $k_4 = -i$.

Решение. В соответствии с вышеизложенным

$$\widetilde{y} = \widetilde{y}_1 + \widetilde{y}_2 + \widetilde{y}_3 = x(A_0 + A_1x + A_2x^2) + Be^{-2x} +$$

$$+ x[(D_1 + D_2x)\cos x + (D_3 + D_4x)\sin x].$$

Пример 4.13. Установите соответствие между дифференциальным уравнением и общим видом его частного решения:

1) $y'' + 3y' + 3y = 7 + 7x$	A) $y_{\text{ч.р.}} = C_0x$
2) $y'' + 3y' = 7 + 7x$	B) $y_{\text{ч.р.}} = (C_0 + C_1x)x^2$
3) $y'' - 2 = 5 + 7x$	C) $y_{\text{ч.р.}} = C_0 + C_1x^2$
	D) $y_{\text{ч.р.}} = C_0 + C_1x$
	E) $y_{\text{ч.р.}} = (C_0 + C_1x)x$

Пример 4.14. Частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка $y'' + 25y' = e^{3x}$ имеет вид...

1) $y = e^{3x}xa$; 2) $y = e^{3x}a$; 3) $y = ae^{3x}\cos x$; 4) $y = a$.

Решение. Правая часть данного уравнения имеет вид $f(x) = e^{\alpha x}P_n(x)$, где $\alpha = 3$, $n = 0$. Среди корней $k_1 = 0$, $k_2 = -25$ соответствующего характеристического уравнения $k^2 + 25k = 0$ нет корня $k = 3$, следовательно, частное решение этого уравнения имеет вид $\widetilde{y} = e^{3x}Q_0(x)$, т.е. $y = e^{3x}a$.

Пример 4.15. Среди перечисленных уравнений дифференциальными уравнениями в частных производных являются...

1) $x^3\dfrac{\partial z}{\partial x} + 2y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$; 2) $x\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} + x^2 = 0$;

3) $3xy' + 2xy^2 + 4x + 7y = 0$; 4) $y\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5x\dfrac{dy}{dx} + x = y$.

Решение. Дифференциальное уравнение в частных производных — дифференциальное уравнение, содержащее неизвестные функции нескольких переменных и их частные производные. Следовательно, первое и второе уравнения являются дифференциальными уравнениями в частных производных.

4.3. Системы линейных дифференциальных уравнений

Для решения систем линейных дифференциальных уравнений можно использовать метод сведения системы к одному уравнению более высокого порядка путем дифференцирования.

Пример 4.16. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x + 2y, \end{cases} \qquad x(0) = 1, \quad y(0) = 3.$$

Решение. Дифференцируем первое уравнение по t:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt},$$

из второго уравнения выражаем dy/dt, из первого — y, и подставляем в полученное уравнение второго порядка:

$$y = \frac{dx}{dt} - 2x, \quad \frac{dy}{dt} = x + 2\frac{dx}{dt} - 4x, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 2\frac{dx}{dt} + x + 2\frac{dx}{dt} - 4x.$$

В результате получим

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 4\frac{dx}{dt} + 3x = 0, \quad k^2 - 4k + 3 = 0,$$
$$(k-1)(k-3) = 0, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = 3.$$

Общее решение этого уравнения $x = C_1e^t + C_2e^{3t}$. Затем находим

$$y = \frac{dx}{dt} - 2x = C_1e^t + 3C_2e^{3t} - 2C_1e^t - 2C_2e^{3t} = -C_1e^t + C_2e^{3t}.$$

Для определения произвольных постоянных воспользуемся условием Коши. В результате получим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1, \\ -C_1 + C_2 = 3, \end{cases}$$

откуда $C_1 = -1$, $C_2 = 2$. Окончательно получаем $x = 2e^{3t} - e^t$, $y = 2e^{3t} + e^t$.

Пример 4.17. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 5x + 6y \end{cases}$$

может быть сведена к уравнению вида...

1) $x'' + 9x' + 28x = 0$; 2) $x'' - 9x' + 28x = 0$;
3) $x'' + 9x' - 28x = 0$; 4) $2x'' + 3x' - 28x = 0$.

Решение. Исключим y. Из первого уравнения системы имеем $y = \dfrac{3x - x'}{2}$. Подставляя во второе уравнение, получаем

$$\frac{3x' - x''}{2} = 5x + 9x - 3x'.$$

Приведя подобные, получим уравнение $x'' - 9x' + 28x = 0$.

Примеры тестовых заданий

Задание 1. Общее решение дифференциального уравнения I порядка $y' - y = 0$ имеет вид...

Ответ: $y = Ce^x$.

Задание 2. Частное решение дифференциального уравнения I порядка $y' = \dfrac{1}{\cos^2 2x}$, $y\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 0$ имеет вид...

Ответ: $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg} 2x - \dfrac{1}{2}$.

Задание 3. Общее решение дифференциального уравнения I порядка $y' + 2xy = 0$ имеет вид...

Ответ: $y = Ce^{-x^2}$.

Задание 4. Общее решение дифференциального уравнения I порядка $(1 + x^2)y' - \dfrac{y}{\operatorname{arctg} x} = 0$ имеет вид...

Ответ: $y = C \operatorname{arctg} x$.

Задание 5. Частное решение дифференциального уравнения I порядка $y' = 1 - \operatorname{tg} x$, $y(0) = 1$ имеет вид...

Ответ: $y = x + \ln|\cos x| + 1$.

Задание 6. Частное решение дифференциального уравнения I порядка $y' - \dfrac{y}{x} = xe^x$, $y(0) = 1$ имеет вид...

Ответ: $y = x(e^x - e)$.

Задание 7. Дано дифференциальное уравнение $y' = \sqrt{\dfrac{x+y}{x-y}}$. Тогда отрезок соответствующего ему поля направлений в точке $A(2;1)$ образует с осью Ox угол, равный...

Ответ: $\pi/3$.

Задание 8. Если угловой коэффициент касательной к кривой в любой ее точке вдвое больше углового коэффициента радиус-вектора точки касания, то уравнение кривой имеет вид...

Ответ: $y = Cx^2$.

Задание 9. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{x}{2x+3y}, \\ \dot{y} = \dfrac{y}{2x+3y}, \end{cases} \quad x(0) = 1, \quad y(0) = 2$$

имеет решение...

Ответ: $x = \dfrac{1}{8}t + 1$, $y = \dfrac{1}{4}t + 2$.

Задание 10. Общее решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x} - x - 2y = 0, \\ \dot{y} - 2x + 2y = e^t \end{cases}$ имеет вид...

Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t} - 0{,}5e^t, \\ y = -2C_1 e^{-3t} + 0{,}5C_2 e^{2t}. \end{cases}$

Задание 11. Общее решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 3y, \\ \dot{y} = x \end{cases}$ имеет вид...

Ответ: $x = -C_1 e^{-t} + 3C_2 e^{3t}$, $y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{3t}$.

Задание 12. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} 4\dot{x} - \dot{y} + 3x = \sin t, \\ \dot{x} + y = \cos t \end{cases}$$

может быть сведена к уравнению вида...

Ответ: $\ddot{x} + 4\dot{x} + 3x = 0$.

Задание 13. Общее решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x} + x - y = e^t, \\ \dot{y} - x + y = e^t \end{cases}$ имеет вид...

Ответ: $\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{-2t} + e^t, \\ y = C_1 - C_2 e^{-2t} + e^t. \end{cases}$

Задание 14. Общее решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x} + 2x - y = t, \\ \dot{y} - x + 2y = t \end{cases}$ имеет вид...

Ответ: $\begin{cases} x = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-t} + t - 1, \\ y = -C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-t} + t - 1. \end{cases}$

Задание 15. Частное решение системы дифференциальных уравнений $\begin{cases} \dot{x} - x - 2y = 2e^t, \\ \dot{y} + 2x + 2y = e^t, \end{cases}$ $x(0) = y(0) = 0$ имеет вид...

Ответ: $\begin{cases} x = 2e^{2t} - 2e^t, \\ y = e^{2t} - e^t. \end{cases}$

Задание 16. Поле направлений дифференциального уравнения $y' = \ln(x - y^2)$ определяется неравенством...

Ответ: $x > y^2$.

Задание 17. Дано дифференциальное уравнение $y' = \sqrt{\dfrac{4x - y}{x + 2y}}$. Тогда отрезок соответствующего ему поля направлений в точке $A(\alpha; 2)$ образует с осью Ox угол, равный $\pi/4$, при $\alpha = ...$

Ответ: 2.

Задание 18. Порядок дифференциального уравнения $(y'')^3 - xy'' = 2y'$ можно понизить заменой...

Варианты ответов:

1) $y'' = z(y)$; 2) $y'' = z(x)$; 3) $y' = z(x)$; 4) $y' = z(y)$.

Задание 19. Если $y = f(x)$ — решение дифференциального уравнения $y' = e^{x-y}$, удовлетворяющее условию $y(0) = 0$, тогда $y(4)$ равно...

Ответ: 4.

Задание 20. Дано дифференциальное уравнение $y''' = 3x - 2$. Тогда его общим решением является...

Варианты ответов:

1) $y = \dfrac{1}{8}x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$;

2) $y = \dfrac{1}{24}x^4 - \dfrac{1}{6}x^3 + \dfrac{C_1}{2}x^2 + C_2x + C_3$;

3) $y = x^4 - x^3 + C_1x^2 + C_2x + C_3$;

4) $y = \dfrac{1}{8}x^4 - \dfrac{1}{3}x^3 + C$.

Раздел 5
Ряды

5.1. Числовые ряды

Пусть задана некоторая бесконечная последовательность чисел a_1, a_2, ..., a_n, ... Тогда выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \tag{5.1}$$

называется *числовым рядом*, а сами числа a_1, a_2,. .., a_n, ... — *членами ряда*.

Сумма n первых членов ряда называется *n-й частичной суммой ряда* и обозначается S_n:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + ... + a_n. \tag{5.2}$$

Если существует предел S бесконечной последовательности чисел S_1, S_2, ..., S_n, ..., т.е $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то этот предел называют *суммой ряда* (5.1), а сам ряд (5.1) в этом случае называется *сходящимся*. Если же предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует, то ряд (5.1) называют *расходящимся*. Расходящийся ряд суммы не имеет. Однако, если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$, то иногда говорят, что ряд (5.1) имеет *бесконечную сумму*.

Пусть ряд (5.1) сходится. Тогда его частичная сумма S_n является приближенным значением для суммы S. Погрешность этого приближения $r_n = S - S_n$ называется *остатком ряда*. Этот остаток является суммой ряда

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots .$$

Если ряд (5.1) сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$.

Бесконечная геометрическая прогрессия

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... \quad (a \neq 0) \tag{5.3}$$

есть сходящийся ряд, если $|q| < 1$. Сумма ряда (5.3) равна в этом случае $S = a/(1-q)$. В случае $|q| \geqslant 1$ ряд (5.3) расходится.

Необходимый признак сходимости ряда: если ряд (5.1) сходится, то его общий член стремится к нулю при $n \to \infty$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Обратное утверждение неверно. Из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, сходимость ряда (5.1) не следует.

Пример 5.1. Члены ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... ,$$

называемого *гармоническим*, стремятся к нулю с ростом их номеров ($\lim\limits_{n\to\infty}(1/n) = 0$), однако этот ряд расходится, его $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$ (расходимость может быть доказана интегральным признаком; см. далее).

Пример 5.2. Члены ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{2^n} + ...$$

стремятся к нулю с ростом их номеров ($\lim\limits_{n\to\infty}(1/2^n) = 0$). Этот ряд является сходящимся, его сумма может быть найдена по формуле суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{2} \Bigg/ \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1.$$

С помощью необходимого признака сходимости нельзя доказать сходимость ряда, но иногда удается доказать расходимость, применяя следствие из необходимого признака, которое легко доказывается от противного.

Следствие из необходимого признака сходимости: если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд расходится.

Пример 5.3. Выяснить, сходится или расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}.$$

Решение. Общий член этого ряда $a_n = n/(n+1)$:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+(1/n)} = 1,$$

т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$. На основании следствия из необходимого признака заключаем, что данный ряд расходится.

Пример 5.4. Проверить, выполняется ли необходимый признак сходимости для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2n+3}{n^2+n-1}$.

Решение.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{n^2+n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{2}{n}+\dfrac{3}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n^2}} = 0.$$

Необходимый признак выполняется, поэтому ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся, что можно установить лишь после дополнительного исследования.

Исследование сходимости рядов, как правило, сводится к вычислению некоторых пределов, при этом часто используются известные условия эквивалентности бесконечно малых, которые применительно к рядам при $n \to \infty$ принимают вид

$$\sin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}, \quad \operatorname{tg}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}, \quad \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n},$$

$$\arcsin\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}, \quad \operatorname{arctg}\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n}, \quad e^{\frac{1}{n}} - 1 \sim \frac{1}{n},$$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ (формула Стирлинга).}$$

Часто также приходится иметь дело с пределами

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^p} = 0 \ \ (p>0), \quad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e, \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^p} = 1.$$

5.2. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

Рассмотрим числовые ряды с положительными членами

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \quad (a_n > 0) \qquad (5.4)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots. \quad (b_n > 0) \qquad (5.5)$$

Первый признак сравнения: если для $n \geqslant n_0$ выполняется $a_n \leqslant b_n$ и ряд (5.5) сходится, то сходится также и ряд (5.4). Если для $n \geqslant n_0$ выполняется $a_n \geqslant b_n$ и ряд (5.5) расходится, то расходится и ряд (5.4).

Второй признак сравнения: если существует конечный и отличный от нуля предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A \neq 0,$$

то ряды (5.4) и (5.5) сходятся и расходятся одновременно.

При использовании признаков сравнения исследуемый ряд часто сравнивают или с бесконечной геометрической прогрессией (5.3), которая при $|q| < 1$ сходится, а при $|q| \geqslant 1$ расходится, или с рядом Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ (p — действительное число), который при $p = 1$ является гармоническим (можно сравнивать и с другими известными рядами).

Признак Даламбера. Пусть для ряда (5.4)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Если $q < 1$, то ряд сходится, если $q > 1$, то ряд расходится. При $q = 1$ вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

Признак Коши. Пусть для ряда (5.4)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q.$$

Если $q < 1$, то ряд сходится, если $q > 1$, то ряд расходится. При $q = 1$ вопрос о сходимости ряда остается нерешенным.

Интегральный признак: если $f(x)$ — неотрицательная невозрастающая функция при $x > 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ сходится и расходится одновременно с интегралом

$$\int\limits_1^{\infty} f(x)\,dx.$$

Пример 5.5. Выяснить, сходится или расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+3}}.$$

Решение. Данный ряд знакоположительный. Сравним его с гармоническим рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, который расходится. Члены данного ряда больше соответствующих членов гармонического ряда:

$$\frac{1}{\sqrt{n+3}} \geqslant \frac{1}{n} \quad (n = 3, 4, 5, \ldots).$$

По первому признаку сравнения из расходимости гармонического ряда следует расходимость данного ряда.

Пример 5.6. Выяснить, сходится или расходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n^2+2}.$$

Решение. Данный ряд является знакоположительным. Применим второй признак сравнения; для сравнения возьмем ряд Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$, который является сходящимся. Найдем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin[1/(n^2+2)]}{1/n^2} = \left| \begin{array}{c} \dfrac{1}{n^2+2} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^2} = \alpha \\ n\to\infty \;\Rightarrow\; \alpha\to 0 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{\alpha\to 0} \frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1.$$

По второму признаку сравнения данный ряд и ряд Дирихле ведут себя одинаково, т.е. их сходимости ряда Дирихле следует, что и данный ряд сходится.

Пример 5.7. С помощью признака Даламбера выяснить, сходится или расходится ряд $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{5^n (n+1)!}$.

Решение. Общий член ряда

$$a_n = \frac{n^n}{5^n (n+1)!}.$$

Заменяя всюду n на $(n+1)$, получим

$$a_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+1}}{5^{n+1}(n+2)!}.$$

Находим

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}\cdot 5^n (n+1)!}{5^{n+1}(n+2)!\cdot n^n} = \frac{(n+1)^n (n+1)}{5n^n (n+2)} = \frac{1}{5}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n;$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{5} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{e}{5}.$$

Но $e < 5$, значит, $e/5 < 1$, откуда, согласно признаку Даламбера, ряд сходится.

5.3. Знакопеременные ряды

Определение 5.1. Числовой ряд, содержащий как положительные, так и отрицательные члены, называется *знакопеременным.*

Пусть дан знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{5.6}$$

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + ... + |a_n| + ... \tag{5.7}$$

Если ряд (5.7) сходится, то сходится и ряд (5.6). Ряд (5.6) в этом случае называется *абсолютно сходящимся.*

Если ряд (5.7) расходится, то из этого не следует, вообще говоря, что и (5.6) расходится: ряд (5.6) может оказаться как сходящимся, так и расходящимся. Возможен случай, когда ряд (5.6) сходится, а (5.7) расходится; тогда ряд (5.6) называется *условно* (*неабсолютно*) *сходящимся.*

Признак Лейбница для знакопеременных рядов: если члены знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = a_1 - a_2 + ... + (-1)^n a_n + ... \quad (a_n > 0): \tag{5.8}$$

1) монотонно убывают по абсолютной величине: $a_{n+1} < a_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$;

2) стремятся к нулю: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,

то ряд (5.8) сходится, сумма его S положительна и не превосходит первого члена ряда: $0 < S < a_1$.

Замечание. При замене суммы S ряда, удовлетворяющего признаку Лейбница, суммой n его первых членов (S_n) абсолютная величина ошибки $|r_n|$ не превышает абсолютного значения первого из отброшенных членов: $|r_n| \leqslant |a_{n+1}|$. Знак ошибки (знак r_n) совпадает со знаком первого из отброшенных членов. Здесь $r_n = S - S_n$.

Пример 5.8. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{n} + ... ,$$

называемый *рядом Лейбница*, сходится по признаку Лейбница. В то же время ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... ,$$

расходится (гармонический ряд). Таким образом, ряд Лейбница — условно (неабсолютно) сходящийся ряд.

Пример 5.9. Сколько членов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^3} = 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^3} + ... + \frac{(-1)^n}{n^3} + ...$$

нужно взять, чтобы вычислить его сумму с точностью до 0,001?

Решение. Данный ряд является знакочередующимся рядом, удовлетворяющим всем условиям признака Лейбница:

$$1 > \frac{1}{2^3} > \frac{1}{3^3} > \frac{1}{4^3} > ... , \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0.$$

Следовательно, данный ряд сходится, притом абсолютно.

Чтобы вычислить сумму этого ряда с указанной точностью, необходимо найти такой член, абсолютная величина которого меньше 0,001, т.е. $1/n^3 < 0{,}001$ или $n^3 > 1000$, иначе говоря, $n > 10$. Следовательно, нужно просуммировать 10 первых членов данного ряда. Так как $a_{11} = 1/11^3 < 0{,}001$, то получаем следующую оценку для ошибки: $|r_{10}| \leqslant a_{11} < 0{,}001$.

5.4. Степенные ряды

Определение 5.2. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + ... + u_n(x) + ... \tag{5.9}$$

называется *функциональным*, если его члены являются функциями от аргумента x.

При каждом фиксированном значении $x = x_0$ функциональный ряд (5.9) становится числовым рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = u_1(x_0) + u_2(x_0) + ... + u_n(x_0) + ... \tag{5.10}$$

Если ряд (5.10) сходится, то x_0 называется *точкой сходимости* ряда (5.9). Совокупность всех точек сходимости x функционального ряда (5.9) называется его *областью сходимости*, а функция

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} u_k(x)$$

— *суммой* данного ряда. Функция $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$ называется *остатком ряда* (5.9). Если ряд (5.10) расходится, то значение x_0 называется *точкой расходимости* ряда.

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^n =$$

$$= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + ... + a_n(x-a)^n + ..., \qquad (5.11)$$

где a_n $(n = 0, 1, 2, ...)$ — числа, называемые *коэффициентами ряда*. При $a = 0$ ряд принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ... \qquad (5.12)$$

Теорема Абеля:

1) если ряд (5.12) сходится при $x = x_0 \neq 0$, то он абсолютно сходится при любом значении x, удовлетворяющим неравенству $|x| < |x_0|$;

2) если ряд (5.12) расходится при $x = x_1$, то он расходится и при любом значении x, для которого $|x| > |x_1|$.

Область сходимости степенного ряда (5.12) есть симметричный относительно начала координат O интервал $(-R, R)$, называемый *интервалом сходимости* ряда (5.12). Число R $(0 \leqslant R < +\infty)$ называется *радиусом сходимости* ряда (5.12).

Радиус сходимости может быть вычислен по формулам

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad (5.13)$$

или

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}. \qquad (5.14)$$

Степенной ряд (5.12) внутри интервала сходимости сходится абсолютно. Вне интервала сходимости ряд (5.12) расходится. При $x = -R$ или $x = R$ ряд (5.12) может оказаться расходящимся, сходящимся условно или сходящимся абсолютно.

Пример 5.10. Простейшим примером степенного ряда является геометрическая прогрессия $1 + x + x^2 + ... + x^n + ...$. Этот ряд сходится при $|q| = |x| < 1$. Следовательно, для данного ряда радиус сходимости $R = 1$, а интервалом сходимости является интервал $(-1;1)$. Сумма этого ряда равна $S(x)=1/(1-x)$ (в соответствии с формулой $S(x)=a/(1-q)$, $a=1$, $q=x$). Поэтому для функции $S(x)=1/(1-x)$ имеем следующее разложение в степенной ряд:

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...+x^n+... \quad (|x|<1). \tag{5.15}$$

Пример 5.11. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}(x-3)^n.$$

Решение. Радиус сходимости найдем по признаку Даламбера:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n(n+1)!}{n!(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{(1+1/n)^n(n+1)}=\frac{1}{e}.$$

Таким образом, ряд сходится на интервале $3-1/e<x<3+1/e$.

Исследуем сходимость ряда на концах интервала:

1) на левом конце ряд принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}\Big(-\dfrac{1}{e}\Big)^n$, т.е. является знакочередующимся. Абсолютная величина его общего члена $n^n/(n!e^n)$ с учетом формулы Стирлинга при $n\to\infty$ эквивалентна

$$\frac{n^n}{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n e^n}=\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\to 0.$$

По теореме Лейбница ряд на левом конце интеграла сходится;

2) на правом конце интервала ряд принимает вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!e^n}$;

$$a_n=\frac{n^n}{n!e^n}\sim\frac{n^n}{\sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n e^n}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\;n^{1/2}}.$$

Это — ряд Дирихле при $p=1/2$, поэтому данный ряд на правом конце своего интервала сходимости расходится.

Таким образом, область сходимости ряда есть промежуток $[3-1/e;3+1/e)$.

5.5. Ряды Тейлора

Пусть функция $f(x)$ имеет на некотором отрезке непрерывные производные до $(n+1)$-го порядка включительно, а точка a находится внутри этого отрезка. Тогда для любого x из этого отрезка имеет место *формула Тейлора*:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ...$$

$$... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x), \tag{5.16}$$

где остаточный член $R_n(x)$ может быть записан в виде

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \tag{5.17}$$

(*форма Лагранжа*), причем ξ лежит между a и x.

Очевидно, число ξ можно записать также в виде $a+\theta(x-a)$, где $0 < \theta < 1$.

В случае $a = 0$ формула Тейлора принимает вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x), \tag{5.18}$$

где

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

Формула (5.18) носит название *формулы Маклорена*.

Если функция $f(x)$ имеет производные всех порядков на некотором отрезке, содержащем внутри себя точку a, и выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ для всех x из указанного отрезка, то функция на этом отрезке является суммой степенного ряда

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + ... \, . \tag{5.19}$$

Этот ряд называется *рядом Тейлора* для данной функции.

В случае $a = 0$ ряд Тейлора принимает вид

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + ... \, .$$

Этот ряд называется *рядом Маклорена* для данной функции.

Разложение функции в степенной ряд единственно, т.е. если функция $f(x)$ разложена каким-либо образом в степенной ряд $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + ... + a_n(x-a)^n + ...$, то

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

Для разложения данной функции в ряд Тейлора нужно:

1) написать ряд Тейлора для данной функции, т.е. вычислить значения этой функции и ее производных при $x = a$ и подставить их в общее выражение ряда Тейлора (5.19);

2) исследовать остаточный член R_n формулы Тейлора для данной функции и определить те значения x, при которых полученный ряд сходится к данной функции, т.е. при которых $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$.

При разложении функций в степенные ряды часто используются разложения в ряд Маклорена следующих функций:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$\sin x = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ... \quad (-1 < x \leqslant 1);$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n + ... \quad (-1 < x < 1);$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + ... \quad (-1 < x < 1);$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + ... \quad (-1 < x < 1).$$

В скобках указаны промежутки, на которых верны данные разложения.

Ряды широко используются в приближенных вычислениях. С помощью рядов с заданной точностью можно вычислить значения корней, тригонометрических функций, логарифмов чисел, определенных интегралов. Ряды применяются также при интегрировании дифференциальных уравнений.

Пример 5.12. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{1/4} \frac{\sin x}{x} dx$ с точностью 10^{-4}.

Решение. Разложим в подынтегральном выражении функцию синуса в ряд Маклорена:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... \quad (-\infty < x < +\infty).$$

Образующийся ряд можно интегрировать в любых конечных пределах, т.е.

$$\int\limits_0^{1/4} \frac{\sin x}{x} dx = \int\limits_0^{1/4} \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int\limits_0^{1/4} x^{2n} dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \bigg|_0^{\frac{1}{4}} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!(2n+1)4^{2n+1}}.$$

Полученный числовой ряд — знакочередующийся, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница, поэтому если мы возьмем для вычислений несколько первых членов ряда, то ошибка, которая при этом будет сделана, не превзойдет абсолютной величины первого из отброшенных членов. Замечаем, что третий член ряда

$$\frac{1}{5! \cdot 5 \cdot 4^5} = \frac{1}{61440} < 10^{-4}.$$

Следовательно, чтобы вычислить интеграл с точностью до 10^{-4}, достаточно взять всего два члена ряда. С требуемой точностью

$$\int\limits_0^{1/4} \frac{\sin x}{x} dx \approx \frac{1}{4} - \frac{1}{3! \cdot 3 \cdot 4^3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{1152} \approx 0{,}2491.$$

Пример 5.13. Найти первые пять членов разложения в ряд решения уравнения $y' = x^2 + y^2$, удовлетворяющего условию $y = 1/2$ при $x = 0$.

Решение. Искомое решение уравнения запишем в виде ряда Маклорена:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} x^3 + ... + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n + ...$$

Найдем выражения для трех производных, дифференцируя исходное уравнение:

$$y'' = 2x + 2yy', \quad y''' = 2 + 2(y')^2 + 2yy'', \quad y^{(4)} = 6y'y'' + 2yy'''.$$

Вычислим значения этих производных при $x = 0$, принимая во внимание начальное условие $y(0) = 1/2$ и данное уравнение $y' = x^2 + y^2$:

$$y'(0) = 0 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad y''(0) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

$$y'''(0) = 2 + 2 \cdot \frac{1}{4^2} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{19}{8}, \quad y^{(4)}(0) = \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{19}{8} = \frac{11}{4}.$$

Подставляя эти значения в ряд Маклорена, получаем

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}x^2 + \frac{19}{48}x^3 + \frac{11}{96}x^4 + \dots .$$

5.6. Ряды Фурье

Определение 5.3. *Рядом Фурье* функции $f(x)$, определенной на отрезке $[-\pi, \pi]$, называется ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

коэффициенты которого определяются по формулам

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx, \quad (n = 1, 2, \dots), \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\sin nx\,dx, \quad (n = 1, 2, \dots). \end{aligned} \tag{5.20}$$

При этом пишут

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin x). \tag{5.21}$$

Достаточные условия сходимости ряда Фурье к функции. Теорема Дирихле: если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на отрезке $[-\pi, \pi]$, то ее ряд Фурье сходится к функции $f(x)$ во всех точках, в которых она непрерывна. В точках разрыва функции ряд сходится к полусумме $[f(x-0)+f(x+0)]/2$ ее предельных значений слева и справа (c — точка разрыва первого рода). Если $f(-\pi) \neq f(\pi)$, то в точках $\pm\pi$ ряд сходится к значению $[f(-\pi+0)+f(\pi-0)]/2$. При этом сумма ряда (5.21) является периодической функцией с периодом 2π на всей оси Ox.

Пусть теперь функция $f(x)$ задана на отрезке $[-l, l]$. Ряд Фурье в этом случае имеет вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{5.22}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,dx,$$

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad (n = 1, 2, ...), \tag{5.23}$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} f(x)\,\sin\frac{n\pi x}{l}dx, \quad (n = 1, 2, ...).$$

Вопрос о сходимости ряда (5.22), в свою очередь, определяется теоремой Дирихле, но на отрезке $[-l, l]$ соответственно. Суммой ряда будет периодическая на всей числовой оси функция с периодом $2l$.

Пример 5.14. Разложить функцию $f(x) = \begin{cases} 0, \ -2 \leqslant x \leqslant 0, \\ x, \ 0 < x \leqslant 2 \end{cases}$ в ряд Фурье на интервале $(-2; 2)$.

Решение.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{2} + b_n \sin\frac{n\pi x}{2}\right).$$

Данная функция непрерывна на отрезке $[-2; 2]$ и не имеет там экстремумов, следовательно, удовлетворяет условиям Дирихле (рис. 5.1). Вычислим коэффициенты ряда:

$$a_0 = \frac{1}{2}\left[\int\limits_{-2}^{0} 0\,dx + \int\limits_{0}^{2} x\,dx\right] = \frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_0^2 = 1,$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left[\int\limits_{-2}^{0} 0\cdot\cos\frac{n\pi x}{2}dx + \int\limits_{0}^{2} x\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right] =$$

$$= \left\{\begin{array}{c} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \cos\dfrac{n\pi x}{2}, \quad v = \dfrac{2}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi x}{2} \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2 - \int\limits_0^2 \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2^2}{n^2\pi^2}\cos\frac{n\pi x}{2}\bigg|_0^2 = \frac{2}{n^2\pi^2}(\cos n\pi - 1) =$$

$$= \begin{cases} 0, \ n = 2k \text{ — четное } (k = 1, 2, ...), \\ -\dfrac{4}{n^2\pi^2} = -\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi^2}, \ n = 2k-1 \text{ — нечетное,} \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{2}\left[\int\limits_{-2}^{0} 0\cdot\sin\frac{n\pi x}{2}dx + \int\limits_{0}^{2} x\sin\frac{n\pi x}{2}dx\right] =$$

$$= \left\{\begin{array}{c} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \sin\dfrac{n\pi x}{2}, \quad v = -\dfrac{2}{n\pi}\cos\dfrac{n\pi x}{2} \end{array}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-x\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2 + \int\limits_0^2 \frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{2}dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{2^2}{n\pi}\cos n\pi + \frac{2^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x}{2}\Big|_0^2\right) = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

Таким образом, разложение функции в ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\cos\frac{(2k-1)\pi x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}\sin\frac{n\pi x}{2}.$$

Разложение в ряд Фурье четных функций. Пусть функция $f(x)$, заданная на отрезке $[-l, l]$, — четная и удовлетворяет условиям Дирихле. Тогда ряд Фурье для этой функции будет содержать только a_0 и члены с косинусами, т.е.

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l}, \tag{5.24}$$

где

$$a_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx \ (n = 0, 1, 2, ...), \quad b_n = 0.$$

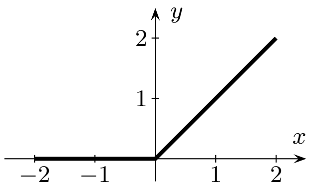


Рис. 5.1

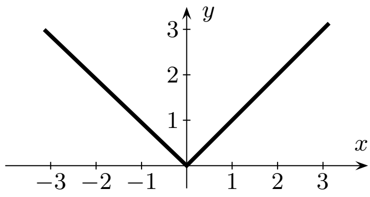


Рис. 5.2

Пример 5.15. Разложить в ряд Фурье на отрезке $[-\pi, \pi]$ четную функцию $f(x) = |x|$.

Решение. Данная функция непрерывна на заданном отрезке ($l = \pi$) и имеет на нем один экстремум (рис. 5.2), поэтому удовлетворяет условиям Дирихле. Ряд (5.24) в данном случае принимает вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx.$$

Так как $f(x) = |x|$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$, то

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,dx = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^{\pi} = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \left\{ \begin{array}{c} u = x, \quad du = dx, \\ dv = \cos nx\,dx, \quad v = \dfrac{1}{n}\sin nx \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin nx\Big|_0^{\pi} - \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nx\,dx\right] = \frac{2}{\pi n^2}(\cos n\pi - 1) =$$

$$= \frac{2}{\pi n^2}((-1)^n - 1) = \begin{cases} 0,\ n = 2k \text{ — четное } (k = 1, 2, \ldots), \\ -\dfrac{4}{n^2\pi} = -\dfrac{4}{(2k-1)^2\pi},\ n = 2k-1 \text{ — нечетное.} \end{cases}$$

Следовательно,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2\pi}\cos(2k-1)x.$$

Разложение в ряд Фурье нечетных функций. Пусть функция $f(x)$, заданная на отрезке $[-l, l]$, — нечетная и удовлетворяет условиям Дирихле. Тогда ряд Фурье для этой функции будет содержать только члены с синусами:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Разложение в ряд Фурье функций, заданных на отрезке $[0, l]$. В этом случае можно доопределить функцию на полуинтервал $[-l, 0)$ либо четным, либо нечетным образом. В первом случае получится четная на $[-l, l]$ функция, которая будет раскладываться в ряд Фурье по косинусам, а во втором — нечетная на $[-l, l]$ функция, и ее ряд Фурье будет содержать только синусы. В обоих случаях на отрезке $[0, l]$ эти ряды дадут разложение исходной функции в ряд Фурье.

Примеры тестовых заданий

Задание 1. Закончить утверждение: «Ряд называется сходящимся, если...»

Варианты ответов:

1) последовательность его частичных сумм имеет конечный или бесконечный предел;
2) предел общего члена ряда равен нулю;
3) последовательность его частичных сумм имеет конечных предел;
4) предел модуля общего члена равен нулю;
5) последовательность его частичных сумм является бесконечно большой.

Задание 2. Дан сходящийся ряд. При отбрасывании нескольких его ненулевых членов...

Варианты ответов:

1) ряд останется сходящимся и его сумма обязательно не изменится;
2) ряд останется сходящимся, и его сумма изменится, если сумма отброшенных элементов не равна нулю;
3) ряд станет расходящимся;
4) ряд останется сходящимся и его сумма обязательно уменьшится;
5) не зная членов ряда, ничего нельзя сказать о сходимости или расходимости нового ряда.

Задание 3. Необходимым признаком сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ является...

Варианты ответов:

1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$; 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 0$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = C = \text{const}$; 4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{a_n} = 0$;

5) верный ответ отсутствует.

Задание 4. Для сходящегося числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ укажите

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4a_n^4 - 1}}{\sqrt{a_n^2 + 1}}.$$

Варианты ответов:

1) $\sqrt{1{,}5}$; 2) $\sqrt{2}$; 3) 2; 4) ∞; 5) 0.

Задание 5. Найдите четвертый член a_4 числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+2)}{2^{n-1}}.$$

Варианты ответов:

1) 1,5; 2) 13,75; 3) 4; 4) 3; 5) нет верного варианта.

Задание 6. Для числового ряда $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{5} + \dfrac{3}{8} + \dfrac{4}{11} + \ldots$ укажите предел общего члена.

Варианты ответов:

1) 0,5; 2) 1/3; 3) 0; 4) ∞; 5) 1.

Задание 7. Укажите вид общего члена числового ряда

$$\left(-\frac{6}{3}\right) + \frac{11}{9} + \left(-\frac{16}{27}\right) + \frac{21}{81} + \ldots .$$

Варианты ответов:

1) $(-1)^n \dfrac{5n-4}{3n}$; 2) $(-1)^n \dfrac{5n+1}{3^n}$;

3) $(-1)^n \dfrac{5n-4}{3^n}$; 4) $(-1)^n \dfrac{5n+1}{3n}$;

5) нет верного варианта.

Задание 8. Укажите верные утверждения, относящиеся к поведению ряда Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$:

(I) при $\alpha = 1$ указанный ряд сходится;

(II) при $\alpha < 1$ указанный ряд расходится;

(III) при $\alpha > 1$ указанный ряд сходится;

(IV) при $\alpha > 1$ указанный ряд расходится.

Варианты ответов:

1) только IV; 2) I, III; 3) I, II, III; 4) II, III;

5) только III.

Задание 9. Укажите верные утверждения:

(I) если сходится ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$, то сходится и ряд $u_{m+1} + u_{m+2} + u_{m+3} + \ldots$, получаемый из данного отбрасыванием первых m членов;

(II) если расходятся ряды $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ и $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$, то ряд $(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \ldots$ также расходится;

(III) если сходятся ряды $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ и $v_1 + v_2 + v_3 + \ldots$, имеющие соответственно суммы S и σ, то сходится и ряд $(u_1 + v_1) + (u_2 + v_2) + (u_3 + v_3) + \ldots$, причем сумма последнего ряда равна $S + \sigma$;

(IV) если сходится ряд $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ и его суммой является число S, то сходится и ряд $au_1 + au_2 + au_3 + \ldots$ (при $a \neq 1$), причем сумма последнего ряда также равна S.

Варианты ответов:

1) I, III; 2) I, III, IV; 3) I, II, III; 4) II;

5) все утверждения верны.

Задание 10. Для числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{5^n}{n^2 + 3}$ определить значение предела $l = \lim\limits_{n \to +\infty} (a_{n+1}/a_n)$.

Варианты ответов:

1) 0; 2) 1/5; 3) 1; 4) 5; 5) ∞.

Задание 11. Для данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-7}{n^2\sqrt{n^2+7}}$$

найти такое значение α, что для ряда с общим членом $v_n = 1/n^\alpha$ выполняется условие предельного признака сравнения, т.е. существует $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n/v_n) = k$, $k \neq 0$, $k \neq \infty$.

Варианты ответов:

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 2,5.

Задание 12. Пусть $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ — положительный ряд и $l = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. Выделите верные окончания для утверждения: «Существует такой положительный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, для которого...»:

(I) $l = 0,1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 1$; (II) $l = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$;

(III) $l = 2$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$; (IV) $l = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Варианты ответов:

1) I, II, III; 2) II, III, IV; 3) II, IV; 4) II, III;

5) I, II, III, IV.

Задание 13. Представлены числовые ряды с положительными членами:

(I) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+1}$; (II) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4n^3+2}$;

(III) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\sqrt{n}}{n^2+1}$; (IV) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3}{3^n}$.

Выделите сходящиеся ряды.

Варианты ответов:

1) III, IV; 2) II, III, IV; 3) II, IV; 4) II, III;

5) I, II, III, IV.

Задание 14. Представлены числовые ряды с положительными членами:

(I) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{10n^2}{n^4+2}$; (II) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3n}{5n-1}$;

(III) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n}{4n^2}$; (IV) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3\sqrt{n}}{n^2+6}$.

Выделите расходящиеся ряды.

Варианты ответов:

1) I, III, IV; 2) II, III, IV; 3) II, III; 4) II;

5) все сходятся.

Задание 15. Признак Даламбера сходимости числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P_k$ с положительными членами P_k заключается в том, что...

Варианты ответов:

1) если существует $\lim\limits_{k\to\infty}(P_{k+1}/P_k) = q$, то при $q < 1$ ряд расходится, а при $q > 1$ ряд сходится;

2) если существует $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{P_k} = q$, то при $q < 1$ ряд расходится, а при $q > 1$ ряд сходится;

3) если существует $\lim\limits_{k\to\infty}(P_{k+1}/P_k) = q$, то при $q > 1$ ряд расходится, а при $q < 1$ ряд сходится;

4) если существует $\lim\limits_{k\to\infty}(P_{k+1}/P_k) = q$, то при $q > 1$ ряд расходится, а при $q \leqslant 1$ ряд сходится;

5) все указанные утверждения неверны.

Задание 16. Признак Коши сходимости числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P_k$ с положительными членами P_k заключается в том, что...

Варианты ответов:

1) если существует $\lim\limits_{k\to\infty}(P_{k+1}/P_k) = q$, то при $q < 1$ ряд сходится, а при $q > 1$ ряд расходится;

2) если существует $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{P_k} = q$, то при $q > 1$ ряд сходится, а при $q < 1$ ряд расходится;

3) если существует $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{P_k} = q$, то при $q \geqslant 1$ ряд сходится, а при $q < 1$ ряд расходится;

4) если существует $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{P_k} = q$, то при $q < 1$ ряд сходится, а при $q > 1$ ряд расходится;

5) все указанные утверждения неверны.

Задание 17. Выберите правильные утверждения. Интегральный признак Коши сходимости числового ряда $\sum\limits_{k=m}^{\infty} P_k$ с невозрастающими положительными членами заключается в том, что (при соответствующем подборе функции $P(x)$)...

(I) если $\int\limits_{-\infty}^{\infty} P(x)\,dx$ сходится, то ряд сходится;

(II) если $\int\limits_{m}^{\infty} P(x)\,dx$ расходится, то ряд сходится;

(III) если $\int\limits_{m}^{\infty} P(x)\,dx$ сходится, то ряд сходится;

(IV) если $\int\limits_{m}^{\infty} \dfrac{P_{k+1}(x)}{P(x)}dx$ сходится, то ряд сходится.

Варианты ответов:

1) I; 2) II; 3) III; 4) IV;

5) верный ответ отсутствует.

Задание 18. Укажите функцию, необходимую для интегрирования при исследовании сходимости числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2+4}$ по интегральному признаку Коши.

Варианты ответов:

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4}$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{x}$; 4) $f(x) = \dfrac{1}{x+4}$;

5) верный ответ отсутствует.

Задание 19. Укажите значение параметра p для сравнения числового ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n\sqrt{n}+4n+12}$$

с рядом Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$.

Варианты ответов:

1) 1; 2) 0,5; 3) 1,5; 4) 4; 5) 2/3.

Задание 20. Укажите значение параметра p для сравнения числового ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{|\sin n|}{n^5}$ с рядом Дирихле $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$.

Варианты ответов:

1) 1; 2) 0,2; 3) 4; 4) 5;

5) верный ответ отсутствует.

Задание 21. Укажите сходящиеся ряды из нижеследующих:

(I) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right) n^2$; (II) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$;

(III) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\dfrac{n-1}{2n+1}\right)^n$.

Варианты ответов:

1) I, II, III; 2) I; 3) II; 4) III;

5) среди указанных рядов нет сходящихся.

Задание 22. Заданы знакочередующиеся ряды:

(I) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}$; (II) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+5}$;

(III) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$; (IV) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n^3+1}$.

Укажите, какие из них являются абсолютно сходящимися.

Варианты ответов:

1) I, IV; 2) I, II, IV; 3) IV; 4) I, III; 5) I, II, III, IV.

Задание 23. Заданы знакочередующиеся ряды:

(I) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{5n+2}$; (II) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{3^n}$;

(III) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3n}{n^3-2}$; (IV) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \sqrt{n}}{5n+1}$.

Укажите, какие из них являются условно, но не абсолютно сходящимися.

Варианты ответов:

1) I, IV; 2) I, II, IV; 3) IV; 4) I, III; 5) I, II, III, IV.

Задание 24. Укажите верную формулировку признака абсолютной сходимости знакопеременного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$.

Варианты ответов:

1) если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно;

2) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно;

3) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\sqrt[n]{u_n}\right|$ сходится, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно;

4) если $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно;

5) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится абсолютно, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ сходится.

Задание 25. Знакочередующийся ряд $P_1 - P_2 + P_3 - P_4 + ... + (-1)^{n+1} P_n + ...$ $(P_i > 0)$ сходится (признак Лейбница), если...

Варианты ответов:

1) $P_1 < P_2 < P_3 < P_4 < ... < P_n < ...$ и $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 0$;

2) $P_1 > P_2 > P_3 > P_4 > ... > P_n > ...$ и $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 0$;

3) $P_1 > P_2 > P_3 > P_4 > ... > P_n > ...$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_{n+1}}{P_n} = 0$;

4) $P_1 > P_2 > P_3 > P_4 > ... > P_n > ...$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{P_n} = 0$;

5) верный ответ отсутствует.

Задание 26. Найдите количество членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n \cdot 10^n}$, которые необходимо взять, чтобы вычислить сумму этого ряда с точностью до 0,0001.

Варианты ответов:

1) 3; 2) 4; 3) 5; 4) 6; 5) 7.

Задание 27. Найдите сумму знакочередующегося ряда

$$4 - \frac{4}{3} + \frac{4}{9} - \frac{4}{27} + ... + \frac{(-1)^{n+1} \cdot 4}{3^{n-1}} + ...$$

Варианты ответов:

1) 1; 2) 4; 3) 8/3; 4) 3;

5) верный ответ отсутствует.

Задание 28. Укажите верное утверждение для знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{3n-1}$.

Варианты ответов:

1) ряд сходится условно, но не сходится абсолютно;

2) ряд сходится абсолютно, но не условно;

3) ряд сходится условно и абсолютно;

4) ряд расходится;

5) верное утверждение отсутствует.

Задание 29. Укажите наиболее точную оценку для суммы S ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}n}{2^n}$.

Варианты ответов:

1) $0 < S < \dfrac{1}{2}$; 2) $\dfrac{3}{8} < S < \dfrac{5}{8}$;

3) $\dfrac{1}{8} < S < \dfrac{3}{8}$; 4) $0 < S < \dfrac{1}{8}$;

5) $-\dfrac{1}{8} < S < 0$.

Задание 30. Укажите верное утверждение, касающееся знакочередующегося ряда $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1\cdot 4}{3\cdot 5}+\dfrac{1\cdot 4\cdot 7}{3\cdot 5\cdot 7}-\ldots$.

Варианты ответов:

1) ряд сходится условно, но не сходится абсолютно;

2) ряд сходится абсолютно, но не условно;

3) ряд сходится условно и абсолютно;

4) ряд расходится;

5) верное утверждение отсутствует.

Задание 31. Определите длину интервала сходимости ряда

$$x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \dots .$$

Задание 32. Укажите наименьшее целое значение x из области сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n(n+1)}$.

Задание 33. Найдите радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{16^n n^2}$.

Задание 34. Укажите область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+5)^n}{2^n(3n^2+1)}.$$

Варианты ответов:

1) $[-2; 2]$; 2) $[-7; -3]$; 3) $(-2; 2)$; 4) $[-1; 1)$;

5) $(-7; -3)$.

Задание 35. Укажите область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(x-2)^{2n}}{9^n(2n+1)}.$$

Варианты ответов:

1) $[-1; 5]$; 2) $(-1; 5]$; 3) $(-9; 9)$; 4) $[-7; 11)$;

5) $[-3; 3]$.

Задание 36. Укажите область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{x^n}$.

Варианты ответов:

1) $[-1; 1]$; 2) $(-1; 1)$;

3) $(-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$; 4) $(1; +\infty)$;

5) $(0; 1)$.

Задание 37. Найдите сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.

Варианты ответов:

1) 1; 2) 1/3; 3) 2; 4) 3; 5) 2/3.

Задание 38. Укажите ряд, который сходится условно.

Варианты ответов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}}{(3n-2)!}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{3 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (4n-1) \cdot \ldots}{5 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot (3n+2) \cdot \ldots}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}}{2^n} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$; 5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \dfrac{1}{n^2}$.

Задание 39. Укажите ряд, который сходится абсолютно.

Варианты ответов:

1) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}}{n \ln n \sqrt{\ln \ln n}}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}}{2^n} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$; 4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{3n-1}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{tg} \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

Задание 40. Укажите ряд, который расходится.

Варианты ответов:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{n!}{2n^2}$; 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{\cos 3n}{2^n}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{n+3}{n^2+4}$; 4) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n}}{n \ln n \sqrt{\ln n}}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{2^n}{3^n}$.

Задание 41. Заключение о сходимости или расходимости ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n\ln n}$ можно сделать на основании...

Варианты ответов:

1) признака Даламбера;

2) признака Лейбница;

3) признака сравнения;

4) радикального признака Коши;

5) интегрального признака Коши.

Задание 42. Выберите формулу частичной суммы S_n для числового ряда $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{27}-\dfrac{1}{81}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{3^n}+\ldots$.

Варианты ответов:

1) $\dfrac{1}{4}\left(1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$;

2) $\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{3^n}\right)$;

3) $\dfrac{1}{3}\left(1+\dfrac{1}{3^n}\right)$;

4) $\dfrac{1}{3}\left(1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right)$;

5) $\dfrac{3^n}{3^n-1}$.

Задание 43. Какое из утверждений обязательно верно?

Варианты ответов:

1) если $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ сходится;

2) если частичные суммы ряда ограничены, то ряд сходится;

3) если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ сходится, то оба ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ тоже сходятся;

4) если $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}/a_n = 1)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится;

5) если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится.

Задание 44. Даны числовые ряды:

(I) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{2^n}$; (II) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^4+1}}$;

(III) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\ln(n+2)}$.

Сходящимися являются ряды...

Варианты ответов:

1) I, II, III; 2) II, III; 3) I, III; 4) II; 5) I, II.

Задание 45. Даны знакочередующиеся ряды:

(I) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n\ln n}$; (II) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{|\sin n|}{n^2}$.

Выберите верное утверждение.

Варианты ответов:

1) ряды I и II сходятся условно;

2) ряды I и II сходятся абсолютно;

3) ряд I сходится условно, ряд II сходится абсолютно;

4) ряд I расходится, ряд II сходится условно;

5) оба ряда расходятся.

Задание 46. Сколько членов ряда надо взять, чтобы вычислить сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{1}{(2n)!}$ с точностью $\alpha = 0{,}01$?

Варианты ответов:

1) 1; 2) 2; 3) 3; 4) 4; 5) 5.

Задание 47. Укажите область сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-2)^{n+1}}{3^n(n+2)}$.

Варианты ответов:

1) $(-\infty;+\infty)$; 2) $\{\varnothing\}$; 3) $[-1;5)$; 4) $[1;3]$; 5) $(1;3)$.

Задание 48. Найдите область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3^n}(x-1)^n.$$

Варианты ответов:

1) $(0;2)$; 2) $[0;2]$; 3) $(0;1)$; 4) $(-2;5)$; 5) $(-2;5]$.

Задание 49. Найдите сумму ряда $1+2x+3x^2+\ldots+nx^{n-1}+\ldots$ $(|x|<1)$.

Варианты ответов:

1) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$; 2) $\dfrac{1}{1-x}$; 3) $\dfrac{1}{1+x}$; 4) $\dfrac{x}{1+x}$; 5) $\dfrac{x}{(1+x)^2}$.

Задание 50. Найдите сумму ряда $x+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+\ldots+\dfrac{x^n}{n}+\ldots$ $(|x|<1)$.

Варианты ответов:

1) $\ln(1+x)$; 2) $\ln(1-x)$;

3) $-\ln(1-x)$; 4) $-\ln(1+x)$;

5) $\ln|x|$.

Задание 51. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{arctg} x}{x^3}$.

Варианты ответов:

1) 0; 2) 1; 3) $1/3$; 4) $1/6$; 5) -1.

Задание 52. С точностью до 0,01 вычислите $\int\limits_0^{0{,}25}\ln(1+\sqrt{x}\,)\,dx$.

Варианты ответов:

1) 0,50; 2) 0,05; 3) 0,07; 4) 0,25; 5) 0,27.

Задание 53. Выберите разложение в ряд Фурье периодической функции $f(x)$ с периодом 2, заданную на отрезке $[-1;1]$ уравнением $f(x) = x^2$.

Варианты ответов:

1) $\dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^m}{m^2}\cos m\pi x$;

2) $\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^m}{m^2}\cos m\pi x$;

3) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^m}{m^2}\cos m\pi x$;

4) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^m}{m^2}\sin m\pi x$;

5) $\dfrac{4}{\pi^2}\sum\limits_{m=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^m}{m^2}\sin m\pi x$.

Задание 54. Разложите $\cos^2 3x$ в ряд Тейлора по степеням x.

Варианты ответов:

1) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 3^n x^n}{(2n)!}$;

2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 6^n x^n}{(2n)!}$;

3) $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 6^n x^n}{(2n)!}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 3^n x^n}{(2n)!}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n 6^n x^n}{(2n)!}$.

Задание 55. Найдите круг сходимости комплексного степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2i)^{n+1}(z+3i)^n}{(\sqrt{7}-3i)^n}$.

Варианты ответов:

1) $|z+3i| < 2$;

2) $|z| < 1$;

3) $|z+3i|<1$; 4) $|z+3i|<4$;

5) $|z|<\sqrt{7}$.

Задание 56. Найдите область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{3}+i}{3}\right)^{n}(z-i)^{n}.$$

Варианты ответов:

1) $|z|<1$; 2) $|z-i|<1$;

3) $|z-i|<3/2$; 4) $|z-i|<3$;

5) $|z|<3$.

Задание 57. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{5^n}-\dfrac{i}{2^n}\right)$.

Варианты ответов:

1) $\dfrac{1}{4}-i$; 2) $1-i$; 3) $\dfrac{1}{5}-\dfrac{i}{2}$; 4) $\dfrac{1}{4}$; 5) $\dfrac{1}{5}$.

Задание 58. Как задается прямое преобразование Фурье общего вида?

Варианты ответов:

1) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{izx}f(x)\,dx$; 2) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{izx}F(z)\,dz$;

3) $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}f(z)\cos zx\,dx$; 4) $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty}f(z)\sin zx\,dz$;

5) $\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{izx}f(x)\,dx$.

Раздел 6

Кратные и криволинейные интегралы. Поверхностные интегралы. Векторный анализ

6.1. Определение и свойства двойного интеграла

Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D. Разобьем область D с помощью сети кривых на части S_1, S_2, …, S_n. Взяв в каждой части S_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) произвольно точку $P_i(x_i, y_i)$, вычислим в этой точке значение функции $f(P_i)$. Составим сумму произведений $f(P_i)$ на площадь $S_i = \Delta S_i$, т.е.

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(P_i)\Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i,$$

которая называется *интегральной суммой* от функции $f(x, y)$ по области D.

Конечный предел интегральной суммы σ_n (если он существует) при стремлении диаметров всех частей S_i к нулю называется *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по области D и обозначается символом

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \iint\limits_D f(P)\,dS.$$

Итак,

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy = \lim_{\substack{\operatorname{diam} S_i \to 0 \\ (n\to\infty)}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i.$$

Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области D, тогда $\iint\limits_D f(P)\,dS$ существует.

Двойной интеграл имеет **свойства**, подобные свойствам определенного интеграла:

1) $\iint\limits_D (f(x, y) \pm g(x, y))\,dxdy = \iint\limits_D f(x, y)\,dxdy \pm \iint\limits_D g(x, y)\,dxdy;$

2) $\iint\limits_D kf(x,y)\,dxdy = k\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$;

3) если $D = D_1 + D_2$, $D_1 \cap D_2 = \varnothing$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy.$$

6.2. Вычисление двойного интеграла

Вычисление двойного интеграла сводится к вычислению *повторных интегралов* следующим способом.

Пусть область D (рис. 6.1) ограничена кривыми $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, $x = a$, $x = b$, причем всюду на $[a,b]$ функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ непрерывны и $\varphi_1(x) \leqslant \varphi(x_2)$. Тогда

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy, \tag{6.1}$$

причем сначала вычисляется внутренний интеграл по переменной y (x — параметр), а полученный результат интегрируется по x.

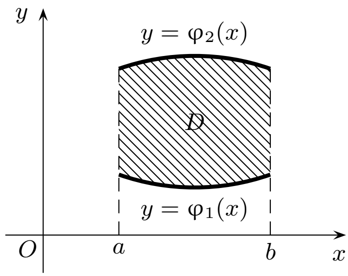


Рис. 6.1

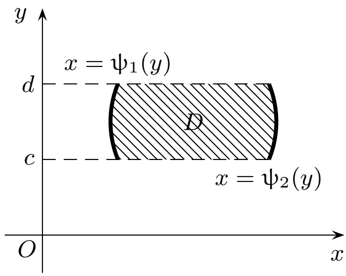


Рис. 6.2

Заметим при этом, что если кривая $\varphi_1(x)$ (или кривая $\varphi_2(x)$) в промежутке $a \leqslant x \leqslant b$ задается разными аналитическими выражениями, например,

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi_1^{(1)}(x) \text{ при } a \leqslant x \leqslant c, \\ \varphi_1^{(2)}(x) \text{ при } c < x \leqslant b, \end{cases}$$

то интеграл справа записывается в виде суммы двух интегралов:

$$\int\limits_a^b dx \int\limits_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy = \int\limits_a^c dx \int\limits_{\varphi_1^{(1)}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy + \int\limits_c^b dx \int\limits_{\varphi_1^{(2)}(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,dy.$$

Аналогично, если область D ограничена кривыми $x = \psi_1(y)$, $x = \psi_2(y)$, $y = c$, $y = d$, причем всюду на $[c, d]$ функции $\psi_1(y)$ и $\psi_2(y)$ непрерывны и $\psi_1(y) \leqslant \psi_2(y)$ (рис. 6.2), то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\,dx. \tag{6.2}$$

Пример 6.1. Изменить порядок интегрирования:

$$J = \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{\sqrt[3]{y}} f(x,y)\,dx + \int\limits_1^2 dy \int\limits_0^{2-y} f(x,y)\,dx.$$

Решение. По условию имеем область интегрирования $D = D_1 \cup D_2$ (рис. 6.3), где

$$D_1\colon\ \begin{cases} 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 \leqslant x \leqslant \sqrt[3]{y}, \end{cases} \qquad D_2\colon\ \begin{cases} 1 \leqslant y \leqslant 2, \\ 0 \leqslant x \leqslant 2 - y. \end{cases}$$

Область D ограничена линиями $x = \sqrt[3]{y}$ $(y = x^3)$, $x = 2 - y$ $(y = 2 - x)$. Таким образом,

$$D\colon\ \begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ x^3 \leqslant y \leqslant 2 - x, \end{cases} \qquad \text{тогда} \quad J = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^3}^{2-x} f(x,y)\,dy.$$

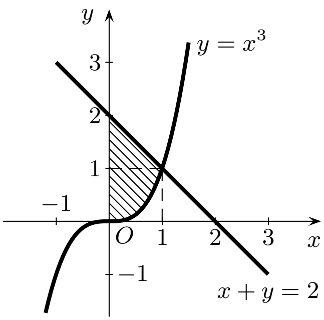


Рис. 6.3

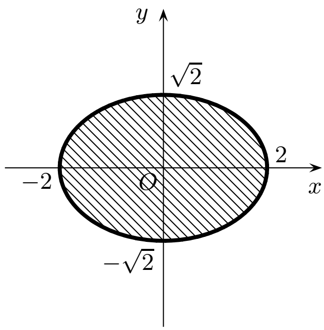


Рис. 6.4

Пример 6.2. Изменить порядок интегрирования:

$$J = \int\limits_{-2}^{2} dx \int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\,dy.$$

Решение. Имеем область интегрирования

$$D\colon \quad \begin{cases} -2 \leqslant x \leqslant 2, \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2} \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}, \end{cases}$$

где

$$y_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}, \quad y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{4-x^2}.$$

Тогда $y^2 = \frac{1}{2}(4-x^2)$, откуда имеем $x^2 + 2y^2 = 4$, т.е. область D ограничена эллипсом $x^2/4 + y^2/2 = 1$ (рис. 6.4). Выразим x из уравнения эллипса:

$$x = \pm\sqrt{4-2y^2} = \pm\sqrt{2(2-y^2)} = \pm\sqrt{2}\,\sqrt{2-y^2}.$$

Следовательно, $J = \displaystyle\int\limits_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int\limits_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} f(x,y)\,dx.$

Пример 6.3. Вычислить двойной интеграл

$$\iint\limits_D (x^2+y)\,dxdy,$$

где $D\colon \begin{cases} y = x^2, \\ y^2 = x. \end{cases}$

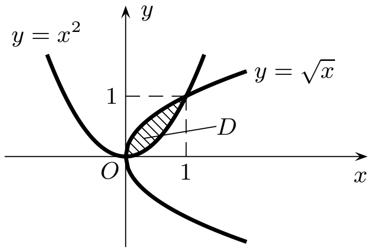


Рис. 6.5

Решение. (Рис. 6.5)

$$\iint\limits_D (x^2+y)\,dxdy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} (x^2+y)\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int\limits_0^1 \left(x^{\frac{5}{2}} - x^4 + \frac{x}{2} - \frac{x^4}{2}\right) dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^{\frac{5}{2}} + \frac{x}{2} - \frac{3}{2}x^4\right) dx = \left(\frac{2x^{\frac{7}{2}}}{7} + \frac{x^2}{4} - \frac{3x^5}{2\cdot 5}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \frac{2}{7} + \frac{1}{4} - \frac{3}{10} = -\frac{1}{20} + \frac{2}{7} = \frac{33}{140}.$$

6.3. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть функции $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ осуществляют взаимно однозначное непрерывно дифференцируемое отображение области Γ плоскости O_1uv на область D плоскости Oxy и в области Γ отличен от нуля якобиан преобразования, т.е.

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi}{\partial u} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \dfrac{\partial\psi}{\partial u} & \dfrac{\partial\psi}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (u,v) \in \Gamma.$$

Тогда справедлива формула

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_\Gamma f\Big(\varphi(u,v), \psi(u,v)\Big)|J(u,v)|\,dudv. \tag{6.3}$$

В формуле (6.3) при надлежащем выборе функций $\varphi(u, v)$ и $\psi(u, v)$ область Γ может оказаться значительно проще области D. Величины u и v можно рассматривать как прямоугольные координаты для точек области Γ и в то же время как криволинейные координаты точек области D.

Для вычисления интеграла по области Γ применяются методы сведения двойного интеграла к повторным. Наиболее употребительными из криволинейных координат являются *полярные координаты*

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

для которых

$$J(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r$$

и формула (6.3) записывается в виде

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_\Gamma f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)r\,drd\varphi. \tag{6.4}$$

При вычислении $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$, распространенного на эллипс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, целесообразно перейти *к обобщенным полярным координатам*, положив $x = ar\cos\varphi$, $y = br\sin\varphi$, для которых $J(r, \varphi) = abr$.

Пример 6.4. Перейдя к полярным координатам, вычислить $\iint\limits_D dxdy$, если область интегрирования D ограничена линиями $x^2 + y^2 = 12$, $x\sqrt{6} = y^2$, $x \geqslant 0$.

Решение. Строим область интегрирования D (рис. 6.6). Положим $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$. Уравнение окружности $x^2+y^2 = 12$ преобразуется к виду $r = 12$, $x\sqrt{6} = y^2$ к $\rho = \sqrt{6}\cos\varphi/\sin^2\varphi$, причем $\varphi \in [\pi/4; \pi/2]$. Следовательно,

$$\iint\limits_D dxdy = \iint\limits_\Gamma r\,drd\varphi = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{\frac{\sqrt{6}\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}^{\sqrt{12}} r\,dr =$$

$$= \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \left(6 - \frac{3\cos^2\varphi}{\sin^4\varphi}\right) d\varphi = \frac{3}{2}\pi - 3(\operatorname{ctg}^2\varphi + 2\operatorname{ctg}\varphi)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2}\pi + 9.$$

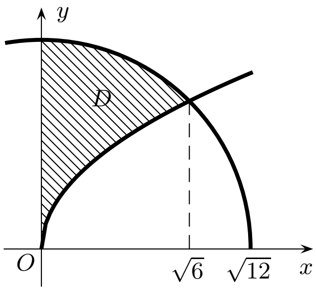


Рис. 6.6

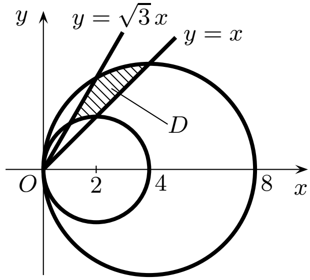


Рис. 6.7

Пример 6.5. В двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ перейти к полярным координатам и расставить пределы интегрирования, если область D ограничена линиями

$$D\colon \begin{cases} x^2 + y^2 = 4x, \\ x^2 + y^2 = 8x, \\ y = x, \\ y = \sqrt{3}\,x. \end{cases}$$

Решение. Используем формулы перехода к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $dxdy = r\,drd\varphi$. Линии области D запишутся в виде

$$D\colon \begin{cases} r^2 = 4r\cos\varphi, \\ r^2 = 8r\cos\varphi, \\ \varphi_1 = \pi/4, \\ \varphi_2 = \pi/3 \end{cases} \quad \text{или} \quad D\colon \begin{cases} r_1 = 4\cos\varphi, \\ r_2 = 8\cos\varphi, \\ \varphi_1 = \pi/4, \\ \varphi_2 = \pi/3. \end{cases}$$

Выделим полный квадрат в уравнении $x^2 + y^2 = 4x$:

$$x^2 + y^2 - 4x = 0, \quad (x^2 - 4x + 4) + y^2 = 4, \quad (x-2)^2 + y^2 = 4.$$

Это — окружность радиуса $R_1 = 2$ с центром $C_1 = (0; 2)$ (рис. 6.7). Аналогично получим для второй окружности $(x-4)^2 + y^2 = 16$, $R_2 = 4$, $C_2(0; 4)$. Тогда

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dxdy = \iint\limits_D f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, drd\varphi =$$

$$= \int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} d\varphi \int\limits_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) r\, dr.$$

6.4. Применения двойного интеграла

1. Объем V цилиндра, ограниченного сверху непрерывной поверхностью $z = f(x, y)$, снизу плоскостью $z = 0$ и с боков прямой цилиндрической поверхностью, вырезающей на плоскости Oxy область D, выражается интегралом

$$V = \iint\limits_D f(x, y)\, dxdy.$$

(Функция $f(x, y) \geqslant 0$ однозначна в области D.)

2. Площадь S плоской области D выражается следующими интегралами:

$$S = \iint\limits_D dxdy$$

в декартовых прямоугольных координатах,

$$S = \iint\limits_D r\, drd\varphi$$

в полярных координатах $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$.

3. Если пластинка занимает область D плоскости Oxy и имеет переменную поверхностную плотность $\gamma = \gamma(x, y)$, то масса M пластинки и ее статические моменты M_x и M_y относительно осей Ox и Oy выражаются двойными интегралами

$$M = \iint\limits_D \gamma(x, y)\, dxdy,$$

$$M_x = \iint\limits_D y\gamma(x, y)\, dxdy, \quad M_y = \iint\limits_D x\gamma(x, y)\, dxdy.$$

4. Координаты центра масс $\bar{x}$ и $\bar{y}$ пластинки определяются следующим образом:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint\limits_D x\gamma(x,y)\,dxdy}{\iint\limits_D \gamma(x,y)\,dxdy}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint\limits_D y\gamma(x,y)\,dxdy}{\iint\limits_D \gamma(x,y)\,dxdy}.$$

5. Моменты инерции пластинки относительно осей Ox и Oy соответственно равны

$$J_x = \iint\limits_D y^2\gamma(x,y)\,dxdy, \quad J_y = \iint\limits_D x^2\gamma(x,y)\,dxdy.$$

6. Момент инерции пластинки относительно начала координат (полярный момент инерции) равен

$$J_0 = \iint\limits_D (x^2+y^2)\gamma(x,y)\,dxdy = J_x + J_y.$$

7. Если гладкая поверхность имеет уравнение $z = f(x,y)$, то площадь части этой поверхности, проектирующейся в область D плоскости Oxy, равна

$$Q = \iint\limits_D \sqrt{1 + z_x^z + z_y^2}\,dxdy.$$

(Функция $z = f(x,y)$ однозначна в области D.)

6.5. Определение, свойства и вычисление тройного интеграла

Пусть функция $f(x,y,z)$ определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области V. Разобьем область V на конечное число ячеек V_1, V_2, ..., V_n. Взяв в каждой части V_i произвольную точку $M_i(x_i,y_i,z_i)$, вычислим значение функции $f(M_i) = f(x_i,y_i,z_i)$ и, умножив его на объем $V_i = \Delta V_i$, составим сумму всех таких произведений:

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i = \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta V_i. \qquad (6.5)$$

σ_n называется *интегральной суммой* от функции $f(x,y,z)$ по области $V \in \mathbb{R}^3$.

Конечный предел σ_n (если он существует) при стремлении диаметров всех ячеек V_i к нулю называется *тройным интегра-*

лом от функции $f(x,y,z)$ по области V и обозначается

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_V f(M)\,dV.$$

Итак,

$$\iiint\limits_V f(M)\,dV = \lim_{\substack{\max \operatorname{diam} V_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta V_i.$$

Если функция $f(x,y,z)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области V, то тройной интеграл $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$ существует.

Для тройного интеграла сохраняются свойства двойного интеграла.

Вычисление тройного интеграла в декартовых координатах сводится к последовательному вычислению одного однократного и одного двойного интегралов или к вычислению трех однократных интегралов.

Если область интегрирования V ограничена снизу поверхностью $z = \varphi_1(x,y)$, сверху поверхностью $z = \varphi_2(x,y)$ $(\varphi_1(x,y) \leqslant \leqslant \varphi_2(x,y))$ и с боков прямым цилиндром, сечением которого плоскостью Oxy является область D, то тройной интеграл (6.5) вычисляется по формуле

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \qquad (6.6)$$

Записывая двойной интеграл по области D через один из повторных, получим

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz =$$

$$= \int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz. \qquad (6.7)$$

Пример 6.6. Вычислить $\iiint\limits_V z\,dxdydz$, если область V ограничена плоскостями $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$.

Решение. Имеем

$$\iiint\limits_V z\,dxdydz = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} dy \int\limits_0^{1-x-y} z\,dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^{1-x} (1-x-y)^2 dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left(-\frac{(1-x-y)^3}{3}\Big|_0^1 \right) dx =$$

$$= \frac{1}{6}\int\limits_0^1 (1-x)^3 dx = -\frac{1}{24}(1-x)^4\Big|_0^1 = \frac{1}{24}.$$

6.6. Приложения тройных интегралов

1. Объем Q пространственной области V равен

$$Q = \iiint\limits_V dxdydz.$$

2. Масса M тела с переменной плотностью $\gamma(x, y, z)$, занимающего область V:

$$M = \iiint\limits_V \gamma(x, y, z)\, dxdydz.$$

3. Статические моменты тела относительно координатных плоскостей:

$$M_{yz} = \iiint\limits_V x\gamma(x, y, z)\, dxdydz,$$

$$M_{zx} = \iiint\limits_V y\gamma(x, y, z)\, dxdydz,$$

$$M_{xy} = \iiint\limits_V z\gamma(x, y, z)\, dxdydz.$$

4. Координаты центра масс тела:

$$\bar{x} = \frac{M_{yz}}{M}, \quad \bar{y} = \frac{M_{zx}}{M}, \quad \bar{z} = \frac{M_{xy}}{M}.$$

5. Моменты инерции относительно осей координат:

$$J_x = \iiint\limits_V (y^2 + z^2)\gamma(x, y, z)\, dxdydz,$$

$$J_y = \iiint\limits_V (x^2 + z^2)\gamma(x, y, z)\, dxdydz,$$

$$J_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)\gamma(x, y, z)\, dxdydz.$$

Если тело однородное, то $\gamma(x, y, z) = 1$.

6.7. Замена переменных в тройном интеграле

Если в тройном интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$ производится замена переменных по формулам $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$, причем функции $x(u,v,w)$, $y(u,v,w)$, $z(u,v,w)$ осуществляют взаимно однозначное отображение области V пространства $Oxyz$ на область Δ пространства O_1uvw и якобиан преобразования не обращается в нуль в области Δ:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то справедлива формула

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_\Delta f\Big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\Big)|J|\,dudvdw. \qquad (6.8)$$

Наиболее употребительными являются цилиндрические координаты r, φ, z (рис. 6.8): $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $z = z$, якобиан которых $J = r$, и сферические r (длина радиус-вектора), φ (долгота), θ (широта) (рис. 6.9): $x = r\cos\varphi\cos\theta$, $y = r\sin\varphi\cos\theta$, $z = r\sin\theta$, якобиан которых $J = r^2\cos\theta$. Формула (6.8) принимает соответственно вид

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint\limits_\Delta f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)r\,drd\varphi dz \qquad (6.9)$$

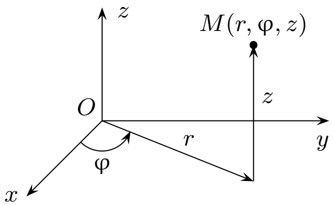


Рис. 6.8

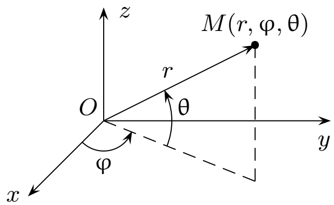


Рис. 6.9

или

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz =$$

$$= \iiint\limits_\Delta f(r\cos\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\theta)r^2\cos\theta\,d\varphi dr d\theta. \qquad (6.10)$$

Пример 6.7. Найти объем тела Q, ограниченного поверхностями $z = 8[(x+1)^2 + y^2] + 3$, $z = 16x + 27$.

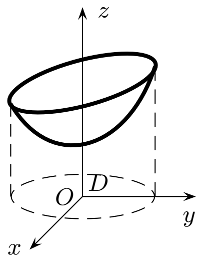


Рис. 6.10

Решение. Проекцией тела Q на плоскость Oxy является область D (рис. 6.10), ограниченная кривой $8[(x+1)^2 + y^2] + 3 = 16x + 27$ или $x^2 + y^2 = 2$. Перейдем к цилиндрическим координатам. Для области V справедливы

$$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant r \leqslant \sqrt{2}\,,$$

$$8(r^2 + 2r\cos\varphi + 1) + 3 \leqslant z \leqslant 16r\cos\varphi + 27.$$

По формуле (6.9) имеем

$$V = \iiint\limits_V r\,drd\varphi dz = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\sqrt{2}} r\,dr \int\limits_{8(r^2+2r\cos\varphi+1)+3}^{16r\cos\varphi+27} dz =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi}\left[\int\limits_0^{\sqrt{2}}(16r - 8r^3)\,dr\right]d\varphi = 16\pi.$$

Пример 6.8. Найти объем тела, ограниченного поверхностями $y \leqslant 0$, $y \leqslant -\sqrt{3}\,x$, $16 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 81$, $z \geqslant \sqrt{(x^2+y^2)/99}$.

Решение. Перейдем к сферическим координатам. Для области V пределы изменения сферических координат будут вида

$$\pi \leqslant \varphi \leqslant \frac{5}{3}\pi, \quad \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{99}} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}, \quad 4 \leqslant r \leqslant 9.$$

По формуле (6.10) имеем

$$V = \iiint\limits_V r^2\cos\theta\,drd\varphi d\theta = \int\limits_\pi^{5\pi/3} d\varphi \int\limits_{\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{99}}}^{\pi/2}\cos\theta\,d\theta \int\limits_4^9 r^2\,dr = 123.$$

6.8. Криволинейный интеграл по длине дуги

Пусть имеется некоторая кривая в пространстве, параметрическое уравнение которой записывается в виде

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t_A \leqslant t \leqslant t_B. \tag{6.11}$$

Рассмотрим задачу нахождения длины этой кривой. Тогда, если записать бесконечно малый элемент длины дуги в виде дифференциала

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt,$$

где точкой над функцией обозначена производная по параметру t, воспользовавшись теоремой Пифагора (квадрат диагонали dl параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений dx, dy, dz), то для того, чтобы найти длину кривой l, надо вычислить интеграл

$$l = \int\limits_0^l dl = \int\limits_{t_A}^{t_B} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt, \quad (t_A < t_B). \tag{6.12}$$

Если кривая задана не в пространстве, а на плоскости, то во всех предыдущих формулах переменная z должна отсутствовать.

Пример 6.9. Найти длину плоской кривой с уравнением $y = x^2/2$, $0 \leqslant x \leqslant 2$.

Решение. Здесь в качестве параметра взята сама переменная x. По формуле (6.12) вычисляем длину кривой:

$$l = \int\limits_0^l dl = \int\limits_{t_A}^{t_B} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt \equiv \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \sqrt{1 + x^2}\, dx = \int\limits_0^2 \frac{1 + x^2}{\sqrt{1 + x^2}} dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} + \int\limits_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2}} dx. \tag{6.13}$$

Первый интеграл является табличным:

$$\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \ln\left|x + \sqrt{1 + x^2}\,\right|\Big|_0^2 = \ln(2 + \sqrt{5}\,) - 0 = \ln(2 + \sqrt{5}\,).$$

Второй же интеграл вычислим по частям:

$$\int\limits_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}dx = \left| \begin{array}{c} x \equiv u \quad \Rightarrow \quad dx = du, \\ dv \equiv \dfrac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad \Rightarrow \quad v = \displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \\ = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int \frac{d(x^2+1)}{\sqrt{x^2+1}} = \int d(\sqrt{x^2+1}\,) = \sqrt{x+1} \end{array} \right| =$$

$$= x\sqrt{x^2+1}\,\Big|_0^2 - \int\limits_0^2 \sqrt{x^2+1}\;dx = 2\sqrt{5} - \int\limits_0^2 \sqrt{x^2+1}\;dx.$$

Подставляем оба результата вычисления промежуточных интегралов в последнюю строчку выражения (6.13):

$$\int\limits_0^2 \sqrt{1+x^2}\;dx = \ln(2+\sqrt{5}\,) + 2\sqrt{5} - \int\limits_0^2 \sqrt{1+x^2}\;dx,$$

отсюда находим

$$2\int\limits_0^2 \sqrt{1+x^2}\;dx = \ln(2+\sqrt{5}\,) + 2\sqrt{5}\,.$$

Значит, сам интеграл оказывается равным

$$l = \int\limits_0^2 \sqrt{1+x^2}\;dx = \frac{1}{2}\ln(2+\sqrt{5}\,) + \sqrt{5}\,.$$

Таким образом, длина кривой найдена.

Рассмотрим теперь задачу нахождения, например, массы той же кривой (6.11), если задана линейная плотность массы $\tau(x,y,z)$. Тогда поступаем аналогично: находим массу бесконечно малого элемента длины кривой. Она также может быть представлена дифференциалом $dm = \tau(x,y,z)\,dl$. Для снятия дифференциала используем интегрирование:

$$m = \int\limits_0^m dm = \int\limits_0^l \tau(x,y,z)\,dl = \int\limits_0^l \tau(x,y,z)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\;dt. \qquad (6.14)$$

Здесь функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t_A \leqslant t \leqslant t_B$ считаются известными, т.к. кривая определяется параметрическими уравнениями (6.11).

Пример 6.10. Пусть кривая примера 6.9 имеет линейную плотность массы $\tau(x,y) \equiv 2x$. Тогда ее масса может быть записана согласно формуле (6.14):

$$m = \int\limits_0^m dm = \int\limits_0^l \tau(x,y)\,dl = \int\limits_0^2 2x\sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^2 2x\sqrt{1+x^2}\;dx = \int\limits_0^2 \sqrt{1+x^2}\;d(1+x^2) = \frac{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\Big|_0^2 = \frac{2}{3}(5^{\frac{3}{2}}-1).$$

Результатом рассмотрения двух предыдущих задач является возможность введения понятия *криволинейного интеграла по длине дуги*:

$$\int\limits_0^l \tau(x,y,z)\,dl = \int\limits_{t_A}^{t_B} \tau(x,y,z)\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}\;dt,$$

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t_A \leqslant t \leqslant t_B,$$

свойства и методы вычисления которого следуют из рассмотренных выше задач.

В качестве приложения криволинейного интеграла по длине дуги приведем его использование для нахождения *центра масс* одномерных массивных объектов.

Как известно, радиус-вектор центра масс множества N материальных точек с массами m_i, $i = \overline{1,N}$, и соответствующими радиус-векторами $\vec{r}_i$ определяется формулой

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^N m_i\vec{r}_i \Bigg/ \sum_{i=1}^N m_i.$$

Эта формула легко обобщается на случай непрерывного распределения массы по кривой (6.11) с линейной плотностью массы $\tau(x,y,z)$ с использованием криволинейного интеграла по длине дуги:

$$\vec{R} = \int\limits_{t_A}^{t_B} \vec{r}\tau(x,y,z)\,dl \Bigg/ \int\limits_{t_A}^{t_B} \tau(x,y,z)\,dl. \qquad (6.15)$$

Пример 6.11. Найти центр масс массивной кривой $y = x^2/2$ примера 6.9 с линейной плотностью масс примера 6.10.

Решение. В соответствии с приведенной формулой (6.15) имеем для радиус-вектора центра масс параболы с линейной плотностью масс $\tau(x,y) \equiv 2x$ выражение

$$\vec{R} = \int\limits_{t_A}^{t_B} \vec{r}\tau(x,y,z)\,dl \Bigg/ \int\limits_{t_A}^{t_B} \tau(x,y,z)\,dl, \quad \vec{r} = (x,y), \quad \vec{R} = (X,Y).$$

Находим по отдельности обе координаты центра масс. Сначала вычисляем абсциссу центра масс:

$$X = \frac{\int\limits_{t_A}^{t_B} x \cdot 2x\,dl}{\int\limits_{t_A}^{t_B} 2x\,dl} = \frac{\int\limits_0^2 x \cdot 2x\sqrt{1+x^2}\,dx}{\frac{2}{3}(5^{\frac{3}{2}}-1)}$$

(знаменатель дроби был вычислен раньше; см. пример 6.10). Вычисляем числитель дроби по частям:

$$\int\limits_0^2 2x^2\sqrt{1+x^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} u \equiv x \quad \Rightarrow \quad du = dx \\ dv \equiv 2x\sqrt{1+x^2} = \frac{2}{3} d\left[\sqrt{(1+x^2)^3}\right] \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad v = \frac{2}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{2}{3} x\sqrt{(1+x^2)^3}\,\Big|_0^2 - \frac{2}{3}\int\limits_0^2 \sqrt{(1+x^2)^3}\,dx =$$

$$= \frac{4}{3}\sqrt{125} - \frac{13}{6}\sqrt{5} + \frac{1}{4}\ln(\sqrt{5}+2) \approx 10{,}4.$$

Таким образом, абсцисса центра масс кривой равна

$$X \approx \frac{10{,}4}{\frac{2}{3}(5^{\frac{3}{2}}-1)} \approx \frac{10{,}4}{6{,}79} \approx 1{,}5.$$

Аналогичным образом вычисляем ординату центра масс:

$$Y = \frac{\int\limits_0^2 y \cdot 2x\sqrt{1+x^2}\,dx}{\frac{2}{3}(5^{\frac{3}{2}}-1)} = \frac{\int\limits_0^2 x^2 \cdot x\sqrt{1+x^2}\,dx}{6{,}79} \approx \frac{7{,}6}{6{,}79} \approx 1{,}1.$$

Здесь интеграл числителя вычисляем по частям:

$$\int\limits_0^2 x^3\sqrt{1+x^2}\,dx = \left| \begin{array}{c} u \equiv x^2 \quad \Rightarrow \quad du = 2x\,dx \\ dv \equiv x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3} d\left[\sqrt{(1+x^2)^3}\right] \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad v = \frac{1}{3}\sqrt{(1+x^2)^3} \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{3}x^2\sqrt{(1+x^2)^3}\,\Big|_0^2 - \frac{1}{3}\int\limits_0^2 2x\sqrt{(1+x^2)^3}\,dx = \frac{4}{3}\sqrt{125} - \frac{10}{3}\sqrt{5} + \frac{2}{15} \approx 7{,}6.$$

Таким образом, радиус-вектор центра масс параболы равен $\vec{R} \approx (1{,}5; 1{,}1)$.

6.9. Криволинейный интеграл по координатам

Пусть имеется некоторая кривая в пространстве, параметрическое уравнение которой записывается в виде

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in T. \tag{6.16}$$

Вдоль кривой перемещается материальная точка в направлении от точки A к точке B. Причем все промежуточные значения параметра t принадлежат T — области определения функций, как и граничные точки пути перемещения: $t_A \in T$, $t_B \in T$. По мере перемещения материальной точки на нее действует некоторая сила, вектор которой записывается в виде

$$\vec{F} = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)).$$

Поставим себе задачу нахождения полной работы этой силы при перемещении материальной точки по кривой.

Известно, что при перемещении материальной точки, радиус-вектор которой равен $\vec{r} = (x, y, z)$, на бесконечно малое расстояние вдоль вектора $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$ работа силы, являющаяся бесконечно малой величиной, записанной дифференциалом dH, может быть представлена через скалярное произведение вектора силы $\vec{F}$ и вектора перемещения $d\vec{r}$:

$$dH = \vec{F}\, d\vec{r} = (F_1(x,y,z)\, dx + F_2(x,y,z)\, dy + F_3(x,y,z)\, dz).$$

Для нахождения полной работы необходимо снять дифференциал с помощью интегрирования:

$$H = \int\limits_0^H dH = \int\limits_A^B \vec{F}\, d\vec{r} =$$

$$= \int\limits_A^B (F_1(x,y,z)\, dx + F_2(x,y,z)\, dy + F_3(x,y,z)\, dz) =$$

$$= \int\limits_{t_A}^{t_B} (F_1(x,y,z)\dot{x} + F_2(x,y,z)\dot{y} + F_3(x,y,z)\dot{z})\, dt, \tag{6.17}$$

где функции $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in T$ считаются известными, т.к. кривая определяется параметрическими уравнениями (6.16), при этом интеграл сводится к определенному интегралу.

Если кривая задана не в пространстве, а на плоскости, и вектор является двумерным, то во всех предыдущих формулах переменная z должна отсутствовать.

Пример 6.12. Найти работу силы $\vec{F} = (xy, x + 2y)$, которая действует на материальную точку, движущуюся по параболе $y = x^2$ от точки $A(2;4)$ до точки $B(-1;1)$.

Решение. По формуле (6.17) получаем выражение для работы силы:

$$H = \int_A^B \vec{F}\,d\vec{r} = \int_A^B (F_1(x,y)\,dx + F_2(x,y)\,dy) = \int_A^B xy\,dx + (x+2y)\,dy.$$

Возьмем в качестве параметра t кривой величину x, тогда работа может быть представлена определенным интегралом с переменной интегрирования x:

$$H = \int_2^{-1} \left(xy + (x+2y)\frac{dy}{dx}\right) dx.$$

Поскольку материальная точка перемещается по параболе $y = x^2$, подставляем вместо переменной y в интеграле величину x^2. Тогда получаем

$$H = \int_2^{-1} (x^3 + (x+2x^2)2x)\,dx = \int_2^{-1} (5x^3 + 2x^2)\,dx =$$

$$= \left(5\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_2^{-1} = \frac{5}{4} - \frac{16}{3} = -\frac{49}{12}.$$

Работа, таким образом, оказалась отрицательной, что, конечно, возможно, если бо́льшую часть пути материальная точка двигалась в направлении, противоположном силе.

Замечание. В отличие от криволинейного интеграла по длине дуги, пределы интегрирования в котором берутся от меньшего значения параметра до большего, в криволинейном интеграле по координатам пределы интегрирования всегда берутся от значения параметра в начале пути до его значения в конце пути (в предыдущем примере — от точки A до точки B).

Результатом рассмотрения поставленной выше задачи является возможность введения понятия *криволинейного интеграла по координатам*:

$$\int_{AB} \vec{F}\,d\vec{r} = \int_{AB} (F_1(x,y,z)\,dx + F_2(x,y,z)\,dy + F_3(x,y,z)\,dz) =$$

$$= \int_{t_A}^{t_B} (F_1(x,y,z)\dot{x} + F_2(x,y,z)\dot{y} + F_3(x,y,z)\dot{z})\,dt, \tag{6.18}$$

где $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $t \in T$, считаются известными, т.к. кривая определяется параметрическими уравнениями (6.16). При этом интеграл сводится к определенному интегралу с переменной интегрирования, совпадающей с параметром кривой, свойства и методы вычисления которого следуют из рассмотренной выше задачи.

Рассмотрим **свойства криволинейного интеграла по координатам**:

1) $\int\limits_{ABC} \vec{F}\,d\vec{r} = \int\limits_{AB} \vec{F}\,d\vec{r} + \int\limits_{BC} \vec{F}\,d\vec{r}$ (физический смысл свойства: работа на всем участке пути равна сумме работ на каждом участке);

2) $\int\limits_{AB} \vec{F}\,d\vec{r} = -\int\limits_{BA} \vec{F}\,d\vec{r}$ (физический смысл: при движении материальной точки в противоположном направлении меняется знак работы);

3) $\int\limits_{ABA} \vec{F}\,d\vec{r} = \int\limits_{AB} \vec{F}\,d\vec{r} + \int\limits_{BA} \vec{F}\,d\vec{r} = 0.$

Свойство 3 является очевидным следствием первых двух свойств, если предполагать, что движение материальной точки в обратном направлении (от B к A) осуществляется по тому же пути, что и движение в прямом направлении (от A к B). Если же движения в прямом и обратном направлениях проводятся по разным траекториям, то свойство 3, вообще говоря, не имеет места.

При движении материальной точки по замкнутой кривой (по замкнутому контуру) работу силы называют *циркуляцией векторного поля* и обозначается как

$$\oint\limits_{(AmBnA)} \vec{F}\,d\vec{r} \equiv \int\limits_{AmB} \vec{F}\,d\vec{r} + \int\limits_{BnA} \vec{F}\,d\vec{r}.$$

Возможен случай, при котором всегда (для любых контуров) циркуляция векторного поля обращается в нуль. Этот случай возникает при условии, что векторное поле является *потенциальным*, т.е. существует некоторый скалярный потенциал, градиент которого и является самим векторным полем: $\vec{F} = \operatorname{grad}\Phi$. Для этого случая имеет место свойство независимости криволинейного интеграла от вида самой кривой (6.16), т.е. криволинейный интеграл зависит только от координат начала и конца пути движения материальной точки. Другими словами, имеет место равенство

$$\int\limits_{AB} \vec{F}\,d\vec{r} = \int\limits_{AB} (F_1(x,y,z)\,dx + F_2(x,y,z)\,dy + F_3(x,y,z)\,dz) =$$

$$= \int\limits_{t_A}^{t_B} \left(\frac{\partial \Phi(x,y,z)}{\partial x} dx + \frac{\partial \Phi(x,y,z)}{\partial y} dy + \frac{\partial \Phi(x,y,z)}{\partial z} dz \right) =$$

$$= \int\limits_{t_A}^{t_B} d\Phi(x,y,z) =$$

$$= \Phi(x(t_B), y(t_B), z(t_B)) - \Phi(x(t_A), y(t_A), z(t_A)). \qquad (6.19)$$

Для того чтобы узнать, зависит ли криволинейный интеграл от формы пути перемещения точки, необходимо проверить, является ли дифференциальная форма $\delta\Phi$, стоящая под знаком интеграла (6.19), полным дифференциалом некоторого потенциала Φ или нет:

$$\delta\Phi \equiv (F_1(x,y,z)\,dx + F_2(x,y,z)\,dy + F_3(x,y,z)\,dz) \stackrel{?}{=} d\Phi(x,y,z).$$

Необходимым и достаточным условием такого равенства $\delta\Phi \equiv d\Phi$ является равенство перекрестных производных формы:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} \equiv \frac{\partial F_2}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_1}{\partial z} \equiv \frac{\partial F_3}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} \equiv \frac{\partial F_3}{\partial y}, \qquad (6.20)$$

что эквивалентно $\operatorname{rot} \vec{F} \equiv 0$. Однако на практике часто бывает легче не проверять выполнимость последнего условия, а просто найти сам скалярный потенциал.

Пример 6.13. Проверить, является ли дифференциальная форма полным дифференциалом:

$$\delta\Phi \equiv 2x^2y^2z\,dx + 2x^3yz\,dy + x^3y^2\,dz \stackrel{?}{=} d\Phi.$$

Решение. Не проверяя выполнимость соотношений (6.20), попробуем найти потенциал Φ, полный дифференциал которого равнялся бы заданной дифференциальной форме $\delta\Phi$. Используя только свойства полного дифференциала, имеем равенство

$$\delta\Phi \equiv zy^2\,dx^3 + x^3z\,dy^2 + x^3y^2\,dz = z(y^2\,dx^3 + x^3\,dy^2) + x^3y^2\,dz =$$

$$= z\,d(y^2x^3) + x^3y^2\,dz = d(x^3y^2z + \text{const}) \equiv d\Phi, \quad \Phi \equiv x^3y^2z + \text{const}.$$

Таким образом, не проверяя выполнимость условия полного дифференциала (6.20), мы сразу убедились в выполнении этого соотношения и, более того, нашли сам скалярный потенциал Φ, градиент которого, конечно же, равен векторному полю $\vec{F}$:

$$\operatorname{grad}\Phi = (3x^2y^2z, 2x^3yz, x^3y^2) \equiv \vec{F}.$$

В данном случае проверка равенства перекрестных производных дифференциальной формы (6.20) также легко выполнима:

$$\frac{\partial(3x^2y^2z)}{\partial y} = 6x^2yz \equiv \frac{\partial(2x^3yz)}{\partial x} = 6x^2yz,$$

$$\frac{\partial(3x^2y^2z)}{\partial z} = 3x^2y^2 \equiv \frac{\partial(x^3y^2)}{\partial x} = 3x^2y^2,$$
$$\frac{\partial(2x^3yz)}{\partial z} = 2x^3y \equiv \frac{\partial(x^3y^2)}{\partial y} = 2x^3y.$$

6.10. Поверхностные интегралы

Поверхностные интегралы I рода. Рассмотрим некоторую поверхность (σ) с уравнением

$$z = f(x,y), \quad \{x,y\} \in D_{xy}. \tag{6.21}$$

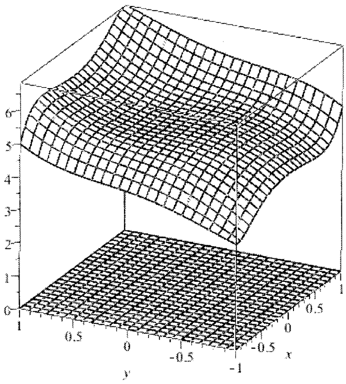


Рис. 6.11

Обозначим проекцию поверхности на плоскость xOy как D_{xy} (рис. 6.11). Рассмотрим задачу нахождения σ — площади поверхности (σ).

Возьмем бесконечно малый элемент площади этой поверхности $d\sigma$, который представляет собой бесконечно малый прямоугольник, проекцией которого на горизонтальную плоскость xOy также является прямоугольник со сторонами dx, dy и площадью $ds = dxdy$. Связь двух элементов площади $d\sigma$ и ds представляется в виде $ds = d\sigma\cos\gamma$ (катет равен гипотенузе, умноженной на косинус прилежащего угла), где угол γ — двугранный угол между плоскостью прямоугольника $d\sigma$ и плоскостью прямоугольника ds.

Если в качестве единичного вектора нормали к элементу $d\sigma$ взять вектор

$$\vec{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma), \tag{6.22}$$

представленный через направляющие косинусы (α, β, γ — углы между вектором единичной нормали элемента $d\sigma$ с осями координат Ox, Oy, Oz соответственно) и образующий острый угол с осью Oz, так что

$$\cos\gamma \geqslant 0, \tag{6.23}$$

то значение $\cos\gamma$ можно будет легко найти, вспомнив о том, что нормаль к поверхности может быть найдена с помощью вычисления градиента соответствующего скалярного поля. Действительно, уравнение поверхности (6.21) можно представить как поверхность нулевого потенциала: $\Phi \equiv f(x,y) - z = 0$. Тогда единичная нормаль $\vec{n}$ к поверхности может быть найдена как

$$\vec{n} = \pm\frac{\operatorname{grad}\Phi}{|\operatorname{grad}\Phi|} = \pm\frac{(f_x, f_y, -1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

где знак необходимо выбрать с учетом требования (6.23), т.е. нужно взять знак минус:

$$\vec{n} = \frac{(-f_x, -f_y, 1)}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}. \tag{6.24}$$

С учетом (6.22) для $\cos\gamma$ получаем значение, равное

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}},$$

при этом для связи элементов площади получаем соотношение

$$d\sigma = ds\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}, \tag{6.25}$$

а для нахождения площади σ поверхности получаем выражение

$$\sigma = \int\limits_0^\sigma d\sigma = \int\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, ds.$$

Таким образом, вычисление площади сводится к двойному интегралу по плоской области D_{xy}:

$$\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\, dxdy. \tag{6.26}$$

Пример 6.14. Найти площадь боковой поверхности верхней половины сферы $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ радиусом $R = 2$ и с центром в начале координат.

Решение. По формуле (6.26) найдем искомую площадь. Поскольку

$$f_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \quad f_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}},$$

имеем равенство

$$\sigma = \iint\limits_{D_{xy}:\ x^2+y^2=4} \sqrt{1 + \frac{(-x)^2}{4 - x^2 - y^2} + \frac{(-y)^2}{4 - x^2 - y^2}}\, dxdy =$$

$$= \left| \begin{array}{c} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ ds = r\, drd\varphi \end{array} \right| = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \sqrt{1 + \frac{r^2}{4 - r^2}}\, r\, dr =$$

$$= 2\pi \int\limits_0^2 \frac{2r}{\sqrt{4-r^2}} dr = -2\pi \int\limits_0^{2\pi} \frac{d(4-r^2)}{\sqrt{4-r^2}} = -4\pi\sqrt{4-r^2}\,\Big|_0^2 = 8\pi.$$

Рассмотрим теперь задачу нахождения массы поверхности, заданной в виде (6.21), если поверхностная плотность массы имеет вид $\tau(x, y)$.

Для бесконечно малой массы dm, находящейся в элементе поверхности $d\sigma$, можно записать выражение с учетом (6.25):

$$dm = \tau(x, y)\, d\sigma = \tau(x, y)\, ds \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,.$$

Тогда для массы поверхности получаем выражение

$$m = \int\limits_0^m dm = \iint\limits_{D_{xy}} \tau(x, y) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\; dxdy,$$

которое представляет собой двойной интеграл.

Пример 6.15. Найти массу полусферы из примера 6.14, если поверхностная плотность массы для нее имеет вид $\tau(x, y) = 1/(8\sqrt{x^2 + y^2}\,)$.

Решение. Переходя к полярным координатам, с учетом результатов, полученных в примере 6.14, имеем цепочку равенств

$$m = \iint\limits_{D_{xy}:\; x^2+y^2=4} \frac{1}{8\sqrt{x^2+y^2}} \sqrt{1 + \frac{(-x)^2}{4-x^2-y^2} + \frac{(-y)^2}{4-x^2-y^2}}\; dxdy =$$

$$= \left| \begin{array}{c} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ ds = r\, drd\varphi \end{array} \right| = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^2 \frac{1}{8r} \sqrt{1 + \frac{r^2}{4-r^2}}\; r\, dr =$$

$$= \pi \int\limits_0^2 \frac{dr}{2\sqrt{4-r^2}} = \frac{\pi}{2} \int\limits_0^2 \frac{d(r/2)}{\sqrt{1-(r/2)^2}} = \frac{\pi}{2} \arcsin\frac{r}{2}\Big|_0^2 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2.$$

Результатом рассмотрения двух задач является возможность введения понятия *поверхностного интеграла I рода*

$$\int\limits_{(\sigma)} \tau(x, y)\, d\sigma = \iint\limits_{D_{xy}} \tau(x, y) \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\; dxdy,$$

где поверхность (σ) имеет вид $z = f(x, y)$, а ее проекция на плоскость xOy задается множеством D_{xy}. Свойства и методы вычисления таких интегралов следуют из рассмотренных выше задач.

Поверхностные интегралы II рода. Рассмотрим задачу нахождения количества жидкости с объемной плотностью массы $\rho(x, y, z)$, протекающей через поверхность (6.21) и имеющей скорость, представленной векторным полем $\vec{v}(x, y, z)$.

Бесконечно малая масса жидкости, прошедшая через рассматриваемую поверхность в единицу времени, может быть представлена выражением

$$dm = \rho(x, y, z)\vec{v}\vec{n}\, d\sigma, \tag{6.27}$$

где бесконечно малый элемент поверхности $d\sigma$, согласно (6.25), выражается через элемент ds. Скалярное произведение

$$\vec{v}\vec{n} = \text{Пр}_{\vec{n}}\, \vec{v} = v\cos(\widehat{\vec{n}, \vec{v}})$$

представляет собой проекцию вектора скорости на нормаль к поверхности, поскольку именно эта проекция, а не сама скорость, определяет количество жидкости, протекающее через поверхность (σ) в направлении единичного вектора нормали $\vec{n}$, заданного выражениями (6.22) и (6.24).

Удобно ввести понятие *вектора бесконечно малого элемента поверхности* $d\vec{\sigma} = \vec{n}\, d\sigma$, тогда бесконечно малая масса, определенная выражением (6.27), может быть представлена в форме

$$dm = \rho(x, y, z)\vec{v}\, d\vec{\sigma}.$$

Для нахождения всей прошедшей через поверхность массы необходимо снять дифференциал с помощью интегрирования:

$$m = \int\limits_0^m dm = \int\limits_{(\sigma)} \rho(x, y, z)\vec{v}\, d\vec{\sigma}.$$

Поскольку единичный вектор нормали $\vec{n}$ представляется выражением (6.24), а элемент $d\sigma$ выражением (6.25), интеграл в явном виде может быть записан в форме

$$\int\limits_{(\sigma)} \rho(x, y, z)\vec{v}\, d\vec{\sigma} = \iint\limits_{D_{xy}} \rho(x, y, f(x, y))\vec{v}\vec{n}\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\; dxdy,$$

которая представляет собой двойной интеграл по плоской области D_{xy}.

Если определить векторное поле $\vec{F}$ как $\rho(x, y, z)\vec{v} \equiv \vec{F}(x, y, z)$, то выражение

$$\int\limits_{(\sigma)} \vec{F}(x, y, z)\, d\vec{\sigma} = \iint\limits_{D_{xy}} \vec{n}\vec{F}(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\; dxdy \tag{6.28}$$

называется *потоком векторного поля* через поверхность (σ): $z = f(x, y)$, $\{x, y\} \in D_{xy}$, и представляет собой *поверхностный интеграл II рода*.

Имеют место очевидные **свойства поверхностного интеграла II рода**:

1) если поверхность (σ) состоит из двух и более частей, то поток векторного поля равен сумме потоков через соответствующие части поверхности (жидкость, которая протекает через всю поверхность, складывается из жидкостей, протекающих через все части поверхности);

2) изменение направления единичного вектора меняет знак потока векторного поля;

3) свойство линейности: если векторное поле представляет собой линейную комбинацию с постоянными коэффициентами других векторных полей, то поток поля равен той же линейной комбинации соответствующих потоков векторных полей.

Пример 6.16. Вычислить поток векторного поля

$$\vec{F}(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(z;1;1)$$

через верхнюю половину сферы единичного радиуса с центром в начале координат.

Решение. Учитывая, что уравнение поверхности может быть записано как

$$z = f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}\,,$$

найдем ее частные производные:

$$f_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}, \quad f_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Согласно соотношению (6.24)

$$\vec{n} = \frac{(-f_x,-f_y,1)}{\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\frac{(x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}\,)}{\sqrt{1+\dfrac{x^2+y^2}{1-x^2-y^2}}} =$$

$$= (x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}\,).$$

Тогда на поверхности $f(x,y)$ скалярное произведение в выражении (6.28) с учетом вида заданного векторного поля $\vec{F}(x,y,z)$ можно представить в виде

$$\vec{n}\vec{F} = (x,y,\sqrt{1-x^2-y^2}\,)\begin{pmatrix} z \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \frac{xz+y+\sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Поток векторного поля в соответствии с формулой (6.28) принимает вид

$$\int\limits_{(\sigma)} \vec{F}\, d\vec{\sigma} = \iint\limits_{D_{xy}} \frac{x\sqrt{1-x^2-y^2}\, + y + \sqrt{1-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}} =$$

$$= \left| \begin{array}{c} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ dxdy = r\, drd\varphi \end{array} \right| = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left(r\cos\varphi + 1 + \frac{r\sin\varphi}{\sqrt{1-r^2}} \right) dr = 2\pi.$$

6.11. Интегральные формулы

Формула Стокса. Пусть в пространстве задано дифференцируемое векторное поле

$$\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)).$$

Тогда для гладкой поверхности (σ) с уравнением $z = f(x,y)$, $\{x,y\} \in D_{xy}$, «натянутой» на контур (L) (рис. 6.12), имеет место *формула Стокса*

$$\int\limits_{(\sigma)} \operatorname{rot} \vec{F}(x,y,z)\, d\vec{\sigma} = \oint\limits_{(L)} \vec{F}(x,y,z)\, d\vec{r},$$

т.е. поток ротора векторного поля через поверхность (σ) равен циркуляции векторного поля по контуру (L) при положительном его обходе (обход контура положительный, если выполняется правило «буравчика» для единичного вектора $\vec{n}$ и направления обхода контура; см. рис. 6.12).

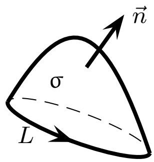


Рис. 6.12

Пример 6.17. Дано векторное поле $\vec{F} = (0, -zx, y^2/2)$ и задано уравнение поверхности $z = f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$. Проверить выполнимость формулы Стокса.

Решение. 1) Вычислим $\operatorname{rot} \vec{F}$:

$$\operatorname{rot} \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ 0 & -zx & y^2/2 \end{vmatrix} = \vec{i}(y+x) - \vec{j}(0) + \vec{k}(-z) = (x+y, 0, -z).$$

Найдем поток ротора через поверхность (σ), взяв формулу для единичного вектора нормали к поверхности из примера 6.16:

$$\int\limits_{(\sigma)} \operatorname{rot} \vec{F}(x,y,z)\, d\vec{\sigma} = \int\limits_{(\sigma)} (x+y, 0, -z) \begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1-x^2-y^2} \end{pmatrix} d\sigma. \quad (6.29)$$

Воспользуемся значением элемента площади поверхности (6.25):

$$d\sigma = ds\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,,$$

где частные производные для заданной по условию поверхности $f(x, y)$ были найдены выше в примере 6.16 и имели вид

$$f_x = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad f_y = \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Для элемента площади поверхности получаем выражение

$$d\sigma = ds\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2 + y^2}{1 - x^2 - y^2}}\,ds = \frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}.$$

Подставляя найденные выражения в интеграл (6.29), получаем

$$\int\limits_{(\sigma)} \operatorname{rot}\vec{F}\,d\vec{\sigma} = \int\limits_{(\sigma)} (x + y, 0, -z)\begin{pmatrix} x \\ y \\ \sqrt{1 - x^2 - y^2} \end{pmatrix} d\sigma =$$

$$= \int\limits_{(\sigma)} (x^2 + xy - 1)\frac{dxdy}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}} = \begin{vmatrix} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \\ dxdy = r\,drd\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 [r^3\cos^2\varphi + r^3\sin\varphi\cos\varphi - r(1 - r^2)]\frac{dr}{\sqrt{1 - r^2}} =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \left[r^3\frac{1}{2\sqrt{1 - r^2}}(1 + \cos 2\varphi) + r^3\sin\varphi\cos\varphi - r(1 - r^2)\right] \times$$

$$\times \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2}} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{r^3\,dr}{\sqrt{1 - r^2}} - 2\pi\int\limits_0^1 r\sqrt{1 - r^2}\,dr =$$

$$= 2\cdot\frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\sqrt{(1 - r^2)^3}\,\Big|_0^1 = \frac{2}{3}\pi - \frac{2\pi}{3} = 0.$$

Здесь тригонометрические функции после их интегрирования по аргументу φ дают в результате нуль. Интеграл вычисляется следующим образом:

$$\int\limits_0^1 \frac{r^3\,dr}{\sqrt{1 - r^2}} = \left|r^2 \equiv t\right| = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{t\,dt}{\sqrt{1 - t}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \frac{1 - t - 1}{\sqrt{1 - t}}dt = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \sqrt{1 - t}\,d(1 - t) - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (1 - t)^{-\frac{1}{2}}d(1 - t) =$$

$$= \frac{1}{3}(1 - t)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1 - (1 - t)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^1 = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3}.$$

Таким образом,
$$\int\limits_{(\sigma)} \operatorname{rot}\vec F\, d\vec\sigma = 0.$$

2) Вычислим правую часть формулы Стокса:
$$\oint\limits_{(L)} \vec F\, d\vec r = \oint\limits_{(L)} \left(0, -zx, \frac{y^2}{2}\right)\begin{pmatrix} dx\\ dy\\ dz\end{pmatrix} = \oint\limits_{\substack{L:\ z=0\\ dz=0}} \frac{y^2}{2}dz - xz\,dy = 0.$$

Таким образом, проверка формулы Стокса завершена. Формула выполняется.

Формула Остроградского. Пусть в пространстве задано дифференцируемое векторное поле
$$\vec F(x,y,z) = (F_1(x,y,z), F_2(x,y,z), F_3(x,y,z)),$$
а гладкая поверхность (σ) с уравнением $\Phi(x,y,z) = 0$, $\{x,y\} \in D_{xy}$, является замкнутой поверхностью, ограничивающей некоторый объем (V). Тогда имеет место *формула Остроградского*
$$\oint\limits_{(\sigma)} \vec F(x,y,z)\, d\vec\sigma = \iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec F\, dV, \tag{6.30}$$
т.е. поток векторного поля через замкнутую поверхность равен интегралу по объему, ограниченному этой поверхностью, от дивергенции векторного поля.

Пример 6.18. Дано векторное поле $\vec F = (x+y, 0, -z)$ и задано уравнение поверхности сферы единичного радиуса с центром в начале координат σ: $\Phi \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$. Проверить выполнимость формулы Остроградского.

Решение. Левая часть формулы (6.30) может быть представлена как сумма потоков векторного поля через верхнюю и нижнюю полусферы $(\sigma_\pm)$: $z_\pm = f_\pm(x,y) = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$, где знаками $\pm$ обозначены верхняя и нижняя полусферы:
$$\oint\limits_{(\sigma)} \vec F(x,y,z)\, d\vec\sigma = \int\limits_{(\sigma_+)} \vec F(x,y,z)\, d\vec\sigma + \int\limits_{(\sigma_-)} \vec F(x,y,z)\, d\vec\sigma.$$
Поток через верхнюю полусферу был вычислен в примере 6.17, который в наших обозначениях может быть записан как
$$\int\limits_{(\sigma_+)} \vec F(x,y,z)\, d\vec\sigma \equiv \int\limits_{(\sigma_+)} (x+y, 0, -z) d\vec\sigma = 0.$$

Для второго интеграла имеет место равенство

$$\int\limits_{(\sigma_-)} \vec{F}(x,y,z)\,d\vec{\sigma} = \int\limits_{(\sigma_+)} (x+y,0,-z)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d\sigma,$$

которое получено с учетом того, что единичный вектор нормали к нижней полусфере $z_- = f_-(x,y) = -\sqrt{1-x^2-y^2}$ имеет вид $\vec{n} = (x,y,z_-)$, нахождение которого аналогично тому, как это делалось для верхней полусферы. Для того, чтобы знак элемента площади нижней поверхности был положительным, необходимо для $d\sigma$ взять выражение

$$d\sigma = ds\sqrt{1+f_x^2+f_y^2} = \sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{1-x^2-y^2}}\,ds = \frac{dxdy}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

Тогда $\int\limits_{(\sigma_-)} \vec{F}(x,y,z)\,d\vec{\sigma} = 0$. Таким образом, поток векторного поля через замкнутую сферическую поверхность равен нулю:

$$\oint\limits_{(\sigma)} \vec{F}(x,y,z)\,d\vec{\sigma} = 0.$$

Вычислим правую часть формулы Остроградского. Она также оказывается равной нулю:

$$\iiint\limits_{(V)} \operatorname{div}\vec{F}\,dV = \iiint\limits_{(V)} 0\,dV = 0.$$

Выполнимость формулы Остроградского проверена.

6.12. Скалярные и векторные поля

Определение 6.1. Функция нескольких аргументов $\Phi(x,y,z)$ называется *скалярным полем* (*скаляром*), если при преобразовании координат

$$\begin{gathered} x = x(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}), \quad y = y(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}), \quad z = z(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}); \\ \widetilde{x} = \widetilde{x}(x,y,z), \quad \widetilde{y} = \widetilde{y}(x,y,z), \quad \widetilde{z} = \widetilde{z}(x,y,z) \end{gathered} \tag{6.31}$$

она преобразуется как $\widetilde{\Phi}(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}) = \Phi(x,y,z)$.

Пример 6.19. $\Phi(x,y) \equiv \sin(x+xy)$; $\quad x = \widetilde{x}+2\widetilde{y}, \quad y = \widetilde{x}-\widetilde{y}$.

$$\widetilde{\Phi}(\widetilde{x},\widetilde{y}) = \sin\Big(\widetilde{x}+2\widetilde{y}+(\widetilde{x}+2\widetilde{y})(\widetilde{x}-\widetilde{y})\Big).$$

Определение 6.2. Векторная функция нескольких аргументов $\vec{F}(x,y,z) = (F_1(x,y,z),F_2(x,y,z),F_3(x,y,z))$ называется *век-*

торным полем (*вектором*), если при преобразованиях координат (6.31) преобразуется по закону

$$\begin{aligned}
\widetilde{F}_1(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}) &= \frac{\partial\widetilde{x}}{\partial x}F_1(x,y,z) + \frac{\partial\widetilde{x}}{\partial y}F_2(x,y,z) + \frac{\partial\widetilde{x}}{\partial z}F_3(x,y,z),\\
\widetilde{F}_2(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}) &= \frac{\partial\widetilde{y}}{\partial x}F_1(x,y,z) + \frac{\partial\widetilde{y}}{\partial y}F_2(x,y,z) + \frac{\partial\widetilde{y}}{\partial z}F_3(x,y,z),\qquad(6.32)\\
\widetilde{F}_3(\widetilde{x},\widetilde{y},\widetilde{z}) &= \frac{\partial\widetilde{z}}{\partial x}F_1(x,y,z) + \frac{\partial\widetilde{z}}{\partial y}F_2(x,y,z) + \frac{\partial\widetilde{z}}{\partial z}F_3(x,y,z).
\end{aligned}$$

Пример 6.20. Задано векторное поле $\vec{F} = (xy, x^2+y^2)$. Найти это поле в новых координатах $(\widetilde{x},\widetilde{y})$, если $x = \widetilde{x} + 2\widetilde{y}$, $y = \widetilde{x} - \widetilde{y}$.

Решение. Прежде выразим новые координаты через старые. Для этого решаем систему уравнений $x = \widetilde{x} + 2\widetilde{y}$, $y = \widetilde{x} - \widetilde{y}$ относительно новых координат. Решение имеет вид $\widetilde{x} = \frac{1}{3}(x+2y)$, $\widetilde{y} = \frac{1}{3}(x-y)$. Для компонент вектора в новой системе координат с помощью формул (6.32) получаем выражения

$$\widetilde{F}_1(\widetilde{x},\widetilde{y}) = \frac{\partial\widetilde{x}}{\partial x}F_1(x,y) + \frac{\partial\widetilde{x}}{\partial y}F_2(x,y) = \frac{1}{3}F_1(x,y) - \frac{1}{3}F_2(x,y) =$$

$$= \frac{1}{3}xy - \frac{1}{3}(x^2+y^2) = \frac{1}{3}(\widetilde{x}+2\widetilde{y})(\widetilde{x}-\widetilde{y}) - \frac{1}{3}\left[(\widetilde{x}+2\widetilde{y})^2 + (\widetilde{x}-\widetilde{y})^2\right];$$

$$\widetilde{F}_2(\widetilde{x},\widetilde{y}) = \frac{\partial\widetilde{y}}{\partial x}F_1(x,y) + \frac{\partial\widetilde{y}}{\partial y}F_2(x,y) = \frac{1}{3}xy - \frac{1}{3}(x^2+y^2) =$$

$$= \frac{1}{3}(\widetilde{x}+2\widetilde{y})(\widetilde{x}-\widetilde{y}) - \frac{1}{3}\left[(\widetilde{x}+2\widetilde{y})^2 + (\widetilde{x}-\widetilde{y})^2\right].$$

Таким образом, вектор в новой системе координат имеет вид

$$\vec{F} = \left\{\frac{1}{3}(\widetilde{x}+2\widetilde{y})(\widetilde{x}-\widetilde{y}) - \frac{1}{3}\left[(\widetilde{x}+2\widetilde{y})^2 + (\widetilde{x}-\widetilde{y})^2\right]\right\}(1;1).$$

Здесь общий множитель вынесен из матрицы (в новой системе координат компоненты вектора стали одинаковыми).

6.13. Дифференциальные операции над векторными полями

Дивергенция векторного поля. *Дивергенция* является скалярным произведением дифференциального оператора ∇ (набла) и векторного поля $\vec{F}$:

$$\operatorname{div}\vec{F} \equiv \vec{\nabla}\vec{F} = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)\begin{pmatrix} F_1\\ F_2\\ F_3\end{pmatrix} = \partial_x F_1 + \partial_y F_2 + \partial_z F_3,$$

$$\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_z \equiv \frac{\partial}{\partial z},$$

и представляет собой скалярное поле.

Пример 6.21. Найти дивергенцию векторного поля

$$\vec{F} = (xyz, x^2 + y^2, z^2 y).$$

Решение.

$$\operatorname{div} \vec{F} = \partial_x(xyz) + \partial_y(x^2 + y^2) + \partial_z(z^2 y) = yz + 2y + 2zy.$$

В результате вычисления получено скалярное поле (скаляр).

Градиент скалярного поля. *Градиент* представляет собой векторное поле (вектор):

$$\operatorname{grad} \Phi \equiv \vec{\nabla}\Phi = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)\Phi = (\partial_x \Phi, \partial_y \Phi, \partial_z \Phi),$$

$$\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_z \equiv \frac{\partial}{\partial z}.$$

Пример 6.22. Найти градиент скалярного поля $\Phi = \sin(x^2+yz)$.

Решение.

$$\operatorname{grad} \Phi = (\partial_x \sin(x^2 + yz), \partial_y \sin(x^2 + yz), \partial_z \sin(x^2 + yz)) =$$

$$= \cos(x^2 + yz)(2x, z, y).$$

В результате вычисления получено векторное поле (вектор).

Свойства градиента:

1) вектор градиента скалярного поля направлен в сторону наибольшего роста поля. Для любой поверхности постоянного потенциала (скалярного поля; такая поверхность носит название эквипотенциальной поверхности) градиент потенциала направлен по нормали (прпендикулярно) к поверхности;

2) модуль вектора градиента представляет собой наибольшую «скорость» изменения поля в рассматриваемой точке.

«Скорость» изменения скалярного поля Φ в некотором направлении $\vec{e}$ ($|\vec{e}| = 1$) представляется *производной поля по этому направлению*:

$$\frac{d\Phi}{de} = \vec{e} \operatorname{grad} \Phi \quad (\equiv \text{Пр}_{\vec{e}} \operatorname{grad} \Phi),$$

т.е. для нахождения «скорости» изменения потенциала в заданном направлении необходимо наибольшую скорость спроектировать на это направление.

Пример 6.23. Найти «скорость» изменения потенциала $\Phi = \sin(x^2 + yz)$ в направлении вектора $\vec{a} = (3;4;0)$ в точке $M(1;0;6)$.

Решение. $$\frac{d\Phi}{da} = \vec{e}_a \frac{(3;4;0)}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}} \operatorname{grad}\Phi =$$
$$= \frac{(3;4;0)}{5}\begin{pmatrix} 2x \\ z \\ y \end{pmatrix}\cos(x^2+yz) = \frac{1}{5}\cos(x^2+yz)(6x+4z).$$
При этом скорость изменения в точке M имеет вид
$$\left.\frac{d\Phi}{da}\right|_M = \frac{1}{5}\cos(1^2+0\cdot 6)(6\cdot 1+4\cdot 6) = 6\cos 1 \approx 6\cdot 0{,}54 \approx 3{,}24.$$

Пример 6.24. Найти вектор нормали $\vec{N}$ к параболе $y = x^2$ в точке $K(2;4)$.

Решение. Представим параболу как эквипотенциальную поверхность нулевого потенциала $\Phi \equiv x^2 y = 0$. Тогда нормаль к эквипотенциальной поверхности найдем как градиент скалярного потенциала Φ в точке $K(2;4)$:
$$\vec{N}_K = \operatorname{grad}\Phi\Big|_K = (\partial_x\Phi, \partial_y\Phi)\Big|_K = (2xy, x^2)\Big|_K = (16;4).$$

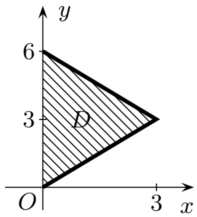
Ротор векторного поля. Определение:
$$\operatorname{rot}\vec{F} \equiv \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} =$$
$$= \vec{i}(\partial_y F_3 - \partial_z F_2) - \vec{j}(\partial_x F_3 - \partial_z F_1) + \vec{k}(\partial_x F_2 - \partial_y F_1),$$
$$\partial_x \equiv \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_y \equiv \frac{\partial}{\partial y}, \quad \partial_z \equiv \frac{\partial}{\partial z}.$$

Пример 6.25. Вычислить ротор векторного поля
$$\vec{F} = (xyz, x^2+y^2, z^2 y).$$

Решение.
$$\operatorname{rot}\vec{F} \equiv \vec{\nabla}\times\vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ xyz & x^2+y^2 & z^2 y \end{vmatrix} =$$
$$= \vec{i}(z^2) - \vec{j}(-xy) + \vec{k}(2x - xz) = (z^2, xy, 2x - xz).$$

Примеры тестовых заданий

Задание 1. Расставьте пределы интегрирования в двойном интеграле $\iint\limits_D f(x,y)\,dxdy$ по области D, изображенной на рисунке.



Варианты ответов:

1) $\int\limits_0^6 dy \int\limits_y^{6-y} f(x,y)\,dx$; 2) $\int\limits_0^3 dx \int\limits_x^{6-x} f(x,y)\,dy$;

3) $\int\limits_0^6 dy \int\limits_0^3 f(x,y)\,dx$; 4) $\int\limits_0^3 dx \int\limits_0^x f(x,y)\,dy$.

Задание 2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = 2\sqrt{x}$, $x = 4$.

Варианты ответов:

1) $\dfrac{16}{3}$; 2) $\dfrac{16\sqrt{15}}{3}$; 3) $\dfrac{3}{16}$; 4) $\dfrac{\sqrt{15}}{3}$.

Задание 3. Вычислите $\iint\limits_D (12 - x - y)\,dxdy$, если область D ограничена окружностью $x^2 + y^2 = 9$.

Варианты ответов:

1) $108/\pi$; 2) 108; 3) 108π; 4) 54π.

Задание 4. Расставьте пределы интегрирования в интеграле $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dxdydz$, если область V ограничена плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + 3y + 4z = 12$.

Варианты ответов:

1) $\int\limits_0^6 dx \int\limits_0^4 dy \int\limits_0^{\frac{12-2x-3y}{4}} f(x,y,z)\,dz;$

2) $\int\limits_0^6 dx \int\limits_0^{\frac{12-2x}{3}} dy \int\limits_0^{\frac{12-3y}{4}} f(x,y,z)\,dz;$

3) $\int\limits_0^6 dx \int\limits_0^{-\frac{2}{3}x} dy \int\limits_0^{\frac{12-2x}{4}} f(x,y,z)\,dz;$

4) $\int\limits_0^6 dx \int\limits_0^{\frac{12-2x}{3}} dy \int\limits_0^{\frac{12-2x-3y}{4}} f(x,y,z)\,dz.$

Задание 5. Вычислите $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\,dxdydz$, если область V ограничена поверхностями $z = x^2+y^2$, $z = 1$.

Варианты ответов:

1) $4\pi/15$; 2) $15\pi/4$; 3) 15π; 4) 4π.

Задание 6. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} \dfrac{dl}{\sqrt{5}\,(x-y)}$, где AB — отрезок прямой, заключенной между точками $A(0;4)$ и $B(4;0)$.

Варианты ответов:

1) 1; 2) 3; 3) 0; 4) -3.

Задание 7. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_L (x^2+y^2+z^2)\,dl$, где L — дуга кривой $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \sqrt{3}\,t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Варианты ответов:

1) $4\pi(1+4\pi^2)$; 2) $4(1+4\pi^2)$;

3) $4\pi(1-4\pi^2)$; 4) $\pi(1+4\pi^2)$.

Задание 8. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_{OA} (x^2+y^2)\,dx + 2xy\,dy$, где OA — дуга кубической параболы $y = x^3$ от точки $O(0;0)$ до точки $A(1;1)$.

Варианты ответов:

1) 0; 2) 3/4; 3) 1; 4) 4/3.

Задание 9. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_{OA} y\,dx + x\,dy$, где OA — дуга окружности $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ между $O(R;0)$ и $A(0;R)$.

Варианты ответов:

1) 1; 2) 0; 3) 2; 4) 3.

Задание 10. Применив формулу Грина, вычислите $\oint\limits_{L} y^2\,dx + (x+y)^2\,dy$, где L — контур треугольника ABC с вершинами в точках $A(3;0)$, $B(3;3)$ и $C(0;3)$.

Варианты ответов:

1) 18; 2) 0; 3) 1; 4) -18.

Задание 11. Найдите объем тела, ограниченного параболоидом вращения $z = x^2 + y^2$, координатными плоскостями и плоскостью $x + y = 1$.

Ответ: $3\pi/16$.

Задание 12. Найдите объем тела, ограниченного параболоидом вращения $z = x^2 + y^2$ и плоскостями $z = 0$, $y = 1$, $y = 2x$, $y = 6 - x$.

Ответ: 1/6.

Задание 13. Найдите объем тела, ограниченного цилиндром $z = y^2/2$, координатными плоскостями и плоскостью $2x + 3y = 12$.

Ответ: 16.

Задание 14. Найдите объем тела, ограниченного сферой $z^2+x^2+y^2=R^2$ и цилиндром $Rx=x^2+y^2$.

Ответ: $\dfrac{4}{3}R^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{2}{3}\right)$.

Задание 15. Найдите объем тела, ограниченного сферой $z^2+x^2+y^2=R^2$ и параболоидом $R(R-2z)=x^2+y^2$, $z\geqslant 0$.

Ответ: $5\pi R^3/12$.

Задание 16. Найдите массу шара радиуса R, если объемная плотность массы пропорциональна кубу расстояния от центра и на единице расстояния равна γ.

Ответ: $2\pi\gamma R^6/3$.

Задание 17. Найдите массу тела, ограниченного параболоидом $2az=x^2+y^2$ и сферой $z^2+x^2+y^2=3a^2$, $z>0$, если плотность в каждой точке равна квадрату суммы координат.

Ответ: $\dfrac{1}{5}\pi a^5\left(18\sqrt{3}-\dfrac{97}{6}\right)$.

Задание 18. Плотность шара $z^2+x^2+y^2\leqslant 2Rz$ равна квадрату расстояния точки от начала координат. Найдите координаты центра масс шара.

Ответ: $(0;0;5R/4)$.

Задание 19. Тело ограничено двумя сферами радиусов r и R. Плотность обратно пропорциональна расстоянию от центра и на расстоянии, равном единице, равно γ. Найдите массу тела.

Ответ: $2\pi\gamma(R^2-r^2)$.

Задание 20. Найдите электрический заряд шара $z^2+x^2+y^2\leqslant R^2$. Объемная плотность заряда $\rho=2z^2$.

Ответ: $8\pi R^4/3$.

Задание 21. Найдите объем тела, ограниченного параболоидом вращения $z=x^2+y^2$ и плоскостью $z=1$.

Варианты ответов:

1) $\pi/2$; 2) $\pi/3$; 3) π; 4) 2π; 5) $1/6$.

Задание 22. Найдите объем тела, ограниченного параболоидом вращения $z = x^2 + y^2$ и плоскостью $z = 0$, $z \leqslant 1$.

Варианты ответов:

1) $\pi/2$; 2) $\pi/3$; 3) π; 4) 2π; 5) $1/6$.

Задание 23. Найдите объем тела, ограниченного цилиндром $z = 9 - y^2$, координатными плоскостями и плоскостью $3x + 4y = 12$, $y \geqslant 0$.

Варианты ответов:

1) 45; 2) π; 3) 2π; 4) 4π; 5) $1/6$.

Задание 24. Найдите объем тела, ограниченного сферой $z^2+x^2+y^2 = 1$ и цилиндром $x = x^2 + y^2$.

Варианты ответов:

1) $\dfrac{4}{3}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{2}{3}\right)$; 2) π; 3) $\dfrac{4}{3}\pi$; 4) $\dfrac{\pi}{4}$; 5) $\dfrac{\pi}{6}$.

Задание 25. Найдите объем тела, ограниченного сферой $z^2+x^2+y^2 = 1$ и цилиндром $x^2 + y^2 = 1/4$.

Варианты ответов:

1) $\dfrac{\pi}{4} + 4\pi\left(\dfrac{13}{48} - \dfrac{\sqrt{3}}{8}\right)$; 2) $\dfrac{\pi}{4}$; 3) $\dfrac{4\pi}{3}$; 4) $\dfrac{\pi}{4}$; 5) $\dfrac{\pi}{6}$.

Задание 26. Найдите массу шара единичного радиуса, если объемная плотность массы пропорциональна кубу расстояния от центра и на единице расстояния равна γ.

Варианты ответов:

1) $\dfrac{2\pi\gamma}{3}$; 2) $\pi\gamma$; 3) $\dfrac{4\pi\gamma}{3}$; 4) $\dfrac{\pi\gamma}{3}$; 5) $\dfrac{\pi\gamma}{6}$.

Задание 27. Найдите массу тела, ограниченного параболоидом $2z = x^2 + y^2$ и сферой $z^2 + x^2 + y^2 = 3$, $z > 0$, если плотность в каждой точке равна квадрату суммы координат.

Варианты ответов:

1) $\frac{\pi}{5}\left(18\sqrt{3}-\frac{97}{6}\right)$; 2) $\frac{\pi}{15}(18\sqrt{3})$;

3) $\pi\left(18\sqrt{3}-\frac{97}{5}\right)$; 4) $\pi\left(18\sqrt{3}-\frac{97}{6}\right)$.

Задание 28. Плотность шара $z^2+x^2+y^2 \leqslant 2z$ равна квадрату расстояния точки от начала координат. Найдите координаты центра масс шара.

Варианты ответов:

1) $(0;0;5/4)$; 2) $(0;5/4;0)$; 3) $(5/4;0;0)$; 4) $(0;0;3/2)$;

5) $(0;0;4/3)$.

Задание 29. Тело ограничено двумя сферами радиусов r, R. Плотность обратно пропорциональна расстоянию от центра и на расстоянии, равном 1, равна 1. Найдите массу тела.

Варианты ответов:

1) $2\pi(R^2-r^2)$; 2) $\pi(R^2-r^2)$; 3) $4\pi Rr/3$;

4) $\pi(R^3-r^3)$; 5) $\pi(R^3-r^3)/6$.

Задание 30. Найдите электрический заряд шара $z^2+x^2+y^2 \leqslant 1$. Объемная плотность заряда $\rho = 2z^2$.

Варианты ответов:

1) $8\pi/3$; 2) π; 3) $4\pi/3$; 4) π; 5) $\pi/6$.

Задание 31. Проверьте, являются ли векторные поля потенциальными, а если являются, найдите скалярные потенциалы:

а) $\vec{F} = \left(\frac{xy}{x^2+y^2}, \frac{1}{x^2+y^2}\right)$;

б) $\vec{F} = (\sin(x^2+y^2)+2x^2\cos(x^2+y^2), \cos(x^2+y^2))$;

в) $\vec{F} = \left(\dfrac{y}{x}, 1 + \ln y\right)$;

г) $\vec{F} = \left(y \operatorname{tg} e^{-x} - \dfrac{xy}{e^x \cos^2 e^{-x}}, x \operatorname{tg} e^{-x}\right)$;

д) $\vec{F} = (y\sin(x^2+y^2)+2x^2y\cos(x^2+y^2), x\sin(x^2+y^2)+$
$+ 2xy^2\cos(x^2+y^2))$;

е) $\vec{F} = \left(y + \dfrac{1}{\sqrt{x+y}}, x + \dfrac{1}{\sqrt{x+y}}\right)$;

ж) $\vec{F} = 2\cos\sqrt{x^2+y^2}\,(x, y)$;

з) $\vec{F} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}\,(1+x^2+y^2)}(x, y)$;

и) $\vec{F} = \left(\dfrac{y}{x+2y}, \ln(x+2y) + \dfrac{2y}{x+2y}\right)$;

к) $\vec{F} = \left(-\dfrac{y}{(x+3y)^2} + 2xy, \dfrac{x}{(x+3y)^2} + x^2\right)$.

Ответы:

а) не является; б) не является;

в) $\Phi = y\ln y + C$; г) $\Phi = yx\operatorname{tg} e^{-x} + C$;

д) $\Phi = yx\sin(x^2+y^2) + C$; е) $\Phi = yx + \sqrt{x+y} + C$;

ж) $\Phi = \sin\sqrt{x^2+y^2} + C$; з) $\Phi = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2+y^2} + C$;

и) $\Phi = y\ln(x+2y) + C$; к) $\Phi = \dfrac{y}{x+3y} + x^2y + C$.

Задание 32. Найдите работу силы $\vec{F} = (2x+y, x-2y)$ на прямой AB, если $A(1;2)$, $B(3;4)$, в направлении от A к B.

Ответ: 10.

Задание 33. Найдите циркуляцию векторного поля $\vec{F} = (x, y)$ по контуру $x = 2\cos\varphi$, $y = 2\sin\varphi$, $z = \cos\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$.

Ответ: 0.

Задание 34. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_{ABC} xy\,dx - 2x\,dy$, если AB: $y = -x^2$, BC: $y = -x$, $A(0;0)$, $B(-1;1)$, $C(-2;2)$.

Ответ: $-1/4$.

Задание 35. Найдите массу криволинейной конструкции ABC предыдущего задания, если линейная плотность массы $\tau(x,y)$ для различных участков конструкции имеет следующий вид: AB: $\tau(x,y) = x^2$, BC: $\tau(x,y) = 1/3$.

Ответ: $(9/3)\sqrt{5} + (1/64)\ln(\sqrt{5} - 2) + \sqrt{2}$.

Задание 36. Найдите длину кривой $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Варианты ответов:

1) π; 2) 0; 3) 1; 4) 4; 5) 2.

Задание 37. Найдите длину кривой $x = 2\cos\varphi$, $y = 2\sin\varphi$.

Варианты ответов:

1) 4π; 2) 2π; 3) 3π; 4) 1.

Задание 38. Найдите массу кривой $x = 2\cos\varphi$, $y = 2\sin\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/4$, если линейная плотность массы $\tau = (1/\sqrt{8})(y/x)^2$.

Варианты ответов:

1) $1 - \pi/4$; 2) 3; 3) π; 4) $1 + 2\pi$.

Задание 39. Найдите координаты центра масс кривой $x^2 + y^2 = 4$ с равномерно распределенной массой.

Варианты ответов:

1) $(0;0)$; 2) $(1;1)$; 3) $(0{,}5;0)$; 4) $(-1;-1)$.

Задание 40. Найдите циркуляцию векторного поля $\vec{F} = (2x, 3y, 4z)$ по контуру $z = 3$, $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Варианты ответов:

1) 0; 2) 1; 3) 5; 4) -1.

Задание 41. Вычислите криволинейный интеграл $\int\limits_{AB} 2xy\,dx - 3x\,dy$ по прямой от точки $A(0;0)$ до точки $B(2;4)$.

Варианты ответов:

1) $-4/3$; 2) 1; 3) 5; 4) -1.

Задание 42. Вычислите криволинейный интеграл по линии ABC, если кривая AB — парабола $y = x^2$, BC — прямая, $A(2;4)$, $B(-1;1)$, $C(-2;1)$.

Варианты ответов:

1) $-3/2$; 2) $2/3$; 3) $5/4$; 4) $-1/3$.

Задание 43. Проверьте, является ли дифференциальная форма

$$\delta\Phi \equiv \frac{z}{y}\cos\frac{xz}{y}dx + \frac{x}{y}\cos\frac{xz}{y}dz - \frac{xz}{y^2}\cos\frac{xz}{y}dy$$

полным дифференциалом.

Варианты ответов:

1) является; 2) не является;

3) задача не определена.

Задание 44. Найдите скалярный потенциал векторного поля

$$\vec{F} = \left(-\frac{z}{y}\cos\frac{xz}{y}, -\frac{x}{y}\cos\frac{xz}{y}, \frac{xz}{y^2}\cos\frac{xz}{y}\right).$$

Варианты ответов:

1) $-\sin\dfrac{xz}{y} + \mathrm{const}$; 2) $\cos\dfrac{xz}{y} + \mathrm{const}$; 3) $\dfrac{xz}{y}$; 4) const.

Задание 45. Найдите работу силы $\vec{F} = (x, y, z)$ по кривой $z = 4$, $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

Варианты ответов:

1) 0; 2) 1; 3) 5; 4) -1.

Задание 46. Найдите поток ротора векторного поля $\vec{r} = (y, z, x)$ через поверхность параболоида вращения $z = -x^2 - y^2$, ограниченного снизу плоскостью $z = -4$.

Ответ: 0.

Задание 47. Найдите поток векторного поля $\vec{F} = (yz, xz, xy)$ через боковую поверхность пирамиды с вершиной в точке $M(0;0;2)$ и основанием-треугольником Δ_{OBC}, если $O(0;1;0)$, $B(1;0;0)$, $C(0;0;1)$.

Ответ: 0.

Задание 48. Найдите поток векторного поля $\vec{F} = (xy, yz, xz)$ через часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $y > 0$, $z \geqslant 0$.

Ответ: 0.

Задание 49. Найдите поток векторного поля $\vec{F} = (x, y, z)$ через боковую поверхность круглого конуса, основание которого находится на плоскости xOy, а ось совпадает с осью Oz. Высота конуса 1, радиус основания 2.

Ответ: 8π.

Задание 50. Найдите поток векторного поля $\vec{F} = (x, y, z)$ через боковую поверхность круглого цилиндра с радиусом основания R и высотой H. Ось цилиндра проходит через начало координат по оси абсцисс, а основание распологается на плоскости $x = 0$.

Ответ: $2\pi H^3$.

Задание 51. Докажите, что поток радиус-вектора $\vec{r}$ через любую замкнутую поверхность равен утроенному объему тела, ограниченного этой поверхностью.

Задание 52. Проверьте для векторного поля радиус-вектора $\vec{r}$ выполнимость формулы Стокса для верхней половины сферы радиуса R с центром в начале координат.

Задание 53. Проверьте для векторного поля радиус-вектора $\vec{r}$ выполнимость формулы Остроградского для сферы радиуса R с центром в начале координат.

Задание 54. Проверьте для векторного поля радиус-вектора $\vec{r}$ выполнимость формулы Остроградского для сферы радиуса R с вершиной в начале координат, углом раствора 90°, высотой H и осью симметрии Oz.

Задание 55. Проверьте для векторного поля радиус-вектора $\vec{r}$ выполнимость формулы Стокса для конуса радиуса R с вершиной в начале координат, углом раствора 90°, высотой H и осью симметрии Oz.

Задание 56. Найдите поток ротора векторного поля $\vec{F} = (y, z, x)$ через поверхность параболоида вращения $z = 2(1 - x^2 - y^2)$, ограниченного снизу плоскостью xOy.

Варианты ответов:

1) $-\pi$; 2) π; 3) 2π; 4) -2π; 5) 1.

Задание 57. Найдите поток векторного поля $\vec{F} = (yz, xz, xy)$ через боковую поверхность пирамиды с вершиной в точке $M(0; 0; 2)$ и основанием-треугольником Δ_{OBC}, если $O(0; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $C(0; 1; 0)$.

Варианты ответов:

1) $-1/6$; 2) π; 3) 2π; 4) $-\pi$; 5) $1/6$.

Задание 58. Найдите поток векторного поля $\vec{F} = (xy, yz, xz)$ через часть сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x \geqslant 0$, $y > 0$, $z \geqslant 0$.

Варианты ответов:

1) $3\pi/16$; 2) π; 3) 0; 4) $-\pi$; 5) $1/6$.

Задание 59. Найдите поток ротора векторного поля $\vec{F} = (y, z, x)$ через поверхность параболоида вращения $z = 1 - x^2 - y^2$, ограниченного снизу плоскостью $z = -3$.

Варианты ответов:

1) $-\pi$; 2) π; 3) 2π; 4) -2π; 5) 1.

Задание 60. Найдите поток векторного поля $\vec{F} = (x, y, z)$ через боковую поверхность круглого конуса, основание которого находится на плоскости xOy, а ось совпадает с осью Oz. Высота конуса 1, радиус основания 2.

Варианты ответов:

1) $-\pi$; 2) π; 3) 4π; 4) -2π; 5) 1.

Задание 61. Найдите поток векторного поля $\vec{F} = (y, z, x)$ через боковую поверхность круглого цилиндра с радиусом основания R и высотой H. Ось цилиндра проходит через начало координат.

Варианты ответов:

1) $2\pi R^2 H$; 2) π; 3) $\pi R^2 H$; 4) -2π; 5) $H^2 R$.

Задание 62. Найдите поток векторного поля $\vec{F} = (y, z, x)$ через поверхность сферы радиусом R с центром в начале координат.

Варианты ответов:

1) $4\pi R^3$; 2) $2\pi R^3$; 3) 4π; 4) -2π.

Задание 63. Найдите площадь боковой поверхности

$$x = \sqrt{1 - y^2 - z^2}\,.$$

Варианты ответов:

1) 2π; 2) π; 3) 4π; 4) $4\pi/3$; 5) 3π.

Задание 64. Найдите массу боковой поверхности

$$z = \sqrt{1 - y^2 - x^2}$$

с поверхностной плотностью массы $\tau \equiv 1$.

Варианты ответов:

1) 2π; 2) π; 3) 4π; 4) $4\pi/3$; 5) 3π.

Задание 65. Найдите электрический заряд боковой поверхности $y = \sqrt{1 - z^2 - x^2}$ с поверхностной плотностью заряда $\delta \equiv -1$.

Варианты ответов:

1) -2π; 2) $-\pi$; 3) -4π; 4) $-4\pi/3$; 5) -3π.

Задание 66. Найдите вектор единичной внешней нормали к поверхности $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ в точке $K(0; 0; 1)$.

Ответ: $(0; 0; 1)$.

Задание 67. Найдите вектор единичной внешней нормали к поверхности $x = y^2 + (z + 6)^2$ в точке $K(0; 0; -6)$.

Ответ: $(0; 0; -1)$.

Задание 68. Вычислите $\operatorname{div}\operatorname{grad}(x^2 + y^2 + 3z)$.

Ответ: 4.

Задание 69. Вычислите $\operatorname{grad} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Ответ: $\vec{r}/r^3$, $\vec{r} \equiv (x, y, z)$.

Задание 70. Вычислите $\operatorname{rot} \dfrac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Ответ: 0.

Задание 71. Вычислите $\operatorname{grad} \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Ответ: $\left(-\dfrac{zx}{r^3}, -\dfrac{zy}{r^3}, \dfrac{1}{r}\right)$, $r \equiv \sqrt{x^2 + y^2}$.

Задание 72. Вычислите $\operatorname{div} \dfrac{(x, y, z)}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,)^3}$.

Ответ: 0.

Задание 73. Вычислите $\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}\right) \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Ответ: 0.

Задание 74. Вычислите $\operatorname{rot} \dfrac{(x, y, z)}{x^2 + y^2 + z^2}$.

Ответ: 0.

Задание 75. Вычислите $\left(\dfrac{\partial}{\partial x}, \dfrac{\partial}{\partial y}, \dfrac{\partial}{\partial z}\right)(x + 2y - 3z)$.

Ответ: $(1; 2; -3)$.

Задание 76. Найдите вектор единичной внешней нормали к поверхности $z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$ в точке $K(0; 0; -1)$.

Варианты ответов:

1) $(-1; 0; 0)$; 2) $(1; 0; 0)$; 3) $(0; 1; 0)$; 4) $(0; -1; 0)$;

5) $(0; 0; 1)$.

Задание 77. Найдите вектор единичной внешней нормали к поверхности $x - 4 = (y - 5)^2 + (z - 6)^2$ в точке $K(4; 5; 6)$.

Варианты ответов:

1) $(-1; 0; 0)$; 2) $(1; 0; 0)$; 3) $(0; 1; 0)$; 4) $(0; -1; 0)$;

5) $(0; 0; 1)$.

Задание 78. Вычислите $\operatorname{div} \operatorname{grad} \ln(x^2 + y^2)$.

Варианты ответов:

1) 0; 2) 3; 3) 1; 4) -3; 5) -1.

Задание 79. Вычислите $\operatorname{div} \operatorname{grad} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Варианты ответов:

1) 0; 2) 3; 3) 1; 4) -3; 5) -1.

Задание 80. Вычислите $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.

Варианты ответов:

1) 0; 2) 3; 3) 1; 4) -3; 5) -1.

Задание 81. Вычислите $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Варианты ответов:

1) 0; 2) 3; 3) 1; 4) -3; 5) -1.

Задание 82. Вычислите $\operatorname{div}\operatorname{rot}\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Варианты ответов:

1) 0; 2) 3; 3) 1; 4) -3; 5) -1.

Задание 83. Вычислите $\operatorname{div}\operatorname{rot}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Варианты ответов:

1) 0; 2) 3; 3) 1; 4) -3; 5) -1.

Задание 84. Представить оператор Лапласа $\Delta \equiv \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$, где $\partial_{xx} \equiv \partial^2/\partial x^2$, $\partial_{yy} \equiv \partial^2/\partial y^2$, $\partial_{zz} \equiv \partial^2/\partial z^2$, через оператор набла ∇.

Варианты ответов:

1) $\vec{\nabla}\vec{\nabla}$; 2) $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla})$; 3) $(\vec{\nabla}\times\vec{\nabla})\vec{\nabla}$; 4) $|\vec{\nabla}\times\vec{\nabla}|$.

Задание 85. Представить оператор Лапласа $\Delta \equiv \partial_{xx} + \partial_{yy} + \partial_{zz}$, где $\partial_{xx} \equiv \partial^2/\partial x^2$, $\partial_{yy} \equiv \partial^2/\partial y^2$, $\partial_{zz} \equiv \partial^2/\partial z^2$, с помощью дифференциальных операторов div и grad.

Варианты ответов:

1) div grad; 2) grad div; 3) div rot; 4) rot rot.

Раздел 7

Элементы операционного исчисления

7.1. Преобразование Лапласа и его свойства

Преобразование Лапласа связывает однозначную функцию $F(p)$ комплексного переменного p (*изображение*) с соответствующей функцией $f(t)$ действительного переменного t (*оригинал*). Соответствующие пары функций $f(t)$ и $F(p)$ будем определять, используя свойства *преобразования Лапласа*, и при помощи таблицы.

Определение 7.1. Функция $f(t)$ действительного переменного t называется *оригиналом*, если:

а) она определена при $t \geqslant 0$;

б) интегрируема на $(0; +\infty)$;

в) $|f(t)| \leqslant ke^{St}$, где k, S — постоянные.

Определение 7.2. Функция $F(p) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-pt} f(t)\, dt$, где p — комплексный параметр ($\mathrm{Re}\, p > S$), называется *изображением* оригинала $f(t)$.

Функцию $F(p)$ называют также *преобразованием Лапласа*. Символические записи: $f(t) \risingdotseq F(p)$, $f(t) \;\dot{\leftarrow}\; F(p)$ (стрелка от изображения к оригиналу).

Простейшей функцией-оригиналом является *функция Хевисайда*.

Определение 7.3. *Единичной функцией* или *функций Хевисайда* называют функцию вида

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geqslant 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

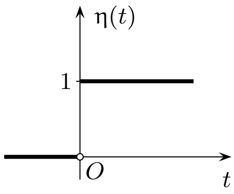


Рис. 7.1

График $\eta(t)$ приведен на рис. 7.1.

Основные свойства оригиналов и изображений:

1) теорема линейности: для любых комплексных постоянных C_1 и C_2

$$C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t) \risingdotseq C_1 F_1(p) + C_2 F_2(p);$$

2) теорема подобия: если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $f(at) \risingdotseq (1/a)F(p/a)$, где a — произвольная положительная постоянная;

Таблица 7.1

Некоторые преобразования Лапласа

	Оригинал $f(t)$	Изображение $F(p)$
1	1	$\dfrac{1}{p}$
2	$e^{\lambda t}$	$\dfrac{1}{p-\lambda}$
3	$\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{1}{p^{n+1}}$
4	$\dfrac{t^n e^{\lambda t}}{n!}$	$\dfrac{1}{(p-\lambda)^{n+1}}$
5	$e^{\alpha t}\cos\beta t$	$\dfrac{p-\alpha}{(p-\alpha^2)+\beta^2}$
6	$e^{\alpha t}\sin\beta t$	$\dfrac{\beta}{(p-\alpha^2)+\beta^2}$
7	$\sin\beta t$	$\dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$
8	$t\cos\beta t$	$\dfrac{p^2-\beta^2}{(p^2+\beta^2)^2}$
9	$t\sin\beta t$	$\dfrac{2p\beta}{(p^2+\beta^2)^2}$
10	$\operatorname{ch}\beta t$	$\dfrac{p}{p^2-\beta^2}$
11	$\operatorname{sh}\beta t$	$\dfrac{\beta}{p^2-\beta^2}$
12	$\cos\beta t$	$\dfrac{p}{p^2+\beta^2}$

3) дифференцирование оригинала: если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $f'(t) \risingdotseq pF(p) - f(0)$ ($\mathrm{Re}\, p > S$);

4) если $f(t) \risingdotseq F(p)$, где n — натуральное число, то

$$(-1)^n t^n f(t) \risingdotseq F^{(n)}(p)$$

(дифференцирование изображения);

5) пусть $f(t)$ непрерывна на $[0; t]$ и $f(t) \risingdotseq F(p)$, тогда

$$\int\limits_0^t f(z)\, dz \risingdotseq \frac{F(p)}{p}, \quad \mathrm{Re}\, p > S$$

(интегрирование оригинала);

6) если $f(t) \risingdotseq F(p)$ и $f(t)/t$ также функция-оригинал, то

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int\limits_p^{+\infty} F(z)\, dz$$

(интегрирование изображения);

7) если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $e^{-\lambda t} f(t) \risingdotseq F(p + \lambda)$, где λ — произвольное число (теорема смещения);

8) если $f(t) \risingdotseq F(p)$, то $f(t - \tau) \risingdotseq e^{-\tau p} F(p)$ при любом $\tau > 0$ (теорема запаздывания);

9) произведение двух изображений $F(p)$ и $\Phi(p)$ также является изображением, причем

$$F(p) \cdot \Phi(p) \risingdotseq \int\limits_0^t f(\tau) \varphi(t - \tau)\, d\tau$$

(теорема о свертке). Интеграл в правой части называется *сверткой* функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ и обозначается $f(t) * \varphi(t)$.

Некоторые преобразования Лапласа приведены в табл. 7.1.

7.2. Применение операционного исчисления для решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Схема решения дифференциальных уравнений операционным методом:

1) от исходного дифференциального уравнения переходим к уравнению относительно изображений, которое является алгебраическим уравнением;

2) решаем полученное алгебраическое уравнение;

3) от найденного изображения переходим к оригиналу — решению данного дифференциального уравнения.

Пусть имеем дифференциальное уравнение

$$a_0 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dx(t)}{dt} + a_2 x(t) = f(t),$$

где a_0, a_1, a_2 — постоянные, $a_0 \neq 0$. Будем искать решение уравнения, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x_0$, $x'(0) = x_1$.

Пусть $x(t) \risingdotseq X(p)$, $f(t) \risingdotseq F(p)$. Применяя к обеим частям уравнения преобразование Лапласа и используя теорему о дифференцировании оригинала, а также свойство линейности преобразования Лапласа, вместо дифференциального уравнения с начальным условием получим *операторное уравнение*

$$(a_0 p^2 + a_1 p + a_2) X(p) - (a_0 p x_0 + a_0 x_1 + a_1 x_0) = F(p),$$

откуда *операторное решение*

$$X(p) = \frac{F(p) + a_0 p x_0 + a_0 x_1 + a_1 x_0}{a_0 p^2 + a_1 p + a_2}.$$

Находя по $X(p)$ оригинал $x(t)$, определяем $x(t)$ — решение задачи Коши.

Пример 7.1. Найти изображение функции $t^2 + e^{4t}$.

Решение. Используя свойство линейности и формулы 2, 3 из табл. 7.1, получим

$$t^2 + e^{4t} \risingdotseq \frac{2}{p^3} + \frac{1}{p-4}.$$

Пример 7.2. Найти оригинал по заданному изображению

$$F(p) = \frac{p+4}{p^2 + 4p + 8}.$$

Решение. Выделим полный квадрат в знаменателе:

$$F(p) = \frac{p+4}{(p+2)^2 + 4} = \frac{p+2}{(p+2)^2 + 2^2} + \frac{2}{(p+2)^2 + 2^2}.$$

Используя формулы 5, 6 из табл. 7.1, получим оригинал $f(t) = e^{-2t} \cos 2t + e^{-2t} \sin 2t$.

Пример 7.3. Для решения задачи Коши $x'' - 3x' = t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$ найти операторное уравнение.

Решение. Пусть $x(t)$ — решение задачи Коши, $X(p)$ — соответствующее изображение. Используя свойство 3 (дифференцирование оригинала), получим $x'(t) \risingdotseq pX(p)$, $x''(t) \risingdotseq p^2 X(p)$, по формуле 3 из табл. 7.1 — $t \risingdotseq 1/p^2$. Подставив в дифференциальное уравнение, имеем операторное уравнение

$$(p^2 - 3p)X(p) = \frac{1}{p^2}.$$

Пример 7.4. Найти частное решение дифференциального уравнения $x' + 6x = 6$ при $x(0) = 1$.

Решение. Пусть $x(t)$ — частное решение, а $X(p)$ — соответствующее изображение. Тогда

$$x'(t) \risingdotseq pX(p) - x(0), \quad x'(t) \risingdotseq pX(p) - 1; \quad 6 \risingdotseq \frac{6}{p}.$$

Подставив в уравнение, получим

$$(p + 6)X(p) = \frac{p+6}{p}, \quad X(p) = \frac{1}{p}.$$

Используя табл. 7.1, находим оригинал (частное решение) $x(t) = 1$.

Пример 7.5. Найти изображение оригинала $\cos(2t - \pi)$, $t \geqslant \dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Используя табл. 7.1, получим $\cos 2t \risingdotseq p/(p^2 + 4)$. Тогда по теореме запаздывания имеем

$$\cos(2t - \pi) = \cos 2\left(t - \frac{\pi}{2}\right) \risingdotseq e^{-\frac{\pi p}{2}} \frac{p}{p^2 + 4}.$$

Примеры тестовых заданий

Задание 1. Найдите изображения следующих функций:

а) $\cos 4t$; б) $\operatorname{sh} 3t$;

в) $\sin^2 t$; г) $\sin 4t \cos 2t$;

д) $3e^{5t} - 2\sin 3t + 4$; е) $\dfrac{t^5}{20} + \dfrac{t^4}{4} - t$.

Ответы:

а) $\dfrac{p}{p^2 + 16}$; б) $\dfrac{p}{p^2 - 9}$;

в) $\dfrac{2}{p(p^2 + 4)}$; г) $\dfrac{4p^2 + 48}{(p^2 + 36)(p^2 + 4)}$;

д) $\dfrac{7p^3-26p^2+93p-180}{p(p-5)(p^2+9)}$; е) $\dfrac{6+6p-p^4}{p^6}$.

Задание 2. Пользуясь теоремой о дифференцировании оригинала, найдите изображения функций:

а) $f(t)=te^{3t}$; б) $f(t)=t\sin 4t$.

Ответы:

а) $\dfrac{1}{(p-\alpha)^2}$; б) $\dfrac{8p}{(p^2+16)^2}$.

Задание 3. Найдите изображения функций, пользуясь теоремой запаздывания:

а) $f(t-2)=\sin(t-2)\eta(t-2)$;

б) $f(t-5)=e^{t-5}\eta(t-5)$;

в) $f(t-1)=\cos(t-1)\eta(t-1)$.

Ответы:

а) $\dfrac{e^{-2p}}{p^2+1}$; б) $\dfrac{e^{-5p}}{p-1}$; в) $\dfrac{pe^{-p}}{p^2+1}$.

Задание 4. Найдите изображения функций, пользуясь теоремой смещения:

а) $e^{2t}\sin t$; б) $e^{-t}t^3$; в) $e^t\cos 2t$.

Ответы:

а) $\dfrac{1}{(p-2)^2+1}$; б) $\dfrac{6}{(p+1)^4}$; в) $\dfrac{p-1}{(p-1)^2+4}$.

Задание 5. Найдите оригиналы для заданных изображений:

а) $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+5}$; б) $F(p)=\dfrac{1}{p^2+4p+3}$;

в) $F(p)=\dfrac{2e^{-p}}{p^3}$; г) $F(p)=\dfrac{e^{-3p}}{p+3}$;

д) $F(p)=\dfrac{e^{-p}}{p^2-9}$; е) $F(p)=\dfrac{pe^{-2p}}{p^2+4}$;

ж) $F(p)=\dfrac{1}{p+2p^2+p^3}$.

Ответы:

а) $e^{-2t}\sin t$;

б) $\dfrac{1}{2}(e^{-t}-e^{-3t})$;

в) $(t-1)^2\eta(t-1)$;

г) $e^{-3(t-3)}\eta(t-3)$;

д) $\dfrac{1}{3}\operatorname{sh}3(t-1)\eta(t-1)$;

е) $\cos 2(t-2)\eta(t-2)$;

ж) $1-e^{-t}-te^{-t}$.

Задание 6. Решите дифференциальные уравнения при заданных начальных условиях:

а) $x''+3x'=e^t$, $x(0)=0$, $x'(0)=-1$;

б) $x''+x=1$, $x(0)=-1$, $x'(0)=0$;

в) $x''+4x=\sin t$, $x(0)=x'(0)=0$.

Ответы:

а) $x(t)=\dfrac{1}{4}e^t+\dfrac{5}{12}e^{-3t}-\dfrac{2}{3}$;

б) $x(t)=1-2\cos t$;

в) $x(t)=\dfrac{1}{3}\sin t-\dfrac{1}{6}\sin 2t$.

Раздел 8
Теория вероятностей и математическая статистика

8.1. Основные понятия и определения

Основная задача теории вероятностей — определение меры возможности наступления (появления) того или иного события.

Событие — это результат (исход) некоторого испытания (эксперимента, опыта, явления), проводимого в рамках определенных условий.

Событие может быть:

— *достоверным*, которое в рамках предстоящего испытания обязательно произойдет;

— *невозможным*, которое в рамках предстоящего испытания никогда не произойдет;

— *случайным*, которое в рамках предстоящего испытания может произойти, а может и не произойти.

Виды событий:

— *равновозможные события* — это события, которые в рамках определенного испытания могут наступить с одинаковой возможностью, без каких-либо преимуществ;

— *несовместные события* — это события, когда в рамках определенного испытания появление одного из них исключает появление всех остальных;

— *независимые события* — это события, которые в рамках определенного испытания могут наступить независимо друг от друга.

Элементарное событие (*исход*) — это простейший результат испытания (не разлагаемый на более простые результаты).

Противоположное событие $\bar{A}$ *к событию* A — это событие, которое в рамках определенного испытания наступает тогда и только тогда, когда не наступает событие A.

Вероятность $P(A)$ наступления события A в рассматриваемом испытании (*вероятность события* A) определяется следующим образом:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N},$$

где N — число всех равновозможных элементарных исходов рассматриваемого испытания; $N(A)$ — число элементарных исходов испытания, в результате которых наступает событие A (*благоприятных исходов* для события A).

Основные свойства вероятностей событий:

1) $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$. Если A — невозможное событие, то $P(A) = 0$; если A — достоверное событие, то $P(A) = 1$;

2) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$;

3) если A, B — независимые события, то $P(AB) = P(A)P(B)$;

4) если A, B — несовместные события, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$;

5) $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$ для любых событий A и B;

6) $P(AB) = P(A)P(B/A)$ для любых событий A и B, где $P(B/A)$ — вероятность появления события B после наступления события A (*условная вероятность*).

Элементы комбинаторики

Перестановки из n различных элементов (или *перестановки без повторений*) — это всевозможные наборы из заданных n различных элементов, отличающихся друг от друга только порядком следования (расположения) элементов.

Число всех перестановок из n различных элементов (или без повторений):

$$P_n = n!\,.$$

Число перестановок из n элементов с повторениями:

$$\widetilde{P}_n = n^n.$$

Размещения из n по m различных элементов (или *размещения без повторений*) — это всевозможные наборы из m различных элементов, составленные из заданных n элементов и отличающиеся друг от друга либо составом, либо порядком расположения элементов.

Число всех размещений из n по m различных элементов (или без повторений):

$$A_n^m = n(n-1)...(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Число размещений из n по m элементов с повторениями:

$$\widetilde{A}_n^m = n^m.$$

Сочетания из n по m различных элементов (или *сочетания без повторений*) — это всевозможные наборы из m различных элементов, составленные из заданных n элементов и обязательно отличающиеся друг от друга по составу.

Число всех сочетаний из n по m различных элементов (или без повторений):

$$C_n^m = \frac{m(n-1)...(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Число сочетаний из n по m элементов с повторениями:

$$\widetilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m.$$

Свойства:
1) $0! = 1$;
2) $A_n^0 = 1$, $A_n^1 = n$;
3) $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = C_n^{n-1} = n$, $C_n^m = C_n^{n-m}$.
Бином Ньютона:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

Формула полной вероятности и формулы Байеса

Пусть требуется определить вероятность события A, которое может произойти вместе с одним из событий (гипотез) B_1, B_2, ..., B_n , которые имеют положительные вероятности и образуют полную группу несовместных событий, хотя бы одно из которых обязательно осуществляется. Тогда имеет место *формула полной вероятности*:

$$P(A) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A/B_k). \tag{8.1}$$

Из формулы (8.1) следует, что вероятность события A вычисляется как сумма произведений вероятности каждой гипотезы на условную вероятность события A при этой гипотезе.

Пусть имеется полная группа несовместных гипотез B_1, B_2, ... , B_n . Произведен опыт, в результате которого появилось некоторое событие A. Возникает вопрос, как изменятся вероятности гипотез в связи с появлением события A, т.е. мы должны найти $P(B_k/A)$ ($k = 1, 2, ..., n$) для каждой гипотезы. Имеют место *формулы Байеса*:

$$P(B_k/A) = \frac{P(B_k)P(A/B_k)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(B_k)P(A/B_k)}, \quad k = 1, 2, ..., n.$$

Повторение независимых испытаний по схеме Бернулли

Теорема Бернулли: если одно и то же испытание (эксперимент, опыт, явление) повторяется n раз так, что:

1) при каждом испытании может наступить только событие A (*успех*) или противоположное событие $\bar{A}$ (*неудача*);

2) вероятность наступления события A при каждом испытании постоянна и не зависит от исходов предыдущих испытаний, то вероятность наступления события A ровно k раз при n испытаниях находится по *формуле Бернулли*

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{8.2}$$

где $p = P(A)$ — вероятность наступления события A при одном испытании; $q = 1 - p = P(\bar{A})$ — вероятность противоположного события $\bar{A}$.

Вероятность того, что в n испытаниях событие наступит:

а) менее m раз;

б) более m раз;

в) не менее m раз;

г) не более m раз;

д) от k до l раз,

находят соответственно по формулам:

а) $P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(m-1)$;

б) $P_n(m+1) + P_n(m+2) + ... + P_n(n)$;

в) $P_n(m) + P_n(m+1) + ... + P_n(n)$;

г) $P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(m)$;

д) $P_n(k) + P_n(k+1) + ... + P_n(l)$.

Пример 8.1. В урну, в которой лежат 6 белых и 5 черных шаров, добавляют два черных шара. После этого наудачу по одному извлекают три шара без возвращения. Найти вероятность того, что хотя бы один шар будет белым.

Решение. Введем обозначения событий: A_k — k-й вынутый шар будет белым; A — хотя бы один шар будет белым. Тогда $P(A) = 1 - P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3)$, где $\bar{A}_k$ — событие, при котором k-й вынутый шар не будет белым. Так как по условию задачи события A_1, A_2 и A_3 зависимы, то

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}_1)P_{\bar{A}_1}(\bar{A}_2)P_{\bar{A}_1\bar{A}_2}(\bar{A}_3) =$$
$$= 1 - \frac{7}{13} \cdot \frac{7-1}{13-1} \cdot \frac{7-2}{13-2} = \frac{251}{286}.$$

Пример 8.2. В урну, в которой лежат 6 белых и 5 черных шаров, добавляют два белых шара. После этого наудачу по одному извлекают три шара без возвращения. Найти вероятность того, что все три шара будут белыми.

Решение. Введем обозначения событий: A_k — k-й вынутый шар будет белым, A — все три шара будут белыми. Тогда $A =$

$= A_1A_2A_3$ и, так как по условию задачи события A_1, A_2, A_3 зависимы,

$$P(A) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3) = \frac{8}{13} \cdot \frac{8-1}{13-1} \cdot \frac{8-2}{13-2} = \frac{28}{143}.$$

Пример 8.3. Вероятность поражения цели первым стрелком равна 0,95, а вторым — 0,80. Оба стрелка стреляют одновременно. Найти вероятность того, что цель будет поражена только одним стрелком.

Решение. Введем обозначения событий: A — цель поражена первым стрелком; B — цель поражена вторым стрелком; C — цель поражена одним из стрелков. Так как эти события независимы, то искомую вероятность события C можно вычислить как

$$P(C) = P(A)P(\bar{B}) + P(\bar{A})P(B) = 0{,}95 \cdot 0{,}2 + 0{,}05 \cdot 0{,}8 = 0{,}23.$$

Пример 8.4. Наладчик обслуживает три станка. Вероятность того, что в течение часа потребует его вмешательства первый станок, равна 0,15; второй — 0,05; третий — 0,2. Найти вероятность того, что в течение часа потребуют вмешательства наладчика все три станка.

Решение. Введем обозначения событий: A_k — вмешательства наладчика потребует k-й станок; A — вмешательства наладчика потребуют все три станка. Тогда

$$P(A) = P(A_1A_2A_3) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) = 0{,}15 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}2 = 0{,}0015.$$

Пример 8.5. В первой урне 3 черных шара и 7 белых шаров. Во второй урне 4 белых шара и 6 черных шаров. Из наудачу взятой урны вынули один шар, который оказался черным. Найти вероятность того, что этот шар вынули из второй урны.

Решение. Предварительно вычислим вероятность события A (вынутый наудачу шар — черный) по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A).$$

Здесь $P(B_1)$ — вероятность того, что шар извлечен из первой урны; $P(B_2)$ — вероятность того, что шар извлечен из второй урны; $P_{B_1}(A)$ — условная вероятность того, что вынутый шар черный, если он извлечен из первой урны; $P_{B_2}(A)$ — условная вероятность того, что вынутый шар черный, если он извлечен из второй урны. Тогда

$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} = \frac{9}{20} = 0{,}45.$$

Теперь вычислим условную вероятность того, что этот шар был извлечен из второй урны. По формуле Байеса

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2)P_{B_2}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}5 \cdot 0{,}6}{0{,}45} = \frac{2}{3}.$$

Пример 8.6. Банк выдает 40% всех кредитов юридическим лицам, а 60% — физическим лицам. Вероятность того, что юридическое лицо не погасит в срок кредит, равна 0,1, а для физического лица эта вероятность составляет 0,05. Получено сообщение о невозврате кредита. Найти вероятность того, что этот кредит не погасило физическое лицо.

Решение. Предварительно вычислим вероятность события A (выданный кредит не будет погашен в срок) по формуле полной вероятности:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A).$$

Здесь $P(B_1)$ — вероятность того, что кредит был выдан юридическому лицу; $P(B_2)$ — вероятность того, что кредит был выдан физическому лицу; $P_{B_1}(A)$ — условная вероятность того, что кредит не будет погашен в срок, если он был выдан юридическому лицу; $P_{B_2}(A)$ — условная вероятность того, что кредит не будет погашен в срок, если он был выдан физическому лицу. Тогда

$$P(A) = \frac{40}{100} \cdot 0{,}1 + \frac{60}{100} \cdot 0{,}05 = 0{,}07.$$

Теперь вычислим условную вероятность того, что этот кредит не погасило физическое лицо. По формуле Байеса

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2)P_{B_2}(A)}{P(A)} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}05}{0{,}07} = \frac{3}{7}.$$

8.2. Дискретные случайные величины

Случайной величиной называется величина, которая в результате опыта может принять любые заранее неизвестные значения. Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

Дискретной случайной величиной называется такая, значения которой есть конечное или счетное множество фиксированных величин. Для описания поведения дискретной случайной величины X задают все значения x_1, x_2, .., x_n, которые она может принять, и вероятности появления этих значений p_1, p_2, ..., p_n.

Законом распределения вероятностей (*рядом распределения*) дискретной случайной величины называется последовательность возможных значений случайной величины и соответствующих им вероятностей:

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n

причем

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1. \tag{8.3}$$

Ряд распределения можно задать графически, откладывая на горизонтальной оси значения X, а на вертикальной — соответствующие им значения вероятностей. Графическое представление ряда распределения называется *многоугольником распределения*.

Для дискретной случайной величины можно ввести понятие *функции распределения* $F(x)$, которая равна вероятности случайного события, состоящего в том, что дискретная случайная величина X примет одно из возможных значений, меньших некоторого значения x, т.е. $F(x) = P(X < x)$.

Если дискретные значения случайной величины расположены в порядке возрастания $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то $F(x)$ можно задать в виде

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant x_1; \\ p_1, & \text{если } x_1 < x \leqslant x_2; \\ p_1 + p_2, & \text{если } x_2 < x \leqslant x_3; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_{n-1}, & \text{если } x_{n-1} < x \leqslant x_n; \\ 1, & \text{если } x > x_n. \end{cases}$$

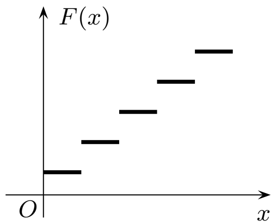


Рис. 8.1

Функцию распределения можно представить графически в виде ступенчатой функции (рис. 8.1).

Математическим ожиданием дискретной случайной величины называется сумма вида

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_n x_p = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i, \tag{8.4}$$

где x_i — возможные значения дискретной случайной величины; p_i — вероятность появления значения x_i.

Свойства математического ожидания:

1) $M(CX) = CM(X)$, $M(C) = C$, где C — произвольная постоянная величина;

2) $M(X_1X_2...X_n) = M(X_1)M(X_2)...M(X_n)$, если X_1, X_2, ..., X_n — взаимно независимые случайные величины;

3) $M(X_1 + X_2 + ... + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)$;

4) $M(X) = np$, где X — дискретная случайная величина; n — число испытаний с биномиальным законом распределения; p — вероятность появления события в одном испытании.

Математическое ожидание характеризует среднее значение случайной величины. Рассеяние случайной величины около среднего значения характеризуют дисперсия и среднее квадратичное отклонение.

Дисперсией случайной величины X называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M[X - M(X)]^2.$$

Дисперсию целесообразно вычислять по формуле

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2. \tag{8.5}$$

Свойства дисперсии:

1) $D(C) = 0$, $D(CX) = C^2D(X)$, где C — произвольная постоянная;

2) $D(X_1 + X_2 + ... + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n)$, где X_i — независимые случайные величины;

3) $D(X) = npq$, где X — дискретная случайная величина с биномиальным законом распределения; n — число испытаний; p, q — вероятность появления и вероятность непоявления события в одном испытании соответственно;

4) $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$, где $\sigma(X)$ — *среднее квадратичное отклонение.*

Закон распределения дискретной случайной величины можно изобразить графически, для чего в прямоугольной системе координат строят точки $M_1(x_1, p_1)$, $M_2(x_2, p_2)$, ..., $M_n(x_n, p_n)$ (x_i — возможные значения X, p_i — соответствующие вероятности) и соединяют их отрезками прямых. Полученную фигуру называют *многоугольником распределения.*

Биномиальным называют закон распределения дискретной случайной величины X — числа появлений события в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p; вероятность возможного значения $X = k$ (числа k появлений события) вычисляют по формуле Бернулли (8.2).

Приближенные формулы:

1) формула Пуассона:

$$P_n(k) \approx \frac{a^k e^{-a}}{k!}, \quad a = np.$$

Рекомендуется при $p < 0{,}1$ и $n > 10$, $np < 10$;

2) формула Муавра—Лапласа:

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi\left(\frac{k-np}{\sqrt{npq}}\right), \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},$$

где $\varphi(x)$ — плотность нормального распределения Гаусса. Рекомендуется при $n \gg 1$ (50, 100, 200);

3) формула Лапласа:

$$P_n(k_1 \leqslant k \leqslant k_2) = \Phi\left(\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}\right),$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа; нечетная: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Рекомендуется при $n \gg 1$.

Пример 8.7. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	1	2	3	5
p	0,45	0,30	0,15	0,10

Вычислить вероятность $P(2 < X \leqslant 5)$.

Решение.

$$P(2 < X \leqslant 5) = P(X = 3) + P(X = 5) = 0{,}15 + 0{,}1 = 0{,}25.$$

Пример 8.8. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	1	2	3	4	5
p	0,15	a	b	0,1	0,2

Найти значения a и b.

Решение. Так как сумма вероятностей возможных значений X равна 1, то $a + b = 1 - 0{,}15 - 0{,}1 - 0{,}2 = 0{,}55$. Этому условию удовлетворяет ответ $a = 0{,}35$, $b = 0{,}2$.

Пример 8.9. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	1	4	6
p	0,25	0,20	0,55

Найти функцию распределения вероятностей.

Решение. По определению $F(x) = P(X < x) = \sum\limits_{x_k < x} p_k$. Тогда:

а) при $x \leqslant 1$: $F(x) = P(X < 1) = 0$;
б) при $1 < x \leqslant 4$: $F(x) = P(X = 1) = 0{,}25$;
в) при $4 < x \leqslant 6$:

$$F(x) = P(X = 1) + P(X = 4) = 0{,}25 + 0{,}20 = 0{,}45;$$

г) при $x > 6$:

$$F(x) = P(X = 1) + P(X = 4) + P(X = 6) =$$
$$= 0{,}25 + 0{,}20 + 0{,}55 = 1.$$

Следовательно,

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 1, \\ 0{,}25 \text{ при } 1 < x \leqslant 4, \\ 0{,}45 \text{ при } 4 < x \leqslant 6, \\ 1 \text{ при } x > 6. \end{cases}$$

Пример 8.10. Для дискретной случайной величины X:

X	1	4	8	9
p	p_1	p_2	p_3	p_4

функция распределения вероятностей имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } x \leqslant 1, \\ 0{,}65 \text{ при } 1 < x \leqslant 4, \\ p \text{ при } 4 < x \leqslant 8, \\ 0{,}85 \text{ при } 8 < x \leqslant 9, \\ 1 \text{ при } x > 9. \end{cases}$$

Найти значение параметра p.

Решение. По определению $F(x) = P(X < x) = \sum\limits_{x_k < x} p_k$. Следовательно, $p \geqslant 0{,}65$ и $p \leqslant 0{,}85$. Этим условиям удовлетворяет, например, значение $p = 0{,}7$.

Пример 8.11. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	1	3
p	0,2	0,8

Найти ее среднее квадратическое отклонение.

Решение. Среднее квадратическое отклонение случайной величины X определяется как $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$, где дисперсию $D(X)$ дискретной случайной величины можно вычислить по формуле $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$. Тогда

$$D(X) = 1^2 \cdot 0{,}2 + 3^2 \cdot 0{,}8 - (1 \cdot 0{,}2 + 3 \cdot 0{,}8)^2 = 0{,}64,$$

$$\sigma(X) = \sqrt{0{,}64} = 0{,}8.$$

Пример 8.12. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	1	3	6
p	0,6	0,3	0,1

Вычислить математическое ожидание $M(X)$.

Решение. Математическое ожидание дискретной случайной величины вычисляется по формуле

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i.$$

Тогда $M(X) = 1 \cdot 0{,}6 + 3 \cdot 0{,}3 + 6 \cdot 0{,}1 = 2{,}1$.

Пример 8.13. Найти вероятность осуществления от двух до четырех разговоров по телефону при наблюдении 5 независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,7.

Решение. Эксперимент заключается в проведении 5 повторных независимых испытаний с двумя исходами в каждом. Вероятность того, что разговор состоится, в каждом испытании постоянна. Пусть событие $(2 \leqslant m \leqslant 4)$ означает, что состоялось от 2-х до 4-х разговоров. Тогда по формуле Бернулли имеем

$$P_5(2 \leqslant m \leqslant 4) = C_5^2 \cdot 0{,}7^2 \cdot 0{,}3^3 + C_5^3 \cdot 0{,}7^3 + 0{,}3^2 + C_5^4 \cdot 0{,}7^4 \cdot 0{,}3 \approx 0{,}801.$$

Пример 8.14. Найти вероятность того, что событие наступит 1400 раз в 2400 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,6.

Решение. Так как n велико, воспользуемся локальной теоремой Муавра—Лапласа:

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x).$$

Вычислим x:

$$x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{1400 - 2400 \cdot 0{,}6}{\sqrt{2400 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}4}} = -1{,}67.$$

Функция $\varphi(x) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-\frac{x^2}{2}}$ — четная, поэтому $\varphi(-1{,}67) = \varphi(1{,}67)$. Тогда

$$P_{2400}(1400) = \frac{1}{24} \cdot 0{,}0989 = 0{,}0041.$$

Пример 8.15. Вероятность появления некоторого события в каждом из 400 независимых испытаний постоянна и равна 0,2. Тогда вероятность того, что событие появится ровно 84 раза, следует вычислять как...

1) $P \approx (1/8)\varphi(0{,}5)$, где $\varphi(x) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-\frac{x^2}{2}}$;

2) $P \approx (1/64)\varphi(0{,}5)$, где $\varphi(x) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-\frac{x^2}{2}}$;

3) $P \approx 0{,}5 - \Phi(0{,}5)$, где $\Phi(x)$ — функция Лапласа;

4) $P \approx \Phi(0{,}5)$, где $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

Решение. Для биномиального распределения вероятностей существует предельное (при $n \to \infty$) распределение, и это распределение является асимптотически нормальным. Это означает, что при больших значениях числа испытаний n расчет по формуле Бернулли $P_n(k) = P_n(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ становится практически невозможным. Поэтому для вычисления таких вероятностей на практике используется локальная формула Лапласа

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

В нашем случае $p = 0{,}2$, $n = 400$, $k = 84$. Следовательно,

$$P_{400}(84) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}}\varphi\left(\frac{84 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}}\right) = \frac{1}{8}\varphi(0{,}5).$$

Пример 8.16. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна $p = 0{,}8$. Найти вероятность того, что событие появится не менее 75 раз.

Решение. Требование о том, чтобы событие появилось не менее 75 раз, означает, что число событий может быть равно 75, либо 76, ..., либо 100. Таким образом, принимаем $k = 75$ и $l = 100$, тогда

$$a = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = -1{,}25;$$

$$b = \frac{l - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = 5.$$

По таблице значений функции найдем $\Phi(1{,}25) = 0{,}3944$, $\Phi(5) = 0{,}5$. Искомая вероятность

$$P_{100}(75 \leqslant m \leqslant 100) = \Phi(5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(5) + \Phi(1{,}25) = 0{,}8944.$$

Пример 8.17. Вероятность появления некоторого события в каждом из 400 независимых испытаний постоянна и равна 0,8. Тогда вероятность того, что событие появится не менее 300 и не более 328 раз, следует вычислять как...

1) $P(300 \leqslant X \leqslant 328) \approx \Phi(1) + \Phi(2{,}5)$, где $\Phi(t)$ — функция Лапласа;

2) $P(300 \leqslant X \leqslant 328) \approx \Phi(1) - \Phi(2{,}5)$, где $\Phi(t)$ — функция Лапласа;

3) $P(300 \leqslant X \leqslant 328) \approx \frac{1}{8}(\varphi(1) - \varphi(2{,}5))$, где

$$\varphi(x) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-\frac{x^2}{2}};$$

4) $P(300 \leqslant X \leqslant 328) \approx \frac{1}{64}(\varphi(1) - \varphi(2{,}5))$, где

$$\varphi(x) = (1/\sqrt{2\pi})e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Решение. Для биномиального распределения вероятностей существует предельное (при $n \to \infty$) распределение, и это распределение является асимптотически нормальным. Это означает, что при больших значениях числа испытаний n расчет по формуле Бернулли $P_n(k) = P_n(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ становится практически невозможным, особенно когда надо вычислять вероятности не отдельного равенства (события) $X = k$, а неравенств вида $k_1 \leqslant X \leqslant k_2$. Для вычисления таких вероятностей на практике используется интегральная формула Лапласа

$$P(k_1 \leqslant X \leqslant k_2) \approx \Phi(t_2) - \Phi(t_1),$$

где $\Phi(t)$ — функция Лапласа,

$$t_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad t_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Для нашего случая $k_2 = 328$, $k_1 = 320$, $n = 400$, $p = 0{,}8$. Следовательно,

$$P(300 \leqslant X \leqslant 328) \approx \Phi\left(\frac{328 - 400 \cdot 0{,}8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) - \Phi\left(\frac{300 - 400 \cdot 0{,}8}{\sqrt{400 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) =$$

$$= \Phi(1) + \Phi(2{,}5).$$

Пример 8.18. Среднее число заявок, поступающих на предприятие бытового обслуживания за 1 час, равно пяти. Найти вероятность того, что за два часа поступит восемь заявок.

Решение. Вероятность наступления k событий простейшего потока за время t определяется формулой Пуассона:

$$P_t(X = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t},$$

где λ — интенсивность потока. Так как $t = 2$, $k = 8$, $\lambda = 5$, то

$$P_2(X = 8) = \frac{(5 \cdot 2)^8}{8!} \cdot e^{-5 \cdot 2} = \frac{10^8}{8!} \cdot e^{-10}.$$

8.3. Непрерывные случайные величины

Непрерывные случайные величины характеризуются тем, что их значения могут сколь угодно мало отличаться друг от друга.

Вероятность события $X < x$ (где X — значение непрерывной случайной величины, а x — произвольно задаваемое значение), рассматриваемая как функция от x, называется *функцией распределения вероятностей*:

$$F(x) = P(X < x).$$

Производная от функции распределения вероятностей называется *функцией плотности распределения вероятностей* или *плотностью вероятности*:

$$f(x) = F'(x).$$

Функция распределения вероятностей выражается через плотность вероятности в виде интеграла:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\, dx.$$

Вероятность попадания случайной величины в интервал (x_1, x_2) равна приращению функции распределения вероятностей на этом интервале:

$$P(x_1 < x < x_2) = F(x_2) - F(x_1).$$

Средним значением или *математическим ожиданием* непрерывной случайной величины X называется значение

$$M(X) = M_x = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx,$$

где $f(x)$ — плотность вероятности.

Дисперсией непрерывной случайной величины X называется значение интеграла

$$D(X) = D_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - M_x)^2 f(x)\,dx.$$

Для определения дисперсии может быть также использована формула

$$D_x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - M_x^2.$$

Модой $Mo(X)$ непрерывной случайной величины X называется такое значение этой величины, плотность вероятности которого максимальна.

Медианой $Me(X)$ непрерывной случайной величины X называется такое ее значение, при котором выполняется

$$P(X < Me) = P(X > Me).$$

Непрерывная случайная величина называется *равномерно распределенной* на отрезке $[a, b]$, если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant a, \\ \dfrac{1}{b-a}, & \text{если } a < x \leqslant b, \\ 0, & \text{если } x > b. \end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия равномерно распределенной случайной величины определяются выражениями

$$M_x = \frac{a+b}{2}, \quad D_x = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Случайная величина X распределена *по нормальному закону*, если ее функция плотности распределения вероятностей имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma_x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-M_x)^2}{2\sigma_x^2}},$$

где M_x — математическое ожидание; σ_x — среднее квадратичное отклонение. Вероятность попадания случайной величины в интервал (a, b) находится по формуле

$$P(a < X < b) = \Phi\left(\frac{b - M_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{a - M_x}{\sigma_x}\right) = \Phi(z_2) - \Phi(z_1),$$

где

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^z e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

— функция Лапласа. Значения функции Лапласа для различных значений z приводится в приложениях к учебникам по теории вероятностей и математической статистике.

Распределение непрерывной случайной величины X называется *показательным* (*экспоненциальным*), если плотность вероятности этой величины описывается функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$

где λ — положительное число. Соответственно, функция распределения вероятностей имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{если } x > 0. \end{cases}$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение для показательного распределения соответственно равны

$$M_x = \frac{1}{\lambda}, \quad D_x = \frac{1}{\lambda^2}, \quad \sigma_x = \frac{1}{\lambda}.$$

Пример 8.19. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ Cx^3 & \text{при } 0 < x \leqslant 6, \\ 0 & \text{при } x > 6. \end{cases}$$

Найти параметр C.

Решение. Так как $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$, то $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} Cx^3\,dx = 1$ или $\int\limits_0^6 Cx^3\,dx = 1$. Тогда $\left.\dfrac{Cx^4}{4}\right|_0^6 = 1$ и $C = \dfrac{1}{324}$.

Пример 8.20. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ x/8 & \text{при } 0 < x \leqslant 4, \\ 0 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Найти вероятность $P(1 < X < 3)$.

Решение. Воспользуемся формулой

$$P(x_1 < X < x_2) = \int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\,dx.$$

Тогда
$$P(1<X<3)=\int\limits_1^3 \frac{x}{8}\,dx=\frac{x^2}{16}\bigg|_1^3=\frac{9}{16}-\frac{1}{16}=\frac{1}{2}.$$

Пример 8.21. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей:
$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } x\leqslant 0,\\ x^2/25 \quad \text{при } 0<x\leqslant 5,\\ 1 \quad \text{при } x>5.\end{cases}$$
Найти вероятность $P(-1<X<4)$.

Решение. Воспользуемся формулой
$$P(x_1<X<x_2)=F(x_2)-F(x_1).$$
Тогда
$$P(-1<X<4)=F(4)-F(-1)=\frac{16}{25}-0=\frac{16}{25}.$$

Пример 8.22. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей:
$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } x\leqslant 0,\\ x^2/25 \quad \text{при } 0<x\leqslant 5,\\ 0 \quad \text{при } x>5.\end{cases}$$
Найти плотность распределения вероятностей.

Решение. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины вычисляется по формуле $f(x)= = F'(x)$. Тогда
$$\left(\frac{x^2}{25}\right)'=\frac{2x}{25} \quad \text{и} \quad f(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } x\leqslant 0,\\ 2x/25 \quad \text{при } 0<x\leqslant 5,\\ 0 \quad \text{при } x>5.\end{cases}$$

Пример 8.23. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:
$$f(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } x\leqslant 0,\\ 3x^2/64 \quad \text{при } 0<x\leqslant 4,\\ 0 \quad \text{при } x>4.\end{cases}$$
Вычислить математическое ожидание $M(X)$.

Решение. Воспользуемся формулой
$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx.$$

Тогда

$$M(X) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\,dx = \int\limits_{0}^{4} x\frac{3x^2}{64}\,dx = \frac{3}{64}\frac{x^4}{4}\Big|_0^4 = 3.$$

Пример 8.24. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

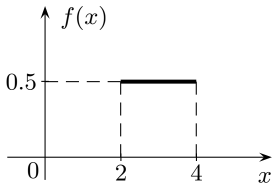
$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x \leqslant 0, \\ 2x/25 \quad \text{при } 0 < x \leqslant 5, \\ 0 \quad \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Найти дисперсию $D(X)$.

Решение. Дисперсию непрерывной случайной величины X можно вычислить по формуле $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$. Тогда

$$D(X) = \int\limits_0^5 x^2\frac{2x}{25}\,dx - \left(\int\limits_0^5 x\frac{2x}{25}\,dx\right)^2 = \frac{25}{2} - \left(\frac{10}{3}\right)^2 = \frac{25}{18}.$$

Пример 8.25. Дан график плотности распределения вероятностей непрерывной случайной величины X:



Построить график ее функции распределения вероятностей.

Решение. Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины вычисляется по формуле

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx.$$

Тогда:

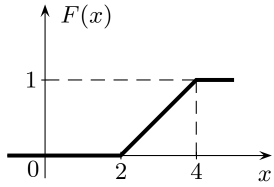
— если $x \leqslant 2$, то $f(x) = 0$, следовательно, $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{2} 0\,dx = 0$;

— если $2 < x < 4$, то $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{2} 0\,dx + \int\limits_{2}^{x} 0{,}5\,dx = 0{,}5x - 1$;

— если $x \geqslant 4$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{2} 0\,dx + \int\limits_{2}^{4} 0{,}5\,dx + \int\limits_{4}^{x} 0\,dx = 0{,}5x\Big|_2^4 = 1.$$

Тогда график $F(x)$ будет иметь вид



Пример 8.26. Случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ 4e^{-4x} & \text{при } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Найти $P(0{,}2 < X < 1)$.

Решение. Плотность распределения вероятностей случайной величины X, распределенной по показательному закону, имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{при } x \geqslant 0, \end{cases}$$

и вероятность попадания в интервал (a, b) равна $P(a < X < b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$. Тогда $P(0{,}2 < X < 1) = e^{-0{,}8} - e^{-4}$.

Пример 8.27. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-4)^2}{8}}.$$

Определить математическое ожидание a и среднее квадратическое отклонение σ этой случайной величины.

Решение. Плотность распределения вероятностей нормально распределенной случайной величины X имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где $a = M(X)$, $\sigma = \sigma(X)$, поэтому $a = 4$, $\sigma = 2$.

8.4. Многомерные случайные величины

Если на одном и том же пространстве элементарных событий Ω заданы две случайные величины X и Y, то говорят, что задана *двумерная случайная величина* (X, Y). Общей характеристикой двумерной случайной величины (X, Y) является *функция распределения вероятностей*, которая представляет собой вероятность события $(X < x, Y < y)$:

$$F(x, y) = P(X < x, Y < y).$$

Функция распределения обладает следующими **свойствами**:

1) значения функции распределения удовлетворяют двойному неравенству $0 \leqslant F(x, y) \leqslant 1$;

2) функция распределения есть неубывающая функция по каждому аргументу: $F(x_2, y) \geqslant F(x_1, y)$, если $x_2 > x_1$ и $F(x, y_2) \geqslant F(x, y_1)$, если $y_2 > y_1$;

3) имеют место предельные соотношения:

$$\begin{array}{ll} 1)\ F(-\infty, y) = 0, & 2)\ F(x, -\infty) = 0, \\ 3)\ F(-\infty, -\infty) = 0, & 4)\ F(\infty, \infty) = 1; \end{array}$$

4) при $y = \infty$ функция распределения системы становится функцией распределения составляющей X: $F(x, \infty) = F_1(x)$; при $x = \infty$ функция распределения системы становится функцией распределения составляющей Y: $F(\infty, y) = F_2(y)$.

Используя функцию распределения, можно найти вероятность попадания случайной точки в прямоугольник $x_1 < X < x_2$, $y_1 < Y < y_2$:

$$P(x_1 < X < x_2, y_1 < Y < y_2) =$$

$$= [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)].$$

Закон распределения дискретной двумерной случайной величины (X, Y) задается в виде таблицы распределения, в которой каждой паре значений (x_i, y_i) ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$) ставится в соответствие вероятность появления этой пары $P(X = x_i, Y = y_i) = p_{ij}$:

X/Y	y_1	y_2	...	y_m	...
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1m}	...
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2m}	...
...	...	...	...	...	...
x_n	p_{n1}	p_{n2}	...	p_{nm}	...
...	...	...	...	...	...

где $\sum\limits_i \sum\limits_j p_{ij} = 1$.

Функция распределения вероятностей дискретной случайной величины (X, Y) находится по формуле

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} p_{ij}.$$

Плотностью совместного распределения вероятностей (*двумерной плотностью вероятности*) непрерывной двумерной случайной величины называют вторую смешанную производную от функции распределения:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}.$$

Двумерная плотность вероятности обладает следующими **свойствами**:

1) двумерная плотность вероятности неотрицательна:

$$f(x,y)\geqslant 0;$$

2) двойной несобственный интеграл с бесконечными пределами от двумерной плотности вероятности равен единице:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy=1.$$

Функция распределения вероятностей непрерывной случайной величины выражается через двумерную плотность вероятности по формуле

$$F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)\,dxdy.$$

По известной плотности совместного распределения находятся плотности распределения каждой из составляющих двумерной случайной величины:

$$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy,\quad f_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx,$$

$$F_1(x)=F(x,\infty)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy;$$

$$F_2(y)=F(\infty,y)=\int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dxdy.$$

Условным законом распределения называется распределение одной случайной величины, найденное при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение.

Условная вероятность того, что случайная величина Y (X) примет значение y_j (x_i) при условии, что $X=x_i$ ($Y=y_j$), определяется равенством

$$P(Y=y_j\mid X=x_i)=\frac{P(X=x_i,Y=y_j)}{P(X=x_i)}$$

$$\left(P(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)}\right),$$

$$i = 1, 2, \dots, n; \quad j = 1, 2, \dots, m,$$

или коротко

$$P(y_j \mid x_i) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)} \quad \left(P(x_i \mid y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)}\right).$$

Вероятность совместного появления пары дискретных случайных величин (x_i, y_j) можно записать в виде

$$p(x_i, y_j) = p(x_i)p(y_j/x_i) = p(y_j)p(x_i/y_j),$$

где $p(y_j/x_i)$, $p(x_i/y_j)$ — условные вероятности. Для непрерывных случайных величин плотность вероятности записывается в виде

$$f(x, y) = f(x)f(y/x) = f(y)f(x/y).$$

Условном математическим ожиданием дискретной случайной величины Y при $X = x$ называют сумму произведений возможных значений Y на их условные вероятности:

$$M(Y/X = x) = \sum_{j=1}^{n} y_j p(y_j/x).$$

Для непрерывных случайных величин условное математическое ожидание определяется интегралом

$$M(Y/X = x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y/x)\, dy.$$

Условное математическое ожидание $M(Y/X = x)$ называется также *регрессией* величины Y на X.

Аналогично определяется регрессия X на Y: для дискретной случайной величины

$$M(X/Y = y) = \sum_{i=1}^{m} x_i p(x_i/y);$$

для непрерывной случайной величины

$$M(X/Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x/y)\, dx.$$

Ковариацией или *корреляционным моментом* случайных величин X и Y называется математическое ожидание произведения отклонений этих величин от их математических ожиданий:

$$\mu_{xy} = M[(X - M_x)(Y - M_y)].$$

Для дискретных случайных величин

$$\mu_{xy} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[x_i - M(X)][y_j - M(Y)]p(x_i, y_j);$$

для непрерывных случайных величин

$$\mu_{xy} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[x - M(X)][y - M(Y)]f(x, y)\,dxdy.$$

Коэффициентом корреляции r_{xy} случайных величин X и Y называется отношение ковариации к произведению средних квадратичных отклонений этих величин:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}, \quad -1 \leqslant r_{xy} \leqslant 1.$$

Линейной средней квадратической регрессией Y на X называется функция вида

$$y_x = m_y + r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - m_x),$$

где $m_x = M(X)$, $m_y = M(Y)$, $\sigma_x = \sqrt{D_x}$, $\sigma_y = \sqrt{D_y}$, $r_{xy} = \mu_{xy}/(\sigma_x\sigma_y)$.

Числовые характеристики двумерной случайной величины (X, Y) могут быть записаны в виде матриц:

$K = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \mu_{xy} \\ \mu_{xy} & \sigma_y^2 \end{pmatrix}$ — ковариационная матрица;

$R = \begin{pmatrix} 1 & r_{xy} \\ r_{xy} & 1 \end{pmatrix}$ — корреляционная матрица.

Если каждой паре возможных значений случайных величии X и Y соответствует одно возможное значение случайной величины Z, то Z называют *функцией двух случайных аргументов* X и Y и пишут $Z = \varphi(X, Y)$.

Если X и Y — дискретные независимые случайные величины, то для того, чтобы найти распределение функции $Z = X + Y$ ($Z = XY$), надо найти все возможные значения Z, для чего достаточно сложить (умножить) каждое возможное значение X со всеми возможными значениями Y; вероятности найденных возможных значений Z равны произведениям вероятностей складываемых (умножаемых) значений X и Y. При этом вероятности повторяющихся значений находятся сложением исходных вероятностей.

Пример 8.28. Двумерная дискретная случайная величина (X, Y) задана законом распределения вероятностей:

Y/X	$x_1 = 2$	$x_2 = 3$	$x_3 = 4$	$x_4 = 5$
$y_1 = 1$	0,15	0,10	a	0,20
$y_2 = 2$	b	0,05	0,10	0,15

Найти значения a и b.

Решение. Так как сумма вероятностей равна единице, т.е.

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} P(X = x_i, Y = y_j) = 1,$$

то

$$a + b = 1 - 0{,}15 - 0{,}10 - 0{,}20 - 0{,}05 - 0{,}10 - 0{,}15 = 0{,}25.$$

Этому условию удовлетворяет ответ $a = 0{,}10$, $b = 0{,}15$.

Пример 8.29. Двумерная дискретная случайная величина (X, Y) задана законом распределения вероятностей:

Y/X	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$	$x_4 = 4$
$y_1 = -1$	0,05	0,25	0,10	0,05
$y_2 = 1$	0,15	0,05	0,05	0,30

Вычислить вероятность $P(2 \leqslant X \leqslant 4)$.

Решение.

$$P(2 \leqslant X \leqslant 4) = P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) =$$
$$= (0{,}25 + 0{,}05) + (0{,}10 + 0{,}05) + (0{,}05 + 0{,}30) = 0{,}80.$$

Пример 8.30. Двумерная дискретная случайная величина (X, Y) задана законом распределения вероятностей:

Y/X	$x_1 = -1$	$x_2 = 0$	$x_3 = 2$
$y_1 = 3$	0,25	0,05	0,10
$y_2 = 6$	0,15	0,20	0,25

Определить условный закон распределения вероятностей составляющей X при условии, что составляющая Y приняла значение $y_2 = 6$.

Решение. Найдем вероятности возможных значений X при условии, что составляющая Y приняла значение $y_2 = 6$:

$$p(x_1 \mid y_2) = \frac{p(x_1, y_2)}{p(y_2)} = \frac{0{,}15}{0{,}15 + 0{,}20 + 0{,}25} = \frac{1}{4},$$

$$p(x_2 \mid y_2) = \frac{p(x_2, y_2)}{p(y_2)} = \frac{0{,}20}{0{,}60} = \frac{1}{3},$$

$$p(x_3 \mid y_2) = \frac{p(x_3, y_2)}{p(y_2)} = \frac{0{,}25}{0{,}60} = \frac{5}{12}.$$

Тогда условный закон распределения вероятностей составляющей X примет вид

X	-1	0	2
$p(X \mid y_2)$	$1/4$	$1/3$	$5/12$

Пример 8.31. Двумерная дискретная случайная величина (X, Y) задана законом распределения вероятностей:

Y/X	$x_1 = -1$	$x_2 = 1$	$x_3 = 3$
$y_1 = -1$	0,10	0,15	0,05
$y_2 = 5$	0,25	0,10	0,35

Определить условный закон распределения вероятностей составляющей Y при условии, что составляющая X приняла значение $x_2 = 1$.

Решение. Найдем вероятности возможных значений Y при условии, что составляющая X приняла значение $x_2 = 1$:

$$p(y_1 \mid x_2) = \frac{p(x_2, y_1)}{p(x_2)} = \frac{0{,}15}{0{,}15 + 0{,}10} = \frac{3}{5},$$

$$p(y_2 \mid x_2) = \frac{p(x_2, y_2)}{p(x_2)} = \frac{0{,}10}{0{,}25} = \frac{2}{5}.$$

Тогда условный закон распределения вероятностей составляющей Y примет вид

Y	-1	5
$p(Y \mid x_2)$	$3/5$	$2/5$

Пример 8.32. Дискретные случайные величины X и Y заданы законами распределения вероятностей:

X	-1	2
p	0,3	0,7

Y	1	3
q	0,4	0,6

Определить закон распределения вероятностей функции $Z = X + Y$.

Решение. Чтобы найти возможные значения случайной величины Z, сложим каждое возможное значение X со всеми возможными значениями случайной величины Y:

$$z_1 = -1 + 1 = 0, \quad z_2 = -1 + 3 = 2,$$

$$z_3 = 2 + 1 = 3, \quad z_4 = 2 + 3 = 5.$$

Вероятности этих возможных значений равны произведениям вероятностей слагаемых:

$$p_1 = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}12, \quad p_2 = 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}18,$$

$$p_3 = 0{,}7 \cdot 0{,}4 = 0{,}28, \quad p_4 = 0{,}7 \cdot 0{,}6 = 0{,}42.$$

Тогда закон распределения вероятностей функции $Z = X + Y$ примет вид

Z	0	2	3	5
p	0,12	0,18	0,28	0,42

Пример 8.33. Дискретные случайные величины X и Y заданы законами распределения вероятностей:

X	-1	1
p	0,8	0,2

Y	2	3
q	0,7	0,3

Определить закон распределения вероятностей функции $Z = XY$.

Решение. Чтобы найти возможные значения случайной величины Z, сложим каждое возможное значение X со всеми возможными значениями случайной величины Y:

$$z_1 = -1 + 2 = 1, \quad z_2 = -1 + 3 = 2,$$

$$z_3 = 1 + 2 = 3, \quad z_4 = 1 + 3 = 4.$$

Вероятности этих возможных значений равны произведениям вероятностей слагаемых:

$$p_1 = 0{,}8 \cdot 0{,}7 = 0{,}56, \quad p_2 = 0{,}8 \cdot 0{,}3 = 0{,}24,$$

$$p_3 = 0{,}2 \cdot 0{,}7 = 0{,}14, \quad p_4 = 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}06.$$

Тогда закон распределения вероятностей функции $Z = XY$ примет вид

Z	1	2	3	4
p	0,56	0,24	0,14	0,06

Пример 8.34. Корреляционная матрица для системы случайных величин (X, Y) может иметь вид...

1) $\begin{pmatrix} 1 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 \\ -0{,}5 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 0 & 0{,}6 \\ 0{,}6 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$.

Решение. Корреляционная матрица R состоит из элементов r_{ik}, удовлетворяющих условиям $r_{ik} = r_{ki}$, $r_{ii} = 1$ и $|r_{ik}| \leqslant 1$. Этим условиям удовлетворяет, например, матрица $R = \begin{pmatrix} 1 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 1 \end{pmatrix}$.

8.5. Закон больших чисел и центральная предельная теорема. Случайные процессы

Неравенство Чебышева. Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше чем $1 - D(X)/\varepsilon^2$:

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2}.$$

Теорема Чебышева. Если X_1, X_2, ... , X_n — попарно независимые случайные величины, причем дисперсии их равномерно ограничены (не превышают постоянного числа C), то, как бы мало́ не было положительное число ε, вероятность неравенства

$$\left| \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon$$

будет сколь угодно близка к единице, если число случайных величин достаточно велико, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n} - \frac{M(X_1) + M(X_2) + ... + M(X_n)}{n} \right| < \varepsilon \right) = 1.$$

Теорема Бернулли. Если в каждом из n независимых испытаний вероятность p появления события A постоянна, то сколь угодно близка к единице вероятность того, что отклонение относительной частоты от вероятности p по абсолютной величине будет сколь угодно малым, если число испытаний p достаточно велико:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left| \frac{m}{n} - p \right| < \varepsilon \right) = 1,$$

где m — число появлений события A.

При доказательстве теоремы Бернулли получается оценка, которая носит название *неравенства Бернулли*:

$$P\left\{ \left| \frac{m}{n} - p \right| \leqslant \varepsilon \right\} \geqslant 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Центральная предельная теорема. Если случайная величина X представляет собой сумму очень большого числа взаимно независимых случайных величин, влияние каждой из которых на всю сумму ничтожно мало, то X имеет распределение, близкое к нормальному.

Локальная теорема Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 < p < 1)$, событие наступит ровно k раз (безразлично, в какой последовательности), приближенно равна (тем точнее, чем больше n)

$$P_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x).$$

Здесь

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Таблицы значений функции $\varphi(x)$ даются в приложениях к учебникам по теории вероятностей.

Интегральная теорема Лапласа. Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p $(0 < p < 1)$, событие наступит не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно равна

$$P(k_1, k_2) = \Phi(x'') - \Phi(x').$$

Здесь

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}\,dz$$

— функция Лапласа,

$$x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значения аргументов функции Лапласа для $0 \leqslant x \leqslant 5$ даны в приложениях к учебникам по теории вероятностей, для $x > 5$ $\Phi(x) = 0{,}5$. Функция $\Phi(x)$ нечетная: $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Случайные процессы

Цепью Маркова называется последовательность испытаний, в каждом из которых появляется только одно из k несовместных событий A_i из полной группы. При этом условная вероятность $p_{ij}(s)$ того, что в s-м испытании наступит событие A_j при условии, что в $(s-1)$-м испытании наступило событие A_i, не зависит от результатов предшествующих испытаний.

Однородной называется цепь Маркова, если условная вероятность $p_{ij}(s)$ перехода системы из состояния i в состояние j не зависит от номера испытания s. Вероятность p_{ij} называется *переходной вероятностью*.

Матрицей перехода системы называется матрица, составленная из условных вероятностей перехода:

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1k} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{kk} \end{pmatrix},$$

$$0 \leqslant p_{ij} \leqslant 1, \quad \sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Матрица перехода P_n за n шагов находится как P^n, т.е. $P_n = P^n$.

Матрицы, суммы элементов всех строк которых равны единице, называются *стохастическими*. Если при некотором n все элементы матрицы P^n не равны нулю, то такая матрица переходов называется *регулярной*. Регулярные матрицы переходов задают цепь Маркова, в которой каждое состояние может быть достигнуто через n шагов из любого состояния. Такие цепи Маркова также называются *регулярными*.

Вектор вероятностей состояния системы на n-м шаге определяется как произведение вектора-строки начальных вероятностей и матрицы вероятностей перехода за n шагов:

$$\bar{p}(n) = \bar{p}(0)P^n,$$

или как произведение вектора-строки вероятностей системы на n-м шаге и матрицы вероятностей перехода:

$$\bar{p}(n) = \bar{p}(n-1)P.$$

Пример 8.35. Математическое ожидание случайной величины X равно $M(X) = 52$, а дисперсия — $D(X) = 24$. Оценить вероятность того, что $32 < X < 72$, с использованием неравенства Чебышева.

Решение. Пользуясь неравенством Чебышева вида

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

получаем

$$P(32 < X < 72) = P(|X - 52| < 20) \geqslant 1 - \frac{24}{20^2} = 0{,}94.$$

Пример 8.36. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,3. Всего было куплено 200 билетов. Оценить вероятность того, что количество выигравших билетов будет заключено в пределах от 50 до 70, с использованием неравенства Чебышева.

Решение. Воспользуемся неравенством Чебышева вида
$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geqslant 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$
где случайная величина X — количество выигравших билетов. Тогда
$$M(X) = np = 200 \cdot 0{,}3 = 60, \quad D(X) = npq = 200 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 = 42,$$
$$P(50 < X < 70) = P(|X - 60| < 10) \geqslant 1 - \frac{42}{10^2} = 0{,}58.$$

Пример 8.37. Вероятность изготовления бракованного изделия равна 0,1. Всего было изготовлено 500 изделий. Оценить вероятность того, что бракованных изделий окажется от 8% до 12%, с использованием неравенства Бернулли.

Решение. Воспользуемся неравенством Бернулли вида
$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \geqslant 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2},$$
где $p = 0{,}1$, $q = 0{,}9$, $n = 500$. Тогда
$$P\left(0{,}08 < \frac{m}{n} < 0{,}12\right) = P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}1\right| < 0{,}02\right) \geqslant 1 - \frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{500 \cdot 0{,}02^2} = 0{,}55.$$

Пример 8.38. Вероятность появления некоторого события в каждом из 400 независимых испытаний постоянна и равна 0,6. По какой формуле необходимо вычислить вероятность того, что событие появится ровно 250 раз?

Решение. При больших значениях числа испытаний n и малых вероятностях p расчет по формуле Бернулли $P_n(k) = P_n(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ становится затруднительным, поэтому для вычисления таких вероятностей на практике используется локальная формула Лапласа
$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \quad \text{где} \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Пример 8.39. Вероятность появления некоторого события в каждом из 400 независимых испытаний постоянна и равна

0,2. Вычислить вероятность того, что событие появится ровно 84 раза.

Решение. При больших значениях числа испытаний n и малых вероятностях p расчет по формуле Бернулли $P_n(k) = P_n(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ становится затруднительным, поэтому для вычисления таких вероятностей на практике используется локальная формула Лапласа

$$P_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x),$$

где

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \quad p = 0{,}2, \quad n = 400, \quad k = 84.$$

Следовательно,

$$P_{400}(84) \approx \frac{1}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} \varphi\left(\frac{84 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}}\right) = \frac{1}{8}\varphi(0{,}5).$$

Пример 8.40. Вероятность появления некоторого события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна 0,2. Вычислить вероятность того, что событие появится не менее 18 и не более 24 раз.

Решение. При больших значениях числа испытаний n и малых вероятностях p расчет по формуле Бернулли $P_n(k) = P_n(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ становится затруднительным, особенно когда надо вычислять вероятности не отдельного равенства (события) $X = k$, а неравенств вида $k_1 \leqslant X \leqslant k_2$. Для вычисления таких вероятностей на практике используется интегральная формула Лапласа

$$P(k_1 \leqslant X \leqslant k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа, $x'' = \dfrac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}$, $x' = \dfrac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $k_2 = 24$, $k_1 = 18$, $n = 100$, $p = 0{,}2$. Следовательно,

$$P(18 \leqslant X \leqslant 24) \approx \Phi\left(\frac{24 - 100 \cdot 0{,}2}{\sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}}\right) - \Phi\left(\frac{18 - 100 \cdot 0{,}2}{\sqrt{100 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}}\right) = \\ = \Phi(1) + \Phi(0{,}5).$$

Пример 8.41. Вероятность того, что деталь не пройдет проверку ОТК, равна 0,15. По какой формуле надо вычислить вероятность того, что среди 300 случайно отобранных деталей окажется не менее 50 деталей, не прошедших проверку ОТК?

Решение. При больших значениях числа испытаний n и малых вероятностях p расчет по формуле Бернулли $P_n(k) = P_n(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ становится затруднительным, особенно когда надо вычислять вероятности не отдельного равенства (события) $X = k$, а неравенств вида $k_1 \leqslant X \leqslant k_2$. Для вычисления таких вероятностей на практике используется интегральная формула Лапласа

$$P(k_1 \leqslant X \leqslant k_2) \approx \Phi(x'') - \Phi(x'),$$

где $\Phi(x)$ — функция Лапласа,

$$x'' = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x' = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Пример 8.42. Матрица вероятностей перехода однородной цепи Маркова может иметь вид...

1) $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}5 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}3 & -0{,}2 \\ 0{,}5 & -0{,}4 & 0{,}9 \\ -0{,}4 & 0{,}8 & 0{,}6 \end{pmatrix}$.

Решение. Сумма элементов каждой строки матрицы переходных вероятностей цепи Маркова равна единице, т.е.

$$0 \leqslant p_{ij} \leqslant 1, \quad \sum_{j=1}^{k} p_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, k.$$

Этому условию удовлетворяет лишь одна матрица:

$$\begin{pmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}5 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Пример 8.43. Матрица вероятностей перехода однородной цепи Маркова имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}3 & a & 0{,}2 \\ 0{,}6 & 0{,}1 & b \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Найти значения a и b.

Решение. Матрица вероятностей перехода однородной цепи Маркова имеет вид $P = \{p_{ij}\}_{k\times k}$, где для переходных вероятностей p_{ij} справедливо условие $\sum\limits_{j=1}^{k} p_{ij} = 1$, $i = \overline{1,k}$, т.е. в каждой строке матрицы сумма вероятностей равна 1. Следовательно,

$$0{,}3 + a + 0{,}2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a = 0{,}5,$$

$$0{,}6 + 0{,}1 + b = 1 \quad \Rightarrow \quad b = 0{,}3.$$

Пример 8.44. Матрица вероятностей перехода однородной цепи Маркова имеет вид

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix},$$

а вектор вероятностей состояний цепи Маркова на втором шаге равен $\bar{p}(2) = (0{,}3; 0{,}7)$. Найти вектор вероятностей состояний цепи Маркова на третьем шаге.

Решение. Вектор вероятностей $\bar{p}(3)$ состояний цепи Маркова на третьем шаге можно вычислить как

$$\bar{p}(3) = \bar{p}(2)P = (0{,}3; 0{,}7) \begin{pmatrix} 0{,}9 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{pmatrix} = (0{,}55; 0{,}45).$$

8.6. Статистическое распределение выборки

Пусть для изучения количественного (дискретного или непрерывного) признака X из генеральной совокупности извлечена выборка x_1, x_2, ..., x_k объема n.

Наблюдавшиеся значения x_i признака X называют *вариантами*, а последовательность вариант, записанных в возрастающем порядке, — *вариационным рядом*. Числа наблюдений называют *частотами*, а их отношения к объему выборки $n_i/n = w_i$ — *относительными частотами*.

Статистическим распределением выборки называют перечень вариант x_i вариационного ряда и соответствующих им частот n_i (сумма всех частот равна объему выборки n) или относительных частот w_i (сумма всех относительных частот равна единице).

Эмпирической функцией распределения (*функцией распределения выборки*) называют функцию $F^*(x)$, определяющую для каждого значения x относительную частоту события $X < x$:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n_x — число вариант, меньших x; n — объем выборки.

Эмпирическая функция обладает следующими **свойствами**:

1) значения эмпирической функции принадлежат отрезку $[0;1]$;

2) $F^*(x)$ — неубывающая функция;

3) если x_1 — наименьшая варианта, а x_k — наибольшая, то $F^*(x) = 0$ при $x \leqslant x_k$ и $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

Полигоном частот называют ломаную, отрезки которой соединяют точки с координатами (x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_k, n_k); *полигоном частностей* — с координатами (x_1, p_1^*), (x_2, p_2^*), ..., (x_k, p_k^*).

Гистограммой частот (*частостей*) называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длины h, высоты равны отношению n_i/h — плотности частоты (p_i^*/h или $n_i/(nh)$ — плотности частости). Очевидно, площадь гистограммы частот равна объему выборки, а площадь гистограммы частостей равна единице.

Размахом вариации называется число $R = x_{(n)} - x_{(1)}$, где $x_{(1)} = \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n} x_k$, $x_{(n)} = \max\limits_{1\leqslant k\leqslant n} x_k$ или $R = x_{\max} - x_{\min}$, где $x_{\max}$ — наибольшая, $x_{\min}$ — наименьшая варианта ряда.

Модой Mo^* вариационного ряда называется варианта, имеющая наибольшую частоту.

Медианой Me^* вариационного ряда называется значение признака, приходящееся на середину ряда. Если $n = 2k$ (т.е. ряд $x_{(1)}$, $x_{(2)}$, ..., $x_{(k)}$, $x_{(k+1)}$, ..., $x_{(2k)}$ имеет четное число членов), то $Me^* = (x_{(k)} + x_{(k+1)})/2$; если $n = 2k+1$, то $Me^* = x_{(k+1)}$.

Пример 8.45. Статистическое распределение выборки имеет вид

x_i	3	5	6	9	10
w_i	0,05	0,25	0,33	w_4	0,12

Найти значение относительной частоты w_4.

Решение. Сумма относительных частот равна единице. Поэтому $w_4 = 1 - 0{,}05 - 0{,}25 - 0{,}33 - 0{,}12 = 0{,}25$.

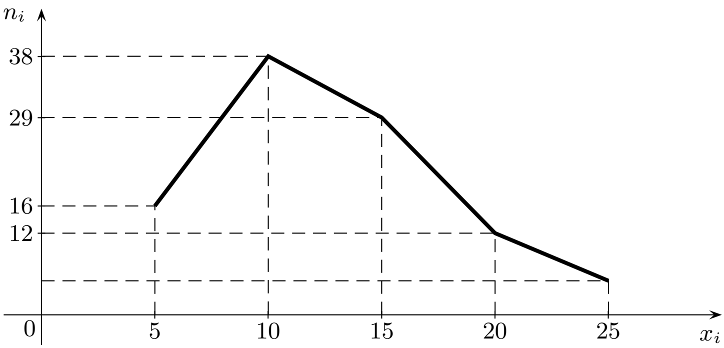
Пример 8.46. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 81$:

x_i	1	2	4	5	6
n_i	5	14	n_3	22	6

Вычислить значение n_3.

Решение. Объем выборки вычисляется по формуле $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$, где n_i — частота варианты x_i. Тогда $n_3 = 81 - 5 - 14 - 22 - 6 = 34$.

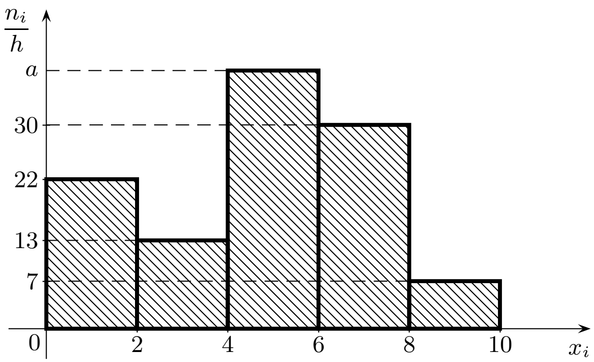
Пример 8.47. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 100$, полигон частот которой имеет вид



Найти относительную частоту варианты $x_i = 25$ в выборке.

Решение. Относительная частота w_i вычисляется по формуле $w_i = n_i/n$, где n_i — частота варианты x_i, а $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ — объем выборки. Вычислим предварительно частоту варианты $x_5 = 25$ как $n_5 = 100 - 16 - 38 - 29 - 12 = 5$. Тогда $w_5 = 5/100 = 0{,}05$.

Пример 8.48. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 220$, гистограмма которой имеет вид



Вычислить значение a.

Решение. Так как объем выборки вычисляется как $n = (7 + 13 + 22 + 30 + a) \cdot h$, где $h = 2$, то

$$a = \frac{220}{2} - 7 - 13 - 22 - 30 = 38.$$

Пример 8.49. Вычислить моду вариационного ряда 2, 4, 5, 7, 7, 7, 9, 9, 11, 12.

Решение. Модой вариационного ряда называется варианта, имеющая наибольшую частоту. Такой вариантой является варианта 7, частота которой равна трем.

Пример 8.50. Вычислить медиану вариационного ряда 11, 14, 16, 17, 17, 17, 18, 19, 21, 22, 22, 23, 25, 25.

Решение. Медианой вариационного ряда называется значение признака генеральной совокупности, приходящееся на середину вариационного ряда. Так как в середине ряда располагаются две варианты 18 и 19, то медиана равна их средней арифметической 18,5.

Пример 8.51. Из генеральной совокупности X извлечена выборка объема $n = 100$:

x_i	1	3	5
n_i	19	n_2	n_3

эмпирическая функция распределения вероятностей которой

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x \leqslant 1, \\ 0{,}19 \quad \text{при } 1 < x \leqslant 3, \\ 0{,}64 \quad \text{при } 3 < x \leqslant 5, \\ 1 \quad \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Найти значения n_2 и n_3.

Решение. По определению $F^*(x) = W(X < x) = n_x/n$, где n_x — число вариант, меньших x. Тогда при $3 < x \leqslant 5$ получаем $F^*(x) = (19 + n_2)/100 = 0{,}64$, т.е. $n_2 = 45$, и $n_3 = 100 - 19 - 45 = 36$.

Пример 8.52. Из генеральной совокупности X извлечена выборка объема $n = 100$:

x_i	1	4	7	10
n_i	35	30	20	15

Найти эмпирическую функцию распределения вероятностей $F^*(x)$ выборки.

Решение. По определению $F^*(x) = W(X < x) = n_x/n$, где n_x — число вариант, меньших x. Тогда

а) при $x \leqslant 1 \quad F^*(x) = n_x/n = 0/100 = 0$;

б) при $1 < x \leqslant 4 \quad F^*(x) = 35/100 = 0{,}35$;

в) при $4 < x \leqslant 7 \quad F^*(x) = (35 + 30)/100 = 0{,}65$;

г) при $7 < x \leqslant 10 \quad F^*(x) = (35 + 30 + 20)/100 = 0{,}85$;

д) при $x > 10 \quad F^*(x) = (35 + 30 + 20 + 15)/100 = 1$.

Следовательно,

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x \leqslant 1, \\ 0{,}35 \quad \text{при } 1 < x \leqslant 4, \\ 0{,}65 \quad \text{при } 4 < x \leqslant 7, \\ 0{,}85 \quad \text{при } 7 < x \leqslant 10, \\ 1 \quad \text{при } x > 10. \end{cases}$$

8.7. Статистические оценки параметров распределения

Статистической оценкой Θ^* неизвестного параметра Θ теоретического распределения называют некоторую функцию $f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ от наблюдаемых случайных величин X_1, X_2, ..., X_n.

Точечной называют статистическую оценку, которая определяется одним числом $\Theta^* = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где x_1, x_2, ..., x_n — результаты n наблюдений над количественным признаком X (выборка).

Несмещенной называют точечную оценку, математическое ожидание которой равно оцениваемому параметру при любом объеме выборки. *Смещенной* называют точечную оценку, математическое ожидание которой не равно оцениваемому параметру.

Несмещенной оценкой генеральной средней (*математического ожидания*) служит выборочная средняя

$$\bar{x}_{\text{в}} = \left(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i \right) \Big/ n,$$

где x_i — варианта выборки; n_i — частота варианты x_i, $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ — объем выборки.

Смещенной оценкой генеральной дисперсии служит выборочная дисперсия

$$D_{\text{в}} = \left(\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2 \right) \Big/ n;$$

эта оценка является смещенной, так как

$$M[D_{\text{в}}] = \frac{n-1}{n} D_{\text{в}}.$$

Более удобна формула

$$D_{\text{в}} = \bar{x^2} - [\bar{x}]^2 = \frac{\sum n_i x_i^2}{n} - \left[\frac{\sum n_i x_i}{n} \right]^2.$$

Несмещенной оценкой генеральной дисперсии служит исправленная выборочная дисперсия

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{в}} = \frac{\sum n_i (x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2}{n-1}.$$

Более удобна формула

$$s^2 = \frac{\sum n_i x_i^2 - \left[\sum n_i x_i \right]^2 / n}{n-1}.$$

Интервальной называют оценку, которая определяется двумя числами — концами интервала, покрывающего оцениваемый параметр.

Доверительным называют интервал, который с заданной надежностью γ покрывает заданный параметр.

Интервальной оценкой (*с надежностью* γ) *математического ожидания* a *нормально распределенного количественного признака* X по выборочной средней $\bar{x}_{\text{в}}$ при известном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности служит доверительный интервал

$$\bar{x}_{\text{в}} - t(\sigma/\sqrt{n}\,) < a < \bar{x}_{\text{в}} + t(\sigma/\sqrt{n}\,),$$

где $t(\sigma/\sqrt{n}\,) = \delta$ — точность оценки; n — объем выборки; t — значение аргумента функции Лапласа $\Phi(t)$, при котором $\Phi(t) = \gamma/2$. При неизвестном σ (и объеме выборки $n < 30$) используется доверительный интервал

$$\bar{x}_{\text{в}} - t_\gamma(s/\sqrt{n}\,) < a < \bar{x}_{\text{в}} + t_\gamma(s/\sqrt{n}\,),$$

где s — «исправленное» выборочное среднее квадратическое отклонение; t_γ находят по таблице приложений учебников по теории вероятностей и математической статистике по заданным n и γ [6, 7].

Интервальной оценкой (с надежностью γ) среднего квадратического отклонения σ нормально распределенного количественного признака X по «исправленному» выборочному среднему квадратическому отклонению s служит доверительный интервал

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q) \quad (\text{при } q < 1),$$

$$0 < \sigma < s(1+q) \quad (\text{при } q > 1),$$

где q находят по таблице приложений учебников по теории вероятностей и математической статистике по заданным n и γ [6, 7].

Пример 8.53. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 50$:

x_i	11	12	14	15
n_i	4	19	20	7

Найти несмещенную оценку математического ожидания.

Решение. Несмещенная оценка математического ожидания вычисляется по формуле $\bar{x}_{\text{в}} = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i\right) / n$, т.е.

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{4 \cdot 11 + 19 \cdot 12 + 20 \cdot 14 + 7 \cdot 15}{50} = 13{,}14.$$

Пример 8.54. Проведено пять измерений (без систематических ошибок) некоторой случайной величины (в мм): 4,5; 5,2; 6,1; 7,8; 8,3. Тогда несмещенная оценка математического ожидания равна...

1) 6,38; 2) 6,42; 3) 6,1; 4) 6,4.

Решение. Несмещенная оценка математического ожидания вычисляется по формуле $\bar{x}_{\text{в}} = \left(\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i\right) / n$, т.е.

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{4{,}5 + 5{,}2 + 6{,}1 + 7{,}8 + 8{,}3}{5} = 6{,}38.$$

Пример 8.55. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 10$:

x_i	10,1	10,4	10,7
n_i	2	4	4

Вычислить выборочное среднее квадратическое отклонение.

Решение. Выборочное среднее квадратическое отклонение вычисляется как $\sigma_{\text{в}} = \sqrt{D_{\text{в}}}$, где

$$D_{\text{в}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i^2}{n} - \left(\frac{\sum\limits_{i=1}^{k} n_i x_i}{n}\right)^2.$$

Тогда

$$D_{\text{в}} = \frac{2 \cdot 10{,}1^2 + 4 \cdot 10{,}4^2 + 4 \cdot 10{,}7^2}{10} -$$

$$-\left(\frac{2 \cdot 10{,}1 + 4 \cdot 10{,}4 + 4 \cdot 10{,}7}{10}\right)^2 = 0{,}0504 \quad \text{и} \quad \sigma_{\text{в}} = \sqrt{0{,}0504}.$$

Пример 8.56. В результате измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 15; 18; 21; 24. Тогда выборочная дисперсия равна...

1) 11,25; 2) 19,5; 3) 15; 4) 21,25.

Решение. Выборочная дисперсия вычисляется по формуле

$$D_{\text{в}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2}{n}, \quad \text{где} \quad \bar{x}_{\text{в}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Вычислив $\bar{x}_{\text{в}} = (15 + 18 + 21 + 24)/4 = 19{,}5$, получаем

$$D_{\text{в}} = \frac{(15-19{,}5)^2 + (18-19{,}5)^2 + (21-19{,}5)^2 + (24-19{,}5)^2}{4} = 11{,}25.$$

Пример 8.57. В результате измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 3,6; 3,8; 4,3. Тогда несмещенная оценка дисперсии равна...

1) 0,13; 2) 0,065; 3) 3,9; 4) 0,7.

Решение. Несмещенная оценка дисперсии вычисляется по формуле

$$s^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x}_{\text{в}})^2}{n-1}, \quad \text{где} \quad \bar{x}_{\text{в}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Вычислив предварительно $\bar{x}_{\text{в}} = (3{,}6+3{,}8+4{,}3)/3 = 3{,}9$, получаем

$$s^2 = \frac{(3{,}6 - 3{,}9)^2 + (3{,}8 - 3{,}9)^2 + (4{,}3 - 3{,}9)^2}{3-1} = 0{,}13.$$

Пример 8.58. Дан доверительный интервал $(12{,}44; 14{,}68)$ для оценки математического ожидания нормально распределенного количественного признака. Тогда точность этой оценки равна...

1) 1,12; 2) 0,01; 3) 2,24; 4) 13,56.

Решение. Точность интервальной оценки (a, b) определяется как $\delta = (b - a)/2$, т.е. $\delta = (14{,}68 - 12{,}44)/2 = 1{,}12$.

Пример 8.59. Дан доверительный интервал $(16{,}64; 18{,}92)$ для оценки математического ожидания нормально распределенного количественного признака. Тогда при увеличении объема выборки этот доверительный интервал может принять вид...

1) $(17{,}18; 18{,}38)$; 2) $(16{,}15; 19{,}41)$;
3) $(17{,}18; 18{,}92)$; 4) $(16{,}15; 18{,}38)$.

Решение. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормально распределенного количественного признака можно представить в виде симметричного интервала $(\bar{x}_{\text{в}} - \delta, \bar{x}_{\text{в}} + \delta)$, где точечная оценка математического ожидания $\bar{x}_{\text{в}} = 17{,}78$, а точность оценки $\delta = 1{,}14$. В случае увеличения объема выборки точность оценки улучшается, т.е. значение δ будет меньше 1,14.

Пример 8.60. Дан доверительный интервал $(-0{,}28; 1{,}42)$ для оценки математического ожидания нормально распределенного количественного признака. Тогда при уменьшении надежности (доверительной вероятности) оценки доверительный интервал может принять вид...

1) $(-0{,}14; 1{,}28)$; 2) $(-0{,}37; 1{,}51)$; 3) $(-0{,}14; 1{,}42)$; 4) $(0; 1{,}42)$.

Решение. Доверительный интервал для оценки математического ожидания нормально распределенного количественного признака можно представить в виде симметричного интервала $(\bar{x}_{\text{в}} - \delta, \bar{x}_{\text{в}} + \delta)$, где точечная оценка математического ожидания $\bar{x}_{\text{в}} = 0{,}57$, а точность оценки $\delta = 0{,}85$. В случае уменьшения надежности точность оценки улучшается, т.е. значение δ будет меньше 0,85.

Пример 8.61. Точечная оценка среднего квадратического отклонения нормально распределенного количественного признака равна 3,5. Тогда его интервальная оценка может иметь вид...

1) $(0; 8{,}33)$; 2) $(3{,}5; 8{,}33)$; 3) $(0; 3{,}5)$; 4) $(-1{,}33; 8{,}33)$.

Решение. Интервальной оценкой среднего квадратического отклонения σ нормально распределенного количественного признака служит доверительный интервал $s(1-q) < \sigma < s(1+q)$ при $q < 1$ или $0 < \sigma < s(1+q)$ при $q > 1$, где q находят по соответствующей таблице приложений. Этому определению удовлетворяет интервал $(0; 8{,}33)$.

Пример 8.62. Точечная оценка вероятности биномиально распределенного количественного признака равна 0,38. Тогда его интервальная оценка может иметь вид...

1) $(0{,}25; 0{,}51)$; 2) $(-0{,}05; 0{,}81)$; 3) $(0{,}38; 0{,}51)$; 4) $(0{,}29; 0{,}49)$.

Решение. Интервальная оценка (p_1, p_2) вероятности p биномиально распределенного количественного признака симметрична относительно его точечной оценки и $p_1 > 0$. Таким свойствам удовлетворяет интервал $(0{,}25; 0{,}51)$.

8.8. Корреляционный анализ статистических гипотез

Если принятое решение о законе распределения генеральной совокупности или о числовых значениях его параметров проверяется по выборочным данным, то говорят о проверке статистических гипотез. Проверке подвергается гипотеза об отсутствии разности между принятым и найденным по выборке значениями исследуемого параметра. Такую гипотезу называют *нулевой*. Противоположную ей гипотезу называют *альтернативной*.

Схема проверки нулевой гипотезы следующая.

1. Рассматривая выборочные данные x_1, x_2, ..., x_n и учитывая конкретные условия задачи, принимают H_0 — нулевую гипотезу и H_1 — альтернативную гипотезу, конкурирующую с H_0.

2. Так как решение о справедливости гипотезы H_0 принимается на основе выборочных данных, могут возникать ошибки двух родов:

— гипотеза H_0 отвергается, а на самом деле она верна — это *ошибка первого рода*; вероятность ошибки первого рода равна уровню значимости α, т.е. $\alpha = P_{H_0}(H_1)$;

— гипотеза H_0 принимается, а на самом деле она неверна — это *ошибка второго рода*; вероятность ошибки второго рода равна β, т.е. $\beta = P_{H_1}(H_0)$.

Соответственно, вероятность принять верную гипотезу равна $P_{H_0}(H_0) = 1 - \alpha$, а вероятность отвергнуть неверную гипотезу H_0 равна $P_{H_1}(H_1) = 1 - \beta$.

3. Используя выборочные данные, вводят статистический критерий — некоторую функцию K, зависящую от условий решаемой статистической задачи. Эти функции, являясь случайными величинами, подчинены некоторому известному, затабулированному закону распределения (t-распределение, χ^2-распределение или нормальное распределение).

4. В зависимости от принятого уровня значимости из области допустимых значений функции критерия K выделяют критическую область ω. Далее руководствуются следующим правилом: если вычисленное по выборке значение критерия K попадает в критическую область, то H_0 отвергается и принимается гипотеза H_1. При этом возможно, что H_0 справедлива и, следовательно, совершена ошибка первого рода, вероятность которой α, т.е. $P(K \in \omega) = \alpha$.

Возможны три варианта расположения критической области ω:

— *правосторонняя критическая область* (рис. 8.2, *а*), состоящая из интервала $(k_{\text{кр}}^{\text{п}}, \infty)$, где $k_{\text{кр}}^{\text{п}}$ определяется из условия $P(K > k_{\text{кр}}^{\text{п}}) = \alpha$;

— *левосторонняя критическая область* (рис. 8.2, *б*), состоящая из интервала $(-\infty, k_{\text{кр}}^{\text{л}})$, где $k_{\text{кр}}^{\text{л}}$ определяется из условия $P(K < k_{\text{кр}}^{\text{л}}) = \alpha$;

— *двусторонняя критическая область* (рис. 8.2, *в*), состоящая из интервалов $(-\infty, k_{\text{кр}}^{\text{л}})$ и $(k_{\text{кр}}^{\text{п}}, \infty)$, где точки $k_{\text{кр}}^{\text{л}}$ и $k_{\text{кр}}^{\text{п}}$ определяются из условий $P(K < k_{\text{кр}}^{\text{л}}) = \alpha/2$ и $P(K > k_{\text{кр}}^{\text{п}}) = \alpha/2$.

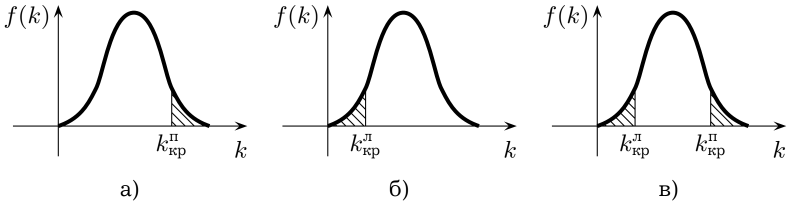


Рис. 8.2

5. По выборочным данным находят числовое значение критерия k_r. Если k_r попадает в критическую область ω, то гипотеза H_0 отвергается и принимается альтернативная гипотеза H_1. Если k_r не попадает в критическую область, то гипотеза H_0 принимается.

При проверке статистических гипотез учитываются конкретные условия рассматриваемой задачи.

Доверительные интервалы для неизвестных параметров нормальных распределений приведены в табл. 8.1. В этой таблице: n — объем выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$; s_p — квантиль уровня p нормированного нормального распределения; $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$ — вы-

Таблица 8.1

Доверительные интервалы для неизвестных параметров нормальных распределений

№ п/п	Параметр	Информация о других параметрах распределения	Доверительный интервал параметра с доверительной вероятностью γ
1	m_x	σ_x известно	$\bar{x} - s_{(\gamma+1)/2}\dfrac{\sigma_x}{\sqrt{n}} < m_x < \bar{x} + s_{(\gamma+1)/2}\dfrac{\sigma_x}{\sqrt{n}}$
2	m_x	σ_x неизвестно	$\bar{x} - t_{n-1,(1-\gamma)/2}\dfrac{\sqrt{s^2}}{\sqrt{n}} < m_x < \bar{x} + t_{n-1,(1-\gamma)/2}\dfrac{\sqrt{s^2}}{\sqrt{n}}$
3	σ_x^2	m_x известно	$s^2\dfrac{n}{\chi^2_{n,(1-\gamma)/2}} < \sigma_x^2 < s^2\dfrac{n}{\chi^2_{n,(\gamma+1)/2}}$
4	σ_x^2	m_x неизвестно	$s^2\dfrac{n-1}{\chi^2_{n-1,(1-\gamma)/2}} < \sigma_x^2 < s^2\dfrac{n-1}{\chi^2_{n-1,(\gamma+1)/2}}$
5	σ_x	m_x неизвестно	$\sqrt{\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,(1-\gamma)/2}}} < \sigma_x < \sqrt{\dfrac{(n-1)s^2}{\chi^2_{n-1,(\gamma+1)/2}}}$
6	$\dfrac{\sigma_{x_1}^2}{\sigma_{x_2}^2}$	m_{x_1}, m_{x_2} неизвестны	$\dfrac{s_1^2}{s_2^2}\dfrac{1}{F_{n_1-1,n_2-1,(1-\gamma)/2}} < \dfrac{\sigma_{x_1}^2}{\sigma_{x_2}^2} < \dfrac{s_1^2}{s_2^2}\dfrac{1}{F_{n_2-1,n_1-1,(1-\gamma)/2}}$
7	ρ	m_{x_1}, m_{x_2} и σ_{x_1}, σ_{x_2} неизвестны	$th\left\{\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\widehat{\rho}}{1-\widehat{\rho}} - \dfrac{s_{(\gamma+1)/2}}{\sqrt{n-3}}\right\} < \rho < th\left\{\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\widehat{\rho}}{1-\widehat{\rho}} + \dfrac{s_{(\gamma+1)/2}}{\sqrt{n-3}}\right\}$, это справедливо для больших n ($n > 10$)

борочное среднее; $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$ — выборочное значение дисперсии СВ X; $\rho = K_{xy} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ — коэффициент корреляции СВ X и Y (выборочный корреляционный момент величин); $\widehat{\rho} = r_{xy} = K_{xy}/(s_x s_y)$ — выборочный коэффициент корреляции СВ X и Y, где s_x^2, s_y^2 — выборочные дисперсии величин X и Y; $\chi^2_{\nu,\alpha}$ — значение распределения Пирсона; $t_{\nu,\alpha}$ — значение t-распределения Стъюдента; $F_{\nu_1,\nu_2,\alpha}$ — значение F-распределения Фишера; $l_0 = r_{xy}(s_y/s_x) = K_{xy}/s_x^2$ — выборочный коэффициент регрессии Y по X; $y - \bar{y} = l_0(x - \bar{x})$ — выборочное уравнение регрессии; $x_y - \bar{x} = r_{\text{в}}(\sigma_x/\sigma_y)(y - \bar{y})$ — выборочное уравнение прямой линии регрессии X на Y.

Порядок проверки статистических гипотез:

1) сформулировать проверяемую (H_0) и альтернативную (H_1) гипотезы;

2) выбрать статистику T критерия для проверки гипотезы H_0 (см. табл. 8.2);

3) определить закон распределения статистики T при условии, что верна гипотеза H_0 (см. табл. 8.2);

4) задается приемлемый уровень значимости α и определяется критическая область K так, чтобы вероятность ошибки I рода не превышала α, а величина ошибки II рода была минимальной;

5) вычислить значение статистики T_0 для данной выборки наблюдений;

6) принять статистическое решение: а) если $T_0 \in K$, то гипотезу H_0 отклоняем; б) если $T_0 \notin K$, то гипотезу H_0 принимаем.

Пример 8.63. Выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X имеет вид $y = 2{,}7 + 0{,}6x$, а выборочные средние квадратические отклонения равны $\sigma_x = 0{,}7$, $\sigma_y = 2{,}8$. Тогда выборочный коэффициент корреляции равен...

1) 0,15; 2) −2,4; 3) 2,4; 4) −0,15.

Решение. Выборочный коэффициент корреляции $r_{\text{в}}$ можно вычислить из соотношения $\rho_{xy} = r_{\text{в}}(\sigma_y/\sigma_x)$. Тогда

$$r_{\text{в}} = \rho_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0{,}6 \cdot \frac{0{,}7}{2{,}8} = 0{,}15.$$

Таблица 8.2

№ п/п	Проверяемая гипотеза H_0	Статистика $T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$	Распределение статистики при справедливой H_0
1	$m = m_0$, где m_0 — фиксированное число $X \sim N(m, \sigma)$	Если σ известна, то $\dfrac{\bar{x} - m_0}{\sigma/\sqrt{n}},\ \bar{x} = \dfrac{1}{n}\sum_i x_i$	Нормированное нормальное распределение $N(0; 1)$
		Если σ неизвестна, то $\dfrac{\bar{x} - m_0}{s/\sqrt{n}},\ s = \sqrt{\dfrac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$	t-распределение Стъюдента с $\nu = n - 1$ степенями свободы
2	$\sigma^2 = \sigma_0^2$, где σ_0^2 — фиксированное число $X \sim N(m, \sigma)$	Если m известна, то $\dfrac{ns^2}{\sigma_0^2},\ s^2 = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - m)^2$	χ^2-распределение с $\nu = n$ степенями свободы
		Если m неизвестна, то $\dfrac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2},\ s^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$	χ^2-распределение с $\nu = n - 1$ степенями свободы
3	$m_1 = m_2$ $X_1 \sim N(m_1, \sigma_1)$ $X_2 \sim N(m_2, \sigma_2)$	Если σ_1^2, σ_2^2 известны, то $\dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	Нормированное нормальное распределение $N(0; 1)$
		Если σ_1^2, σ_2^2 неизвестны, то $\dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\dfrac{s_1^2}{n_1} + \dfrac{s_2^2}{n_2}}}$	t-распределение Стъюдента с $\nu = \dfrac{(s_1^* + s_2^*)^2}{\dfrac{(s_1^*)^2}{n_1 - 1} + \dfrac{(s_2^*)^2}{n_2 - 1}}$ степенями свободы, где $s_1^* = s_1^2/n_1$, $s_2^* = s_2^2/n_2$
		Если $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ неизвестны, то $\dfrac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s\sqrt{\dfrac{1}{n_1 + \frac{1}{n_2}}}}$, $s^2 = \alpha s_1^2 + (1 - \alpha)s_2^2$, $\alpha = \dfrac{n_1 - 1}{n_1 + n_2 - 2}$	t-распределение Стъюдента с $\nu = n_1 + n_2 - 2$ степенями свободы
4	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $X_1 \sim N(m_1, \sigma_1)$ $X_2 \sim N(m_2, \sigma_2)$	Если m_1 и m_2 неизвестны, то s_1^2/s_2^2, где s_1^2 — большее из s_1^2 и s_2^2; n_1 и n_2 — объемы выборки, соответствующие числителю и знаменателю	F-распределение Фишера с ν_1, ν_2 степенями свободы, где $\nu_1 = n_1 - 1$, $\nu_2 = n_2 - 1$

Пример 8.64. Выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X имеет вид $y = -4{,}8 + 1{,}2x$. Тогда выборочный коэффициент корреляции может быть равен...

1) 0,82; 2) $-0{,}82$; 3) 1,2; 4) $-1{,}2$.

Решение. Значение выборочного коэффициента корреляции, во-первых, принадлежит промежутку $[-1; 1]$, а во-вторых, его знак совпадает со знаком выборочного коэффициента регрессии. Этим условиям удовлетворяет значение 0,82.

Пример 8.65. Выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X имеет вид $\bar{y}_x - 2{,}5 = 1{,}34(x + 3{,}46)$. Тогда выборочное среднее признака X равно...

1) $-3{,}46$; 2) 3,46; 3) 2,5; 4) $-2{,}5$.

Решение. Выборочное уравнение прямой линии регрессии Y на X имеет вид $\bar{y}_x - \bar{y} = \rho_{xy}(x - \bar{x})$. Тогда выборочное среднее признака X равно $-3{,}46$.

Пример 8.66. Левосторонняя критическая область может определяться из соотношения...

1) $P(K < -1{,}72) = 0{,}05$;
2) $P(K > 1{,}72) = 0{,}05$;
3) $P(K < -1{,}72) + P(K > 1{,}72) = 0{,}10$;
4) $P(-1{,}72 < K < 1{,}72) = 0{,}90$.

Решение. Левосторонней называют критическую область, определяемую соотношением $P(K < k_{\text{кр}}) = \alpha$, где $k_{\text{кр}}$ — отрицательное число, а α — уровень значимости. Таким соотношением является $P(k < -1{,}72) = 0{,}05$.

Пример 8.67. Соотношением вида $P(K < -2{,}09) = 0{,}025$ можно определить...

1) левостороннюю критическую область;
2) правостороннюю критическую область;
3) двустороннюю критическую область;
4) область принятия гипотезы.

Решение. Данное соотношение определяет левостороннюю критическую область, так как левосторонней называют критическую область, определяемую соотношением $P(K < -k_{\text{кр}}) = \alpha$, где $k_{\text{кр}}$ — положительное число, а α — уровень значимости.

Пример 8.68. Соотношением вида

$$P(K < -2{,}78) + P(K > 2{,}78) = 0{,}01$$

можно определить...

1) двустороннюю критическую область;
2) правостороннюю критическую область;
3) левостороннюю критическую область;
4) область принятия гипотезы.

Решение. Данное соотношение определяет двустороннюю критическую область, так как двусторонней называют критическую область, определяемую, например, соотношением вида $P(K < -k_{\text{кр}}) + P(K > k_{\text{кр}}) = \alpha$, где $k_{\text{кр}}$ — положительное число, а α — уровень значимости.

Пример 8.69. Основная гипотеза имеет вид H_0: $\sigma^2 = 3{,}4$. Тогда конкурирующей может являться гипотеза...

1) H_1: $\sigma^2 < 3{,}4$; 2) H_1: $\sigma^2 \geqslant 3{,}4$;
3) H_1: $\sigma^2 \leqslant 3{,}4$; 4) H_1: $\sigma^2 > 3$.

Решение. Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу, которая противоречит основной гипотезе. Условию $\sigma^2 = 3{,}4$ противоречит H_1: $\sigma^2 < 3{,}4$.

Пример 8.70. Наблюдаемое значение критерия проверки гипотезы H_0: $D(X) = 5{,}2$ о равенстве неизвестной генеральной дисперсии нормальной совокупности гипотетическому (предполагаемому) значению $\sigma_0^2 = 5{,}2$ может иметь вид...

1) $\chi^2_{\text{набл}} = \dfrac{(n-1)s^2}{5{,}2}$; 2) $\chi^2_{\text{набл}} = \dfrac{n-1}{\sqrt{5{,}2}}s$;

3) $\chi^2_{\text{набл}} = \dfrac{(n+1)s^2}{5{,}2}$; 4) $\chi^2_{\text{набл}} = \dfrac{n+1}{\sqrt{5{,}2}}s$.

Решение. Для проверки гипотезы H_0: $D(X) = \sigma_0^2$ о равенстве неизвестной генеральной дисперсии нормальной совокупности гипотетическому (предполагаемому) значению σ_0^2 применяется статистический критерий $\chi^2 = (n-1)s^2/\sigma_0^2$ (см. табл. 8.2), который имеет хи-квадрат распределение с $k = n - 1$ степенями свободы, где n — объем выборки, по которой вычисляется исправленная дисперсия s^2.

Пример 8.71. Основная гипотеза имеет вид H_0: $a = 24{,}5$. Тогда конкурирующей может являться гипотеза...

1) H_1: $a > 24{,}5$; 2) H_1: $a \leqslant 24{,}5$;
3) H_1: $a \geqslant 24{,}5$; 4) H_1: $a < 24{,}5$.

Решение. Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу, которая противоречит основной гипотезе. Условию $a = 24{,}5$ противоречит H_1: $a > 24{,}5$.

Пример 8.72. Наблюдаемое значение критерия проверки гипотезы H_0: $M(X) = M(Y)$ о равенстве средних двух нормальных генеральных совокупностей с известными дисперсиями $D(X)$ и $D(Y)$ может иметь вид...

1) $Z_{\text{набл}} = \dfrac{\bar{x}_{\text{в}} - \bar{y}_{\text{в}}}{\sqrt{\dfrac{D(X)}{80} + \dfrac{D(Y)}{60}}}$; 2) $Z_{\text{набл}} = \dfrac{\bar{x}_{\text{в}} - \bar{y}_{\text{в}}}{\sqrt{\dfrac{D(X)}{50} - \dfrac{D(Y)}{70}}}$;

3) $Z_{\text{набл}} = \dfrac{\bar{x}_{\text{в}} - \bar{y}_{\text{в}}}{\sqrt{D(X) + D(Y)}}$; 4) $Z_{\text{набл}} = \dfrac{\bar{x}_{\text{в}} - \bar{y}_{\text{в}}}{\sqrt{D(X) - D(Y)}}$.

Решение. Для проверки гипотезы H_0: $M(X) = M(Y)$ о равенстве средних двух нормальных генеральных совокупностей с известными дисперсиями $D(X)$ и $D(Y)$ применяется статистический критерий $Z = M(\bar{X} - \bar{Y})/\sigma(\bar{X} - \bar{Y})$, который имеет стандартное нормальное распределение. Тогда наблюдаемое значение критерия определяется как

$$Z_{\text{набл}} = \frac{\bar{x}_{\text{в}} - \bar{y}_{\text{в}}}{\sqrt{\dfrac{D(X)}{n} + \dfrac{D(Y)}{m}}},$$

где n и m — объемы независимых выборок, по которым вычислены выборочные средние $\bar{x}_{\text{в}}$ и $\bar{y}_{\text{в}}$ соответственно. Следовательно, например, при $n = 80$, $m = 60$ получаем

$$Z_{\text{набл}} = \frac{\bar{x}_{\text{в}} - \bar{y}_{\text{в}}}{\sqrt{\dfrac{D(X)}{80} + \dfrac{D(Y)}{60}}}.$$

Примеры тестовых заданий

Задание 1. В круге радиусом $R = 4$ см наудачу поставлена точка. Тогда вероятность того, что расстояние от точки до окружности, ограничивающей этот круг, не превосходит 1 см, равна...

Варианты ответов:

1) $\dfrac{7}{16}$; 2) $\dfrac{9}{16}$; 3) $\dfrac{1}{2}$; 4) $\dfrac{1}{4}$.

Задание 2. Для посева берут семена из двух пакетов. Вероятности прорастания семян в первом и втором пакетах соответственно равны $0{,}4$ и $0{,}7$. Взяли по одному семени из каждого пакета. Тогда вероятность того, что прорастет хотя бы одно семя, равна...

Варианты ответов:

1) $0{,}82$; 2) $0{,}28$; 3) $0{,}18$; 4) $0{,}72$.

Задание 3. Из 500 ламп 300 принадлежат первой партии, остальные — второй. В первой партии 4%, а во второй 3% бракованных ламп. Наудачу выбирается одна лампа, которая оказалась бракованной. Тогда вероятность того, что эта лампа из второй партии, равна...

Варианты ответов:

1) $1/3$; 2) $1/2$; 3) $0{,}4$; 4) $0{,}012$.

Задание 4. Бросаются три игральные кости. Тогда вероятность того, что на всех игральных костях выпадет по четыре очка, равна...

Варианты ответов:

1) $\frac{1}{216}$; 2) $\frac{1}{64}$; 3) $\frac{1}{3}$; 4) $\frac{8}{27}$.

Задание 5. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен на «отлично», равна $0{,}8$, второй — $0{,}4$. Вероятность того, что он сдаст на «отлично» только один экзамен, равна...

Варианты ответов:

1) $0{,}56$; 2) $0{,}6$; 3) $0{,}48$; 4) $0{,}32$.

Задание 6. Имеется три урны, содержащие по 5 белых и 5 красных шаров, две урны, содержащие по 6 белых и 4 красных шара, и пять урн, содержащих по 4 белых и 6 красных шаров. Из наудачу взятой урны извлекается один шар. Тогда вероятность того, что этот шар красный, равна...

Варианты ответов:

1) 0,53; 2) 0,47; 3) 0,5; 4) 0,12.

Задание 7. В первом ящике находятся шары с номерами от 1 до 5, а во втором — с номерами от 6 до 10. Из каждого ящика вынули по одному шару. Тогда вероятность того, что сумма номеров вынутых шаров не более 10, равна...

Варианты ответов:

1) 0,4; 2) 0,24; 3) 0,8; 4) 0,6.

Задание 8. В урну, в которой лежат 2 красных, 3 черных и 3 белых шара, добавляют два белых шара. После этого наудачу по одному извлекают три шара без возвращения. Тогда вероятность того, что все три шара будут белыми, равна...

Варианты ответов:

1) $\frac{1}{12}$; 2) $\frac{6}{125}$; 3) $\frac{11}{12}$; 4) $\frac{1}{2}$.

Задание 9. В первой урне 2 белых и 3 черных шаров, во второй — 5 белых и 5 черных, в третьей — 7 белых и 8 черных. Из наудачу взятой урны извлекается один шар. Тогда вероятность того, что этот шар белый, равна...

Варианты ответов:

1) $\frac{41}{90}$; 2) $\frac{7}{15}$; 3) $\frac{7}{75}$; 4) $\frac{41}{30}$.

Задание 10. Детали поставляются с двух заводов: 60% с первого завода, 40% со второго. Вероятность того, что деталь с первого завода окажется бракованной, равна 0,05. Вероятность того, что деталь со второго завода окажется бракованной, равна 0,15. Наудачу взятая деталь оказалась бракованной. Тогда вероятность того, что эта деталь со второго завода, равна...

Варианты ответов:

1) 2/3; 2) 1/3; 3) 0,09; 4) 0,06.

Задание 11. Вероятность производства стандартного изделия равна 0,9. Тогда вероятность того, что из пяти произведенных изделий стандартных будет меньше двух, равна...

Варианты ответов:

1) 0,00045; 2) 0,0001; 3) 0,99954; 4) 0,00046.

Задание 12. Вероятность появления некоторого события в каждом из 2 000 независимых испытаний постоянна и равна 0,002. Тогда вероятность того, что событие появится ровно 5 раз, следует вычислить с использованием...

Варианты ответов:

1) формулы полной вероятности;
2) формулы Байеса;
3) интегральной формулы Лапласа;
4) формулы Пуассона.

Задание 13. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	9	10	11	12
p	0,35	0,25	0,15	0,25

Тогда вероятность $P(10 \leqslant X \leqslant 12)$ равна...

Варианты ответов:

1) 0,65; 2) 0,15; 3) 0,35; 4) 0,40.

Задание 14. Для дискретной случайной величины X

X	5	6	7	8
p	p_1	p_2	p_3	p_4

функция распределения вероятностей имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x \leqslant 5, \\ 0{,}14 \quad \text{при } 5 < x \leqslant 6, \\ 0{,}81 \quad \text{при } 6 < x \leqslant 7, \\ p \quad \text{при } 7 < x \leqslant 8, \\ 1 \quad \text{при } x > 8. \end{cases}$$

Тогда значение параметра p может быть равно...

Варианты ответов:

1) 0,92; 2) 1,95; 3) 0,12; 4) 0,43.

Задание 15. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	4	6	8
p	0,2	0,4	0,4

Тогда ее математическое ожидание равно...

Варианты ответов:

1) 6,0; 2) 7,0; 3) 6,6; 4) 6,4.

Задание 16. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	3	6
p	0,1	0,9

Тогда ее дисперсия равна...

Варианты ответов:

1) 65,79; 2) 0,81; 3) 0,9; 4) 33,3.

Задание 17. Дискретная случайная величина X задана законом распределения вероятностей:

X	4	5	6	7	8
p	0,10	0,35	a	0,10	b

Тогда значения a и b могут быть равны...

Варианты ответов:

1) $a = 0{,}20$, $b = 0{,}25$; 2) $a = 0{,}30$, $b = 0{,}25$;

3) $a = 0{,}10$, $b = 0{,}15$; 4) $a = 0{,}45$, $b = 0{,}10$.

Задание 18. Если все возможные значения дискретной случайной величины X увеличить в три раза, то ее дисперсия...

Варианты ответов:

1) увеличится в девять раз;
2) уменьшится в девять раз;

3) не изменится;
4) увеличится в три раза.

Задание 19. Проводятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна 0,75. Тогда вероятность того, что при проведении одиннадцати испытаний событие A появится ровно четыре раза, вычисляется как...

Варианты ответов:

1) $P_{11}(X=4) = C_{11}^4 \cdot 0{,}75^4 \cdot 0{,}25^7$;

2) $P_{11}(X=4) = 0{,}75^4 \cdot 0{,}25^7$;

3) $P_{11}(X=4) = 0{,}25^4 \cdot 0{,}75^7$;

4) $P_{11}(X=4) = C_{11}^4 \cdot 0{,}75^7 \cdot 0{,}25^4$.

Задание 20. Вероятность производства бракованного изделия равна 0,004. Тогда вероятность того, что при производстве 1 000 изделий будет изготовлено не более трех бракованных, можно определить как...

Варианты ответов:

1) $\frac{71}{3}e^{-4}$; 2) $13e^{-4}$; 3) $\frac{103}{3}e^{-4}$; 4) $\frac{68}{3}e^{-4}$.

Задание 21. Среднее число судов, приходящих в порт для разгрузки в течение суток, равно 6. Тогда вероятность того, что в течение двух суток под разгрузку встанут ровно 10 судов, можно вычислить как...

Варианты ответов:

1) $\frac{12^{10}}{10!}e^{-12}$; 2) $\frac{6^{10}}{10!}e^{-6}$; 3) $\frac{10^{12}}{12!}e^{-10}$; 4) $\frac{e^{-12}}{10!}$.

Задание 22. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ x/8 & \text{при } 0 < x \leqslant 4, \\ 0 & \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Тогда вероятность $P(-1 < X < 2)$ равна...

Варианты ответов:

1) 0,25; 2) 0,50; 3) 0,3125; 4) 0,1875.

Задание 23. Непрерывная случайная величина X задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x \leqslant 0, \\ x/5 \quad \text{при } 0 < x \leqslant 5, \\ 1 \quad \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Тогда ее плотность распределения вероятностей имеет вид...

Варианты ответов:

1) $f(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{при } x < 0, \\ 1/5 \quad \text{при } 0 < x < 5, \\ 0 \quad \text{при } x > 5; \end{cases}$

2) $f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x < 0, \\ x^2/10 \quad \text{при } 0 < x < 5, \\ 0 \quad \text{при } x > 5; \end{cases}$

3) $f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x < 0, \\ 1/5 \quad \text{при } 0 < x < 5, \\ 1 \quad \text{при } x > 5; \end{cases}$

4) $f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x < 0, \\ 1/5 \quad \text{при } 0 < x < 5, \\ 0 \quad \text{при } x > 5. \end{cases}$

Задание 24. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x \leqslant 0, \\ 2x/81 \quad \text{при } 0 < x \leqslant 9, \\ 0 \quad \text{при } x > 9. \end{cases}$$

Тогда ее математическое ожидание равно...

Варианты ответов:

1) 9,0; 2) 6,0; 3) 4,5; 4) 3,0.

Задание 25. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины имеет вид

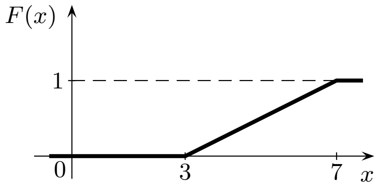
$$f(x) = \begin{cases} C & \text{при } x \in (-3; 6), \\ 0 & \text{при } x \notin (-3; 6). \end{cases}$$

Тогда значение C равно...

Варианты ответов:

1) 1/9; 2) 1/3; 3) 9; 4) 3.

Задание 26. Функция распределения вероятностей равномерно распределенной случайной величины X изображена на рисунке:



Тогда ее дисперсия равна...

Варианты ответов:

1) 4/3; 2) 25/3; 3) 1/3; 4) 5,0.

Задание 27. Равномерно распределенная случайная величина задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0{,}25 & \text{при } x \in (4; 8), \\ 0 & \text{при } x \notin (4; 8). \end{cases}$$

Тогда ее функция распределения вероятностей имеет вид...

Варианты ответов:

1) $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 4, \\ 0{,}25x - 1{,}0 & \text{при } 4 < x < 8, \\ 1 & \text{при } x \geqslant 8; \end{cases}$

2) $F(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \leqslant 4, \\ 0{,}25x - 1{,}0 & \text{при } 4 < x < 8, \\ 0 & \text{при } x \geqslant 8; \end{cases}$

3) $F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x \leqslant 4, \\ 0{,}25x - 1{,}0 \quad \text{при } 4 < x < 8, \\ 0 \quad \text{при } x \geqslant 8; \end{cases}$

4) $F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x \leqslant 4, \\ 0{,}25x + 1{,}0 \quad \text{при } 4 < x < 8, \\ 1 \quad \text{при } x \geqslant 8. \end{cases}$

Задание 28. Случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x < 0, \\ 6e^{-6x} \quad \text{при } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Тогда вероятность $P(0{,}1 < X < 0{,}7)$ определяется как...

Варианты ответов:

1) $e^{-0,6} + e^{-4,2}$;

2) $e^{-0,6} - e^{-4,2}$;

3) $e^{-4,2} - e^{-0,6}$;

4) $6(e^{-0,6} - e^{-4,2})$.

Задание 29. Случайная величина X распределена по показательному закону с плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x < 0, \\ 4e^{-4x} \quad \text{при } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Тогда ее математическое ожидание и дисперсия равны...

Варианты ответов:

1) $M(X) = 1/4$, $D(X) = 1/16$;

2) $M(X) = 1/4$, $D(X) = 1/4$;

3) $M(X) = 1/16$, $D(X) = 1/16$;

4) $M(X) = 1/16$, $D(X) = 1/4$.

Задание 30. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $M(X) = -14$ и дисперсией $D(X) = 9$. Тогда ее плотность распределения вероятностей имеет вид...

Варианты ответов:

1) $f(x) = \dfrac{1}{9\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-14)^2}{162}}$; 2) $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+14)^2}{18}}$;

3) $f(x) = \dfrac{1}{9\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+14)^2}{162}}$; 4) $f(x) = \dfrac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-14)^2}{18}}$.

Задание 31. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \frac{1}{3\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-17)^2}{18}}.$$

Тогда вероятность того, что в результате испытания X примет значение, заключенное в интервале $(14;23)$, можно вычислить как...

Варианты ответов:

1) $P(14 < X < 23) = \Phi(2) + \Phi(1)$, где $\Phi(x)$ — функция Лапласа;

2) $P(14 < X < 23) = \Phi(2) - \Phi(1)$, где $\Phi(x)$ — функция Лапласа;

3) $P(14 < X < 23) = \dfrac{1}{2}(\Phi(2) + \Phi(1))$, где $\Phi(x)$ — функция Лапласа;

4) $P(14 < X < 23) = \dfrac{1}{2}(\Phi(2) - \Phi(1))$, где $\Phi(x)$ — функция Лапласа.

Задание 32. Двумерная дискретная случайная величина (X,Y) задана законом распределения вероятностей:

X/Y	$x_1 = 1$	$x_2 = 2$	$x_3 = 3$	$x_4 = 4$
$y_1 = 3$	0,05	0,10	0,15	a
$y_2 = 5$	0,20	0,10	b	0,05

Тогда значения a и b могут быть равны...

Варианты ответов:

1) $a = 0{,}6$, $b = 0{,}65$; 2) $a = 0{,}2$, $b = 0{,}15$;

3) $a = 0{,}95$, $b = 0{,}85$; 4) $a = 0{,}15$, $b = 0{,}3$.

Задание 33. Двумерная дискретная случайная величина (X, Y) задана законом распределения вероятностей:

X/Y	$x_1 = 4$	$x_2 = 5$	$x_3 = 6$	$x_4 = 7$
$y_1 = 3$	0,10	0,15	0,20	0,25
$y_2 = 4$	0,05	0,15	0,05	0,05

Тогда вероятность $P(3 < X \leqslant 6)$ равна...

Варианты ответов:

1) 0,60; 2) 0,55; 3) 0,70; 4) 0,30.

Задание 34. Двумерная дискретная случайная величина (X, Y) задана законом распределения вероятностей:

X/Y	$x_1 = 4$	$x_2 = 6$
$y_1 = 3$	0,10	0,15
$y_2 = 5$	0,25	0,15
$y_3 = 7$	0,30	0,05

Тогда условный закон распределения вероятностей составляющей X при условии, что составляющая Y приняла значение $y_1 = 3$, имеет вид...

Варианты ответов:

1)

X	4	6
$p(X \mid y_1)$	$\dfrac{13}{20}$	$\dfrac{7}{20}$

2)

X	4	6
$p(X \mid y_1)$	$\dfrac{6}{7}$	$\dfrac{1}{7}$

3)

X	4	6
$p(X \mid y_1)$	$\dfrac{2}{5}$	$\dfrac{3}{5}$

4)

X	4	6
$p(X \mid y_1)$	$\dfrac{5}{8}$	$\dfrac{3}{8}$

Задание 35. Двумерная дискретная случайная величина (X, Y) задана законом распределения вероятностей:

X/Y	$x_1 = -1$	$x_2 = 1$	$x_3 = 3$
$y_1 = -1$	0,10	0,15	0,05
$y_2 = 5$	0,25	0,10	0,35

Тогда условный закон распределения вероятностей составляющей Y при условии, что составляющая X приняла значение $x_1 = -1$, имеет вид...

Варианты ответов:

1)

Y	-1	5
$p(Y \mid x_1)$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{7}$

2)

Y	-1	5
$p(Y \mid x_1)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

3)

Y	-1	5
$p(Y \mid x_1)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{4}$

4)

Y	-1	5
$p(Y \mid x_1)$	$\frac{5}{7}$	$\frac{2}{7}$

Задание 36. Дискретные независимые случайные величины X и Y заданы законами распределения вероятностей:

X	2	4
p	0,6	0,4

Y	1	4
g	0,3	0,7

Тогда закон распределения вероятностей функции $Z = X + Y$ имеет вид...

Варианты ответов:

1)

Z	3	5	6	8
p	0,9	0,7	1,3	1,1

2)

Z	2	4	8	16
p	0,18	0,12	0,42	0,28

3)

Z	3	5	6	8
p	0,18	0,42	0,12	0,28

4)

Z	3	5	6	8
p	0,18	0,12	0,42	0,28

Задание 37. Дискретные независимые случайные величины X и Y заданы законами распределения вероятностей:

X	2	3
p	0,9	0,1

Y	1	3
g	0,3	0,7

Тогда закон распределения вероятностей функции $Z = X \cdot Y$ имеет вид...

Варианты ответов:

1)

Z	2	3	6	9
p	0,27	0,03	0,63	0,07

2)

Z	3	4	5	6
p	0,27	0,03	0,63	0,07

3)

Z	2	3	6	9
p	1,2	0,4	1,6	0,8

4)

Z	2	3	6	9
p	0,27	0,3	0,63	0,07

Задание 38. Рассматривается система двух случайных величин (X, Y), для которой средние квадратические отклонения равны $\sigma_x = 5{,}0$, $\sigma_y = 3{,}2$, а ковариация равна $\mu_{xy} = -10{,}0$. Тогда корреляционная матрица для системы двух случайных величин (X, Y) будет иметь вид...

Варианты ответов:

1) $\begin{pmatrix} 0 & -0{,}625 \\ -0{,}625 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -0{,}625 \\ 0{,}625 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & -0{,}625 \\ -0{,}625 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0{,}625 \\ 0{,}625 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание 39. Корреляционная матрица для системы случайных величин (X, Y) может иметь вид...

Варианты ответов:

1) $\begin{pmatrix} 1 & -0{,}7 \\ -0{,}7 & 1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -0{,}3 \\ 0{,}3 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 0 & -0{,}4 \\ -0{,}4 & 0 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}9 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}$.

Задание 40. Корреляционная матрица для системы случайных величин (X, Y) может иметь вид...

Варианты ответов:

1) $\begin{pmatrix} -4{,}5 & 2{,}3 \\ 2{,}3 & -3{,}1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 4{,}5 & 3{,}2 \\ 2{,}3 & 3{,}1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 4{,}5 & 2{,}3 \\ 2{,}3 & 3{,}1 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 2{,}3 & 3{,}1 \\ 4{,}5 & 2{,}3 \end{pmatrix}$.

Задание 41. Вероятность появления события A в каждом из 350 проведенных испытаний равна 0,8. Тогда вероятность того, что число X появлений события A будет заключена в пределах от 260 до 300, можно оценить с использованием неравенства Чебышева как...

Варианты ответов:

1) $P \geqslant 0{,}86$; 2) $P < 0{,}86$; 3) $P \leqslant 0{,}14$; 4) $P = 0{,}86$.

Задание 42. В результате проведения 500 независимых испытаний получены случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_{500}$ с равными математическими ожиданиями $M(X_i) = a = 39$ и равными дисперсиями $D(X_i) = 21$. Тогда вероятность того, что среднее арифметическое этих случайных величин отклонится по абсолютной величине от математического ожидания $a = 39$ на величину, меньшую 0,5, можно оценить как...

Варианты ответов:

1) $P = 0{,}832$; 2) $P \geqslant 0{,}832$; 3) $P < 0{,}832$; 4) $P \leqslant 0{,}168$.

Задание 43. Вероятность появления некоторого события в каждом из 400 независимых испытаний постоянна и равна 0,1. Тогда вероятность того, что событие появится ровно 50 раз, следует вычислять как...

Варианты ответов:

1) $P_{400}(50) \approx 0{,}5 - \Phi(5/3)$; 2) $P_{400}(50) \approx (1/36)\varphi(5/3)$;

3) $P_{400}(50) \approx (1/6)\varphi(5/3)$; 4) $P_{400}(50) \approx \Phi(5/3)$.

Задание 44. Вероятность появления некоторого события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна 0,8. Тогда вероятность того, что событие появится не более 88 раз, если $\Phi(2) = 0{,}4772$, где $\Phi(x)$ — функция Лапласа, будет приближенно равна...

Варианты ответов:

1) 0,4886; 2) 0,9544; 3) 0,0228; 4) 0,9772.

Задание 45. Вероятность появления некоторого события в каждом из 400 независимых испытаний постоянна и равна 0,8. Тогда вероятность того, что событие появится не менее 300 и не более 328 раз, следует вычислять как...

Варианты ответов:

1) $P(300 \leqslant X \leqslant 328) \approx \Phi(1)+\Phi(2{,}5)$, где $\Phi(t)$ — функция Лапласа;

2) $P(300 \leqslant X \leqslant 328) \approx \Phi(1)-\Phi(2{,}5)$, где $\Phi(t)$ — функция Лапласа;

3) $P(300 \leqslant X \leqslant 328) \approx \dfrac{1}{8}(\varphi(1) - \varphi(2{,}5))$, где $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$;

4) $P(300 \leqslant X \leqslant 328) \approx \dfrac{1}{64}(\varphi(1) - \varphi(2{,}5))$, где $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Задание 46. Матрица вероятностей перехода однородной цепи Маркова может иметь вид...

Варианты ответов:

1) $\begin{pmatrix} 0{,}73 & 0{,}37 \\ 0{,}44 & 0{,}46 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0{,}73 & 0{,}44 \\ 0{,}27 & 0{,}56 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 0{,}73 & 0{,}27 \\ 0{,}44 & 0{,}56 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} -0{,}73 & 1{,}73 \\ 1{,}56 & -0{,}56 \end{pmatrix}$.

Задание 47. Матрица вероятностей перехода однородной цепи Маркова имеет вид $P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 0{,}2 \end{pmatrix}$, а вектор вероятностей состояний цепи Маркова на втором шаге равен $\bar{p}(2) = (0{,}9; 0{,}1)$. Тогда вектор вероятностей состояний цепи Маркова на третьем шаге равен...

Варианты ответов:

1) $\bar{p}(3) = (0{,}29; 0{,}71)$; 2) $\bar{p}(3) = (0{,}71; 0{,}29)$;

3) $\bar{p}(3) = (0{,}71; 0{,}28)$; 4) $\bar{p}(3) = (0{,}66; 0{,}74)$.

Задание 48. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 94$:

$x_i - x_{i+1}$	2–5	5–8	8–11	11–14	14–17
n_i	5	16	n_3	29	3

Тогда значение n_3 равно...

Варианты ответов:

1) 94; 2) 41; 3) 53; 4) 39.

Задание 49. Медиана вариационного ряда 21, 22, 22, 22, 24, 25, 26, 28, 29, 30, 32 равна...

Варианты ответов:

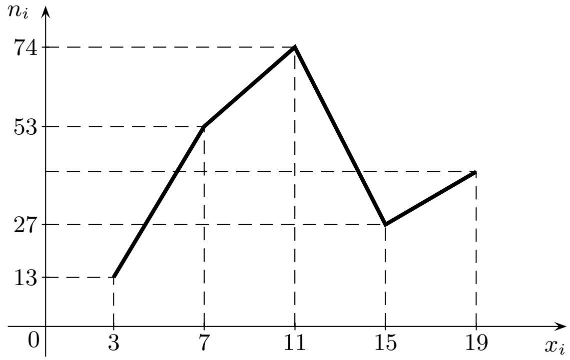
1) 26; 2) 24; 3) 25; 4) 22.

Задание 50. Мода вариационного ряда 4, 5, 5, 6, 8, 8, 8, 9, 9 равна...

Варианты ответов:

1) 6,5; 2) 4; 3) 8; 4) 9.

Задание 51. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 200$, полигон частот которой имеет вид

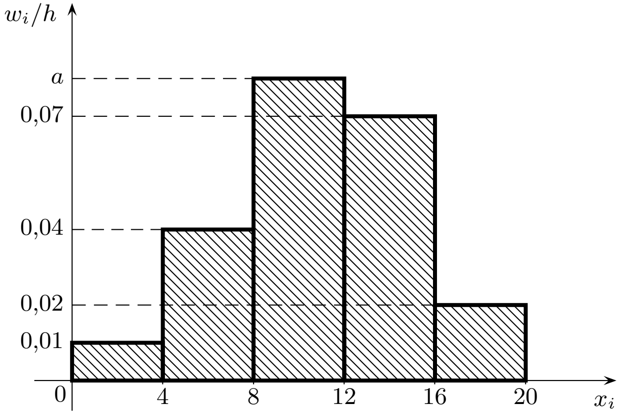


Тогда относительная частота варианты $x_5 = 19$ в выборке равна...

Варианты ответов:

1) 0,2; 2) 0,635; 3) 0,095; 4) 0,165.

Задание 52. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 100$, гистограмма относительных частот которой имеет вид



Тогда значение a равно...

Варианты ответов:

1) 0,11; 2) 0,12; 3) 0,09; 4) 0,14.

Задание 53. Из генеральной совокупности X извлечена выборка объема $n = 100$:

x_i	6	7	8	9
n_i	15	26	37	22

Тогда ее эмпирическая функция распределения вероятностей $F^*(x)$ имеет вид...

Варианты ответов:

$$1)\ F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 6, \\ 0{,}15 & \text{при } 6 < x \leqslant 7, \\ 0{,}41 & \text{при } 7 < x \leqslant 8, \\ 0{,}78 & \text{при } 8 < x \leqslant 9, \\ 0 & \text{при } x > 9; \end{cases}$$

$$2)\ F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 6, \\ 0{,}26 & \text{при } 6 < x \leqslant 7, \\ 0{,}37 & \text{при } 7 < x \leqslant 8, \\ 0{,}22 & \text{при } 8 < x \leqslant 9, \\ 1 & \text{при } x > 9; \end{cases}$$

$$3)\ F^*(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{при } x \leqslant 6, \\ 0{,}78 \quad \text{при } 6 < x \leqslant 7, \\ 0{,}41 \quad \text{при } 7 < x \leqslant 8, \\ 0{,}15 \quad \text{при } 8 < x \leqslant 9, \\ 0 \quad \text{при } x > 9; \end{cases}$$

$$4)\ F^*(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x \leqslant 6, \\ 0{,}15 \quad \text{при } 6 < x \leqslant 7, \\ 0{,}41 \quad \text{при } 7 < x \leqslant 8, \\ 0{,}78 \quad \text{при } 8 < x \leqslant 9, \\ 1 \quad \text{при } x > 9. \end{cases}$$

Задание 54. Из генеральной совокупности X извлечена выборка объема $n = 100$:

x_i	2	5	8
n_i	27	n_2	n_3

эмпирическая функция распределения вероятностей которой имеет вид

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x \leqslant 2, \\ 0{,}27 \quad \text{при } 2 < x \leqslant 5, \\ 0{,}61 \quad \text{при } 5 < x \leqslant 8, \\ 1 \quad \text{при } x > 8. \end{cases}$$

Тогда...

Варианты ответов:

1) $n_2 = 34$, $n_3 = 39$; 2) $n_2 = 39$, $n_3 = 34$;

3) $n_2 = 44$, $n_3 = 29$; 4) $n_2 = 61$, $n_3 = 12$.

Задание 55. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 20$:

x_i	-4	0	1	6
n_i	1	4	6	9

Тогда несмещенная оценка математического ожидания равна...

Варианты ответов:

1) 0,5; 2) 2,8; 3) 1,0; 4) 3,2.

Задание 56. В результате измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в мм): 49, 51, 53. Тогда исправленная дисперсия равна...

Варианты ответов:

1) 4,0; 2) 2,0; 3) 51,0; 4) 8,0.

Задание 57. Дан доверительный интервал $(16{,}6; 23{,}7)$ для оценки математического ожидания нормально распределенного количественного признака. Тогда точечная оценка математического ожидания равна...

Варианты ответов:

1) 7,1; 2) 3,55; 3) 20,15; 4) 20,25.

Задание 58. Дан доверительный интервал $(10{,}14; 17{,}46)$ для оценки математического ожидания нормально распределенного количественного признака. Тогда точность этой оценки равна...

Варианты ответов:

1) 3,66; 2) 7,32; 3) 1,83; 4) 13,8.

Задание 59. Точечная оценка среднего квадратичского отклонения нормально распределенного количественного признака равна 2,8. Тогда его интервальная оценка может иметь вид...

Варианты ответов:

1) $(-0{,}644; 6{,}244)$; 2) $(2{,}8; 4{,}984)$;

3) $(0; 4{,}984)$; 4) $(0; 2{,}8)$.

Задание 60. Дан доверительный интервал $(15{,}9; 18{,}6)$ для оценки математического ожидания нормально распределенного количественного признака. Тогда при увеличении объема выборки этот доверительный интервал может принять вид...

Варианты ответов:

1) $(15{,}7; 18{,}45)$; 2) $(16{,}05; 18{,}45)$;

3) $(15{,}7; 18{,}8)$; 4) $(16{,}05; 18{,}8)$.

Задание 61. Дан доверительный интервал $(40{,}4; 52{,}2)$ для оценки математического ожидания нормально распределенного количественного признака. Тогда при увеличении надежности (доверительной вероятности) оценки доверительный интервал может принять вид…

Варианты ответов:

1) $(40{,}2; 52{,}05)$; 2) $(40{,}55; 52{,}4)$;

3) $(40{,}55; 52{,}05)$; 4) $(40{,}2; 52{,}4)$.

Задание 62. При построении выборочного уравнения прямой линии регрессии вычислены выборочный коэффициент корреляции $r_{\text{в}} = 0{,}86$ и выборочные средние квадратические отклонения $\sigma_x = 3{,}9$, $\sigma_y = 7{,}8$. Тогда выборочный коэффициент регрессии Y на X равен…

Варианты ответов:

1) 0,43; 2) 1,72; 3) $-1{,}72$; 4) $-0{,}43$.

Задание 63. По результатам выборки, извлеченной из генеральной совокупности (X, Y), вычислены выборочный коэффициент регрессии X на Y $\rho_{xy} = 6{,}5$ и выборочные средние $\bar{x} = 34{,}0$, $\bar{y} = -37{,}0$. Тогда выборочное уравнение прямой линии регрессии X на Y будет иметь вид…

Варианты ответов:

1) $\bar{x}_y = 6{,}5y - 258{,}0$; 2) $\bar{x}_y = 6{,}5y + 206{,}5$;

3) $\bar{x}_y = 6{,}5y - 184{,}0$; 4) $\bar{x}_y = 6{,}5y + 274{,}5$.

Задание 64. Пусть для проверки нулевой гипотезы H_0 при конкурирующей гипотезе H_1 используется статистический критерий K. При этом вероятность ошибки первого рода равна 0,02, а второго рода — 0,15. Тогда мощность критерия K равна…

Варианты ответов:

1) 0,98; 2) 0,425; 3) 0,85; 4) 0,415.

Задание 65. Левосторонняя критическая область может определяться из соотношения...

Варианты ответов:

1) $P(K > 2{,}52) = 0{,}01$; 2) $P(K < -2{,}52) = 0{,}01$;

3) $P(-2{,}52 < K < 2{,}52) = 0{,}98$;

4) $P(K < -2{,}52) + P(K > 2{,}52) = 0{,}02$.

Задание 66. По двум независимым выборкам объемов $n = 14$ и $m = 10$, извлеченным из нормальных генеральных совокупностей X и Y, найдены исправленные выборочные дисперсии $s_x^2 = 4{,}2$ и $x_y^2 = 5{,}4$. Тогда для того, чтобы при заданном уровне значимости $\alpha = 0{,}02$ проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий H_0: $D(X) = D(Y)$ при конкурирующей гипотезе H_1: $D(X) \neq D(Y)$, необходимо определить критическую точку как...

Варианты ответов:

1) $F_{\text{кр}} = F_{\text{кр}}(0{,}02; 13; 9)$; 2) $F_{\text{кр}} = F_{\text{кр}}(0{,}02; 9; 13)$;

3) $F_{\text{кр}} = F_{\text{кр}}(0{,}01; 9; 13)$; 4) $F_{\text{кр}} = F_{\text{кр}}(0{,}01; 13; 9)$.

Задание 67. Наблюдаемое значение статистики критерия проверки гипотезы H_0: $M(X) = M(Y)$ о равенстве средних двух нормальных генеральных совокупностей с дисперсиями $D(X)$ и $D(Y)$ может иметь вид...

Варианты ответов:

1) $Z_{\text{набл}} = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{D(X) - D(Y)}}$;

2) $Z_{\text{набл}} = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{D(X) + D(Y)}}$;

3) $Z_{\text{набл}} = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{D(X)}{50} - \dfrac{D(Y)}{70}}}$;

4) $Z_{\text{набл}} = \dfrac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{D(X)}{50} + \dfrac{D(Y)}{70}}}$.

Тест 1

Задание 1. Игральная кость бросается один раз. Тогда вероятность того, что число очков, выпавших на верхней грани, будет меньше трех, равна...

Варианты ответов:

1) 1; 2) 1/2; 3) 1/6; 4) 1/3.

Задание 2. Проводится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна 0,6. Тогда математическое ожидание $M(X)$ и дисперсия $D(X)$ дискретной случайной величины X — числа появлений события A в $n = 100$ проведенных испытаниях — равны...

Варианты ответов:

1) $M(X) = 24$, $D(X) = 60$; 2) $M(X) = 60$, $D(X) = 24$;

3) $M(X) = 6$, $D(X) = 24$; 4) $M(X) = 24$, $D(X) = 6$.

Задание 3. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x \leqslant 0, \\ x/8 \quad \text{при } 0 < x \leqslant 4, \\ 0 \quad \text{при } x > 4. \end{cases}$$

Тогда вероятность $P(1 < X < 3)$ равна...

Варианты ответов:

1) $\dfrac{1}{4}$; 2) $\dfrac{3}{4}$; 3) $\dfrac{1}{2}$; 4) $\dfrac{1}{8}$.

Задание 4. Двумерная дискретная случайная величина (X, Y) задана законом распределения вероятностей:

X/Y	$x_1 = 3$	$x_2 = 4$
$y_1 = 5$	0,15	0,10
$y_2 = 6$	0,25	0,05
$y_3 = 7$	0,05	0,40

Тогда условный закон распределения вероятностей составляющей X при условии, что составляющая Y приняла значение $y_1 = 5$, имеет вид...

Варианты ответов:

1)

X	3	4
$p(X \mid y_1)$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{5}$

2)

X	3	4
$p(X \mid y_1)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

3)

X	3	4
$p(X \mid y_1)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

4)

X	3	4
$p(X \mid y_1)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$

Задание 5. Матрица вероятностей перехода однородной цепи Маркова имеет вид $P = \begin{pmatrix} 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}$, а вектор вероятностей состояний цепи Маркова на втором шаге равен $\bar{p}(2) = (0{,}4; 0{,}6)$. Тогда вектор вероятностей состояний цепи Маркова на третьем шаге равен...

Варианты ответов:

1) $\bar{p}(3) = (0{,}42; 0{,}58)$; 2) $\bar{p}(3) = (0{,}58; 0{,}42)$;

3) $\bar{p}(3) = (0{,}54; 0{,}50)$; 4) $\bar{p}(3) = (0{,}50; 0{,}52)$.

Задание 6. Статистическое распределение выборки имеет вид

x_i	2	4	6	8
w_i	0,05	0,15	0,25	w_4

Тогда значение относительной частоты w_4 равно...

Варианты ответов:

1) 0,45; 2) 0,35; 3) 0,55; 4) 0,65.

Задание 7. Интервальная оценка математического ожидания нормально распределенного количественного признака X имеет вид $(a; 24{,}5)$. Если выборочная средняя равна $\bar{x}_{\text{в}} = 22{,}3$, то значение a равно...

Варианты ответов:

1) 21,2; 2) 2,2; 3) 20,2; 4) 20,1.

Задание 8. При заданном уровне значимости α проверяется нулевая гипотеза H_0: $D(X) = D(Y)$ о равенстве дисперсий двух нормальных генеральных совокупностей X и Y. Тогда конкурирующей может являться гипотеза...

Варианты ответов:

1) $H_1\colon D(X)+D(Y)=0$; 2) $H_1\colon D(X)>D(Y)$;

3) $H_1\colon D(X)\leqslant D(Y)$; 4) $H_1\colon D(X)\geqslant D(Y)$.

Тест 2

Задание 1. В группе 15 студентов, из которых 6 отличников. По списку наудачу отобраны 5 студентов. Тогда вероятность того, что среди отобранных студентов нет отличников, равна...

Варианты ответов:

1) $\dfrac{12}{143}$; 2) $\dfrac{6}{143}$; 3) $\dfrac{3}{5}$; 4) $\dfrac{5}{9}$.

Задание 2. Для дискретной случайной величины X

X	2	3	4	5
p	p_1	p_2	p_3	p_4

функция распределения вероятностей имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } x\leqslant 2,\\ 0{,}2 \quad \text{при } 2<x\leqslant 3,\\ 0{,}55 \quad \text{при } 3<x\leqslant 4,\\ p \quad \text{при } 4<x\leqslant 5,\\ 1 \quad \text{при } x>5.\end{cases}$$

Тогда значение параметра p может быть равно...

Варианты ответов:

1) 0,25; 2) 1; 3) 0,655; 4) 0,45.

Задание 3. Непрерывная случайная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases} 0 \quad \text{при } x\leqslant 0,\\ Cx^2 \quad \text{при } 0<x\leqslant 7,\\ 0 \quad \text{при } x>7.\end{cases}$$

Тогда значение параметра C равно...

Варианты ответов:

1) $\dfrac{3}{343}$; 2) $\dfrac{343}{3}$; 3) $\dfrac{1}{14}$; 4) $\dfrac{1}{1029}$.

Задание 4. Дискретные случайные величины X и Y заданы законами распределения вероятностей:

X	2	3
p	0,9	0,1

Y	1	3
g	0,3	0,7

Тогда закон распределения вероятностей функции $Z = X \cdot Y$ имеет вид...

Варианты ответов:

1)

Z	2	3	6	9
p	1,2	0,4	1,6	0,8

2)

Z	3	4	5	6
p	1,2	0,4	1,6	0,8

3)

Z	2	3	6	9
p	0,27	0,3	0,93	1

4)

Z	2	3	6	9
p	0,27	0,03	0,63	0,07

Задание 5. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,2. Всего было куплено 100 билетов. Тогда вероятность того, что количество выигравших билетов будет заключено в пределах от 15 до 25, можно оценить с использованием неравенства Чебышева как...

Варианты ответов:

1) $P < 0{,}64$; 2) $P = 0{,}36$; 3) $P \geqslant 0{,}36$; 4) $P = 0{,}64$.

Задание 6. Из генеральной совокупности X извлечена выборка объема $n = 100$:

x_i	1	2	3	4
n_i	12	26	47	15

Тогда ее эмпирическая функция распределения вероятностей $F^*(x)$ имеет вид...

Варианты ответов:

1) $F^*(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x \leqslant 1, \\ 0{,}12 \quad \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 0{,}38 \quad \text{при } 2 < x \leqslant 3, \\ 0{,}85 \quad \text{при } 3 < x \leqslant 4, \\ 0 \quad \text{при } x > 4; \end{cases}$

2) $F^*(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при } x \leqslant 1, \\ 0{,}12 \quad \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 0{,}38 \quad \text{при } 2 < x \leqslant 3, \\ 0{,}85 \quad \text{при } 3 < x \leqslant 4, \\ 1 \quad \text{при } x > 4; \end{cases}$

3) $F^*(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{при } x \leqslant 1, \\ 0{,}85 \quad \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 0{,}38 \quad \text{при } 2 < x \leqslant 3, \\ 0{,}12 \quad \text{при } 3 < x \leqslant 4, \\ 0 \quad \text{при } x > 4; \end{cases}$

4) $F^*(x) = \begin{cases} 0{,}12 \quad \text{при } x \leqslant 1, \\ 0{,}26 \quad \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 0{,}47 \quad \text{при } 2 < x \leqslant 3, \\ 0{,}15 \quad \text{при } 3 < x \leqslant 4, \\ 1 \quad \text{при } x > 4. \end{cases}$

Задание 7. Проведено четыре измерения (без систематических ошибок) некоторой случайной величины (в мм): 8, 9, x_3, 12. Если несмещенная оценка математического ожидания равна 10, то выборочная дисперсия будет равна...

Варианты ответов:

1) 2,0; 2) 2,5; 3) 0; 4) 1,5.

Задание 8. При построении выборочного уравнения парной регрессии вычислены выборочный коэффициент корреляции $r_{\text{в}} = 0{,}54$ и выборочные средние квадратические отклонения $\sigma_x = 1{,}6$, $\sigma_y = 3{,}2$. Тогда выборочный коэффициент регрессии Y на X равен...

Варианты ответов:

1) $-0{,}27$; 2) $-1{,}08$; 3) 0,27; 4) 1,08.

Раздел 9
Дискретная математика

9.1. Элементы алгебры логики высказываний

Под *высказыванием* понимается имеющее смысл языковое выражение, относительно которого можно утверждать, что оно либо истинно, либо ложно. Таким образом, каждому высказыванию можно приписать *истинностное значение* И (истина) или Л (ложь). Вместо этих символов часто употребляют 1 и 0 соответственно.

Определение 9.1. *Высказыванием* называется предложение, к которому возможно применить понятие «истинно» или «ложно».

Используя частицу «не», а также союзы «и», «или», «если ..., то ...», «тогда и только тогда, когда ...» и т.п., можно из этих высказываний строить другие, новые высказывания. Истинные значения новых высказываний определяются при этом только истинностными значениями входящих в них высказываний. Построение из данных высказываний нового высказывания называется *логической операцией*.

Логика высказываний изучает символы, построенные из них формулы, правила записи и преобразование формул, получающиеся абстрагированием высказываний, которые подчиняются двум законам:

1) *закон исключенного третьего*: каждое высказывание либо истинно, либо ложно и третьей возможности не существует;

2) *закон противоречия*: высказывание и его отрицание одновременно истинными быть не могут.

Символы — обычно это буквы латинского алфавита, которые являются абстрактными образами высказываний.

Замечание. Если нет опасности недоразумений, высказывательные символы называют также *высказываниями*.

К логическим операциям относятся: конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция, отрицание.

Пусть p и q — произвольные высказывания.

Определение 9.2. *Конъюнкцией* двух высказываний p и q называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба высказывания.

Обозначают $p \wedge q$. Логические операции описываются при помощи *таблиц истинности*. Для конъюнкции таблица истинности имеет вид

p	q	$p \wedge q$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	Л

или

p	q	$p \wedge q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Определение 9.3. *Дизъюнкцией* двух высказываний называется высказывание, ложное тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны.

Обозначают $p \vee q$. Таблица истинности:

p	q	$p \vee q$
И	И	И
И	Л	И
Л	И	И
Л	Л	Л

или

p	q	$p \vee q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Определение 9.4. *Импликацией* двух высказываний называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда высказывание p истинно, а q — ложно.

Обозначают $p \Rightarrow q$. Таблица истинности:

p	q	$p \Rightarrow q$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	И
Л	Л	И

или

p	q	$p \Rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Определение 9.5. *Эквиваленцией* двух высказываний называется высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинности высказываний совпадают.

Обозначают $p \sim q$ или $p \Leftrightarrow q$. Таблица истинности:

p	q	$p \Leftrightarrow q$
И	И	И
И	Л	Л
Л	И	Л
Л	Л	И

или

p	q	$p \Leftrightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Определение 9.6. *Отрицанием* высказывания p называется высказывание, которое истинно тогда и только тогда, когда высказывание p ложно.

Обозначают $\neg p$ или $\bar{p}$. Таблица истинности:

p	$\bar{p}$
И	Л
Л	И

или

p	$\bar{p}$
1	0
0	1

Символы $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ (иногда $\leftrightarrow$) называют *логическими символами*.

Пример 9.1. Высказывание «$(x > 2) \vee (x < 3)$» означает, что...

1) x — любое действительное число;
2) $x \in (2; 3)$;
3) $x \in (-\infty; 3)$;
4) x не существует.

Решение. Высказывание «$(x > 2) \vee (x < 3)$» — это дизъюнкция двух неравенств. Решением является объединение двух промежутков: $(2; +\infty) \cup (-\infty; 3) = (-\infty; +\infty)$. Значит, x — любое действительное число.

Пример 9.2. Из трех логических высказываний

$$\varphi_1 = ((A \wedge \bar{B}) \vee (\bar{A} \wedge B)) \wedge (\bar{A} \vee \bar{B}) \Rightarrow A,$$

$$\varphi_2 = (A \to B) \wedge (B \to A), \quad \varphi_3 = (A \Leftrightarrow B)$$

эквивалентными являются φ_2 и φ_3.

Пример 9.3. Среди следующих логических форм

$$A \wedge (\overrightarrow{A \vee B}), \quad A \vee \bar{A}, \quad A \wedge B \Rightarrow A, \quad A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$$

противоречием является...

Решение. Составим таблицу истинности:

A	B	$A \wedge (\overrightarrow{A \vee B})$	$A \wedge B \Rightarrow A$	$A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$	$A \vee \bar{A}$
1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	
0	1	0	1	1	1
0	0	0	1	1	

Форма $A \wedge (\overrightarrow{A \vee B})$ является противоречием, т.к. принимает лишь значения, равные нулю. Формы $A \wedge B \Rightarrow A$, $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$ и $A \vee \bar{A}$ не являются противоречием, т.к. принимают лишь значения 1.

Пример 9.4. Укажите правильную таблицу истинности логического высказывания $a \wedge b$:

1)

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

2)

a	b	$a \wedge b$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3)

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

4)

a	b	$a \wedge b$
0	0	0
0	1	0
1	0	1
1	1	1

Решение. Правильным является вариант 1.

9.2. Операции над высказываниями

Формулы логики высказываний — это последовательности высказывательных символов, логических символов и дополнительных символов «открывающая скобка» и «закрывающая скобка», определяемые рекурсивно:

1) каждый высказывательный символ есть формула;

2) если A и B — две формулы, то формулами будут также $(A \vee B)$, $(A \wedge B)$, $(\neg A)$, $(A \Rightarrow B)$, $(A \Leftrightarrow B)$;

3) других формул, кроме построенных с помощью пунктов 1 и 2, нет.

Скобки в формулах можно не писать, если имеются общепризнанные договоренности, позволяющие восстановить пропущенные скобки (табл. 9.1).

Таблица 9.1

Вместо формулы	Можно писать формулу
$(A \wedge B) \vee C$	$A \wedge B \vee C$
$A \vee (B \wedge C)$	$A \vee B \wedge C$
$(A \wedge B) \Rightarrow C$	$A \wedge B \Rightarrow C$
$A \Rightarrow (B \vee C)$	$A \Rightarrow B \vee C$
$(A \vee B) \Leftrightarrow C$	$A \vee B \Leftrightarrow C$
$A \Leftrightarrow (B \Rightarrow C)$	$A \Leftrightarrow B \Rightarrow C$

Определение 9.7. Две формулы называются *эквивалентными*, если они принимают одинаковые значения при всех значениях переменных.

Основные эквивалентности для дизъюнкции:
1) $p \vee p = p$ (идемпотентность);
2) $p \vee q = q \vee p$ (коммутативность);
3) $p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$ (ассоциативность);
4) $p \vee (q \cdot r) = (p \vee q) \cdot (p \vee r)$ (дистрибутивность);
5) $p \vee (pq) = p$ (закон поглощения);
6) $\bar{\bar{p}} = p$ (закон снятия двойного отрицания);
7) $\overline{p \vee q} = \bar{p} \cdot \bar{q}$ (закон де Моргана);
8) $p \vee \bar{p} = 1$;
9) $p \vee 1 = 1$;
10) $p \vee 0 = p$;
11) $p \to q = \bar{p} \vee q$;
12) $p \Leftrightarrow q = (p \to q) \cdot (q \to p) = p \cdot q \vee \bar{p} \cdot \bar{q}$.

Аналогичные эквивалентные формулы можно записать для конъюнкции.

Пример 9.5. Формулой, равносильной к формуле $(a \leftrightarrow b) \wedge \wedge (a \vee b)$, является...

1) $a \wedge b$; 2) $a \vee b$; 3) $\bar{a} \wedge \bar{b}$; 4) $\bar{a} \vee b$.

Решение. Равносильной является формула $a \wedge b$.

Пример 9.6. Формулой, равносильной формуле

$$\overline{(p \to q) \wedge (q \vee \bar{p})},$$

является...

1) $p \wedge q$; 2) $\bar{p} \wedge q$; 3) $p \vee q$; 4) $p \wedge \bar{q}$.

Решение. Равносильной является формула $p \wedge \bar{q}$.

Пример 9.7. Для функции $f(x, y, z)$, заданной таблицей

x	y	z	f
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) функции имеет вид...

1) $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z}$; 2) $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z}$;
3) $\bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z}$; 4) $\bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z}$.

Решение. СДНФ функции $f(x, y, z)$ будет выглядеть следующим образом:

$$f(x, y, z) = x^0y^0z^0 \vee x^1y^0z^1 \vee x^1y^0z^1 \vee x^1y^1z^0 =$$

$$= \bar{x}\bar{y}\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}z \vee xy\bar{z}.$$

Пример 9.8. Найти совершенную дизъюнктивную нормальную форму функции $(x \leftrightarrow y) \wedge z$.

Решение. Составим таблицу истинности логического высказывания $(x \leftrightarrow y) \wedge z$:

x	y	z	$(x \leftrightarrow y) \wedge z = f$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

В таблице значению $f(x,y,z)$ соответствует набор переменных $\{(1;1;1),\ (0;0;1)\}$. Поэтому СДНФ функции $f(x,y,z)$ имеет вид $f(x,y,z) = (x \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z)$.

9.3. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Определение 9.8. *Множеством* M называется объединение в единое целое определенных различимых объектов a, которые называются *элементами множества*.

Обозначение принадлежности объекта (элемента) a множеству M: $\quad a \in M$.

Множество, не содержащее элементов, называется *пустым* и обозначается $\varnothing$.

Множество можно описать, указав какое-нибудь свойство, присущее всем элементам этого множества.

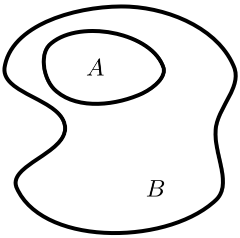


Рис. 9.1

Определение 9.9. Если все элементы множества A являются также элементами множества B, то говорят, что множество A *включается* (*содержится*) в множестве B и обозначается $A \subset B$ (рис. 9.1).

Определение 9.10. Если $A \subseteq B$, то множество A называется *подмножеством* множества B, а если при этом $A \neq B$, то множество A называется *собственным подмножеством* множества B и обозначается $A \subset B$.

Для трех множеств A, B, C справедливы следующие соотношения:

$$A \subseteq A, \quad A \not\subset A,$$

$$A \subseteq B \wedge B \subseteq C \to A \subseteq C, \quad A \subseteq B \wedge B \subset C \to A \subset C.$$

Связь между включением и равенством множеств устанавливается следующим соотношением:

$$A = B \leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

Здесь знак $\wedge$ обозначает *конъюнкцию* (логическое «и»).

Определение 9.11. *Объединением* множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат хотя бы одному из множеств A и B, и обозначается $C = A \cup B$.

Геометрическое изображение множеств в виде области на плоскости называется *диаграммой Эйлера—Венна*. Диаграмма Эйлера—Венна для операции объединения множеств изображена на рис. 9.2.

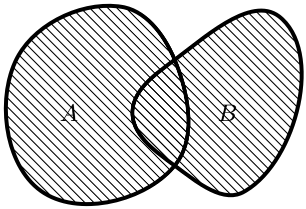


Рис. 9.2

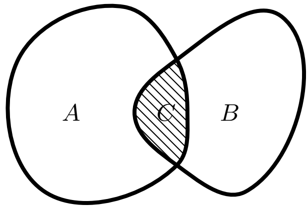


Рис. 9.3

Определение 9.12. *Пересечением* множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат каждому из множеств A и B, и обозначается $C = A \cap B$ (рис. 9.3).

Для множеств A, B и C справедливы следующие свойства:

$$A \cap A = A \cup A = A, \quad A \cup B = B \cup A, \quad A \cap B = B \cap A,$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \quad A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C),$$
$$A \cup (A \cap B) = A, \quad A \cap (A \cup B) = A, \quad A \cup \varnothing = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing.$$

Определение 9.13. *Разностью* множеств A и B называется множество, состоящее из элементов множества A, не принадлежащих множеству B (рис. 9.4). Обозначается $C = A \backslash B$.

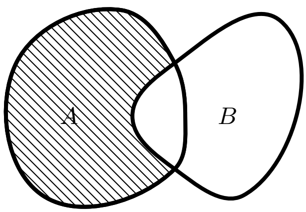


Рис. 9.4

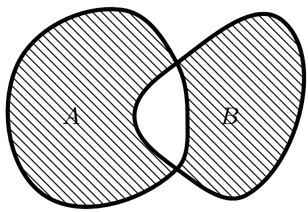


Рис. 9.5

Определение 9.14. *Симметрической разностью* множеств A и B называется множество C, элементы которого принадлежат в точности одному из множеств A или B (рис. 9.5). Обозначается $A \,\Delta\, B$.

Из рис. 9.5 видно, что $A \,\Delta\, B = (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

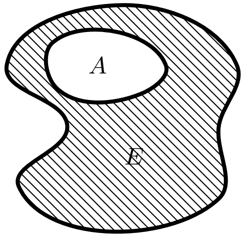


Рис. 9.6

Определение 9.15. Множество C_E называется *дополнением* множества A относительно множества E, если $A \subseteq E$ и $C_E = E \backslash A$ (рис. 9.6).

Пример 9.9. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество $A \backslash B = A \backslash (A \cap B)$ и проверить его с помощью диаграммы Эйлера—Вейна.

Решение. Из записанных выше соотношений видно, что

$$A \backslash (A \cap B) = (A \backslash A) \cup (A \backslash B) = \varnothing \cup (A \backslash B) = A \backslash B,$$

что и требовалось доказать. Для иллюстрации полученного результата построим диаграммы Эйлера—Вейна (рис. 9.7).

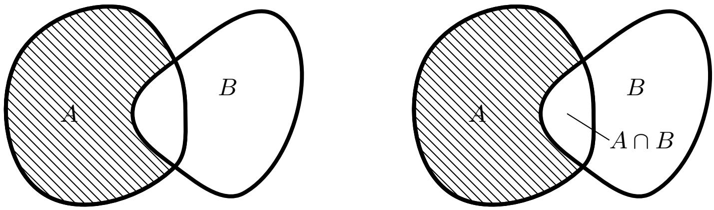


Рис. 9.7

Пример 9.10. Исходя из определения равенства множеств и операций над множествами, доказать тождество $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

Решение. Если некоторый элемент $x \in A \backslash (B \cup C)$, то это означает, что этот элемент принадлежит множеству A, но не принадлежит множествам B и C.

Множество $A \backslash B$ представляет собой множество элементов множества A, не принадлежащих множеству B. Множество $A \backslash C$ представляет собой множество элементов множества A, не принадлежащих множеству C. Тогда множество $(A \backslash B) \cap (A \backslash C)$ представляет собой множество элементов, которые принадлежат множеству A, но не принадлежат ни множеству B, ни множеству C.

Таким образом, тождество можно считать доказанным.

Определение 9.16. *Упорядоченной парой* (a, b) двух элементов a и b называется множество $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Для любых a, b, c и d справедливо соотношение

$$(a, b) = (c, d) \leftrightarrow (a = c) \wedge (b = d).$$

Определение 9.17. *Декартовым произведением* множеств A и B называется множество всех упорядоченных пар (a, b), где $a \in A$, $b \in B$: $\quad A \times B = \{(a, b) \bigm| a \in A,\ b \in B\}$.

Пример 9.11. Даны множества $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{a, c, d, f\}$ и $C = \{a, b, f, e\}$. Тогда число элементов декартова произведения $(A \cup C) \times B$ равно...

Решение. Найдем $A \cup C = \{a, b, c, d, f, e\}$. Декартово произведение двух множеств — это множество, состоящее из упорядоченных пар элементов, первым элементом которых является элемент первого множества, вторым — элемент второго множества. В нашем случае множество, состоящее из 6 элементов, умножается на множество, состоящее из 4 элементов, поэтому $6 \cdot 4 = 24$ — число элементов декартова произведения данных множеств.

Пример 9.12. Для множеств $A = \{1; 3; 5; 7\}$ и $B = \{2; 3; 4; 5\}$ результатом операций $(A \cup (A \backslash B)) \backslash (B \cup (B \backslash A))$ является...

Решение. Выполним указанные операции последовательно:

$$A \backslash B = \{1; 7\}, \quad A \cup (A \backslash B) = \{1; 3; 5; 7\}, \quad B \backslash A = \{2; 4\},$$
$$B \cup (B \backslash A) = \{2; 3; 4; 5\}, \quad (A \cup (A \backslash B)) \backslash (B \cup (B \backslash A)) = \{1; 7\}.$$

Пример 9.13. Для множеств $A = \{2; 5; 3; 1\}$ и $B = \{3; 4; 1; 6\}$ результатом выполнения операций $(A \cup B) \backslash (A \Delta B)$ является множество...

Решение. Выполним указанные операции последовательно:

$$A \cup B = \{2; 5; 3; 1; 4; 6\}, \quad A \,\Delta\, B = \{2; 5; 4; 6\},$$
$$(A \cup B) \backslash (A \,\Delta\, B) = \{1; 3\}.$$

Пример 9.14. Разностью множеств $A = \{2; 11; 7; 9\}$ и $B = \{3; 5; 8; 1\}$ является множество...

1) $\{2; 11; 9\}$; 2) $\{5; 8; 1\}$; 3) $\{2; 11; 7; 9\}$; 4) $\varnothing$.

Решение. Разностью $C = A \backslash B$ множеств A и B называется совокупность тех элементов из A, которые не содержатся в B.

В нашем случае $A \backslash B = \{2; 11; 7; 9\}$. (Данные множества не имеют общих элементов, следовательно, возможная разность может содержать элементы только одного из множеств.)

9.4. Элементы комбинаторики

Если из некоторого количества элементов, различных между собой, составлять различные комбинации, то среди них можно выделить три типа комбинаций, носящих общее название «*соединения*».

Рассмотрим подробнее эти три типа соединений:

1) если в некотором множестве a_1, a_2, ..., a_m переставлять местами элементы, оставляя неизменным их количество, то каждая полученная таким образом комбинация называется *перестановкой*. Общее число перестановок из m элементов обозначается P_m и вычисляется по формуле

$$P_m = m!\,.$$

Вообще говоря, перестановки являются частным случаем размещений (см. далее);

2) если составлять из m различных элементов группы по n элементов в каждой, располагая взятые элементы в различном порядке, то получившиеся при этом комбинации называются *размещениями* из m элементов по n. Общее число размещений рассчитывается по формуле

$$A_m^n = m(m-1)(m-2)...(m-(n-1)) = \frac{m!}{(m-n)!};$$

3) если из m элементов составлять группы по n элементов в каждой, не обращая внимания на порядок элементов в группе, то получившиеся при этом комбинации называются *сочетаниями* из m элементов по n. Общее число сочетаний равно

$$C_m^n = \frac{P_m}{P_n P_{m-n}} = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Также одним из вариантов комбинаций являются *перестановки с повторяющимися элементами*. Если среди m элементов имеется m_1 одинаковых элементов одного типа, m_2 одинаковых элементов другого типа и т.д., то при перестановке этих элементов всевозможными способами получаем комбинации, количество которых определяется по формуле

$$\frac{P_m}{P_{m_1} P_{m_2} ... P_{m_k}} = \frac{m!}{m_1! m_2! ... m_k!}.$$

Для облегчения выбора комбинаторной формулы при решении задач можно использовать табл. 9.2.

Таблица 9.2

<table>
<tr><th></th><th>Что нас интересует в задаче?</th><th>Какой выбор элементов?</th><th>Формула</th></tr>
<tr><td rowspan="6">n — число элементов, m — сколько элементов выбираем</td><td rowspan="2">Состав элементов</td><td>Бесповторный</td><td>C_n^m</td></tr>
<tr><td>Повторный</td><td>C_{n+m-1}^m</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Состав и порядок</td><td>Бесповторный</td><td>A_n^m</td></tr>
<tr><td>Повторный</td><td>n^m</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Порядок следования элементов</td><td>Бесповторный</td><td>$n!$</td></tr>
<tr><td>Повторный</td><td>$\dfrac{n!}{m_1!m_2!...m_k!}$</td></tr>
</table>

Пример 9.15. Номер автомобиля состоит из трех букв и трех цифр. Сколько различных номеров можно составить, используя 10 цифр и алфавит в 30 букв?

Решение. Очевидно, что количество всех возможных комбинаций из 10 цифр по 4 равно 10 000. Число всех возможных комбинаций из 30 букв по две равно $A_{30}^2 = 30 \cdot 29 = 870$. Если учесть возможность того, что буквы могут повторяться, то число повторяющихся комбинаций равно 30 (одна возможность повтора для каждой буквы). В итоге полное количество комбинаций по две буквы равно 900. Если к номеру добавляется еще одна буква из алфавита в 30 букв, то количество комбинаций увеличивается в 30 раз, т.е. достигает 27 000 комбинаций. Окончательно с учетом того, что каждой буквенной комбинации можно поставить в соответствие числовую комбинацию, получим полное количество автомобильных номеров, равное 270 000 000.

Пример 9.16. Сколькими способами можно составить трехцветный флаг из материала пяти цветов?

Решение. Чтобы составить трехцветный флаг, нужно из пяти цветов ($n = 5$) выбрать три разных цвета ($m = 3$). При выборе необходимо учитывать не только состав цветов, но и порядок следования. Поэтому в нашем случае число трехцветных флагов равно числу размещений из пяти по три, т.е. $A_5^3 = 5{\cdot}4{\cdot}3 = 60$.

Пример 9.17. Азбукой Морзе передаются буквы в виде комбинаций точек и тире. Сколько сообщений можно послать посредством семи знаков точек или тире?

Решение. Всего знаков два ($n = 2$): точка и тире. Повторно выбирается семь элементов ($m = 7$). Поэтому число различных сообщений равно $2^7 = 128$.

Пример 9.18. Имеются 8 книг. Сколькими способами их можно разложить на две пачки по четыре книги в каждой? Сколькими способами их можно раздать восьми различным книголюбителям?

Решение. Чтобы разделить восемь книг ($n = 8$) на две равные пачки, достаточно из восьми книг выбрать любые четыре ($m = 4$) для первой пачки, а остальные книги оставить для второй пачки. Причем нас интересует только состав выбранных книг. Поэтому общее число способов равно числу сочетаний из восьми элементов по четыре, т.е. $C_8^4 = 8!/(4!4!) = 70$. Раздать по одной книге каждому книголюбителю можно $8! = 40\,320$ способами — числом перестановок P_8 из восьми элементов.

9.5. Основные понятия теории графов

Определение 9.18. Если на плоскости задать конечное множество V точек и конечный набор линий X, соединяющих некоторые пары из точек V, то полученная совокупность точек и линий будет называться *графом*.

При этом элементы множества V называются *вершинами* графа, а элементы множества X — *ребрами*.

В множестве V могут встречаться одинаковые элементы; ребра, соединяющие одинаковые элементы, называются *петлями*. Одинаковые пары в множестве X называются *кратными* (или *параллельными*) ребрами. Количество одинаковых пар (v, w) в X называется *кратностью* ребра (v, w).

Множество V и набор X определяют граф с кратными ребрами — *псевдограф* $G = (V, X)$. Псевдограф без петель называется *мультиграфом*. Если в наборе X ни одна пара не встречается более одного раза, то мультиграф называется *графом*. Если пары в наборе X являются упорядочными, то граф называется *ориентированным* или *орграфом*.

Графу соответствует геометрическая конфигурация. Вершины обозначаются точками (кружочками), а ребра — линиями, соединяющими соответствующие вершины.

Определение 9.19. Если $x = \{v, w\}$ — ребро графа, то вершины v, w называются *концами* ребра x. Если $x = (v, w)$ — дуга орграфа, то вершина v — *начало*, а вершина w — *конец* дуги x.

Определение 9.20. Вершины v, w графа $G = (V, X)$ называются *смежными*, если $\{v, w\} \in X$. Два ребра называются *смежными*, если они имеют общую вершину.

Определение 9.21. *Степенью* вершины графа называется число ребер, которым эта вершина принадлежит.

Вершина называется *изолированной*, если ее степень равна единице, и *висячей*, если ее степень равна нулю.

Определение 9.22. Графы $G_1(V_1, X_1)$ и $G_2(V_2, X_2)$ называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение φ: $V_1 \to V_2$, сохраняющее смежность.

Определение 9.23. *Маршрутом* (*путем*) для графа $G(V, X)$ называется последовательность $v_1 x_1 v_2 x_2 v_3 \ldots x_k v_{k+1}$.

Маршрут называется *замкнутым*, если его начальная и конечная точки совпадают. Число ребер (дуг) маршрута (пути) графа называется *длиной* маршрута (пути).

Определение 9.24. Незамкнутый маршрут (путь) называется *цепью*. Цепь, в которой все вершины попарно различны, называется *простой цепью*.

Определение 9.25. Замкнутый маршрут (путь) называется *циклом* (*контуром*). Цикл, в котором все вершины попарно различны, называется *простым циклом*.

9.6. Ориентированные графы

Матрицы графов. Пусть $D = (V, X)$ — ориентированный граф (орграф), где $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$.

Определение 9.26. *Матрицей смежности* орграфа D называется квадратная матрица $A(D) = [a_{ij}]$ порядка $n \times n$, у которой

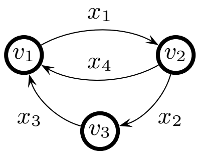
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если } (v_i, v_j) \in X, \\ 0, & \text{если } (v_i, v_j) \notin X. \end{cases}$$

Определение 9.27. Если вершина v является концом ребра x, то говорят, что v и x *инцидентны*.

Определение 9.28. *Матрицей инцидентности* орграфа D называется матрица $B(D) = [b_{ij}]$ размерности $n \times m$, у которой

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если вершина } v_i \text{ является концом дуги } x_j, \\ -1, & \text{если вершина } v_i \text{ является началом дуги } x_j, \\ 0, & \text{если вершина } v_i \text{ не инцидентна дуге } x_j. \end{cases}$$

Пример 9.19. Записать матрицы смежности и инцидентности для графа, изображенного на рисунке:



Решение. Составим матрицу смежности:

	v_1	v_2	v_3
v_1	0	1	0
v_2	1	0	1
v_3	1	0	0

т.е. $A(D) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Матрица инцидентности:

	x_1	x_2	x_3	x_4
v_1	-1	0	1	1
v_2	1	-1	0	-1
v_3	0	1	-1	0

т.е. $B(D) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Если граф имеет кратные дуги (ребра), то в матрице смежности принимается $a_{ij} = k$, где k — кратность дуги (ребра).

Пример 9.20. Задана симметрическая матрица Q неотрицательных чисел:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нарисовать на плоскости граф $G(V, X)$, имеющий заданную матрицу Q своей матрицей смежности. Найти матрицу инцидентности R графа G. Нарисовать также орграф $\vec{G}(N, A)$, имеющий матрицу смежности Q, определить его матрицу инцидентности C.

Решение. Нарисуем граф (рис. 9.8). Составим матрицу инцидентности:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}
v_1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1
v_2	0	1	1	1	1	1	0	0	0	1	0
v_3	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0
v_4	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1

В итоге получим

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Построим теперь ориентированный граф с заданной матрицей смежности (рис. 9.9).

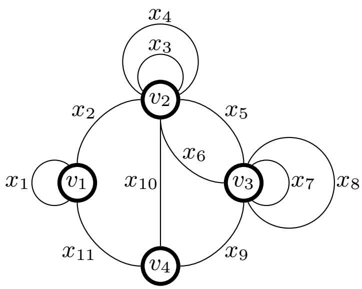


Рис. 9.8

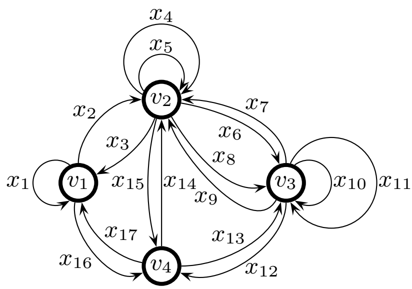


Рис. 9.9

Составим матрицу инцидентности для ориентированного графа. Элемент матрицы равен 1, если точка является концом дуги, -1 — является началом дуги; если дуга является петлей, элемент матрицы запишем как ± 1:

$$C = \begin{pmatrix} \pm1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \pm1 & \pm1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & \pm1 & \pm1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, операции с графами можно свести к операциям с их матрицами.

Достижимость и связность

Определение 9.29. Вершина w графа D (или орграфа) называется *достижимой* из вершины v, если либо $w = v$, либо существует путь из v в w (маршрут, соединяющий v и w).

Определение 9.30. Граф (орграф) называется *связным*, если для любых двух его вершин существует маршрут (путь), который их связывает. Орграф называется *односторонне связным*, если для любых двух его вершин по крайней мере одна достижима из другой.

Определение 9.31. Псевдографом $D(V, X)$, *ассоциированным* с ориентированным псевдографом, называется псевдограф $G(V, X_0)$, в котором X_0 получается из X заменой всех упорядоченных пар (v, w) на неупорядоченные пары (v, w).

Определение 9.32. Орграф называется *слабо связным*, если связным является ассоциированный с ним псевдограф.

Эйлеровы и гамильтоновы графы

Определение 9.33. Цепь (цикл) в псевдографе G называется *эйлеровым*, если она проходит по одному разу через каждое ребро псевдографа G.

Теорема 9.1. *Для того чтобы связный псевдограф G обладал эйлеровым циклом, необходимо и достаточно, чтобы степени его вершин были четными.*

Теорема 9.2. *Для того чтобы связный псевдограф G обладал эйлеровой цепью, необходимо и достаточно, чтобы он имел ровно две вершины нечетной степени.*

Определение 9.34. Цикл (цепь) в псевдографе G называется *гамильтоновым*, если он проходит через каждую вершину псевдографа G ровно один раз.

Пример 9.21. В графе из рис. 9.10, *а* есть и эйлеров, и гамильтонов циклы. В графе из рис. 9.10, *б* есть эйлеров цикл, но нет гамильтонова. В графе из рис. 9.10, *в* есть гамильтонов, но нет эйлерова цикла. В графе из рис. 9.10, *г* нет ни эйлерова, ни гамильтонова цикла.

Определение 9.35. Граф G называется *полным*, если каждая его вершина смежна со всеми остальными вершинами.

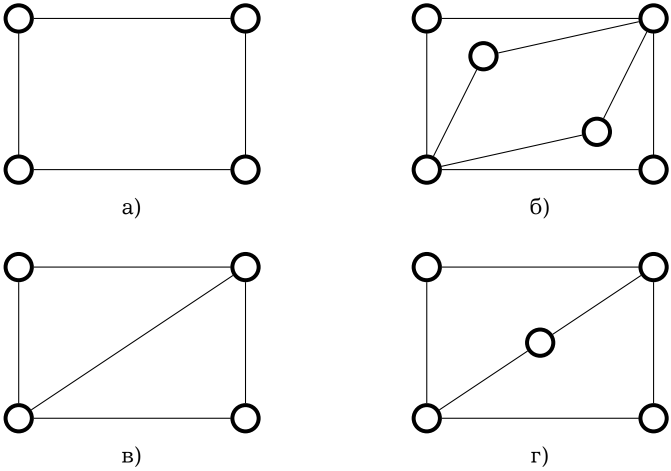


Рис. 9.10

В полном графе всегда существуют гамильтоновы циклы.

Также необходимым условием существования гамильтонова цикла является связность графа.

Деревья и циклы

Определение 9.36. Граф G называется *деревом*, если он является связным и не имеет циклов. Граф G, все компоненты связности которого являются деревьями, называется *лесом*.

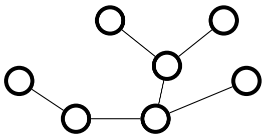


Рис. 9.11

У графа, который является деревом, число ребер на единицу меньше числа вершин. Дерево не содержит циклов, любые две его вершины можно соединить единственной простой цепью (рис. 9.11). Если у дерева G есть, по крайней мере, одно ребро, то у него обязательно найдется висячая вершина, т.к. в противном случае в графе будет цикл.

Для графов, которые сами по себе не являются деревьями, вводится понятие остовного дерева.

Определение 9.37. *Остовным деревом* связного графа G называется любой его подграф, содержащий все вершины графа G и являющийся деревом.

Пусть G — связный граф. Тогда остовное дерево графа G (если оно существует) должно содержать $n(G) - 1$ ребер. Таким образом, любое остовное дерево графа G есть результат удаления из графа G ровно $m(G) - (n(G) - 1) = m(G) - n(G) + 1$ ребер. Число $\nu(G) = m(G) - n(G) + 1$ называется *цикломатическим числом* связного графа G.

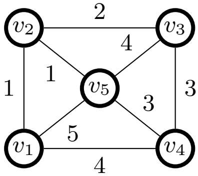
Одной из самых распространенных задач является задача построения остовного дерева минимальной длины графа. Для решения этой задачи применяется следующий алгоритм:

1) выберем в графе G ребро минимальной длины. Вместе с инцидентными ему вершинами оно образует подграф G_2;

2) строим граф G_3, добавляя к графу G_2 новое ребро минимальной длины, выбранное среди ребер графа G, каждое из которых инцидентно какой-либо вершине графа G_2, и одновременно инцидентно какой-либо вершине графа G, не содержащейся в графе G_2;

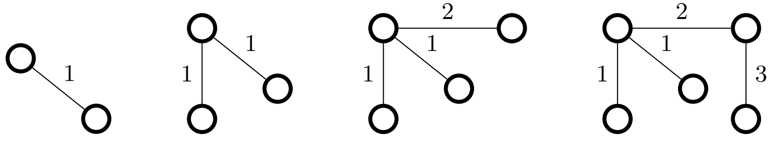
3) строим графы $G_4, G_5, \ldots, G_n$, повторяя действия пункта 2 до тех пор, пока не переберем все вершины графа G.

Пример 9.22. Определить минимальное остовное дерево нагруженного графа, приведенного на рисунке:



Решение. Граф называется *нагруженным*, если на множестве его дуг задана некоторая функция, которая называется *весовой функцией*, определяющая длину дуги. В нашем примере весовая функция определяет длины дуг числами 1, 2, 3, 4, 5.

Построим остовное дерево:



G_2 $\qquad$ G_3 $\qquad$ G_4 $\qquad$ G_5

На четвертом шаге алгоритма получили дерево G_5, которое соединяет все вершины исходного графа. Таким образом, дерево G_5 будет минимальным остовным деревом графа G.

Примеры тестовых заданий

Задание 1. Для множеств $A = \{x\colon \sin x = 0\}$ и $B = \{x\colon 0 < x < 10\}$ результатом операции $A \cap B$ является множество...

Ответ: $\{\pi; 2\pi; 3\pi\}$.

Задание 2. Для множеств $A = \{11; 13; 15; 17\}$, $B = \{10; 11; 12; 13\}$ и $C = \{12; 14; 16; 18\}$ результатом операций $A \cup (B \backslash C)$ является количество элементов...

Ответ: 5.

Задание 3. Для множеств $A = \{x\colon x^2 + 10x + 21 = 0\}$ и $B = \{x\colon -3 < x < 5\}$ результатом операции $A \cup B$ является множество...

Ответ: $\{-7\} \cup [-3; 5)$.

Задание 4. Для множеств $A = \{0; 3; 17\}$ и $B = \{1; 7; 30\}$ справедливо...

Ответ: A и B не пересекаются.

Задание 5. Даны множества $A = \{1; 3; 5; 7\}$ и $B = \{2; 4; 6\}$. Тогда количество пар, удовлетворяющих условию $V = \{(x, y) \mid x + y = 9\}$, равно...

Ответ: 3.

Задание 6. Даны множества $A = \{1; 3; 5; 7\}$ и $B = \{2; 4; 6\}$. Тогда количество пар, удовлетворяющих условию $V = \{(x, y) \mid x < y\}$, равно...

Ответ: 6.

Задание 7. Даны множества $A = \{4; 5; 6\}$, $B = \{6; 7; 8\}$ и $C = \{2; 3; 4\}$. Тогда число элементов множества $D = (A \backslash B) \cap C$ равно...

Ответ: 1.

Задание 8. Даны три множества: $A = \{x \mid x^2 + 3x - 4 = 0\}$, $B = \{x \mid -4 < x < 10\}$, $C = \{x \mid x + 2 = 0\}$. Тогда число элементов множества $D = (A \cap B) \cup C$ равно...

Ответ: 2.

Задание 9. Декартово произведение $X \times Y$ множеств $X = \{a, b\}$ и $Y = \{a, c\}$ равно...

Ответ: $\{(a, a), (a, c), (b, a), (b, c)\}$.

Задание 10. Декартовым произведением $[1; 2]$ на $[3; 5]$ является...

Ответ:
прямоугольник с вершинами $(1; 3)$, $(1; 5)$, $(2; 3)$, $(2; 5)$.

Задание 11. Таблицей истинности для формулы

$$\varphi = (x_1 \to x_2) \wedge ((\bar{x}_2 \to x_3) \to x_1)$$

является...

Ответ: $\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Задание 12. Нулевой набор у формулы $\varphi = (x \vee y) \to (\bar{x}y \vee x\bar{y})$ получается при следующих значениях переменных...

Ответ: $x = 1$, $y = 1$.

Задание 13. Какой формуле равносильна формула

$$\overline{(p \to q) \wedge (q \vee \bar{p})}\,?$$

Ответ: $p \wedge \bar{q}$.

Задание 14. Отрицанием высказывания «$x > 0$» является...

Ответ: $x \leqslant 0$.

Задание 15. Что является отрицанием высказывания «Если я сдам зачет, то пойду в кафе с друзьями или на вечеринку»?

Ответ: «Я сдам зачет и не пойду ни в кафе с друзьями, ни на вечеринку».

Задание 16. Сколькими способами можно из колоды карт (36 штук) выбрать пять карт так, чтобы среди них было два туза?

Ответ: 29 760.

Задание 17. Сколько различных перестановок можно сделать из букв слова: а) наука; б) математика?

Ответ: а) 60;   б) 151 200.

Задание 18. Сколько автомобильных номеров можно составить из трех букв и трех цифр?

Ответ: 35 937 000.

Задание 19. Сколькими способами можно расставить шесть книг по трем полкам?

Ответ: 729.

Задание 20. Сколькими способами можно поставить на полку шесть книг так, чтобы три заданные книги оказались рядом (в произвольном порядке)?

Ответ: 144.

Задание 21. Сколькими способами можно расселить девять студентов в трех комнатах, рассчитанных на трех человек каждый?

Ответ: 1 680.

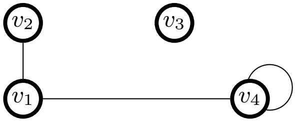
Задание 22. Студенту надо выбрать два факультативных курса из шести возможных. Сколькими способами он может это сделать?

Ответ: 15.

Задание 23. В соревнованиях принимают участие 16 равносильных команд. Сколькими способами могут быть распределены золотая и серебряная медали?

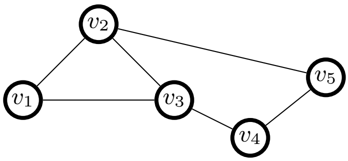
Ответ: 240.

Задание 24. Для данного графа укажите матрицу смежности.



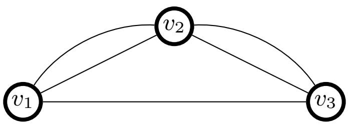
$$\textit{Ответ: } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 25. Для данного графа найдите матрицу смежности.



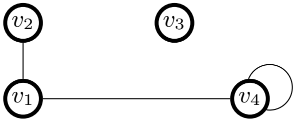
$$\textit{Ответ: } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задание 26. Найдите матрицу смежности, соответствующую данному графу.



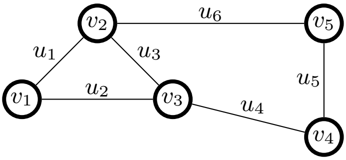
$$\textit{Ответ: } A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задание 27. Найдите матрицу инцидентности, соответствующую данному графу.



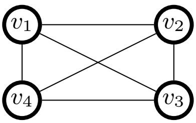
Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание 28. Укажите для следующего графа маршрут.

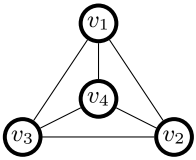


Ответ: $\{v_1, u_1, v_2, u_3, v_3, u_2, v_1, u_1, v_2, u_6, v_5, u_5, v_4\}$.

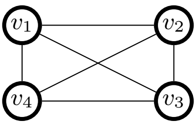
Задание 29. Изоморфным к графу на рисунке является...



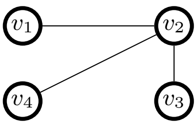
Ответ:



Задание 30. Остовом для графа на рисунке является...



Ответ:



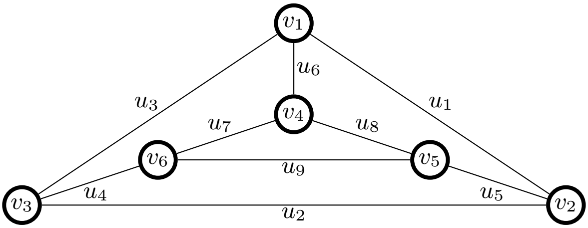
Задание 31. Матрице инцидентности

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

соответствует матрица смежности...

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задание 32. Для приведенного графа гамильтоновым циклом является...



Ответ: $\{v_1, u_1, v_2, u_2, v_3, u_4, v_6, u_9, v_5, u_8, v_4, u_6, v_1\}$.

Задание 33. Орграф задается матрицей смежности

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда полустепень захода вершины v_2 равна...

Ответ: 1.

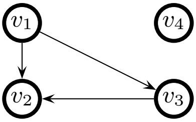
Задание 34. Матрица инцидентности

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

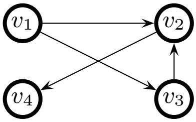
соответствует матрице смежности...

Ответ: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

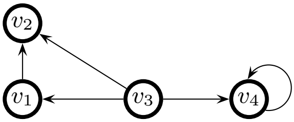
Задание 35. Орграф может служить подграфом графа...



Ответ:

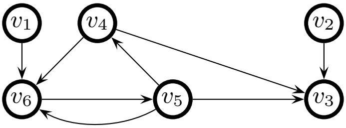


Задание 36. Найдите матрицу смежности для графа.



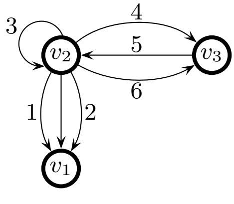
Ответ: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

Задание 37. Найдите матрицу смежности для графа.



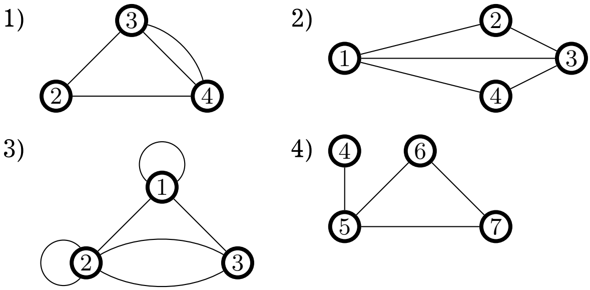
Ответ: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

Задание 38. Матрицей инцидентности мультиграфа является...



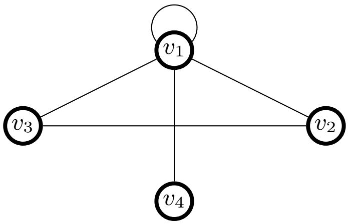
Ответ: $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$

Задание 39. Среди приведенных графов укажите псевдограф.



Ответ: граф 3.

Задание 40. Для графа укажите степень вершины v_1.



Ответ: 5.

Список рекомендуемой литературы

1. *Антонов В. И.* Математика. Интернет-тестирование базовых знаний: учеб. пособие / В. И. Антонов, Ф. И. Копелевич. — СПб.: Лань, 2010. — 160 с.

2. *Бугров Я. С.* Высшая математика. Задачник / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — М.: Дрофа, 2006. — 253 с.

3. *Бугров Я. С.* Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — М.: Дрофа, 2006. — 432 с.

4. *Бугров Я. С.* Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексной переменной / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — М.: Дрофа, 2006. — 464 с.

5. *Бугров Я. С.* Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. — М.: Дрофа, 2006. — 192 с.

6. *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика: учеб. пособие / В. Е. Гмурман. — 10-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2004. — 479 с.

7. *Гмурман В. Е.* Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб. пособие для вузов / В. Е. Гмурман. — М.: Высш. образование, 2006. — 479 с.

8. *Гнеденко Б. В.* Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. — М.: УРСС, 2005. — 406 с.

9. Задачи и упражнения по математическому анализу для втузов / под ред. Б. П. Демидовича. — М.: АСТ, 2005. — 495 с.

10. *Кузнецов Л. А.* Сборник задач по высшей математике (типовые расчеты) / Л. А. Кузнецов. — СПб.: Лань, 2008. — 240 с.

11. *Любимов В. М.* Математика. Ряды: пособие по изучению дисциплины и контрольные задания / В. М. Любимов, Е. А. Жукова, В. А. Укова, Ю. А. Шуринов. — М.: МГТУГА, 2007. — 53 с.

12. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления / Н. С. Пискунов. — Т. 1. — М.: Символ-плюс, 2007. — 416 с.

13. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления / Н. С. Пискунов. — Т. 2. — М.: Символ-плюс, 2007. — 544 с.

14. Сборник задач по математике для втузов: в 4 ч. — Ч. 1. Линейная алгебра и основы математического анализа / под ред. А. В. Ефимова, А. С. Поспелова. — М.: Физматлит, 2004. — 462 с.

15. Сборник задач по математике для втузов: в 4 ч. — Ч.2. Специальные разделы математического анализа / под ред. А. В. Ефимова, А. С. Поспелова. — М.: Физматлит, 2004. — 366 с.

16. Сборник задач по математике для втузов: в 4 ч. — Ч.3. Теория вероятностей и математическая статистика / под ред. А. В. Ефимова, А. С. Поспелова. — М.: Физматлит, 2004. — 428 с.

17. *Чудесенко В. Ф.* Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. Типовые расчеты / В. Ф. Чудесенко. — СПб.: Лань, 2007. — 126 с.

18. *Шипачев В. С.* Основы высшей математики / В. С. Шипачев. — М.: Высш. шк., 2003. — 479 с.

19. http://ten.distant.ru/test/math/2/test-2.htm — сайт тестирования кафедры высшей математики Российского химико-технологического университета им. Д. И. Менделеева.

20. http://www.i-exam.ru — сайт для проведения интернет-экзаменов.

Оглавление

Учебно-практическое издание

Агаков Всеволод Георгиевич
Атаманов Петр Степанович
Быкова Алевтина Николаевна и др.

ИНТЕРНЕТ-ТЕСТИРОВАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие

Редактор А. Н. Антонова
Компьютерный набор и верстка В. Г. Сытина

Согласно Закону № 436-ФЗ от 29 декабря 2010 года
данная продукция не подлежит маркировке

Подписано в печать 2.03.15. Формат 60×84/16.
Бумага офсетная. Гарнитура Журнальная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 18,24. Уч.-изд. л. 18,04. Тираж 200 экз. Заказ № 206.

Издательство Чувашского университета
Типография университета
428015 Чебоксары, Московский просп., 15