

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное бюджетное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Чувашский государственный университет  
имени И. Н. Ульянова»

**В. Г. Алексеев**  
**С. В. Алексеев**

# **МЕХАНИКА**

## **ПРАКТИКУМ**

2–е издание, переработанное и дополненное

Чебоксары 2017

УДК 53 (075.8)

ББК

А47

**Алексеев В.Г.**

**А47** Механика: практикум. 2-изд., перераб. и доп./ В.Г. Алексеев, С.В. Алексеев. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та. 2017.158 с

Составлен в соответствии с действующей программой по физике для студентов технических факультетов вузов. Содержит описания лабораторных работ по механике. Изложена методика обработки экспериментальных результатов. Даны методические указания и требования, предъявляемые к выполнению лабораторных работ по физике. Приведены справочные таблицы и значения физических постоянных.

Для самостоятельной подготовки студентов I курса технических факультетов к лабораторным занятиям. Может служить руководством при выполнении лабораторных работ.

Ответственный редактор доцент Л.К. Митрюхин

Утверждено Учебно-методическим советом университета

УДК 53 (075.8)

ББК

© Издательство Чувашского  
университета, 2017  
Алексеев В.Г.,  
Алексеев С.В., 2017

ISBN

## ПРЕДИСЛОВИЕ

При изучении курса общей физики большое значение придается физическому практикуму, который призван помочь студентам глубже осознать основные физические закономерности и приобрести элементарные навыки экспериментирования.

Настоящий практикум содержит 14 лабораторных работ по механике. Каждая лабораторная работа рассчитана на два академических часа выполнения в лаборатории. Многие работы в течение ряда лет прошли апробацию в лабораториях кафедры общей физики Чувашского государственного университета им. И.Н. Ульянова и представлены в ранее изданных практикумах [4–6; 13]. Большая часть работ значительно переработана и дополнена. Некоторые лабораторные работы поставлены впервые.

В вводной части практикума содержатся основные сведения об измерениях физических величин, теория погрешностей и подробно изложена методика обработки результатов измерений. Большинство лабораторных работ по механике поставлены на базе лабораторного оборудования, разработанного ВСНПО «Союзучприбор». В перечень лабораторных работ входят такие классические установки, как машина Атвуда, крестообразный маятник Обербека, маятник Максвелла, оборотный маятник Бесселя и т.д.

Каждая лабораторная работа содержит краткое теоретическое введение, описание экспериментальной установки, несколько упражнений, порядок выполнения и обработки результатов, контрольные вопросы и список литературы. В зависимости от специфики факультетов, учебных групп, по усмотрению преподавателя, ведущего лабораторные работы, студенты могут выполнять одно или несколько упражнений.

В приложении содержатся необходимые справочные материалы, а также образец оформления лабораторной работы.

Авторы выражают признательность рецензентам, преподавателям кафедры общей физики Чувашского государственного университета им. И.Н. Ульянова за ценные советы и замечания, которые были учтены при написании данного практикума.

## **ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ТРЕБОВАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ ЛАБОРАТОРНЫХ РАБОТ**

Все лабораторные работы по физике выполняются бригадами (2–3 чел.) строго в соответствии с графиком, который утверждает кафедра и вывешивается в лабораториях. Замена отдельных работ практикума разрешается только преподавателями, ведущими занятия с данной учебной группой. При выполнении лабораторных работ студенты обязаны соблюдать правила внутреннего распорядка и техники безопасности. С этой целью преподаватель, ведущий лабораторные работы на первом вводном занятии, проводит инструктаж. По прохождении инструктажа студенты обязаны расписаться в отдельном лабораторном журнале, обязуясь их выполнять.

Для успешного выполнения лабораторных работ студенты обязаны заблаговременно подготовиться к ним в часы самостоятельной работы. В специально отведенное время в лабораториях можно ознакомиться с экспериментальной установкой и описанием данной работы. При этом студенты должны изучить цели и задачи выполняемой работы, содержание и порядок ее выполнения. Необходимо изучить технические характеристики отдельных электроизмерительных приборов, применяемых в данной работе, а также правила обращения с ними. Для более детального изучения некоторых вопросов кроме описания лабораторных работ нужно использовать рекомендуемую литературу. Обязательным элементом предварительной подготовки является составление протокола измерений (формы отчета). При оформлении отчета нужно руководствоваться общими правилами оформления научно-технической документации. Чертежи, схемы и рисунки выполняются по правилам технического черчения с соблюдением ГОСТов, а графики вычерчиваются на миллиметровой бумаге. Текстовая часть отчета оформляется на листах писчей бумаги стандартного формата или на листах развернутой ученической тетради. В исключительных случаях отчет можно оформлять в отдельной тетради.

Отчет по лабораторной работе должен включать следующие элементы:

1) титульный лист, на котором указаны номер и название работы, дата ее выполнения, фамилии и инициалы студента и преподавателя, а также наименование вуза и кафедры;

2) приборы и принадлежности;

3) цель работы;

4) краткая теоретическая часть с расчетными формулами;

5) электрическая схема установки с обозначением всех элементов;

6) технические характеристики приборов (спецификация);

7) табличные и другие данные, необходимые для расчетов;

8) таблицы результатов измерений;

9) формулы для вычисления погрешностей;

10) окончательный результат измерений с указанием погрешности и доверительной вероятности.

Образцы выполнения отчета по лабораторной работе имеются на стендах в каждой лаборатории и приводятся в приложении настоящего практикума.

К выполнению лабораторных работ студенты могут приступить только после сдачи допуска. При этом преподаватель проверяет:

1) наличие протокола измерений (формы отчета);

2) понимание целей и задач работы;

3) знание основных этапов работы, последовательности их выполнения, методов измерения физических величин;

4) знание принципов работы приборов и правил обращения с ними;

5) знание правил техники безопасности.

Студенты, явившиеся на занятия неподготовленными, к выполнению лабораторных работ **не допускаются**.

Приступая к выполнению лабораторных работ, необходимо проверить, все ли приборы и принадлежности, указанные в описании работы, имеются на рабочем столе. Переносить приборы без разрешения обслуживающего персонала **категорически запрещается**. Сборку электрической схемы производить цельными, с неповрежденной изоляцией проводниками. При подключении приборов, предназначенных для работы в цепях постоянного тока, необходимо соблюдать полярность их подключения. Электроизмерительные и другие приборы следует устанавливать на рабочем столе

в положении, указанном на приборе. Источник питания подключается к схеме последним. Перед включением установки следует убедиться в том, что потенциометры и реостаты находятся в положении минимального напряжения и тока (реостат полностью введен), а многопредельные электроизмерительные приборы – в положении АРРЕТИР, или положении максимального диапазона.

Собранную электрическую схему можно включать только после проверки преподавателем или лаборантом. После включения установки нужно приступать к выполнению задания, придерживаясь последовательности, указанной в описании к лабораторной работе, а также используя практические советы и указания преподавателя и лаборанта. Все изменения в схеме, а также демонтаж можно производить только после отключения источника питания. В случае обнаружения неисправности в работе приборов и установки в целом они немедленно должны отключаться. О неисправности следует сообщить лаборанту или преподавателю. Возобновлять выполнение работы можно только после устранения неисправности обслуживающим персоналом.

Результаты измерений, вычислений и другие величины, необходимые в работе, нужно записывать в таблицу. Следует помнить, что результат работы зависит не только от точности измерительных приборов, но и от тщательности измерений и их обработки. Небрежности, допущенные в записи измерений и при их обработке, могут привести к грубым ошибкам.

После окончания работы установка должна быть немедленно отключена от источника питания, а результаты измерений показаны преподавателю. Работа считается выполненной в том случае, если преподаватель закрепит своей подписью отметку о выполнении. Только после этого электрическая схема может быть демонтирована, а рабочий стол приведен в порядок.

## **ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ**

### **1. ИЗМЕРЕНИЯ И КЛАССИФИКАЦИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ**

Основной задачей физического практикума является привитие у студентов навыков экспериментальной работы. Любой физиче-

ский эксперимент в той или иной форме связан с измерением. Измерить физическую величину – значит сравнить ее с некоторой другой однородной величиной, принятой за единицу измерения. Полученная при этом величина, показывающая, во сколько раз измеряемая величина больше или меньше выбранной единицы, называется *результатом измерения*. Результату измерения приписывается такое же наименование, что и выбранной единице.

Измерения бывают *прямые* и *косвенные*. При *прямых* измерениях величина получается либо путем непосредственного сравнения измеряемой величины с единицами меры, как это имеет место при измерениях длины линейкой, штангенциркулем и т.д., либо приборами, градуированными в определенных единицах (амперметры, вольтметры и т.д.).

При косвенных измерениях получают непосредственно не искомую величину, а величины, функционально связанные с ней. Функциональная зависимость выражается математическими формулами, с помощью которых и определяется искомая величина, как, например, измерение объема тела по его линейным размерам.

Результат измерений физической величины всегда отличается от истинного значения на некоторую величину, которая называется *погрешностью*. Классификация погрешностей в зависимости от источника возникновения, условий проведения измерений, способа выражения и т.д. приведена на рис. 1. Обычно точность измерений ограничивается несовершенством измерительных приборов и наших органов чувств, а также статистическим характером изучаемых явлений. Точность косвенных измерений может зависеть также от степени приближения зависимости изучаемой величины от измеряемой и от степени округления при вычислениях. Поэтому задача измерений заключается не в определении истинного значения измеряемой величины, а в установлении интервала, внутри которого находится истинное значение этой величины. Таким образом, измеряя какую-либо физическую величину, мы должны указать наиболее вероятное значение измеряемой величины и точность измерений. Точность измерения определяется близостью результата измерения к истинному значению физической величины. Оценка точности измерения – неотъемлемая часть измерения. Точность измерений можно характеризовать абсолютной или относительной погрешностями.

**Абсолютной погрешностью** называется разность между результатом измерения  $x_{\text{изм}}$  и истинным значением физической величины  $x_{\text{ист}}$ :

$$\Delta x = |x_{\text{изм}} - x_{\text{ист}}|. \quad (1)$$

Абсолютная погрешность выражается в единицах измеряемой величины.



Рис. 1

**Относительной погрешностью** называется отношение абсолютной погрешности к истинному значению измеряемой величины:



$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x}. \quad (2)$$

Ее обычно выражают в процентах:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x} 100\%. \quad (3)$$

Главное преимущество последней в том, что можно сравнивать точности измерений различных по природе величин, кроме того, относительная погрешность полнее характеризует точность измерений.

По характеру происхождения погрешности можно разделить на три типа: промахи, систематические и случайные.

1. Промахи, или грубые ошибки, являются результатом сбоя измерительного прибора или оплошности экспериментатора. Такие ошибочные результаты должны быть отброшены, а вместо них проведены контрольные измерения.

2. Систематические погрешности связаны, главным образом, с недостатком методики измерений и несовершенством измерительных приборов. Обычно при многократных измерениях физической величины систематическая погрешность имеет одно и то же значение, т.е. систематически повторяется от опыта к опыту. Увеличение числа измерений не устраняет систематических ошибок. Систематические ошибки в большинстве случаев можно устранить или свести к минимуму. Это делается путем анализа возможных источников погрешностей. Если удастся обнаружить причину и найти величину смещения, то систематическую погрешность можно исключить введением поправки к измеренному значению. Не существует универсальных правил, позволяющих найти систематические ошибки данного измерения. Выявление, оценка и устранение этих ошибок – дело опыта, догадки или интуиции экспериментатора. Наиболее действенный способ обнаружения систематических ошибок, связанных с методом измерений, – сравнение результатов измерений, полученных разными методами. Систематическую ошибку, обусловленную измерительным прибором, можно уменьшить, используя более точный прибор. Контрольные замеры с применением более точных (образцовых) приборов позволяют найти величину поправки.

3. Случайные погрешности возникают в результате действия

многих факторов, не поддающихся учету (изменение температуры, давления, колебания воздуха и т.д.). Этих помех очень много, они различной природы и отличаются степенью воздействия на результаты измерений. Полностью избавиться от случайных погрешностей невозможно, но их можно уменьшить за счет многократного повторения измерений. При этом влияние факторов, приводящих к завышению или занижению результатов измерений, может частично компенсироваться. Случайные погрешности, имеющие различные величины и знаки, подчиняются статистическим закономерностям. Путем многократных измерений и использования теории вероятностей можно дать количественную оценку случайной ошибки и указать вероятность, при которой истинное значение измеряемой величины находится внутри некоторого интервала. Обычно в лабораториях чувствительности используемых приборов не всегда хватает для обнаружения случайной ошибки. Кроме того, систематические погрешности приборов, как правило, велики по сравнению со случайными. Если же случайная ошибка в большей степени влияет на точность результата, то ее можно уменьшить путем многократного повторения измерения.

## 2. УЧЕТ СЛУЧАЙНЫХ ОШИБОК ПРИ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

В природе, жизни и технике часто встречаются случайные явления, предсказать которые нельзя, так как в них сказывается влияние очень большого числа не поддающихся контролю факторов. Большая совокупность случайных явлений или величин подчиняется статистическим законам. Статистические законы дают возможность определить вероятность, с которой осуществляется то или иное событие, средние величины в серии измеряемых величин, наиболее вероятные отклонения от среднего и т.д. Все эти характеристики определяются *законом распределения случайных величин* – зависимостью вероятности появления данной величины от значения самой величины. Наиболее распространенным в природе законом распределения случайных величин является так называемый *закон нормального распределения*. Распределение имеет место в том случае, если случайная величина зависит от большого числа факторов, которые могут вносить с равной вероятностью положи-

тельные и отрицательные отклонения. Примером такого распределения может служить распределение случайных ошибок при измерении любой физической величины. **Гаусс**, пользуясь методами теории вероятностей и рассматривая случайные ошибки как один из видов случайных событий вообще, получил закон нормального распределения ошибок, устанавливающий связь между возможными значениями случайной погрешности и вероятностью появления этих значений.

Допустим, что мы проводим при одних и тех же условиях серию измерений величины  $x$ . Неизбежное наличие большого числа причин, действующих независимо друг от друга, приведет к тому, что результаты отдельных измерений будут различаться. В итоге вместо истинного значения получим совокупность значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Число измерений  $\Delta n$ , давших отклонение от истинного значения измеряемой величины в пределах от  $x$  до  $x + \Delta x$ , пропорционально интервалу  $\Delta x$  и полному числу измерений:

$$\frac{\Delta n}{n\Delta x} = f(x). \quad (4)$$

Функция  $f(x)$  называется *плотностью вероятности распределения* случайной величины. Выражение для плотности вероятности при неограниченном числе измерений было получено впервые Гауссом и называется **законом нормального распределения** или гауссовым распределением. Закон нормального распределения случайных величин имеет вид

$$f(x) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \cdot \Delta x^2}, \quad (5)$$

где  $\Delta x$  – отклонение измеряемой величины от истинного значения;  $h$  – мера точности.

Кривая нормального распределения ошибок имеет симметричную колоколообразную форму. Из рис. 2 видно, что малые ошибки встречаются чаще, чем большие. Симметричность кривой свидетельствует о равновероятности положительных и отрицательных ошибок. Кривая характеризуется двумя параметрами: положением вершины, соответствующей вероятному значению измеряемой величины, и мерой точности. Из теории Гаусса следует, что наиболее вероятное значение измеряемой величины равно средней

арифметической из всех полученных значений, т.е.

$$x_{\text{ср}} = \frac{\sum x_i}{n}. \quad (6)$$

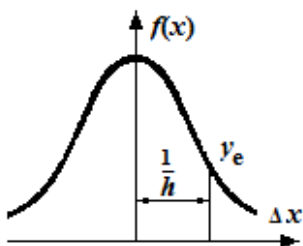


Рис. 2

Величина  $x_{\text{ср}}$  стремится к истинному значению  $x_{\text{ист}}$  измеряемой величины при  $n \rightarrow \infty$ . При ограниченных числах измерений  $x_{\text{ср}}$  будет отличаться от истинного значения. Несмотря на то, что с помощью закона распределения невозможно указать точно, чему равно  $x_{\text{ист}}$ , мы можем найти, с какой веро-

ятностью  $P$   $x_{\text{ист}}$  окажется в любом интервале значений  $(x - \Delta x, x + \Delta x)$ . Эта вероятность определяется выражением

$$P = \int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} f(x) dx \quad (7)$$

и называется *доверительной вероятностью*, или надежностью. Она равна площади заштрихованной на рис. 3 фигуры. Интервал  $(x - \Delta x, x + \Delta x)$  называется *доверительным*.

Мера точности определяется из соотношения

$$y_e = y \left( \frac{1}{h} \right) = \frac{y_{\text{max}}}{e}. \quad (8)$$

Чем меньше мера точности  $h$ , тем больше разброс результатов измерений относительно их среднего значения  $\bar{x}$ , следовательно,

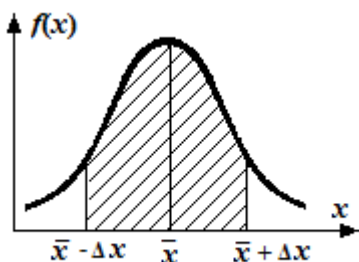


Рис. 3

меньше точность измерений. В этом случае кривая распределения расплывается, ее максимум становится менее ярко выраженным. Однако площадь, ограниченная кривой, всегда остается постоянной, равной единице. Несмотря на то, что мера точности полностью определяет точность измерений, в теории ошибок принято характери-

зовать точность измерений либо средней арифметической ошибкой

$$\Delta x_{\text{cp}} = \frac{\sum \Delta x_i}{n} = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}, \quad (9)$$

либо средней квадратичной ошибкой

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum \Delta x^2}{n}} = \frac{1}{h\sqrt{2}}. \quad (10)$$

Средняя арифметическая ошибка менее точно определяет интервал, внутри которого заключено истинное значение величины, чем средняя квадратичная. Поэтому чаще всего точность измерений оценивается среднеквадратичной ошибкой  $\sigma$ . За меру погрешности можно выбирать и любой другой интервал значений  $\pm \Delta x$ , но обязательно нужно указать соответствующую ему доверительную вероятность. Указание одной только величины абсолютной погрешности лишено смысла, так как неизвестно, насколько надежны полученные данные. В большинстве случаев в учебных лабораториях интервал  $\pm \Delta x$  принимают равным  $2\sigma$ . Для такого интервала доверительную вероятность принимают равной  $P = 0,95$ .

Таким образом, чтобы записать полученный результат, нужно задаться надежностью  $P$  и по вычисленной  $\sigma$  указать доверительный интервал (см. табл. 1):

$$x = x_{\text{cp}} \pm 2\sigma, \quad P = 0,95. \quad (11)$$

Таблица 1

$P$	0,684	0,954	0,997
$\Delta x$	$\sigma$	$2\sigma$	$3\sigma$

В лабораторном практикуме мы не в состоянии провести большое число измерений. Как правило, оно не превышает десяти. Однако, как показал **Стьюдент** (Боссет), статистический подход справедлив и в этом случае. При малых числах измерений заданному значению надежности  $P$  соответствует несколько больший доверительный интервал:

$$\Delta x = \alpha_{p,n} \cdot S, \quad (12)$$

где  $\alpha_{p,n}$  – коэффициент Стьюдента, определяемый по табл. 13 приложения;  $S$  – среднеквадратичная погрешность результата измерений;

$$S = \sqrt{\frac{\sum \Delta x_i^2}{n(n-1)}}. \quad (13)$$

При числе измерений  $n \rightarrow \infty$   $S$  стремится к постоянному пределу

$$\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} S \quad (14)$$

и распределение Стьюдента переходит в распределение Гаусса. Следовательно, при небольших числах измерений конечный результат записываем в виде

$$x = x_{\text{ср}} \pm \alpha_{p,n} S. \quad (15)$$

Из формулы (13) видно, что с увеличением числа измерений уменьшается среднеквадратичная ошибка. Казалось бы, увеличивая число измерений, можно получить результаты с любой степенью точности. Однако точность существенно увеличивается лишь до тех пор, пока случайная погрешность не станет сравнимой с систематической. Дальнейшее увеличение числа измерений нецелесообразно, так как конечная точность будет зависеть от систематической ошибки.

### 3. ПОГРЕШНОСТИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

В тех случаях, когда физическая величина не может быть измерена непосредственно, прибегают к косвенным измерениям. Пусть искомая величина  $x$  является функцией нескольких независимых переменных:

$$x = f(a, b, c, \dots), \quad (16)$$

где  $a, b, c, \dots$  – непосредственно измеряемые величины. Для получения результата косвенного измерения величины  $x$  необходимо провести серию прямых измерений величин  $a, b, c$ . При этом будут допущены ошибки  $\Delta a, \Delta b, \Delta c, \dots$ , которые определяют точность результата косвенного измерения. Возникает вопрос: как на основании ошибок отдельных измерений оценить ошибку косвенного измерения. Используя методы дифференциального исчисления, можно показать, что среднеквадратичная ошибка величины  $x$  может быть вычислена по формуле

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \sigma_b^2 + \dots}, \quad (17)$$

где  $\sigma_a$ ,  $\sigma_b$  – среднеквадратичные ошибки прямых измерений.

Выражение справедливо и для средней абсолютной погрешности косвенных измерений

$$\Delta x = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \Delta a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \Delta b^2 + \dots} \quad (18)$$

На основании формулы (18), зная абсолютные ошибки прямых измерений  $\Delta a$ ,  $\Delta b$ ,  $\Delta c$ , ..., можно найти абсолютную ошибку косвенного измерения. Однако при выполнении лабораторных работ часто пользуются упрощенной методикой расчета погрешностей, когда вычисляется максимальная погрешность косвенного измерения. Выражение для максимальной погрешности можно получить путем дифференцирования исходного выражения с последующей заменой значка дифференциала  $d$  на значок абсолютной ошибки  $\Delta$ . Знаки погрешностей отдельных измерений при этом нужно выбрать так, чтобы абсолютная величина погрешности была максимальной. В общем виде эта формула имеет вид:

$$\Delta x = \left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| \Delta a + \left| \frac{\partial f}{\partial b} \right| \Delta b + \dots \quad (19)$$

**Пример 1.**  $x = a b$ ,  $dx = da b + db a$ ,  $\Delta x = \Delta a b + \Delta b a$ .

**Пример 2.**  $x = \frac{a}{b}$ ,  $dx = \frac{da \cdot b - db \cdot a}{b^2}$ ,

$$\Delta x = \frac{\Delta a \cdot b + \Delta b \cdot a}{b^2}.$$

Иногда бывает проще вычислять не абсолютную, а относительную погрешность косвенного измерения. Формулу для расчета относительной погрешности косвенного измерения формально можно получить следующим образом:

1) прологарифмировать обе части исходного выражения

$$x = f(a, b, c, \dots);$$

2) продифференцировать полученное логарифмическое уравнение;

3) заменить значки дифференциалов  $d$  на значки абсолютных ошибок  $\Delta$ ;

4) знаки «минус», встречающиеся перед ошибками, заменить на знаки «плюс» для вычисления максимальной ошибки.

**Пример 3.**  $x = \frac{mu^2}{R}$ ,  $\ln x = \ln m + 2 \ln u - \ln R$ ,

$$\frac{dx}{x} = \frac{dm}{m} + 2 \frac{du}{u} - \frac{dR}{R}, \quad \frac{\Delta x}{x} = \frac{\Delta m}{m} + 2 \frac{\Delta u}{u} + \frac{\Delta R}{R}.$$

**Пример 4.** Пусть рабочая формула задана в виде разности, неудобной для логарифмирования:

$$J = mr^2 \left( \frac{g}{2h} t^2 - 1 \right).$$

Преобразуем формулу

$$J = \frac{mr^2 gt^2}{2h} - mr^2.$$

Обозначив через  $A$  и  $B$  первый и второй члены, соответственно, получим (см. пример 3):

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta r}{r} + \frac{\Delta g}{g} + \frac{2\Delta t}{t} + \frac{\Delta h}{h} \quad \text{и} \quad \frac{\Delta B}{B} = \frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta r}{r}.$$

С учетом того, что  $J = A - B$  и  $\Delta J = \Delta A + \Delta B$ , получим для абсолютной погрешности величины  $J$  следующее выражение:

$$\Delta J = \left( \frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta r}{r} + \frac{\Delta g}{g} + \frac{2\Delta t}{t} + \frac{\Delta h}{h} \right) \frac{mr^2 gt^2}{2h} + \left( \frac{\Delta m}{m} + \frac{2\Delta r}{r} \right) mr^2.$$

#### 4. ПРИБОРНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

Как было показано выше, многократные измерения позволяют повысить точность измерений. Однако это имеет место только тогда, когда случайные погрешности превосходят систематические (приборные). В случае когда число измерений достаточно велико и в результате измерений получается ряд совершенно одинаковых значений измеряемой величины, в качестве абсолютной погрешности измеряемой величины выбирается приборная погрешность.



Это правило относится и к случаю, когда производится только одно измерение. В связи с этим, приступая к измерениям, необходимо предварительно определить пределы точности, которые могут быть получены с помощью данных приборов. Это достигается внимательным изучением приборов. Точность прибора указывается либо на самом приборе, либо в прилагаемом к нему паспорте.

Если точность прибора не указана, то абсолютную погрешность прибора обычно принимают равной половине цены наименьшего деления шкалы прибора. Например, абсолютная погрешность измерения длины миллиметровой линейкой равна  $\pm 0,5$  мм. Однако при определении абсолютной погрешности прибора по цене деления нужно обращать внимание на то, как производится измерение, чем регистрируется, каково расстояние между соседними штрихами на шкале и т.д. Если, например, измеряется расстояние от пола до подвешенного груза при помощи миллиметровой линейки без дополнительных приспособлений, то абсолютная погрешность измерений не может быть меньше одного миллиметра. Приборная погрешность принимается равной цене деления и в тех случаях, когда деления на шкале нанесены очень часто, когда указателями приборов служат мениск (термометр, манометр) и скачущая стрелка (секундомер). В нониусных приборах за максимальную погрешность принимается точность нониуса.

В физическом практикуме часто приходится использовать электроизмерительные приборы. Одной из основных характеристик точности таких приборов является предел допускаемой основной погрешности. Кроме допускаемой основной погрешности существует предел допускаемой дополнительной погрешности, обусловленной влиянием внешних факторов.

В зависимости от основной и дополнительной погрешности измерительным приборам присваиваются соответствующие классы точности.

Предел допускаемой основной погрешности может выражаться одним из трех способов:

- 1) абсолютной погрешностью;
- 2) относительной погрешностью;
- 3) приведенной погрешностью.

Предел допускаемой абсолютной погрешности  $\Delta x$  выражается одним значением

$$\Delta x = \pm a, \quad (20)$$

в виде

$$\Delta x = \pm (a + bA), \quad (21)$$

где  $a, b$  – постоянные;  $A$  – измеряемая величина.

Предел допускаемой относительной погрешности выражается, как

$$\varepsilon = \pm \frac{100\Delta x}{A} = \pm C \quad (22)$$

или

$$\varepsilon = \pm \left[ c + d \left( \frac{x_k}{x} - 1 \right) \right], \quad (23)$$

где  $x_k$  – конечное значение диапазона;  $c, d$  – постоянные числа.

Первый способ применяется для нормирования погрешности однозначных мер. В этом случае число, обозначающее класс точности, заключается в кружок.

По второму способу нормируются погрешности магазинов сопротивлений, цифровых вольтметров и т.д. В обозначение класса точности входят два числа в виде дроби  $d/c$ . Например, погрешность магазина сопротивлений класса  $0,05/4 \cdot 10^{-6}$

$$\varepsilon = \pm \left[ 0,05 + 4 \cdot 10^{-6} \left( \frac{x_k}{x} - 1 \right) \right]. \quad (24)$$

Предел допускаемой приведенной погрешности выражается следующей формулой, %

$$\gamma = \pm \frac{100 \cdot \Delta x}{x_N}, \quad (25)$$

где  $x_N$  – нормирующее значение, равное:

1) конечному значению диапазона измерений для приборов, имеющих нулевую отметку на краю шкалы;

2) сумме нижнего и верхнего пределов шкалы для приборов с двусторонней шкалой (нуль в середине);

3) разность конечного и начального значений диапазона измерений – для приборов с безнулевой шкалой.

Такая форма удобна для нормирования погрешности аналоговых электроизмерительных приборов, имеющих неизменный во всем диапазоне измерений предел допускаемой абсолютной по-

грешности. Приведенная погрешность характеризует лишь метрологические свойства самого прибора и не зависит ни от диапазона измерения, ни от значения измеряемой величины.

Согласно ГОСТу, электроизмерительные приборы делятся на восемь классов точности: 0,05; 0,1; 0,2; 0,5; 1,0; 1,5; 2,5; 4,0.

По классу точности прибора можно определить абсолютную и относительную погрешности:

$$\Delta x = \frac{\gamma \cdot x_N}{100}; \quad \varepsilon = \frac{\gamma \cdot x_N}{A}. \quad (26)$$

Как видно из последней формулы, относительная погрешность всегда больше приведенной, причем, чем меньше измеряемое значение  $x$ , тем больше относительная погрешность. Для повышения точности измерений необходимо подобрать такой прибор или диапазон (для многопредельных приборов), чтобы указатель находился во второй половине шкалы.

## 5. ПОГРЕШНОСТИ ТАБЛИЧНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

При выполнении лабораторных работ, наряду с непосредственно измеряемыми физическими величинами, часто приходится использовать значения некоторых постоянных ( $\pi$ ,  $e$  и т.д.), табличные значения физических величин (плотность, вязкость, теплоемкость и т.д.), а также данные экспериментальной установки. От точности этих величин во многом зависит точность конечного результата.

Табличные значения физических величин обычно имеют точность выше точности величин, измеряемых при выполнении лабораторных работ. Их влияние в основном определяется точностью округления. Отметим, что любое округление чисел представляет собой систематическую ошибку. Поэтому при использовании табличных величин их следует округлять так, чтобы их точность превышала точность измеряемых величин на одну значащую цифру, тогда погрешностью табличных величин можно пренебречь. Например, пусть требуется вычислить длину окружности по результатам прямых измерений его диаметра  $d = (3,86 \pm 0,04)10^{-2}$  м по формуле  $L = \pi d$ . Оценим, с какой точностью при этом должна быть взята из таблицы величина  $\pi$  ( $\pi = 3,141592\dots$ ).

Относительная погрешность длины окружности

$$\varepsilon = \varepsilon_d + \varepsilon_\pi,$$

где  $\varepsilon_d = \frac{0,04}{3,86} = 0,01.$

Если взять число  $\pi$  с точностью до десятых, то

$$\varepsilon_\pi = \frac{0,04}{3,1} = 0,013.$$

Если же взять число  $\pi$  с точностью до сотых, то

$$\varepsilon_\pi = \frac{0,002}{3,14} = 0,0006 < \varepsilon_d = 0,01.$$

Следовательно, можно принять  $\pi = 3,14$ .

Если табличные значения, данные установки записаны без указания погрешности или определены не очень точно, то обычно считается, что их погрешность равна половине единицы последнего указанного разряда. Например, если  $x = 6,8$  мм, то принимаем  $\Delta x = 0,05$  мм.

## 6. ПРАВИЛА ПРИБЛИЖЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Точность обработки результатов измерений должна согласовываться с точностью самих измерений. Производя вычисления на основании результатов измерений, нет никакого смысла вести вычисления дальше того предела точности, который обеспечивается точностью непосредственно измерявшихся величин. Излишняя «точность» вычислений не достоинство, а недостаток в работе. Если хотя бы одна из величин задана с точностью до двух значащих цифр, то нет смысла вести вычисления результата с точностью более двух значащих цифр. Например, если среднее арифметическое диаметра цилиндра после расчета было взято равным 16,346 мм при абсолютной погрешности 0,1 мм, то при этом показано лишь умение формально производить арифметические вычисления, без понимания теории погрешностей измерений. Для того чтобы не тратить понапрасну сил и времени для получения иллюзорной точности, все величины перед вычислением необходимо округлять с учетом количества верных значащих цифр.

*Значащими цифрами* называются все цифры, кроме нулей,

стоящих впереди числа. Нули в середине или в конце числа (справа), обозначающие отсутствие в числе единиц соответствующих разрядов, – значащие цифры. Нули, поставленные в конце целого числа взамен неизвестных цифр и служащие лишь для определения разрядов остальных цифр, значащими не считаются. В подобных случаях нули в конце числа лучше не писать, а заменить их соответствующей степенью числа десяти. Например, если число 4200 измерено с абсолютной погрешностью 100, то это число должно быть записано в виде  $42 \cdot 10^2$  или  $4,2 \cdot 10^3$ . Такая запись подчеркивает, что в данном числе содержатся лишь две значащие цифры. Термин «значащие цифры» не следует смешивать с термином «десятичные знаки» числа. Десятичные знаки числа – все его цифры, расположенные правее запятой. Например, число 25,040 имеет пять значащих цифр, а десятичных знаков – три; число 0,0034 имеет две значащие цифры, но четыре десятичных знака.

Если приближенное значение величины содержит лишние или недостоверные цифры, то его округляют, сохраняя только верные значащие цифры. При округлении руководствуются следующими правилами:

**Правило 1.** Если первая отбрасываемая цифра меньше пяти, то округление достигается простым отбрасыванием цифр. Например, округление числа 6,432 дает 6,43 или 6,4.

**Правило 2.** Если первая отбрасываемая цифра больше пяти, то последняя цифра увеличивается на единицу. Последняя цифра увеличивается на единицу также и в том случае, когда первая из отбрасываемых цифр равна пяти, а за ней есть одна или несколько цифр, отличных от нуля. Например, различные округления числа 6,857 будут 6,86 или 6,9.

**Правило 3.** Если первая из отбрасываемых цифр равна пяти и за ней нет значащих цифр, то округление производится до ближайшего четного. Например, число 4,65 округляется до 4,6; число 4,75 до 4,8.

Производя различные математические действия с приближенными числами, необходимо придерживаться следующих правил.

**Правило 4.** При сложении и вычитании округление всех чисел производится по правилам 1, 2, 3 до разряда на единицу меньшего, чем разряд наименее точного числа. В результате сохраняют

столько десятичных знаков, сколько их имеет приближенное число с наименьшим количеством десятичных знаков:

$$23,2 + 0,442 + 7,247 \approx 23,2 + 0,44 + 7,25 = 30,89 \approx 30,9.$$

**Правило 5.** При умножении и делении в результате сохраняют столько значащих цифр, сколько их имеет приближенное число с наименьшим количеством значащих цифр:

$$30,9 \times 1,8364 \approx 30,9 \times 1,84 = 56,856 \approx 56,9.$$

**Правило 6.** Результат расчета значений функций  $x^n$ ,  $\sqrt[n]{x}$ ,  $\lg x$  некоторого приближенного числа  $x$  должен содержать столько значащих цифр, сколько их имеется в числе  $x$ :

$$(11,38)^2 = 129,5044 \approx 129,5; \quad \sqrt{2,97} \approx 1,724 \approx 1,72;$$

$$\lg 77,23 \approx 2,8878 \approx 2,888.$$

**Правило 7.** При вычислении промежуточных результатов сохраняют на одну цифру больше, чем указывается в правилах 4, 5, 6. В окончательном результате эта «запасная» цифра отбрасывается.

## 7. ЗАПИСЬ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

После выполнения всех расчетов результат измерения необходимо записать с указанием абсолютной погрешности и вероятной вероятности в виде

$$x = x_{\text{ср}} \pm \Delta x, \quad P = \dots \quad (27)$$

Такая запись показывает, что истинное значение измеряемой величины  $x$  лежит в интервале от  $(x - \Delta x)$  до  $(x + \Delta x)$  с вероятностью  $P$  (для учебных лабораторий надежность принимают равной  $P = 0,95$ ). При этом абсолютная погрешность определяет границы измеряемой величины, т.е. погрешность результата измерений позволяет определить те цифры, которые являются достоверными. Для того чтобы по написанию числа, выражающего результат измерения, можно было судить о степени точности, это число записывают так, чтобы в нем все значащие цифры, кроме последней, были верны. В связи с тем, что точность вычисления погрешности не превышает 10%, абсолютная погрешность результата округляется до двух значащих цифр, если первая из них 1 или 2, и до одной значащей цифры во всех остальных случаях. Оставив одну или две значащие цифры в абсолютной погрешности, округляют и

среднее значение измеряемой величины до последнего разряда, оставшегося в абсолютной погрешности после округления. Например, если последняя значащая цифра в погрешности – десятая доля числа, то и средний результат следует записать до десятых долей. Запись  $x = 5,346 \pm 0,4$  мм бессмысленна, поскольку точность вычисления сохраняется до первого десятичного знака. Правильной была бы запись  $x = 5,3 \pm 0,4$  мм. Если при измерении массы получилась величина 2400 г при абсолютной погрешности  $\pm 100$  г, то не следует писать, что масса равна 2400 г, так как из этого следовало бы, что последние два нуля значащие. Грамотной была бы запись  $24 \cdot 10^2$  г с двумя значащими цифрами. Ниже приведены примеры окончательной записи результатов измерений:

Неправильно	Правильно
$534,5 \pm 1$	$534 \pm 1$
$3642 \pm 12$	$3640 \pm 12$
$24,34 \pm 0,3$	$24,3 \pm 0,3$
$35,6373 \pm 0,014$	$35,640 \pm 0,014$
$3,75 \pm 0,008$	$3,750 \pm 0,008$

## 8. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКОВ

При изучении зависимости одной измеряемой величины от другой целесообразно представить результаты в виде графика. Главное достоинство графика – его наглядность. График позволяет получить общее качественное представление о характере зависимости, а также судить о соответствии экспериментальных данных той или иной теоретической зависимости. Графический метод применяется не только для сравнения эксперимента с теорией, но и для определения физических величин, входящих в данную зависимость. Построенный график также позволяет выявить те измерения, которые выполнены плохо или неверно. Графики обычно строятся в прямоугольной системе координат в линейном масштабе на миллиметровой бумаге. При этом по оси абсцисс откладывают независимую величину, а по оси ординат – ее функцию. Около каждой оси нужно написать обозначение откладываемой величины и указать, в каких единицах она выражена. Масштаб принципиально может быть любым и выбирать его следует так,

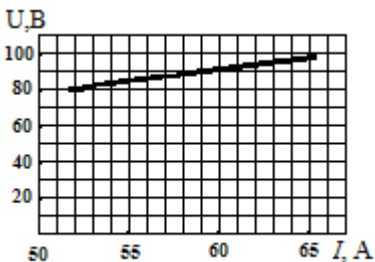


Рис. 4

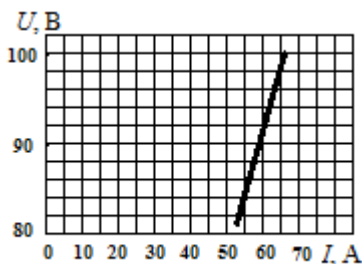


Рис. 5

функции (квадраты, синусы, логарифмы и т.д.).

Логарифмический или полулогарифмический масштаб удобен для изображения логарифмических и экспоненциальных зависимостей (например,  $Y = C \cdot e^x$ ,  $X^n \cdot Y^n = C$  и т.д.), а также зависимостей, в которых одна или обе величины изменяются на два и больше число порядков.

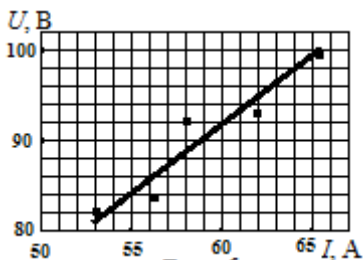


Рис. 6

Пересечение координатных осей графика не обязательно должно совпадать с нулевыми значениями измеряемых величин. Если наименьшее значение измеряемой величины сильно отличается от нуля, отсчет в начале координат нужно начинать не с нуля, а от значения, близкого к наименьшему значению величины (рис. 6).

чтобы пределы изменений обеих величин ограничивали на осях отрезки, примерно одинаковые по величине, иначе график может оказаться очень сжатым по одной из осей и будет занимать малую часть поля графика (рис. 4 и 5). Кроме того, при выборе масштаба нужно стараться, чтобы график был достаточно точным, т.е. наименьшее расстояние, которое можно отсчитать на графике, должно быть не меньше значения абсолютной погрешности измерений.

Например, если график строится на миллиметровой бумаге и погрешность величины составляет 0,2 ед., то можно принять 1 мм = 0,1 ед.

*Примечание.* Масштабы по обеим осям выбираются независимо друг от друга.

В ряде случаев бывает удобнее откладывать по осям графика для его спрямления не сами величины, а их

Пересечение координатных осей графика не обязательно должно



Для нанесения экспериментальных точек используют условные обозначения: светлые и темные кружочки, квадратики, треугольники, крестики и т.д. При этом на осях координат не следует откладывать значения величин, полученных при измерениях. Экспериментальные точки соединяют между собой непрерывной линией так, чтобы как можно больше точек легло на эту линию. Кривая должна быть плавной и может проходить не через все точки, так как измерения сделаны с той или иной ошибкой. При сглаживании кривой некоторые из этих точек придется миновать так, чтобы эти точки расположились равномерно выше и ниже нее (рис. 6). Такое сглаживание допустимо, если кривая проходит в пределах доверительных интервалов измеряемых величин. В подавляющем большинстве физические зависимости – это гладкие, плавные линии без изломов, поэтому нельзя соединить полученные точки между собой отрезками прямой и получить в результате ломаную линию (рис. 7).

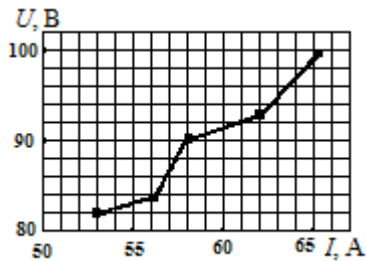


Рис. 7

Таким образом, график может служить для контроля и улучшения результатов измерений. График дает возможность производить *интерполяцию*, т.е. находить значения величин, которые непосредственно не измерялись. С помощью графика можно найти абсолютную погрешность одной величины, если известна абсолютная погрешность в определении другой величины. Пусть график изображает зависимость величины  $y$  от  $x$ . Если какое-то значение величины  $x$  измерено с абсолютной погрешностью  $\Delta x$ , то погрешность величины  $y$  будет равна (рис. 8)

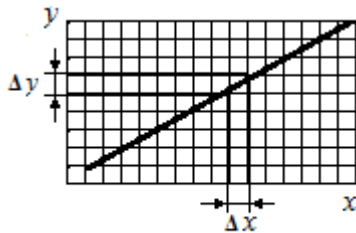


Рис. 8

$$\Delta y = \kappa \cdot \Delta x,$$

где  $\kappa = \operatorname{tg} \alpha$  (тангенс угла касательной к оси абсцисс).

## 9. ПОРЯДОК ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

При обработке результатов измерений предлагается следующий порядок:

1. Производят многократные измерения всех величин  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , ..., необходимых для вычисления результата косвенного измерения. Результаты заносят в таблицу.

2. Вычисляют среднее арифметическое значение из  $n$  измерений:

$$a_{\text{ср}} = \frac{\sum_{i=1}^n a_i}{n}. \quad (28)$$

3. Вычисляют погрешности отдельных измерений:

$$\Delta a_i = a_{\text{ср}} - a_i. \quad (29)$$

4. Определяется среднеквадратичная погрешность:

$$S = \sqrt{\frac{\sum (\Delta a_i)^2}{n(n-1)}}. \quad (30)$$

5. Задается значение надежности  $P$  (для учебных лабораторий принимают  $P = 0,95$ ).

6. Из таблицы по заданной надежности  $P$  и по числу произведенных измерений  $n$  определяют коэффициент Стьюдента  $\alpha_{p,n}$  (табл. 13, приложения).

7. Вычисляют случайную погрешность результата измерений:

$$\Delta a_{\text{сл}} = \alpha_{p,n} \cdot S. \quad (31)$$

8. Оценивают полную погрешность результата измерений:

$$\Delta a = \sqrt{\Delta a_{\text{сл}}^2 + \Delta a_{\text{пр}}^2}, \quad (32)$$

где  $\Delta a_{\text{пр}}$  – приборная погрешность.

Если  $\Delta a_{\text{сл}} \gg \Delta a_{\text{пр}}$ , то  $\Delta a \approx \Delta a_{\text{сл}}$ . В этом случае для увеличения точности измерений желательно увеличить число измерений.

Если  $\Delta a_{\text{сл}} \ll \Delta a_{\text{пр}}$ , то  $\Delta a \approx \Delta a_{\text{пр}}$ . В этом случае не имеет смысла увеличивать число измерений. Для увеличения точности измерений необходимо воспользоваться более точным прибором

или поменять методику измерений.

9. Окончательный результат записывается в виде

$$a = a_{\text{ср}} \pm \Delta a. \quad (33)$$

Для каждой независимой величины  $a, b, c, \dots$ , входящей в уравнение  $x = f(a, b, c, \dots)$ , производится обработка в описанной выше последовательности. При этом для всех измеряемых величин задается одно и то же значение надежности  $P$ .

После обработки результатов прямых измерений приступают к обработке результатов косвенного измерения.

10. Подставляют в исходную формулу средние значения результатов прямых измерений и вычисляют среднее значение окончательного результата в соответствии с правилами приближенных вычислений. При этом табличные значения физических величин берутся с такой точностью, чтобы их относительные погрешности были на порядок меньше погрешностей прямых измерений.

11. Получают выражение для расчета относительной погрешности косвенного измерения. Для этого необходимо:

а) прологарифмировать обе части исходного выражения;

б) продифференцировать полученное логарифмическое уравнение;

в) заменить значки дифференциалов  $d$  на значки абсолютных ошибок  $\Delta$ ;

г) знаки «минус», встречающиеся перед ошибками, заменить на знаки «плюс».

12. Вычисляют, относительную погрешность  $\varepsilon$  косвенного измерения по формуле, полученной в пункте 11.

13. По среднему значению измеряемой величины  $x_{\text{ср}}$  и относительной погрешности  $\varepsilon$  вычисляют абсолютную погрешность результата

$$\Delta x = \varepsilon \cdot x_{\text{ср}}, \quad (34)$$

причем ее округляют до одной или двух значащих цифр.

Абсолютную погрешность  $\Delta x$  можно непосредственно вычислить по формуле

$$\Delta x = \left| \frac{\partial f}{\partial a} \right| \Delta a + \left| \frac{\partial f}{\partial b} \right| \Delta b + \dots. \quad (35)$$

Среднеквадратичную погрешность находят по формуле

$$\Delta x = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial a}\right)^2 \Delta a^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial b}\right)^2 \Delta b^2 + \dots} \quad (36)$$

В этом случае п. 11 и 12 не выполняются.

14. Окончательный результат измерения записывается с указанием доверительной вероятности в виде

$$x = x_{\text{ср}} \pm \Delta x, \quad P = 0,95. \quad (37)$$

При этом среднее значение  $x_{\text{ср}}$  округляют до последнего разряда, оставшегося в значении абсолютной погрешности  $\Delta x$  после его округления (см. запись результатов измерений).

## 10. ПРИМЕР РАСЧЕТА

Необходимо измерить объем цилиндрического кольца с помощью штангенциркуля и микрометра.

Объем цилиндрического кольца можно определить по его линейным размерам на основании формулы

$$V = \frac{\pi}{4} \cdot (D^2 - d^2) \cdot h,$$

где  $D$ ,  $d$  – внешний и внутренний диаметры кольца;  $h$  – толщина кольца.

Проведем серию измерений внешнего и внутреннего диаметров штангенциркулем, а толщину кольца – микрометром и запишем результаты в таблицу:

№	$D$ , мм	$\Delta D$ , мм	$d$ , мм	$\Delta d$ , мм	$h$ , мм	$\Delta h$ , мм
1	64,2	0,1	22,5	0,0	8,44	0,02
2	64,4	0,1	22,4	0,1	8,47	0,01
3	64,3	0,0	22,6	0,1	8,45	0,01
4	64,2	0,1	22,4	0,1	8,46	0,00
5	64,4	0,1	22,5	0,0	8,46	0,00
Ср.	64,3		22,5		8,46	

Вычислим среднеквадратичные погрешности отдельных измерений:

$$S_D = \sqrt{\frac{0,1^2 + 0,1^2 + 0,1^2 + 0,1^2}{5(5-1)}} = 0,05 \text{ мм};$$

$$S_d = \sqrt{\frac{0,1^2 + 0,1^2 + 0,1^2}{5(5-1)}} = 0,04 \text{ мм};$$

$$S_h = \sqrt{\frac{0,02^2 + 0,01^2 + 0,01^2}{5(5-1)}} = 0,005 \text{ мм}.$$

Принимаем  $P = 0,95$  и по табл. 13 (приложение) найдем коэффициент Стьюдента для пяти измерений  $\alpha_{p,n} = 2,8$ .

Вычислим случайные погрешности:

$$\Delta D_{\text{сл}} = 2,8 \cdot S_D = 0,14 \text{ мм};$$

$$\Delta d_{\text{сл}} = 2,8 \cdot S_d = 0,11 \text{ мм};$$

$$\Delta h_{\text{сл}} = 2,8 \cdot S_h = 0,014 \text{ мм}.$$

Полная погрешность с учетом приборной:

$$\Delta D = \sqrt{0,14^2 + 0,1^2} = 0,17 \text{ мм};$$

$$\Delta d = \sqrt{0,11^2 + 0,1^2} = 0,15 \text{ мм};$$

$$\Delta h = \sqrt{0,014^2 + 0,01^2} = 0,017 \text{ мм}.$$

Запишем результаты прямых измерений:

$$D = (64,30 \pm 0,17) \text{ мм}; \quad d = (22,50 \pm 0,15) \text{ мм};$$

$$h = (8,460 \pm 0,017) \text{ мм}.$$

Среднее значение объема кольца:

$$V_{\text{ср}} = \frac{3,14}{4} \cdot (64,3^2 - 22,5^2) \cdot 8,46 = 241 \cdot 10^2 \text{ мм}^3.$$

Относительную погрешность объема вычислим по формуле

$$\varepsilon = \frac{\Delta \pi}{\pi} + \frac{\Delta D + \Delta d}{D + d} + \frac{\Delta D + \Delta d}{D - d} + \frac{\Delta h}{h},$$

$$\varepsilon = \frac{0,002}{3,14} + \frac{0,17 + 0,15}{64,3 + 22,5} + \frac{0,17 + 0,15}{64,3 - 22,5} + \frac{0,017}{8,46} = 0,014.$$

Абсолютную погрешность измерения объема кольца:

$$\Delta V = \varepsilon \cdot V_{\text{ср}}; \quad \Delta V = 0,014 \cdot 241 \cdot 10^2 \text{ мм}^3$$

$$\Delta V = 3 \cdot 10^2 \text{ мм}^3$$

Записываем окончательный результат измерения объема:

$$V = (241 \pm 3) 10^2 \text{ мм}^3, \quad P = 0,95.$$

# МЕХАНИКА

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 1

### ИЗМЕРЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ РАЗМЕРОВ И ОБЪЕМОВ ТВЕРДЫХ ТЕЛ ПРАВИЛЬНОЙ ФОРМЫ

*Приборы и принадлежности:* штангенциркуль, микрометр, масштабная линейка, набор тел правильной формы.

*Цель работы* – ознакомление с основными положениями теории погрешностей, статистической обработкой результатов измерений, а также правилами и приемами измерений линейных и угловых величин.

*Краткая теория.* Для определения линейных размеров тел применяются самые различные измерительные приборы, выбор которых определяется необходимой точностью и условиями эксперимента. Наиболее простым из них является масштабная линейка с миллиметровыми делениями. Цена деления масштабной линейки 1 мм. При измерениях такой линейкой максимальная погрешность не превосходит половины цены деления, т.е. 0,5 мм.

Если необходимо произвести измерения с большой точностью, пользуются приборами, снабженными нониусами. *Нониусом* называется дополнительная шкала к обычному масштабу, позволяющая повысить точность измерений в 10-20 раз. Линейный нониус пред-

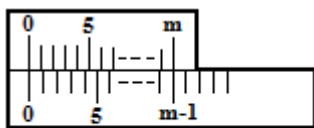


Рис. 1

ставляет собой небольшую шкалу, скользящую вдоль основной шкалы. Деления на нониусе наносятся так, чтобы длина  $m$  делений нониуса была равна длине  $m-1$  делений основной шкалы (рис. 1). Если число делений нониусной шкалы  $m$ , а цена деления основной шкалы  $y$ , тогда

$$x \cdot m = (m - 1)y, \quad (1)$$

где  $x$  – цена деления нониуса.

Величина, определяемая разностью

$$y - x = \frac{y}{m}, \quad (2)$$

называется *точностью нониуса*. Точность нониуса равна отноше-

нию цены деления основной шкалы к числу делений нониуса. Она определяет максимальную погрешность нониуса. При достаточно мелких делениях основной шкалы (масштаба) деления нониуса делают более крупными, например

$$x_1 = 2y - y/m. \quad (3)$$

Рассмотрим процесс измерения размеров тел при помощи линейного нониуса. Пусть  $l$  – измеряемый отрезок (рис. 2). Совместим с началом отрезка нулевое деление основной шкалы. Пусть при этом конец отрезка окажется между  $N$  и  $(N + 1)$  - м делением основной шкалы. Приложим к концу отрезка  $l$  нониус так, чтобы ноль нониуса совпал с концом этого отрезка. Так как деления нониуса не равны делениям основной шкалы, то на нем обязательно найдется такое деление  $n$ , которое будет ближе всего подходить к  $(N + n)$  - му делению основной шкалы. Следовательно,

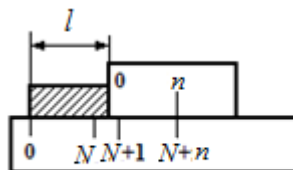


Рис. 2

$$l = Ny + n \frac{y}{m}. \quad (4)$$

Длина отрезка, измеряемого при помощи нониуса, складывается из числа целых делений основной шкалы и произведения точности нониуса на номер деления нониуса, совпадающего с некоторым делением основной шкалы. Нониусами снабжаются штангенциркули, теодолиты, гониометры и т.д.

**Штангенциркуль** (рис. 3) служит для линейных измерений, не требующих высокой точности, и состоит из линейки с миллиметровым делением, вдоль которой может перемещаться подвижная рамка 1. На подвижной рамке нанесен линейный нониус с числом делений  $m$  (обычно 10 или 20). При измерении предмет зажимается между губками 2 с помощью подвижной рамки 1. После этого отсчитывают по основной шкале число полных делений  $N$  до нулевой отметки нониуса и узнают номер деления нониуса  $n$ , совпадающего с каким-нибудь делением основной шкалы. Тогда линейный размер предмета  $l$  можно найти по формуле (4). Погрешность штангенциркуля равна точности нониуса (иногда принимают погрешность, равную половине точности нониуса). Точность но-

ниуса обычно указывается на приборе (обычно 0,1 - 0,05 мм). Примеры отсчета показаний штангенциркуля с ценой деления 0,1 и

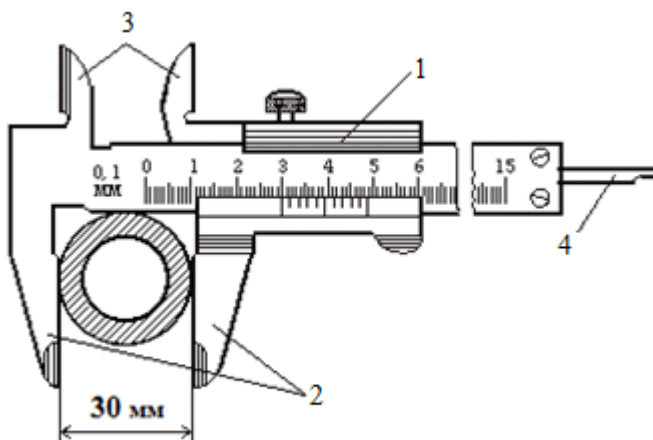
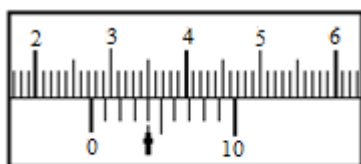


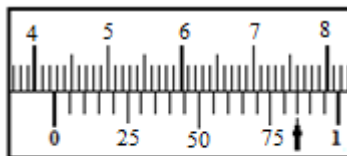
Рис. 3

0,05 мм показаны на рис. 4 и 5. Стрелкой указаны штрихи нониуса, совпадающие с делениями основной шкалы (4-й и 17-й). Результаты измерений соответственно равны 27,4 и 42,85 мм.



$x = 27,4 \text{ мм}$

Рис. 4



42,85 мм

Рис. 5

**Микрометр.** Для более точных измерений применяют микрометрические винты с малым и очень точно выдержанным шагом. Такие винты применяются в микрометрах, измерительных микроскопах и т.д. Микрометр (рис. 6) имеет вид тисков, в которых измеряемый предмет зажимается с помощью винта. На стержне винта 3 укреплен барабан 1 с нанесенной на нем шкалой. Основным источником ошибок при измерении микрометром является неравномерность нажатия винта на измеряемый предмет, поэтому уси-



лие, прикладываемое к винту, должно быть нормировано. Для устранения этого недостатка микрометры снабжены трещоткой 4.

**Непосредственное вращение самого барабана 1 при зажиме измеряемой детали не допускается!**

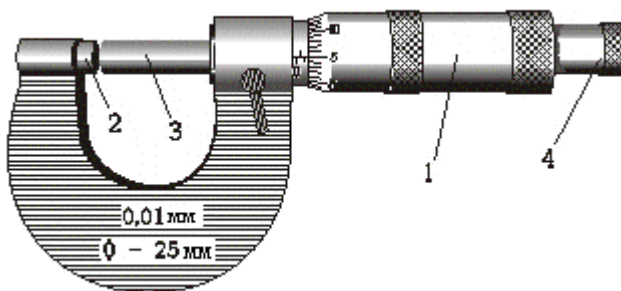


Рис. 6

Отсчетное устройство микрометра состоит из двух шкал - грубой и точной. Грубая линейная шкала нанесена на неподвижный цилиндр и представляет собой двойную шкалу с ценой деления 0,5 мм (рис. 7). Отсчет по этой шкале производится по послед-



Рис. 7

нему делению, не закрытому вращающимся цилиндром (барабаном). На барабане имеется микрометрическая шкала, содержащая обычно 50 делений. Один поворот барабана передвигает измерительный стержень на 0,5 мм, т.е. на одно деление грубой шкалы. Следовательно, цена деления шкалы барабана 0,01 мм. Отсчет по точной шкале производится по делению барабана, совпадающему с продольной риской на неподвижном цилиндре, вдоль которой нанесены деления грубой шкалы.

Перед началом измерений необходимо проверить нулевой отсчет микрометра и при необходимости учитывать эту поправку. При измерении предмет зажимается между упором 2 и стержнем винта 3 с помощью трещотки 4. Отсчет производится следующим образом: по грубой шкале отсчитывается размер предмета с точностью до 0,5 мм. По шкале барабана отсчитываются сотые доли миллиметра. Результат получается суммированием показаний двух шкал. Пример отсчета показаний микрометра с ценой деления 0,01 мм показан на рис. 7. По основной шкале 1 отсчет составляет 2,5 мм, а по шкале барабана – 0,10 мм. Окончательный результат измерения  $x = 2,5 + 0,10 = 2,60$  мм.

## ИЗМЕРЕНИЯ

Определить объем тела, имеющего форму плоского кольца (рис. 8). Объем цилиндрического кольца можно вычислить по формуле

$$V = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) h \quad (5)$$

где  $D$ ,  $d$  – внешний и внутренний диаметры;  $h$  – толщина кольца.

Для измерения  $D$  и  $d$  следует воспользоваться штангенциркулем. Толщина кольца значительно меньше, чем ее остальные размеры. Для того чтобы все относительные погрешности были одно-

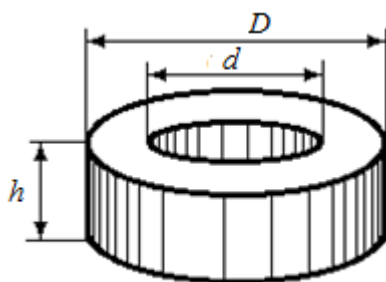


Рис. 8

го порядка, измерения толщины следует проводить более точным прибором (микрометром). Перед началом измерений необходимо изучить краткую теорию нониуса, а также правила пользования измерительными инструментами (штангенциркуль, микрометр).

Все измерения проводятся несколько раз (не меньше пяти) в различных местах кольца. Результаты измерений заносят в табл. 1.

Таблица 1

№	$D$ , мм	$\Delta D$ , мм	$d$ , мм	$\Delta d$ , мм	$h$ , мм	$\Delta h$ , мм
1						
2						
3						
4						
5						
Ср.						

### Обработка результатов измерений

Обработка результатов измерений проводится в последовательности, указанной в п. 9 и 10 настоящего пособия (с. 26 –30).

### Контрольные вопросы и задания

1. Что такое доверительный интервал и доверительная вероятность?
2. Как находится абсолютная погрешность прямых измерений?
3. Как вычислить абсолютные и относительные погрешности косвенных измерений?
4. Как оцениваются приборные погрешности?
5. Чему равна погрешность табличных значений?
6. Как устроен линейный нониус, где он применяется и чему равна его точность?

**Литература:** 2. § П. 3; 4. С. 6; 5. С. 3–18; 6. С. 5–17; 7; 8; 9; 10. § 1–13.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 2

### ИЗУЧЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЗАКОНОВ МЕХАНИКИ НА МАШИНЕ АТВУДА

*Приборы и принадлежности:* машина Атвуда FPM-02; миллисекундомер FPM-15; набор грузов.

*Цель работы* – экспериментальная проверка законов механики, определение ускорения свободного падения.

*Краткая теория.* Основные законы механики могут быть проверены на машине Атвуда. Машина Атвуда состоит из вертикаль-

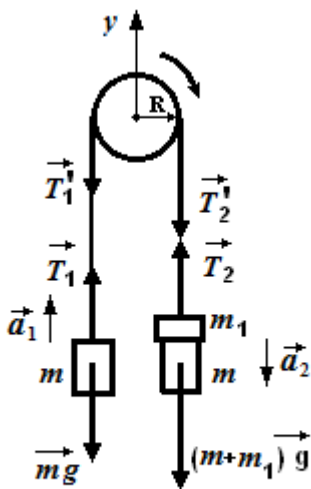


Рис. 1

ной стойки, в верхней части которой установлен легкий неподвижный блок, вращающийся с малым трением. Через блок перекинута тонкая, нерастяжимая и невесомая нить, к концам которой подвешены одинаковые грузы массой  $m$ . Если на один из грузов положить перегрузок массой  $m_1$ , то вся система придет в движение. Рассмотрим движение данной системы. На каждый из движущихся грузов действуют две силы: сила тяжести, направленная вниз, и сила натяжения нити, направленная вверх (рис. 1). На основании второго за-

кона Ньютона поступательные движения грузов будут описываться векторными уравнениями

$$\vec{T}_1 + m\vec{g} = m\vec{a}_1 \quad (1)$$

$$\vec{T}_2 + (m + m_1)\vec{g} = (m + m_1)\vec{a}_2. \quad (2)$$

Если нить нерастяжимая, то ускорения грузов будут равны по величине и противоположны по направлению. Тогда проецируя векторные уравнения движения грузов на вертикальную ось  $Oy$ , получим

$$T_1 - mg = ma \quad (3)$$

для левого груза и

$$T_2 - (m + m_1)g = -(m + m_1)a \quad (4)$$

для правого груза с перегрузом.

Уравнение движения блока согласно основному закону динамики вращательного движения относительно неподвижной оси

(ось направлена от нас перпендикулярно плоскости рисунка) имеет вид

$$J \cdot \varepsilon = M, \quad (5)$$

где  $M$  – суммарный момент внешних сил;  $J$  – момент инерции блока;  $\varepsilon$  – угловое ускорение.

Вращающий момент, приложенный к блоку, равен произведению разности сил натяжения нитей на плечо, равное радиусу блока:

$$M_{\text{вр}} = (T_2' - T_1')R. \quad (6)$$

По третьему закону Ньютона силы  $\vec{T}_1'$  и  $\vec{T}_2'$ , приложенные к ободу блока, по величине равны соответственно силам  $\vec{T}_1$  и  $\vec{T}_2$ , но по направлению им противоположны. Тогда суммарный момент  $M$  с учетом момента сил трения  $M_{\text{тр}}$  будет равен

$$M = T_2 R - T_1 R - M_{\text{тр}}. \quad (7)$$

Если скольжение нити по блоку исключено, то угловое и линейное ускорения связаны уравнением

$$a = \varepsilon \cdot R, \quad (8)$$

где  $R$  – радиус блока.

Следовательно, из уравнений (3), (4) и (5) с учетом соотношений (7) и (8) для ускорения грузов получим следующее выражение:

$$a = \frac{m_1 g - \frac{M_{\text{тр}}}{R}}{2m + m_1 + \frac{J}{R^2}}. \quad (9)$$

Если пренебречь моментом инерции блока (масса блока мала) и моментом сил трения, формула (9) примет вид

$$a = \frac{m_1 g}{2m + m_1}. \quad (10)$$

Из формул (9) и (10) видно, что система грузов будет двигаться с постоянным ускорением. Следовательно, на машине Атвуда экспериментально можно проверить законы равноускоренного движения. Однако из-за наличия сил трения и массы блока эта проверка носит приближенный характер.

## Описание экспериментальной установки

Схема экспериментальной установки, называемая машиной Атвуда, представлена на рис. 2.

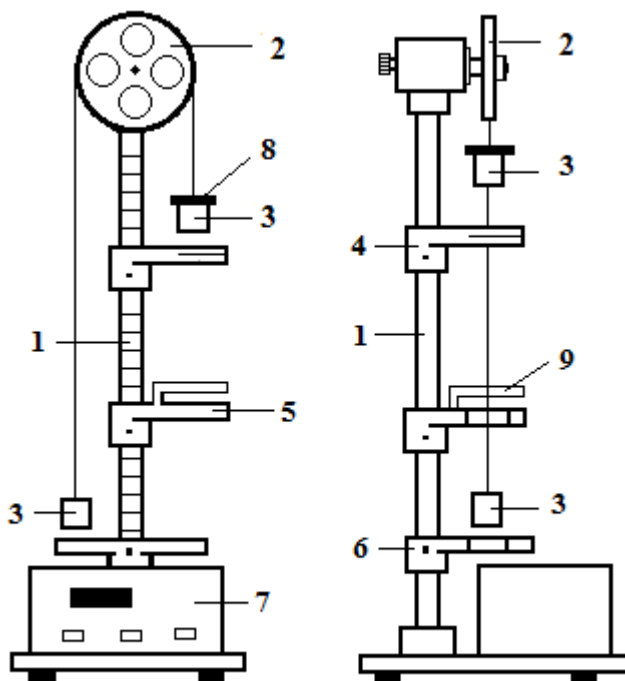


Рис. 2

Машина Атвуда состоит из вертикальной стойки 1 со шкалой, на которой установлены три кронштейна 4, 5 и 6. В верхней части стойки закреплен неподвижный легкий блок 2, вращающийся с малым трением.

Через блок перекинута невесомая и нерастяжимая нить с двумя грузами 3 одинаковой массы. Блок имеет фрикционный тормоз, удерживающий систему в исходном положении. Фрикционный тормоз управляется кнопкой ПУСК, находящейся на передней панели миллисекундомера. На кронштейнах 5 и 6 смонтированы фотоэлектрические датчики, которые выдают сигналы начала и окончания счета времени движения системы на миллисекундомер 7. На

кронштейне 5 также смонтировано кольцо 9, предназначенное для снятия перегрузки 8 с правого груза.

Для фиксации начального положения правого груза служит кронштейн 4. Все три кронштейна могут перемещаться вдоль вертикальной стойки и фиксироваться в любом положении.

Погрешность измерения времени не более  $\pm 0,02\%$ .

Погрешность измерения высоты не менее 2 мм.

### Упражнение 1

#### Проверка формулы пути

Известно, что при равноускоренном движении путь, пройденный телом за время  $t$

$$h = \frac{at^2}{2}. \quad (11)$$

Следовательно, для одного и того же перегрузка должно соблюдаться приближенное соотношение

$$a = \frac{2h_1}{t_1^2} = \frac{2h_2}{t_2^2} = \dots = \frac{2h_n}{t_n^2}. \quad (12)$$

Таким образом, линейный характер экспериментальной зависимости  $h = h(t^2)$  подтверждает выполнение формулы пути (9), а ее угловой коэффициент позволяет найти экспериментальное значение ускорения  $a_{\text{эсп}}$ .

#### Порядок выполнения работы

1. Перекинуть через блок нить с грузами и убедиться, что система находится в равновесии.

2. Проверить вертикальность стойки, с тем чтобы при движении правый груз не задевал кольцо и фотоэлектрические датчики. При необходимости выравнить прибор.

3. Нажать клавишу СЕТЬ, расположенную на передней панели миллисекундомера. При этом загораются цифровые индикаторы и

лампочки фотоэлектрических датчиков. Включится фрикционный тормоз, удерживающий систему в исходном состоянии.

4. Положить на правый груз перегрузок малого диаметра, свободно проходящий через кольцо.

5. Закрепить средний кронштейн с фотоэлектрическими датчиками на высоте  $h_1 = 45$  см от нижнего кронштейна.

6. Поднять правый груз так, чтобы его нижний торец находился на уровне черты фотоэлектрического датчика, но не закрывал световой луч.

7. Нажать кнопку ПУСК. При этом отключится фрикционный тормоз, и система придет в движение. Записать время ускоренного движения груза  $t_1$ .

8. Нажать кнопку СБРОС, поднять правый груз в первоначальное положение. Отжать клавишу ПУСК. При этом включится фрикционный тормоз, удерживающий систему в исходном состоянии.

9. П. 6–8 проделать не менее пяти раз. Результаты занести в табл. 1.

Таблица 1

$h$ , см	$t_1$ , с	$t_2$ , с	$t_3$ , с	$t_4$ , с	$t_5$ , с	$t_{\text{ср}}$ , с	$m_1$ , г
45							
40							
35							
30							
25							
20							
15							

10. Руководствуясь п. 5–9 проделать аналогичные измерения для других высот  $h_i$ .

### Обработка результатов измерений

1. Используя данные, приведенные в табл. 1, построить график зависимости  $h = h(t^2)$ . Проверить ее прямолинейность.

2. Вычислить по графику угловой коэффициент



$$k_1 = \frac{\Delta h}{\Delta(t^2)} = \frac{h_2 - h_1}{t_2^2 - t_1^2}. \quad (13)$$

3. Вычислить экспериментальное значение ускорения

$$a_{\text{эксп}} = 2k_1. \quad (14)$$

4. Вычислить по формуле (10) теоретическое значение ускорения  $a_{\text{теор}}$ .

5. Сравнить экспериментальное и теоретическое значения ускорений.

6. Сделать выводы.

## Упражнение 2

### Проверка формулы скорости

Целью данного упражнения является экспериментальная проверка формулы скорости

$$v = a \cdot t. \quad (15)$$

Ускорение системы до снятия перегрузки может быть вычислено, если известны скорость в момент снятия перегрузки и время ускоренного движения  $t$ . Если на пути движения установить кольцо, то после снятия перегрузки система будет двигаться равномерно со скоростью  $v$ , равной скорости в момент снятия перегрузки:

$$v = \frac{h_0}{t_0}, \quad (16)$$

где  $h_0$  – расстояние между фотоэлектрическими датчиками;  $t_0$  – время равномерного движения.

При увеличении высоты падения груза растёт и скорость равномерного движения. При одном и том же перегрузке ускорение системы одинаково, поэтому

$$a = \frac{v_1}{t_1} = \frac{v_2}{t_2} = \dots = \frac{v_n}{t_n}. \quad (17)$$

Таким образом, зависимость  $v = v(t)$  должна быть линейной, а угловой коэффициент этой зависимости равен ускорению системы с данным перегрузом. Следовательно, если экспериментальная зависимость  $v = v(t)$  прямая, то можно сделать вывод о выполнении формулы скорости (15).

## Порядок выполнения работы

1. Закрепить средний кронштейн на высоте  $h_0 = 10$  см от нижнего кронштейна
2. Положить на правый груз массой  $m$  перегрузок большого диаметра массой  $m_1$ .
3. Установить верхний кронштейн на высоте  $h_1 = 35$  см от среднего кронштейна.
4. Поднять правый груз так, чтобы его нижний торец находился на уровне черты верхнего кронштейна.
5. Отжать клавишу ПУСК. При этом включится фрикционный тормоз, удерживающий систему в исходном состоянии.
6. Нажать кнопку ПУСК. При этом отключится фрикционный тормоз, и система придет в движение. Записать время равномерного движения груза  $t_{01}$ .
7. Нажать кнопку СБРОС.
8. П. 4–7 проделать не менее пяти раз. Результаты записать в табл. 2.

Таблица 2

$h, \text{см}$	$t_{01}, \text{с}$	$t_{02}, \text{с}$	$t_{03}, \text{с}$	$t_{04}, \text{с}$	$t_{05}, \text{с}$	$t_{0\text{ср}}, \text{с}$
35						
30						
25						
20						
15						

9. Проделать аналогичные измерения для других высот  $h_i$ , руководствуясь п. 3–7.

## Обработка результатов измерений

1. Используя данные, приведенные в табл. 2, вычислить по формуле (16) скорости равномерного движения  $v_i$  для различных высот падения.
2. Используя данные (среднее время ускоренного движения груза), приведенные в табл. 1, для соответствующих высот  $h_i$  построить график зависимости  $v = v(t)$ . Проверить ее прямолинейность.
3. Вычислить по графику  $v = v(t)$  угловой коэффициент

$$k_2 = a_{\text{эксп}} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} . \quad (18)$$

4. Вычислить по формуле (10) теоретическое значение ускорения  $a_{\text{теор}}$ .
5. Сравнить экспериментальное и теоретическое значения ускорений.
6. Сделать выводы.

### Упражнение 3 Экспериментальное определение ускорения свободного падения

1. Вычислить ускорение свободного падения  $g$ , используя полученное в упражнении 1 экспериментальное значение ускорения  $a_{\text{эксп}}$  по формуле

$$g = \frac{2m + m_1}{m_1} \cdot a_{\text{эксп}} . \quad (19)$$

2. Вычислить погрешности и записать ответ в виде  $g = g_{\text{ср}} \pm \Delta g ; P = 0,95$ .

### Контрольные вопросы и задания

1. Перечислите основные кинематические характеристики. В чем состоит основная задача кинематики?
2. Что называется средней путевой, средней и мгновенной скоростью? Каковы их направления?
3. Дайте определение ускорения. Что характеризуют тангенциальное и нормальное ускорения?
4. Как вычислить путь при неравномерном движении? Какова связь между линейными и угловыми характеристиками движения?
5. Дайте формулировку первого, второго и третьего законов Ньютона.

**Литература:** 1. Гл. 1, 2; 2. Гл. 1, 2; 5. С. 18; 6. С. 29; 7. С.51; 12. С. 28.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 3

### ИЗМЕРЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ КАЧЕНИЯ МЕТОДОМ НАКЛОННОГО МАЯТНИКА

*Приборы и принадлежности:* наклонный маятник FPM - 07, миллисекундомер FPM -14, наборы тел и поверхностей качения.

*Цель работы* – изучение явлений возникающих при качении тел и экспериментальное определение коэффициента трения качения.

*Краткая теория.* При качении круглого тела (цилиндра, шара, колеса и т.д.) по плоской поверхности возникает *трение качения*. Причину возникновения трения качения можно объяснить деформациями тела и опорной поверхности, имеющих место в реальных условиях.

Пусть цилиндрическое тело радиуса  $r$  и массой  $m$  катится равномерно без скольжения по горизонтальной поверхности. Из-за возникшей деформации поверхности точка приложения силы реакции  $R$  смещается вперед на расстояние  $f$ , а линия действия силы реакции отклоняется от вертикали назад (рис. 1), что приводит к

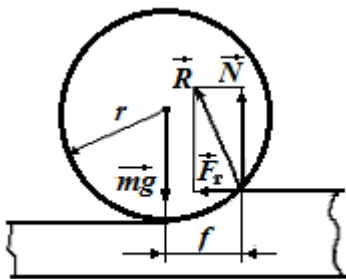


Рис. 1

появлению момента реакции опоры относительно оси вращения цилиндра, препятствующего его вращению. Этот момент носит название момента сил трения качения. Нормальная составляющая реакции  $R_n$  численно равна силе нормального давления  $N$  тела на опорную плоскость, а касательная составляющая  $R_t$  представляет собой силу трения качения  $F_{\text{тр.к}}$ . Таким образом, момент силы трения качения может быть записан в виде

$$M_{\text{тр.к}} = f \cdot N. \quad (1)$$

При равномерном движении тела результирующий момент внешних сил равен нулю:

$$F_{\text{тр.к}} \cdot r = f \cdot N. \quad (2)$$

Следовательно, для силы трения качения в первом приближении справедлив закон Кулона

$$F_{\text{тр.к}} = f \frac{N}{r}, \quad (3)$$

где  $f$  – коэффициент трения качения, имеющий размерность длины. Он существенно отличается от коэффициента трения скольжения, так как является размерной величиной и, по существу, характеризует плечо силы давления относительно оси цилиндра.

В данной работе для определения коэффициента трения качения используется метод наклонного маятника, предложенный А.С. Ахматовым. Измерение силы трения с помощью наклонного маятника основано на измерении уменьшения амплитуды затухающих колебаний за определенное число полных колебаний.

Пусть шарик, подвешенный на нити длиной  $l$ , опирается на плоскость, наклоненную к вертикали на угол  $\beta$  (рис. 2). Если вывести шарик из положения равновесия, он, перекатываясь по наклонной плоскости, будет совершать затухающие колебания, зависящие от силы трения качения.

За  $n$  полных колебаний при переходе из положения  $A$  в положение  $B$  (рис. 3) шарик теряет потенциальную энергию

$$\Delta E_p = mg\Delta h, \quad (4)$$

где  $\Delta h = \Delta l \cdot \cos\beta$  – потеря высоты центром тяжести шара. Эта энергия в основном затрачивается на преодоление трения и равна работе сил трения на пройденном шариком пути  $S$ :

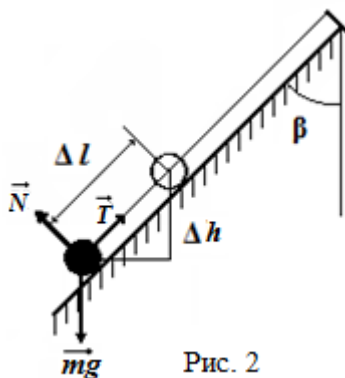


Рис. 2

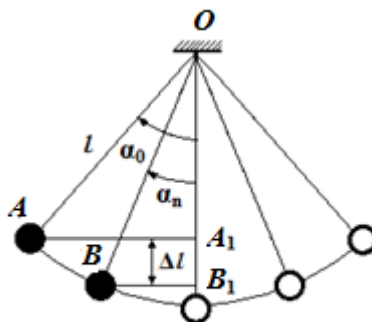


Рис. 3

$$mg\Delta h = F_{\text{тр}} S . \quad (5)$$

Из уравнения (3) и (5), с учетом того что нормальная составляющая силы реакции опорной поверхности

$$N = mg \cdot \sin \beta , \quad (6)$$

получим следующее выражение:

$$mg \cdot \Delta l \cdot \cos \beta = \frac{f \cdot mg \cdot \sin \beta \cdot S}{r} . \quad (7)$$

Путь  $S$ , пройденный шариком за  $n$  колебаний, связан со средним значением амплитуды угла отклонения и длиной нити, соотношением

$$S = 4 \cdot \alpha_{\text{ср}} \cdot l \cdot n , \quad (8)$$

где  $\alpha_{\text{ср}} = \frac{\alpha_0 + \alpha_n}{2}$  – среднее значение амплитуды угла отклонения за  $n$  колебаний.

Следовательно, из уравнений (7) и (8) для коэффициента силы трения качения  $f$  получим следующее выражение:

$$f = \frac{r \cdot \text{ctg} \beta \cdot \Delta l}{2nl(\alpha_n + \alpha_0)} . \quad (9)$$

Из рис. 3. видно, что

$$\Delta l = A_1 B_1 = l(\cos \alpha_n - \cos \alpha_0) , \quad (10)$$

тогда для малых углов отклонения, с учетом того что

$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2}$ , уравнение (18) окончательно запишется в виде

$$f = \frac{r \cdot \text{ctg} \beta \cdot (\alpha_0 - \alpha_n)}{4n} , \quad (11)$$

где углы  $\alpha_0$  и  $\alpha_n$  выражены в радианах.

### Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка (рис. 4) состоит из вертикальной стойки 1, на которой закреплены два кронштейна – верхний 2 и нижний 3. На верхнем кронштейне смонтировано устройство для регулирования длины нити маятника 12. Маятник представляет собой стальной шарик 4, подвешенный на тонкой нити длиной  $l$ .

Шарик катится по опорной поверхности 5, закрепленной на нижнем кронштейне. Шарик катится по опорной поверхности 5, закрепленной на нижнем кронштейне. Опорные поверхности (образцы) могут меняться. С помощью механизма наклона 6, находящегося в нижней части стойки, можно менять угол наклона стойки маятника

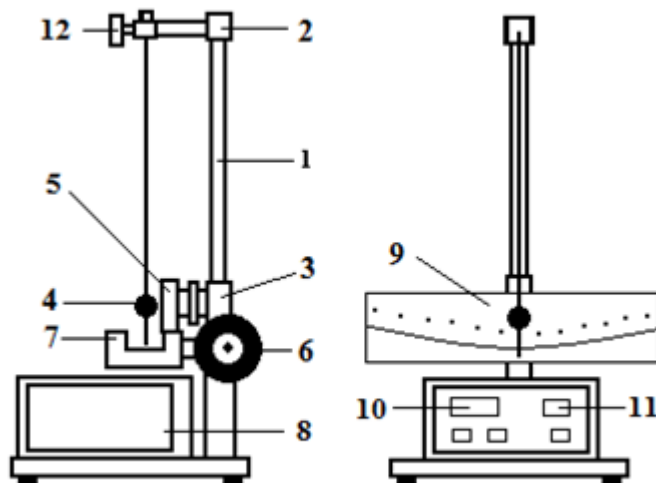


Рис. 4

$\beta$  от 0 до  $90^\circ$  и фиксировать в любом положении. На нижнем кронштейне также закреплен фотоэлектрический датчик 7, подающий сигналы начала и окончания отсчета времени и числа колебаний на миллисекундомер 8. Отсчет времени и числа колебаний производится с помощью цифровых индикаторов 10 и 11, находящихся на лицевой панели миллисекундомера. Для измерения амплитуды колебаний служит шкала с угловыми делениями 9, закрепленная на нижнем кронштейне.

Погрешность измерения времени  $\pm 0,02\%$ .

Погрешность измерения угла составляет  $1^\circ$ .

### Порядок выполнения работы

1. Включить установку нажатием клавиши СЕТЬ. При этом загораются лампочки фотоэлектрического датчика и цифровые индикаторы.

2. В пазы наклонной плоскости вставить исследуемый образец.

3. Наклонить стойку маятника на угол  $\beta = 10^\circ$  и закрепить с помощью стопорного винта.

4. Отклонить маятник от положения равновесия на угол  $\alpha_0$  (не более  $10^\circ$ ), нажать кнопку СБРОС и отпустить маятник.

5. После совершения  $n$  колебаний измерить амплитудное значение угла отклонения  $\alpha_n$  маятника. Результаты измерений записать в табл. 1.

Таблица 1

№	$\beta = 10^\circ$			$\beta = 20^\circ$			$\beta = 30^\circ$			$\beta = 40^\circ$		
	$n$	$\alpha_0$	$\alpha_n$	$n$	$\alpha_0$	$\alpha_n$	$n$	$\alpha_0$	$\alpha_n$	$n$	$\alpha_0$	$\alpha_n$
1												
2												
3												
4												
5												
Ср.												

*Примечание.* Измерение амплитуды  $n$ -го колебания производится после того, когда на табло «ПЕРИОДЫ» высвечивается цифра  $n-1$ . Количество колебаний можно отсчитывать визуально.

6. Пункты 3, 4 и 5 проделать не менее пяти раз.

7. Наклонить стойку маятника поочередно на углы  $20^\circ$  и  $30^\circ$  и проделать аналогичные измерения, руководствуясь п. 3–7.

8. Заменить опорную поверхность из другого материала и, руководствуясь п. 2–7, проделать измерения для другого образца. Результаты измерений записать в табл. 1.

### Обработка результатов измерений

1. Провести статистическую обработку результатов измерений.

2. По формуле (11) вычислить средние значения коэффициентов трения качения для разных углов наклона.

3. Вычислить погрешности измерений.



4. Записать ответы с указанием доверительного интервала и доверительной вероятности.
5. Построить график зависимости коэффициента трения качения  $f$  от угла наклона стойки маятника  $\beta$ .
6. Рассчитать погрешности.
7. Записать ответы с указанием доверительного интервала и доверительной вероятности.
8. Сделать выводы.

### Контрольные вопросы и задания

1. Какие виды трения вам известны?
2. От каких физических величин зависят сила трения скольжения и трения качения?
3. Выведите расчетную формулу для определения коэффициента трения качения.
4. От чего зависит коэффициент трения качения, и каковы пути уменьшения трения качения?
5. В каких единицах измеряется коэффициент трения качения?
6. Какие физические эксперименты можно проделать при помощи наклонного маятника?

**Литература:** 1. Гл. 2; 2. Гл. 2; 3. Гл. 2; 5. С. 43; 6. С. 57; 7. С. 51.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 4

### ИЗУЧЕНИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ ШАРОВ

*Приборы и принадлежности:* установка для столкновения шаров FPM-08, микросекундомер FPM-16, набор шаров.

*Цель работы* – измерение коэффициента восстановления и средней силы соударений шаров, а также проверка закона сохранения импульса при упругом и неупругом соударениях.

*Краткая теория.* **Ударом** называется кратковременное взаимодействие между телами, приводящее к изменению скоростей тел за короткий промежуток времени. Процесс удара можно разделить на две фазы. В течение первой фазы удара в результате кратковре-

менного соприкосновения тел происходит их деформация. Начальная кинетическая энергия соударяющихся тел переходит в энергию деформации и частично во внутреннюю энергию. Эта фаза длится до тех пор, пока скорости тел не сравняются между собой. В течение второй фазы удара под действием сил упругости тела восстанавливают свою первоначальную форму. Потенциальная энергия упругой деформации переходит в кинетическую энергию разлетающихся тел. Результирующее время протекания первой и второй фаз равно времени удара  $\tau$ . Время соударения  $\tau$  зависит от упругих свойств соударяющихся тел, их относительной скорости и массы. Обычно удар протекает в течение тысячных или даже миллионных долей секунды.

В момент удара тела соприкасаются в некоторой точке. Общая нормаль к поверхности соударяющихся тел в точке их соприкосновения называется **линией удара**. Если скорости центров масс соударяющихся тел перед ударом параллельны линии удара, то такой удар называется **прямым**. Удар называется **центральный**, если центры масс соударяющихся тел лежат на линии удара. В данной работе рассматриваются лишь прямые центральные удары.

Если в результате удара механическая энергия не преобразуется в другие формы энергии, то такой удар называется **абсолютно упругим**. Идеально упругих ударов в природе не существует, так как всегда часть энергии затрачивается на необратимую деформацию тел и изменение их внутренней энергии. Из-за остаточных деформаций и нагревания тел их первоначальная кинетическая энергия полностью не восстанавливается.

Отношение нормальных составляющих относительных скоростей тел после и до удара называется **коэффициентом восстановления**

$$k = \frac{u_{2n} - u_{1n}}{v_{1n} - v_{2n}}. \quad (1)$$

где  $v_{1n}$ ,  $v_{2n}$ ,  $u_{1n}$  и  $u_{2n}$  нормальные составляющие скоростей тел до и после удара. Коэффициент восстановления зависит от упругих свойств соударяющихся тел. Для абсолютно упругого удара коэффициент восстановления  $k = 1$ .

Прямой центральный удар называется **абсолютно неупругим**, если после удара тела движутся как одно целое т.е. с одной и той

же скоростью. Для абсолютно неупругого удара коэффициент восстановления  $k = 0$ . Во всех остальных случаях коэффициент восстановления  $0 < k < 1$ .

В процессе удара возникают кратковременные ударные силы, во много раз превосходящие внешние силы, поэтому систему соударяющихся тел можно считать замкнутой. Следовательно, для нахождения скоростей тел после столкновения можно воспользоваться законом сохранения импульса. В случае прямого центрального удара двух тел, движущихся поступательно, проекции скоростей тел на ось  $Ox$  до и после удара связаны соотношениями

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{(m_1 - km_2)v_1 + m_2 v_2 (1 + k)}{m_1 + m_2}, \\ u_2 &= \frac{(1 + k)m_1 v_1 + (m_2 - km_1)v_2}{m_1 + m_2}, \end{aligned} \quad (2)$$

где величины  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $u_1$  и  $u_2$  алгебраические, знаки которых зависят от направления векторов скоростей. При этом ось  $Ox$  проходит через центры масс соударяющихся тел.

Уменьшение кинетической энергии тел в результате удара равно

$$\Delta W_k = \frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)} (v_1 - v_2)^2 (1 - k^2). \quad (3)$$

Эта часть механической энергии системы преобразуется в ее внутреннюю энергию.

Рассмотрим систему, состоящую из двух шаров, подвешенных на нерастяжимых нитях длиной  $l$  (рис.1). Отведем правый шар на угол  $\alpha_0$  от положения равновесия. При этом потенциальная энергия правого шара изменится на величину

$$W_n = m_1 g h, \quad (4)$$

где  $h$  – высота подъема центра

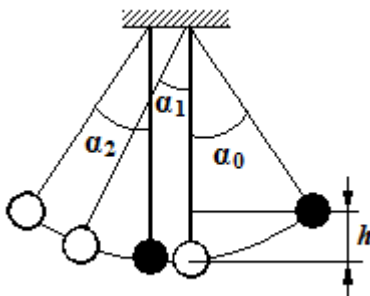


Рис. 1.

масс правого шара. По геометрическим соображениям из рис. 1 видно, что

$$h = l(1 - \cos\alpha) = 2l \sin^2 \frac{\alpha_0}{2}. \quad (5)$$

Если отпустить правый шар, то в момент прохождения положения равновесия, правый шар будет обладать кинетической энергией

$$W_k = \frac{m_1 v_1^2}{2}. \quad (6)$$

Без учета потерь энергии на преодоление сопротивления воздуха из уравнений (4)–(6) для скорости правого шара перед ударом получим выражение

$$v_1 = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha_0}{2}. \quad (7)$$

На основе закона сохранения механической энергии скорости тел после удара можно выразить через углы отклонения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ :

$$u_1 = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha_1}{2} \quad \text{и} \quad u_2 = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha_2}{2}. \quad (8)$$

### **Описание экспериментальной установки**

Экспериментальная установка, представленная на рис. 2, состоит из вертикальной стойки 1, на которой закреплены верхний 2 и нижний 3 кронштейны. К верхнему кронштейну с помощью токопроводящих бифилярных нитей 4 подвешены два стальных шара 5. Для изменения межцентрового расстояния на верхнем кронштейне имеется регулировочный винт.

На нижнем кронштейне укреплены левая 6 и правая 7 шкалы. По правой шкале определяется начальный угол отклонения правого шара, – по левой угол отклонения левого шара после столкновения. Электромагнит 8, служащий для удержания правого шара в исходном положении, может перемещаться по разным направлениям и закрепляться в любом выбранном положении. В правом торце электромагнита имеется винт, с помощью которого можно изменить зазор между сердечником магнита и шара, что необходимо для создания достаточного для удержания шара усилия. Время со-

ударения шаров измеряется контактным способом с помощью микросекундомера 9 и отображается на цифровом индикаторе 10.

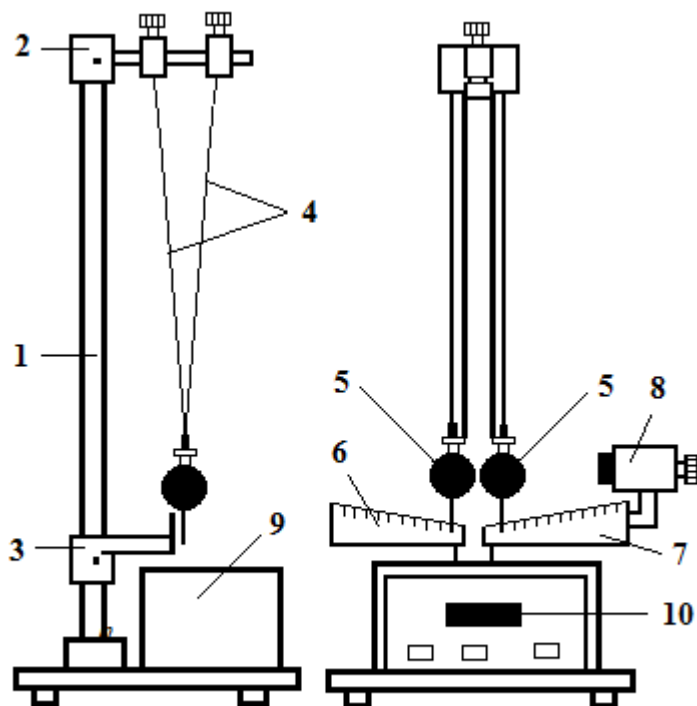


Рис. 2

1. Погрешность измерения времени 1 мкс.
2. Погрешность измерения угла 1°.

### Упражнение 1 Определение коэффициента восстановления и средней силы соударения шаров

Если после соударения правый шар останется в покое ( $m_1 = m_2 = m$ ), то изменение импульса правого шара

$$\Delta p = m_1 \cdot v_1 \quad (9)$$

На основании второго закона Ньютона

$$F_{\text{cp}} \cdot \Delta t = mv_1. \quad (10)$$

Следовательно, среднее значение силы взаимодействия между шарами во время соударения

$$F_{\text{cp}} = \frac{mv_1}{\Delta t}, \quad (11)$$

где  $\Delta t = \tau$  – время соударения.

Таким образом, среднюю силу соударения можно вычислить, зная массу и скорость правого шара  $v_1$  перед соударением и экспериментально измерив время соударения  $\tau$ . Выражая скорость правого шара до соударения по формуле (7), получим

$$F_{\text{cp}} = \frac{2\sqrt{glm_1} \sin \frac{\alpha_0}{2}}{\tau}. \quad (12)$$

Для вычисления коэффициента восстановления  $k$  воспользуемся выражением (1), который с учетом уравнений (7) и (8) примет вид

$$k = \left| \frac{\sin \frac{\alpha_2}{2} - \sin \frac{\alpha_1}{2}}{\sin \frac{\alpha_0}{2}} \right|. \quad (13)$$

### Порядок выполнения работы

1. Включить установку нажатием клавиши СЕТЬ. При этом загораются цифровые индикаторы на панели микросекундомера.

2. Укрепить на подвесе стальные шары одинаковой массы и произвести их центровку для получения центрального удара. При этом указатели положения шаров должны располагаться над нулевыми отметками шкал.

3. Установить электромагнит на угол  $\alpha_0=10^0$ . Отклонить правый шар на выбранный угол  $\alpha_0$  до соприкосновения с электромагнитом. Нажать кнопку СБРОС.

4. Успокоив левый шар, нажать клавишу ПУСК. При этом цепь электромагнита размыкается, правый шар приходит в движение, происходит удар. На индикаторе фиксируется время соударения (время контакта шаров) шаров.

5. Зафиксировать углы отклонения левого  $\alpha_1$  и правого  $\alpha_2$  шаров после удара. Значения  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  и время соударения  $\tau$  записать в табл. 1.

Таблица 1

№	$\alpha_0 = 10^\circ$			$\alpha_0 = 15^\circ$			$\alpha_0 = 20^\circ$		
	$\tau$ , мкс	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\tau$ , мкс	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\tau$ , мкс	$\alpha_1$	$\alpha_2$
1									
2									
3									
4									
5									
Ср.									

6. П. 3–5 проделать не менее пяти раз.

7. Проделать п. 3–6 для двух других значений углов  $\alpha_0$  отклонения правого шара, закрепив предварительно электромагнит в нужном положении.

### Обработка результатов измерений

1. Провести статистическую обработку результатов измерений.

2. Вычислить по формулам (12) и (13) средние значения силы соударения и коэффициента восстановления для каждого угла отклонения правого шара  $\alpha_0$ , используя данные, приведенные в табл. 1.

3. По результатам вычислений построить графики зависимостей  $\tau = f(\alpha_0)$ ,  $F_{\text{ср}} = f(\alpha_0)$  и  $k = f(\alpha_0)$ .

4. Сделать выводы.

### Упражнение 2

#### Проверка закона сохранения импульса при упругом и неупругом соударениях

При упругом соударении шаров выполняется закон сохранения импульса и механической энергии. Совместное применение этих законов позволяет определить скорости тел после абсолютно

упругого соударения. Принимая в уравнении (2) коэффициент восстановления  $k = 1$ , получим

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2} \quad \text{и} \quad u_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \quad (14)$$

Скорости шаров после соударения можно выразить через угол отклонения правого шара до соударения

$$u_1 = \frac{2\sqrt{gl}(m_1 - m_2)\sin\frac{\alpha_0}{2}}{m_1 + m_2}; \quad u_2 = \frac{4\sqrt{gl}m_1\sin\frac{\alpha_0}{2}}{m_1 + m_2}. \quad (15)$$

Если столкновение абсолютно неупругое, то применяя закон сохранения импульса, получим выражение для скорости совместного движения шаров после абсолютно упругого удара

$$u = \frac{m_1 v_1}{m_1 + m_2}, \quad (16)$$

которое, с учетом выражения (7), примет вид

$$u = \frac{2\sqrt{gl}m_1\sin\frac{\alpha_0}{2}}{m_1 + m_2}. \quad (17)$$

### Порядок выполнения работы

1. Включить установку нажатием клавиши СЕТЬ. При этом загораются цифровые индикаторы на панели микросекундомера.
2. Укрепить на подвесе стальные шары разной массы, расположив шар большей массы справа (ударяющий шар), и произвести их центровку для получения центрального удара. При этом указатели положения шаров должны располагаться над нулевыми отметками шкал.
3. Установить электромагнит на угол  $\alpha_0$  ( $10^\circ \div 20^\circ$ ). Отклонить правый шар на выбранный угол  $\alpha_0$  до соприкосновения с электромагнитом. Нажать кнопку СБРОС.
4. Успокоив левый шар, нажать клавишу ПУСК. При этом цепь электромагнита размыкается, правый шар придет в движение, происходит удар.



5. Зафиксировать углы отклонения левого  $\alpha_1$  и правого  $\alpha_2$  шаров после удара. Значения  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  записать в табл. 2.

6. Пункты 3–5 проделать не менее пяти раз.

Таблица 2

№	Шар								
	Стальной					Пластилиновый			
	$m_{1,\Gamma}$	$m_{2,\Gamma}$	$\alpha_0,^\circ$	$\alpha_1,^\circ$	$\alpha_2,^\circ$	$m_{1,\Gamma}$	$m_{2,\Gamma}$	$\alpha_0,^\circ$	$\alpha,^\circ$
1									
2									
3									
4									
5									
Ср.									

7. Руководствуясь п. 2–6 данного упражнения, проделать аналогичные измерения с пластилиновыми шарами. Результаты измерений занести в табл. 2.

### Обработка результатов измерений

1. Провести статистическую обработку результатов измерений.

2. Вычислить по формулам (15) теоретические значения скоростей шаров после абсолютно упругого соударения, используя данные, приведенные в табл. 2.

3. Вычислить по формуле (8) скорости шаров по их углам отклонения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

4. Вычислить погрешности измерений.

5. Сравнить теоретические и экспериментальные значения скоростей шаров после абсолютно упругого соударения.

6. Используя данные, приведенные в таблице 2, вычислить по формуле (17) скорость шаров после абсолютно неупругого соударения.

7. Вычислить погрешности измерений.

8. Сравнить теоретическое и экспериментальное значения скоростей, полученных по формулам (8) и (17).

9. По результатам вычислений сделать выводы.

### Контрольные вопросы и задания

1. Что такое удар? Какой удар называется прямым, центральным?
2. Чем отличается абсолютно упругий удар от абсолютно неупругого? Что такое коэффициент восстановления?
3. Сформулируйте закон сохранения импульса. Почему к явлению удара можно применить закон сохранения импульса?
4. Запишите закон сохранения импульса для абсолютно упругого и неупругого ударов.
5. В каких случаях к явлению удара можно применить закон сохранения механической энергии?
6. Пользуясь законами сохранения, получите выражения для скоростей тел после абсолютно упругого и неупругого ударов.
7. Какая часть механической энергии переходит в другие виды при неупругом ударе?

**Литература:** 1. Гл. 2, 3; 2. Гл. 5; 3. Гл. 3; 6. С. 62; 10. С. 114.

### ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 5

#### ИЗУЧЕНИЕ ОСНОВНОГО ЗАКОНА ДИНАМИКИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

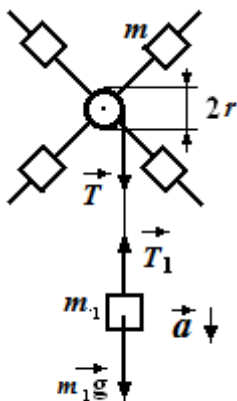


Рис. 1

*Приборы и принадлежности:* крестообразный маятник Обербека FPM-06, миллисекундомер FPM-15, наборы грузов.

*Цель работы* – изучение основного закона динамики вращательного движения.

*Краткая теория.* Установка, называемая маятником Обербека, предназначена для изучения законов вращательного движения тел. Маятник Обербека представляет крестовину с четырьмя стержнями (рис. 1). На стержнях закреплены четыре груза одинаковой массы  $m$ . Изменяя положение грузов на стержнях,

можно менять момент инерции системы. С крестовиной соосно жестко соединен шкив радиуса  $r$ , на который намотана нить с привязанным к ней грузом массой  $m_1$ . Под действием груза нить разматывается и приводит маятник во вращательное движение с постоянным угловым ускорением  $\varepsilon$ . Пренебрегая силами трения, уравнение вращательного движения маятника запишем в виде

$$M = J \cdot \varepsilon, \quad (1)$$

где  $M$  – момент силы натяжения,  $J$  – момент инерции маятника.

При этом поступательное движение груза, согласно второму закону Ньютона, описывается уравнением

$$m_1 g - T = m_1 a. \quad (2)$$

Следовательно, момент силы натяжения нити с учетом уравнения (2) равен

$$M = T \cdot r = m_1 r (g - a). \quad (3)$$

Если груз, подвешенный на нити, падает с высоты  $h$  за время  $t$ , то

$$h = \frac{a \cdot t^2}{2}. \quad (4)$$

Известно, что линейное  $a$  и угловое  $\varepsilon$  ускорения связаны между собой соотношением

$$a = \varepsilon \cdot r \quad (5)$$

Тогда, решая систему уравнений (1)–(5), получим окончательное выражение для экспериментального определения момента инерции маятника:

$$J = \frac{m_1 r^2 (gt^2 - 2h)}{2h}. \quad (6)$$

### Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка, представленная на рис. 2, состоит из вертикальной стойки 1, на которой закреплены кронштейны 2, 3 и 4. На среднем кронштейне 3 смонтирован маятник Обербека – крестовина с четырьмя стержнями (рис. 3). По стержням могут перемещаться и закрепляться в любом положении четыре цилиндрических груза 6 одинаковой массы. На кронштейне 3

смонтирован также электромагнит с фрикционным тормозом, удерживающим маятник в неподвижном состоянии. Маятник Обербека жестко соединен с двухступенчатым шкивом 7 и вращается относительно неподвижной горизонтальной оси. На тот или иной шкив наматывается нить, перекинутая через блок 8, закреп-

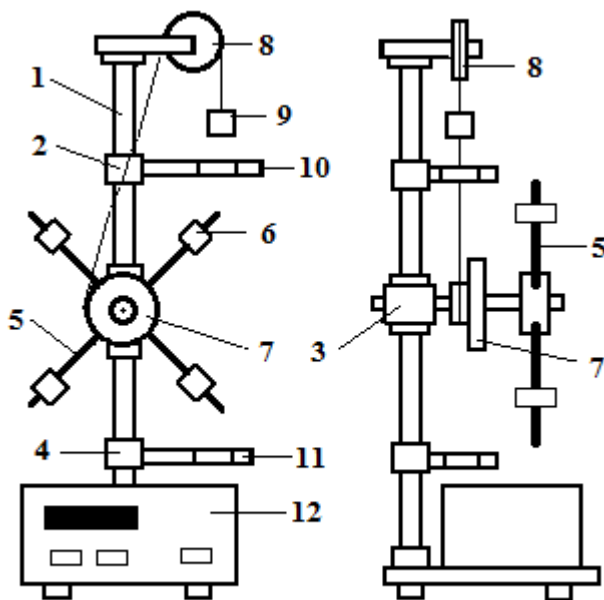


Рис. 2

ленный на верхнем конце вертикальной стойки. К другому концу нити привязан груз 9, с помощью которого система приводится в движение. На верхнем кронштейне 2 смонтирован фотоэлектрический датчик 10, подающий сигнал начала отсчета времени на миллисекундомер 12. Кронштейн 2 с фотоэлектрическим датчиком может перемещаться вдоль вертикальной стойки и закрепляться в любом положении. На нижнем неподвижном кронштейне 4 закреплен фотоэлектрический датчик 11, подающий сигнал окончания счета времени на миллисекундомер, с помощью которого измеряется время движения груза. Для измерения высоты падения груза (расстояние между фотоэлектрическими датчиками) на вертикальной стойке имеется миллиметровая шкала.

## Данные экспериментальной установки

Таблица 1

Элемент	Масса, г	Длина, мм	Диаметр, мм
Стержень	52	250	6
Груз на стержне	192	20	39,5
Шкив малый	-	-	42
Шкив большой	-	-	84
Платформа	53,9	-	-

Погрешность измерения времени не более  $\pm 0,02\%$ .

Погрешность измерения высоты не менее 2 мм.

### Порядок выполнения работы

1. Закрепить грузы, находящиеся на крестовине так, чтобы расстояние от оси вращения до центров масс каждого груза было  $b_1 = 10$  см. При этом необходимо убедиться, что крестовина находится в положении безразличного равновесия.

2. Закрепить верхний фотоэлектрический датчик на выбранной высоте  $h$ .

3. Включить прибор нажатием клавиши СЕТЬ. При этом загораются цифровые индикаторы и лампочки фотоэлектрических датчиков. Нажать кнопку ПУСК.

4. Положить на платформу, прикрепленную к концу нити, один из перегрузов. При этом масса груза  $m_1$  равна сумме масс перегрузка на платформе и самой платформы.

5. Вращая маятник и наматывая нить на шкив малого радиуса  $r$  поднять груз до уровня верхнего фотоэлектрического датчика (чтобы нижний торец платформы находился на уровне черты фотоэлектрического датчика).

6. Отжать клавишу ПУСК. При этом включится фрикционный тормоз, удерживающий систему в неподвижном состоянии.

7. Нажать кнопку СБРОС.

8. Нажать клавишу ПУСК. При этом отключится фрикционный тормоз, и система придет в движение. Измерить время падения груза  $t$ .

9. Нажать кнопку СБРОС.

10. Прodelать п. 5–9 не менее трех раз. Результаты измерений записать в табл. 2.

Таблица 2

$h$ , см	$m_1$ , г	$b_1 = 10$ см				$b_2 = 20$ см			
		$t_1$ , с	$t_2$ , с	$t_3$ , с	$t_{cp}$ , с	$t_1$ , с	$t_2$ , с	$t_3$ , с	$t_{cp}$ , с

11. Прodelать аналогичные измерения времени для трех других грузов  $m_1$ , руководствуясь пунктами 4–10.

12. Закрепить грузы, находящиеся на крестовине на расстоянии  $b_2 = 20$  см от оси вращения, и руководствуясь пунктами 4–11, прodelать аналогичные измерения времени падения.

*Примечание.* Число выполняемых упражнений согласовать с преподавателем.

### Упражнение 1

#### Определение момента инерции маятника Обербека

Момент инерции маятника Обербека можно найти из теоретических соображений, используя свойство аддитивности момента инерции. Маятник состоит из муфты с блоком, насаженной на ось, и четырех стержней с грузами (рис. 3).

Следовательно, момент инерции маятника:

$$J = J_{\text{м}} + 4J_{\text{ст}} + 4J_{\text{гр}}, \quad (7)$$

где  $J_{\text{м}}$  – момент инерции блока, оси и муфты маятника.

Момент инерции одного из четырех стержней

$$J_{\text{ст}} = \frac{1}{3} m_{\text{ст}} \cdot l_{\text{ст}}^2. \quad (8)$$

Момент инерции цилиндрического груза относительно оси вращения найдем по теореме Штейнера (см. табл. 12 прил.):

$$J_{\text{гр}} = m_{\text{гр}} \left( \frac{d_{\text{гр}}^2 + d_{\text{ст}}^2}{16} + \frac{H^2}{12} + b^2 \right), \quad (9)$$

где  $d_{\text{гр}}$  и  $d_{\text{ст}}$  – внешний и внутренний диаметры цилиндрического груза,  $H$  – длина образующей цилиндрического груза (длина),  $b$  –

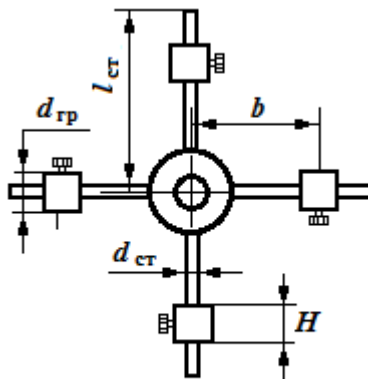


Рис. 3

расстояние от оси вращения до центра масс груза. Следовательно, момент инерции всего маятника с учетом того, что  $J_{\text{м}} \ll J$ , будет равен

$$J_{\text{теор}} = \frac{4}{3} m_{\text{ст}} \cdot l_{\text{ст}}^2 + m_{\text{гр}} \left( \frac{d_{\text{гр}}^2 + d_{\text{ст}}^2}{4} + \frac{H^2}{3} + 4b^2 \right). \quad (10)$$

### Обработка результатов измерений

1. Провести статистическую обработку результатов измерений.
2. По формуле (10) вычислить теоретическое значение момента инерции  $J_{\text{теор}}$  маятника Обербека.
3. Вычислить погрешность вычислений.
4. Вычислить по формуле (6) экспериментальное значение момента инерции  $J_{\text{экс}}$ .
5. Рассчитать погрешности измерений.

6. Сравнить теоретическое и экспериментальные значения моментов инерции.

7. Сделать выводы.

## Упражнение 2

### Изучение зависимости углового ускорения от момента силы натяжения нити

Из основного уравнения (1) динамики вращательного движения относительно неподвижной оси следует, что при неизменном значении момента инерции зависимость углового ускорения от момента приложенных сил задается линейной функцией. График этой зависимости представлен на рис. 4. Угловым коэффициентом этой прямой ( $\operatorname{tg} \varphi$ ) равен обратной величине момента инерции маятника  $J$ . Экстраполяция графика позволяет найти момент силы трения. В точке, где  $\varepsilon = 0$ , момент силы натяжения будет равен моменту силы трения  $M_{\text{тр}}$ .

### Обработка результатов измерений

1. Провести статистическую обработку результатов измерений.

2. Используя экспериментальные данные, приведенные в табл. 2, с помощью формул

$$\varepsilon = \frac{2h}{r \cdot t^2} \quad \text{и} \quad M = m_1(g - \varepsilon \cdot r) r. \quad (11)$$

вычислить значения углового ускорения  $\varepsilon$  и момента силы натяжения  $M$  для каждого перегрузка. По полученным результатам построить графики зависимостей углового ускорения  $\varepsilon$  от момента силы натяжения нити  $M$  для маятников с двумя различными положениями грузов (рис. 4).

3. Определить по экстраполяции графика момент силы трения.

4. Пользуясь графиком, вычислить момент инерции маятника по формуле



$$J = \frac{1}{\operatorname{tg} \varphi} = (\operatorname{tg} \varphi)^{-1}, \text{ т.е. } J = \frac{\Delta M}{\Delta \varepsilon} = \frac{M_2 - M_1}{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}, \quad (12)$$

где 1 и 2 – произвольно взятые на графике точки.

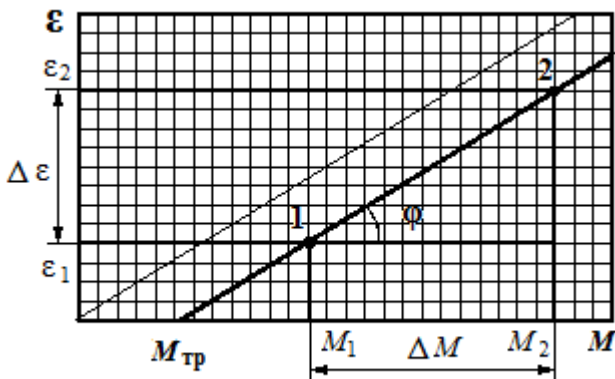


Рис. 4

5. Вычислить по формуле (10) теоретическое значение момента инерции.
6. Рассчитать погрешности теоретического и экспериментального значений моментов инерций.
7. Сравнить полученные значения.
8. Сделать выводы.

### Упражнение 3

#### Проверка теоремы Штейнера–Гюйгенса

Пусть грузы на стержнях расположены так, что их центры масс отстоят на расстоянии  $b_1$  от оси вращения крестовины. Тогда момент инерции маятника согласно теореме Штейнера

$$J_1 = J_k + 4(J_0 + m_{\text{гр}} b_1^2), \quad (13)$$

где  $J_k$  – момент инерции крестовины,  $J_0$  – момент инерции груза относительно оси проходящей через центр масс перпендикулярно к геометрической оси цилиндрического груза. При перемещении грузов на расстоянии  $b_2$  от оси вращения момент инерции будет равен

$$J_2 = J_{\kappa} + 4(J_0 + m_{\text{гр}} b_2^2). \quad (14)$$

Тогда изменение момента инерции маятника, обусловленное перемещением грузов на стержнях на основании формул (13) и (14) равно

$$J_2 - J_1 = 4m_{\text{гр}}(b_2^2 - b_1^2). \quad (15)$$

С другой стороны согласно формуле (6) эта разность равна

$$J_2 - J_1 = \frac{m_1 g r^2}{2m_{\text{гр}} h} (t_2^2 - t_1^2). \quad (16)$$

Следовательно, с учетом формул (15) и (16) получим

$$(t_2^2 - t_1^2) = \frac{8m_{\text{гр}} h}{m_1 g r^2} (b_2^2 - b_1^2). \quad (17)$$

Проверка данного уравнения косвенно подтверждает справедливость выполнения теоремы Штейнера–Гюйгенса.

### Обработка результатов измерений

1. Провести статистическую обработку результатов измерений.
2. Используя данные, приведенные в табл. 1 и 2 проверить выполнение уравнения (17).
3. Сделать выводы.

### Упражнение 4

#### Определение момента силы трения

Для определения момента силы трения необходимо проделать две серии измерений с двумя различными моментами инерции маятника (для различных положений грузов  $m$ ).

Пусть грузы расположены на расстоянии  $b_1$  от оси вращения. Уравнение вращательного движения маятника с учетом силы трения на оси будет иметь вид

$$J_1 \varepsilon_1 = T_1 r - M_{\text{тр}}. \quad (18)$$

Тогда с учетом уравнений (2) – (5) для момента инерции маятника получим выражение

$$J_1 = \frac{m_1 g r^2 t_1^2 - 2 h m_1 r^2 - M_{\text{тр}} t_1^2 r}{2 h}. \quad (19)$$

Аналогично для маятника с другим значением момента инерции (грузы расположены на расстоянии  $b_2$  от оси вращения), имеем

$$J_2 = \frac{m_1 g r^2 t_2^2 - 2 h m_1 r^2 - M_{\text{тр}} t_2^2 r}{2 h}. \quad (20)$$

Согласно теореме Штейнера, разность моментов инерции

$$J_1 - J_2 = 4 m (b_1^2 - b_2^2). \quad (21)$$

Решая систему уравнений (19)–(21), получим выражение для экспериментального определения момента силы трения на оси маятника Обербека:

$$M_{\text{тр}} = m_1 g r + \frac{8 m h (b_1^2 - b_2^2)}{r (t_2^2 - t_1^2)}. \quad (22)$$

### Обработка результатов измерений

1. Провести статистическую обработку результатов измерений.
2. Вычислить момент силы трения на оси маятника Обербека по формуле (22), используя данные, приведенные в табл. 1 и 2.
3. Вычислить погрешность вычислений.
4. Записать ответ.
5. Сделать выводы.

### Контрольные вопросы и задания

1. Какова связь между линейными и угловыми характеристиками движения? Что такое угловая скорость и угловое ускорение?
2. Как записывается основной закон динамики вращательного движения? Что называется моментом силы?
3. Что называется моментом инерции тела? Какую роль играет момент инерции при вращательном движении?
4. Как влияет изменение положения грузов на стержнях на характер движения маятника Обербека?

5. Каким образом можно найти момент силы трения и момент инерции из графика зависимости  $\varepsilon = f(M)$ ?

**Литература:** 1. Гл. 4; 2. Гл. 4; 3. Гл. 5; 5. С. 33; 6. С. 52; 7. С. 92; 12. С. 48.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 6

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА ИНЕРЦИИ МАХОВИКА

*Приборы и принадлежности:* маховое колесо со шкивом FPM-06-1, секундомер FPM-15, линейка, набор грузов.

*Цель работы* – измерение момента инерции маховика разными методами.

*Краткая теория.* Важной характеристикой вращающегося тела является момент инерции. Момент инерции – аналог массы при вращательном движении и зависит от массы, ее распределения, размеров и формы тела. В общем случае вычисление момента инерции тел сводится к вычислению интеграла

$$J = \int r^2 dm, \quad (1)$$

где  $r$  – расстояние от оси вращения до элемента массы.

При сложной геометрии тел вычисление величины момента инерции может быть достаточно сложной задачей, поэтому часто прибегают к экспериментальным методам определения момента инерции. В настоящей работе описаны два экспериментальных метода определения момента инерции: *динамический* (упр. 1) и *энергетический* (упр. 2).

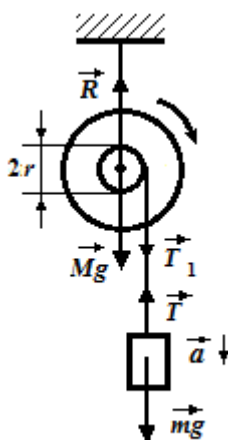


Рис. 1

#### Упражнение 1

#### Определение момента инерции маховика без учета сил трения

Одним из наиболее простых методов определения момента инерции является динамический, основанный на применении ос-

новых законов динамики. Установка по определению момента инерции, представленная на рис. 1, состоит из маховика со шкивом и груза массой  $m$ . Маховик может вращаться относительно неподвижной горизонтальной оси с малым трением. На шкив радиуса  $r$  намотана нить, к концу которой привязан груз. Под действием силы тяжести груз опускается, приводя маховик во вращение. На основании второго закона Ньютона уравнение поступательного движения груза без учета сил трения в проекциях на вертикальную ось имеет вид

$$mg - T = ma. \quad (2)$$

Маховик вращается вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр, следовательно, моменты сил тяжести маховика  $M\vec{g}$  и реакции оси  $\vec{R}$  равны нулю. Таким образом, согласно основному закону динамики вращательного движения для маховика имеем

$$J \cdot \varepsilon = M, \quad (3)$$

где  $J$  – момент инерции маховика;  $\varepsilon$  – угловое ускорение;  $M$  – момент силы натяжения нити.

Момент силы натяжения нити  $M$  равен произведению силы натяжения нити на радиус шкива или с учетом, что  $T = T_1$  будет равен

$$M = T \cdot r. \quad (4)$$

Линейное ускорение груза равно тангенциальному ускорению точек поверхности шкива и связано с угловым ускорением маховика соотношением

$$a = \varepsilon \cdot r. \quad (5)$$

С другой стороны, линейное ускорение может быть выражено через высоту  $h$  и время  $t$  падения груза:

$$h = \frac{a \cdot t^2}{2}. \quad (6)$$

Следовательно, из уравнений (5) и (6) для углового ускорения имеем

$$\varepsilon = \frac{2h}{r \cdot t^2}. \quad (7)$$

Решая систему уравнений (2) – (7) относительно момента инерции  $J$ , получим окончательное выражение

$$J = mr^2 \left( \frac{gt^2}{2h} - 1 \right). \quad (8)$$

Таким образом, вычисление момента инерции тела по этой формуле требует измерения массы груза  $m$ , радиуса шкива  $r$ , высоты  $h$  и времени  $t$  падения груза.

## Упражнение 2

### Определение момента инерции с учетом сил трения

При опускании груза с высоты  $h$  его потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию системы и работу против сил трения. Следовательно, на основании закона сохранения и превращения энергии имеем

$$mgh_1 = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} + A_{\text{тр}}. \quad (9)$$

Работу сил трения найдем из выражения

$$A_{\text{тр}} = M_{\text{тр}} \cdot \varphi_1, \quad (10)$$

где  $\varphi_1$  – полный угол поворота маховика при падении груза.

После того как груз опустится на полную длину нити  $h_1$ , маховик будет продолжать вращаться по инерции, и нить начнет наматываться на шкив. В результате чего груз поднимется на максимальную высоту  $h_2 < h_1$ .

Таким образом:

$$\frac{J\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = mgh_2 + \varphi_2 \cdot M_{\text{мп}}. \quad (11)$$

Из уравнений (9), (10) и (11) с учетом, что

$$h_1 = r \cdot \varphi_1 \quad \text{и} \quad h_2 = r \cdot \varphi_2, \quad (12)$$

получим выражение для момента сил трения

$$M_{\text{мп}} = \frac{mgr(h_1 - h_2)}{h_1 + h_2}. \quad (13)$$

При равноускоренном движении линейная скорость груза выражается через высоту  $h_1$  и время  $t$  падения соотношением

$$v = \frac{2h_1}{t}. \quad (14)$$

При этом угловая скорость вращения маховика связана с линейной скоростью выражением

$$v = \omega \cdot r. \quad (15)$$

Следовательно, решая систему уравнений (11), (13), (14) и (15), получим окончательное выражение:

$$J = mr^2 \left( \frac{gt^2 h_2}{h_1(h_1 + h_2)} - 1 \right). \quad (16)$$

Таким образом, определение момента инерции маховика данным способом сводится к измерению высоты  $h_1$  и времени  $t$  падения, а также высоты подъема  $h_2$ .

### Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка, представленная на рис. 2, состоит из вертикальной стойки 1, на которой закреплены крон-

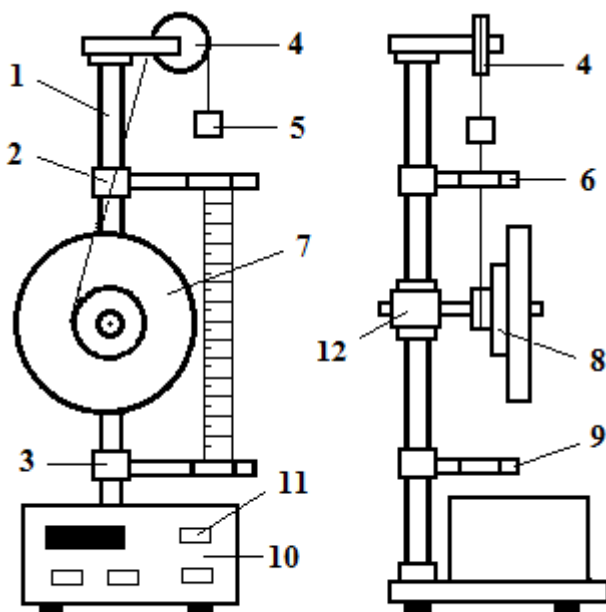


Рис. 2

штейны 2 и 3. На среднем кронштейне 12 смонтирован вал, яв-

ляющийся осью маховика 7. На этом кронштейне смонтирован также электромагнит с фрикционным тормозом, удерживающим маховик в неподвижном состоянии. Маховик жестко соединен с двухступенчатым шкивом 8 и вращается относительно неподвижной горизонтальной оси с малым трением. На тот или иной шкив наматывается нить, перекинутая через блок 4, закрепленный на верхнем конце вертикальной стойки.

К другому концу нити привязан груз 5, с помощью которого система приводится в движение. На верхнем кронштейне 2 смонтирован фотоэлектрический датчик 6, подающий сигнал начала отсчета времени на миллисекундомер 10. Кронштейн 2 с фотоэлектрическим датчиком может перемещаться вдоль вертикальной стойки и закрепляться в любом положении. На нижнем неподвижном кронштейне 3 закреплен фотоэлектрический датчик 9, подающий сигнал окончания счета времени на миллисекундомер, с помощью которого измеряется время движения груза. Для измерения высоты падения груза (расстояние между фотоэлектрическими датчиками) на вертикальной стойке имеется миллиметровая шкала. Остановка маховика с грузом производится нажатием кнопки СТОП (11).

Точность измерения времени не более  $\pm 0,02\%$ .

Точность измерения высоты не менее 2 мм.

*Примечание.* Количество выполняемых упражнений согласовать с преподавателем.

### **Порядок выполнения работы**

1. Закрепить верхний фотоэлектрический датчик на выбранной высоте  $h$ .

2. Нажать клавишу СЕТЬ, расположенную на передней панели миллисекундомера. При этом загораются цифровые индикаторы и лампочки фотоэлектрических датчиков. Включится фрикционный тормоз, удерживающий систему в исходном состоянии. Нажать клавишу ПУСК.

3. Положить на платформу, прикрепленную к концу нити, один из перегрузов. При этом масса груза  $m$  равна сумме масс перегрузка на платформе и самой платформы.



4. Вращая маховик и наматывая нить на шкив малого радиуса  $r$ , поднять груз до уровня верхнего фотоэлектрического датчика (чтобы нижний торец платформы находился на уровне черты фотоэлектрического датчика).

5. Отжать клавишу ПУСК. При этом включится фрикционный тормоз, удерживающий систему в неподвижном состоянии. Нажать кнопку СБРОС.

6. Нажать клавишу ПУСК. При этом отключится фрикционный тормоз, и система придет в движение. После того как миллисекундомер начнет отсчет времени, нажать и продолжать удерживать кнопку СТОП. В тот момент, когда груз поднимется до верхней точки, отжать кнопку СТОП. При этом включится фрикционный тормоз и затормозит маховик с грузом. Провести отсчет времени  $t$  и высоты  $h_1$  падения (расстояние между фотоэлектрическими датчиками), а также высоты подъема  $h_2$ . Результаты записать в табл. 1.

Таблица 1

№	$m$ , кг	$m_0$ , кг	$r$ , м	$R$ , м	$t$ , с	$h_1$ , м	$h_2$ , м
1							
2							
3							
4							
5							
Ср.							

7. П. 4–6 проделать не менее пяти раз.

### Обработка результатов измерений

1. На основании полученных результатов вычислить экспериментальное значение момента инерции маховика по формулам (8) или (16).

2. Вычислить теоретическое значение момента инерции маховика по формуле

$$J_{\text{теор}} = \frac{m_0 R^2}{2}, \quad (17)$$

где  $m_0$ ,  $R$  – масса и радиус маховика.

3. Вычислить погрешности.

4. Сравнить теоретическое и экспериментальные значения моментов инерции. Проверить соотношение

$$|J_{\text{эксп}} - J_{\text{теор}}| < \Delta J. \quad (18)$$

5. Сделать выводы.

### Контрольные вопросы и задания

1. Что называется моментом инерции материальной точки, твердого тела? От чего зависит момент инерции тела, и какую роль он играет при вращательном движении?

2. Какие законы положены в основу вывода расчетных формул (5) и (13)?

3. Как записывается основной закон динамики вращательного движения?

4. Какими методами можно измерить момент инерции маховика?

5. Чему равна кинетическая энергия вращающегося тела?

6. Оцените точность результатов измерений момента инерции различными методами.

**Литература:** 1. Гл. 3, 4; 2. Гл. 4, 5; 3. Гл. 5; 5. С. 29; 7. С. 98; 10. С. 85.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 7

### ИЗМЕРЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

*Приборы и принадлежности:* крутильный маятник FPM -05, миллисекундомер FPM-14, параллелепипед, куб.

*Цель работы* – измерение моментов инерции тел относительно различных осей.

*Краткая теория.* При вращательном движении твердого тела мерой инертности является величина называемая моментом инерции. **Моментом инерции** твердого тела относительно точки (полюса) называется физическая величина, равная сумме произведе-

ний масс всех материальных точек системы на квадраты их расстояний до этой точки (полюса):

$$J = \sum m_i r_i^2 = \sum m_i (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) \quad (1)$$

Моментом инерции тела относительно оси называется величина, равная сумме произведений масс всех частиц тела на квадраты их расстояний до оси. Моменты инерции тела относительно осей прямоугольной декартовой системы координат

$$\begin{aligned} J_x &= \sum m_i (y_i^2 + z_i^2), & J_y &= \sum m_i (x_i^2 + z_i^2), \\ J_z &= \sum m_i (x_i^2 + y_i^2). \end{aligned} \quad (2)$$

Моменты инерции тела относительно координатных осей и начала координат (полюса) связаны соотношением

$$J_0 = \frac{1}{2} (J_x + J_y + J_z). \quad (3)$$

Момент инерции тела относительно какой-либо оси зависит не только от массы, формы и размеров тела, но также от положения тела по отношению к этой оси. Согласно **теореме Штейнера** (теореме о переносе осей инерции) момент инерции тела  $J$  относительно произвольной оси равен сумме момента инерции этого тела относительно оси, проходящей через центр масс тела параллельно данной оси, и произведения массы тела на квадрат расстояния между осями

$$J = J_c + m a^2. \quad (4)$$

Момент инерции твердого тела относительно заданной оси можно представить в виде произведения массы тела на квадрат линейной величины, называемой *радиусом инерции* тела относительно этой оси:

$$J = m \cdot r_x^2. \quad (5)$$

Радиус инерции  $r_z$  определяет расстояние от оси  $z$  до точки, в которой нужно сосредоточить всю массу тела, чтобы момент инерции материальной точки относительно этой оси равнялся моменту инерции тела. Моменты инерции твердого тела относительно различных осей, проходящих через какую-либо точку  $O$ , связаны с моментами инерции этого тела по отношению к осям координат-

ной системы, начало которой совпадает с точкой  $O$ , следующим соотношением

$$J = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cdot \cos \beta - 2J_{xz} \cos \alpha \cdot \cos \gamma - 2J_{yz} \cos \beta \cdot \cos \gamma, \quad (6)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  – углы, образуемые данной осью соответственно с осями  $OX$ ,  $OY$  и  $OZ$ . Выражения

$$J_{xy} = \int xy dm, \quad J_{xz} = \int xz dm, \quad J_{yz} = \int yz dm \quad (7)$$

называются *центробежными моментами инерции*. Момент инерции в общем случае определяется шестью величинами, а не одной, как его аналог – масса, являющейся скалярной величиной. Для различных осей, проходящих через начало координат

(различные углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ), величина момента инерции будет, естественно, различна. Ось  $OX$  называется *главной осью инерции* тела, если центробежные моменты инерции  $J_{xy}$  и  $J_{xz}$  одновременно равны нулю. Через каждую точку тела можно провести три главные оси инерции. Эти оси взаимно перпендикулярны друг другу. Моменты инерции тела относительно трех главных осей инерции, проведенных в произвольной точке тела, называются *главными моментами инерции* тела. В этом случае момент инерции определяется не шестью, а тремя величинами

$$J = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma. \quad (8)$$

Главные оси инерции, проходящие через центр инерции тела, называются *главными центральными осями инерции* тела, а моменты инерции тела относительно этих осей – его *главными центральными моментами инерции*. Для однородных симметричных тел главные центральные оси инерции являются осями симметрии тела. Именно для этого случая проверяется экспериментально уравнение (8).

Моменты инерции различных тел могут быть измерены методом крутильных колебаний с помощью унифицированного подвеса (крутильный маятник). Кру-

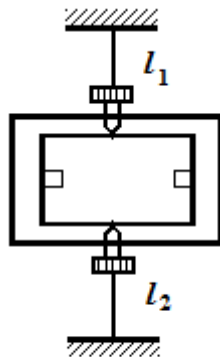


Рис. 1

тильный маятник (рис. 1) состоит из рамки, закрепленной на растяжках (тонких упругих проволоках)  $l_1$  и  $l_2$ . В рамке может быть закреплено твердое тело с центром масс, лежащим на оси вращения. Если повернуть рамку на малый угол  $\varphi$  от положения равновесия и отпустить, то она начнет совершать гармонические крутильные колебания. Движение рамки можно описать с помощью основного уравнения вращательного движения

$$\sum M = J \cdot \varepsilon, \quad (9)$$

где  $\sum M$  – суммарный момент упругих сил со стороны растяжек  $l_1$  и  $l_2$ ,  $\varepsilon$  – угловое ускорение,  $J$  – момент инерции системы. При малых деформациях кручения

$$\sum M = -K \cdot \varphi. \quad (10)$$

Знак «минус» показывает, что моменты сил упругости препятствуют повороту платформы из положения равновесия.

Модуль кручения

$$K = \frac{\pi \cdot G}{2l_1} d_1^4 + \frac{\pi \cdot G}{2l_2} d_2^4, \quad (11)$$

где  $d_1$  и  $d_2$  – диаметры проволок,  $l_1$  и  $l_2$  – длины подвесов,  $G$  – модуль сдвига материала проволок.

На основании уравнений (9) и (10) получим дифференциальное уравнение крутильных колебаний:

$$J \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + K \varphi = 0. \quad (12)$$

Таким образом, маятник будет совершать гармонические колебания с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{K}}. \quad (13)$$

Отсюда момент инерции рамки с грузом

$$J = \frac{T^2}{4\pi^2} K. \quad (14)$$

Аналогично для пустой рамки

$$J_0 = \frac{T_0^2}{4\pi^2} K. \quad (15)$$

Вычитая (15) из (14), получим выражение для момента инерции тела

$$J_{\text{эсп}} = \frac{T^2 - T_0^2}{4\pi^2} K. \quad (16)$$

Таким образом, по известным значениям периода колебания маятника с грузом  $T$ , периода колебания пустой платформы  $T_0$  и параметров подвеса можно вычислить экспериментальное значение момента инерции тела  $J_{\text{эсп}}$  относительно различных осей, но часто значения параметров подвесов (проволок) бывают неизвестными. Тогда момент инерции  $J_{\text{эсп}}$  можно найти, сравнивая с моментом инерции эталонного тела (куба). В этом случае из формулы (16) получим выражение для экспериментального определения момента инерции тел относительно различных осей вращения:

$$J_{\text{эсп}} = \frac{T^2 - T_0^2}{T_{\text{эт}}^2 - T_0^2} J_{\text{эт}}, \quad (17)$$

где  $T_0$ ,  $T$  и  $T_{\text{эт}}$  – периоды колебания пустой рамки, исследуемого и эталонного тел соответственно. Момент инерции эталонного тела

$$J_{\text{эт}} = \frac{1}{6} m_{\text{эт}} a_{\text{эт}}^2. \quad (18)$$

Исследуемое тело (параллелепипед) имеет правильную геометрическую форму: оно представляет собой однородный прямоугольный параллелепипед с массой  $m$  и ребрами  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Момент инерции такого тела относительно оси проходящей через центр масс может быть рассчитан теоретически по формуле (8). Если ось вращения совпадает с осью  $Z$ , то момент инерции параллелепипеда относительно этой оси будет

$$J_{\text{теор.1}} = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2), \quad (19)$$

где  $a$  и  $b$  – размеры ребер перпендикулярных оси вращения.

Для оси вращения, совпадающей с диагональю параллелепипеда

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}. \quad (20)$$

Тогда с учетом формулы (8) момент инерции тела относительно оси, совпадающей с диагональю параллелепипеда

$$J_{\text{теор.2}} = \frac{1}{6} m \frac{a^2 b^2 + b^2 c^2 + a^2 c^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (21)$$

Экспериментальная проверка формулы (8) в данной работе сводится к проверке уравнения (22), полученного из уравнений (8) и (17):

$$t^2 = \frac{a^2 t_x^2 + b^2 t_y^2 + c^2 t_z^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \quad (22)$$

где  $t_x$ ,  $t_y$ ,  $t_z$  и  $t$  – время десяти колебаний рамки с исследуемым параллелепипедом относительно осей  $OX$ ,  $OY$ ,  $OZ$  и оси совпадающей с диагональю соответственно.

### Описание экспериментальной установки

Крутильный маятник представлен на рис. 2. На вертикальной стойке 1 закреплены три кронштейна: верхний 2, средний 3 и нижний 4. Между кронштейнами 2 и 3 с помощью проволочных растяжек 5 закреплена рамка 6. Исследуемое тело 7 закрепляется внутри рамки с помощью подвижной планки 9, которая может перемещаться по направляющим 10 и фиксироваться путем затягивания гаек. На кронштейне 3 укреплена шкала 8, а также электромагнит 11, удерживающий рамку в начальном положении. Электромагнит можно перемещать, изменяя тем самым угол начального отклонения маятника. На среднем кронштейне также закреплен фотоэлектрический датчик 12, подающий сигналы начала и окончания отсчета времени и числа колебаний на миллисекундомер 13. Отсчет времени и числа колебаний производится с помощью цифровых индикаторов 14 и 15, находящихся на лицевой панели миллисекундомера FPM-14.

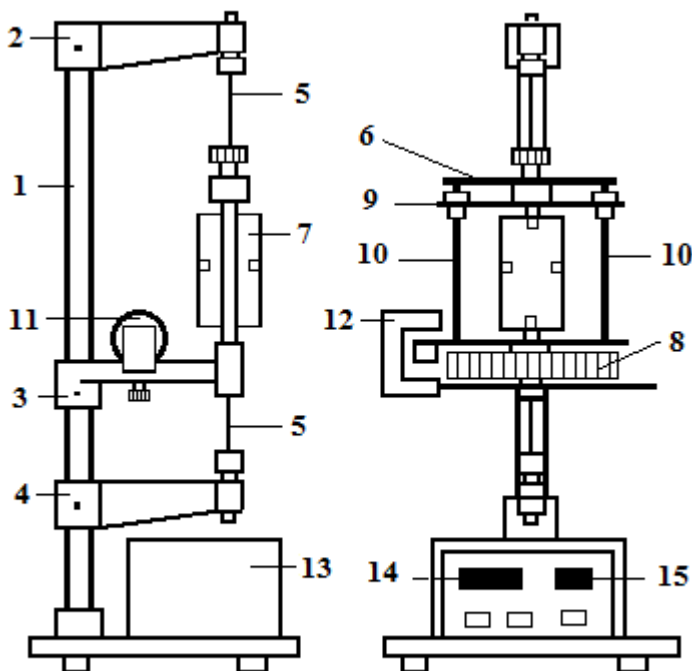


Рис. 2

Погрешность измерения времени не более  $\pm 0,02\%$ .

Погрешность измерения угла не менее  $1^\circ$ .

*Примечание.* Число выполняемых упражнений согласовать с преподавателем.

### Упражнение 1 Измерение момента инерции тел

1. Закрепить исследуемый параллелепипед в рамке так, чтобы одна из граней (со сторонами  $a$  и  $b$ ) была перпендикулярна оси вращения, а ось вращения проходила через центр масс. Для этого необходимо произвести следующие действия. Освободить под-



вижную планку, отвернув зажимные гайки, поднять подвижную планку по направляющим и установить груз на нижней планке рамки. Фиксирующий выступ на нижней планке рамки должен войти в углубление на нижней грани параллелепипеда. Опустить верхнюю подвижную планку по направляющим. Фиксирующий выступ должен войти в углубление на верхней грани. Зажать гайки на направляющих и закрепить груз верхним винтом. С помощью штангенциркуля измерить размеры граней  $a$  и  $b$ , перпендикулярных оси вращения (ось вращения совпадает с осью  $OZ$ ).

2. Нажать клавишу СЕТЬ, расположенную на передней панели прибора. При этом должны загореться лампочки цифровой индикации времени, числа периодов и лампочка фотодатчика.

3. Переключить кнопку ПУСК в положение ВЫКЛ (кнопка отжата). Повернуть рамку так, чтобы флажок рамки притянулся электромагнитом. Нажать кнопку СБРОС. При этом на табло ПЕРИОДЫ и ВРЕМЯ должны высветиться нули.

4. Произвести запуск, нажав кнопку ПУСК, и измерить время  $t_z$  десяти полных колебаний. Остановка счета производится нажатием кнопки СТОП в тот момент, когда на табло ПЕРИОДЫ высвечивается цифра 9.

5. П. 3 и 4 проделать не менее пяти раз. Результаты записать в табл. 1.

Таблица 1

№	$a$ , мм	$b$ , мм	$m$ , кг	$m_{\text{эт}}$ , кг	$a_{\text{эт}}$ , мм	$t_z$ , с	$t_{\text{эт}}$ , с	$t_0$ , с
1								
2								
3			1,98	0,98				
4								
5								
Ср.								

6. Руководствуясь п. 1, закрепить в рамке эталонный груз (куб), и проделать п. 3–5 с эталонным грузом.

7. Снять груз с рамки и проделать п. 3–5 с пустой рамкой.

### Обработка результатов измерений

1. По данным табл. 1 рассчитать экспериментальное значение момента инерции  $J_{\text{эк}}$  относительно оси  $OZ$  используя формулы (17) и (18). При расчете в формулу (17) вместо периодов  $T$ ,  $T_{\text{эт}}$  и  $T_0$  можно подставлять  $t_z$ ,  $t_{\text{эт}}$  и  $t_0$  соответственно.

2. Согласно формуле (19) рассчитать теоретическое значение момента инерции тела (параллелепипеда).

3. Рассчитать погрешности и сравнить теоретическое и экспериментальные значения моментов инерции.

4. Сделать выводы.

## Упражнение 2

### Проверка теоремы Штейнера–Гюйгенса

1. Руководствуясь п. 1 (упр. 1) закрепить в рамке два куба, расположив их симметрично относительно оси вращения так, чтобы центры масс отстояли на расстоянии  $d$  от оси вращения. Руководствуясь пунктами 3 и 4 упражнения 1, измерить время десяти полных колебаний  $t$ .

2. Закрепить в рамке один из кубов так, чтобы ось вращения проходила через центр масс, а одна из граней была параллельна оси вращения и аналогично измерить время десяти полных колебаний  $t_{\text{эт}}$ .

3. Снять куб с рамки и измерить время десяти полных колебаний  $t_0$  пустой рамкой.

Таблица 2

№	$t$ , с	$d$ , мм	$t_{\text{эт}}$ , с	$a$ , мм	$m_{\text{эт}}$ , кг	$t_0$ , с
1						
2						
3						
4						
5						
Ср.						

Все измерения проделать не менее пяти раз, а результаты записать в табл. 2.

## Обработка результатов измерений

1. Рассчитать по формуле

$$J_{\text{эксп}} = \frac{1}{3} m_{\text{эт}} a_{\text{эт}}^2 \frac{T^2 - T_0^2}{T_{\text{эт}}^2 - T_0^2}$$

экспериментальное значение момента инерции тела (с учетом двух масс) относительно оси, не проходящей через центр масс (формулы (17) и (18)).

2. По теореме Штейнера–Гюйгенса

$$J_{\text{теор}} = \frac{1}{6} m_{\text{эт}} a_{\text{эт}}^2 + m_{\text{эт}} d^2$$

вычислить теоретическое значение момента инерции.

3. Вычислить погрешности.

4. Сравнить экспериментальное и теоретическое значения моментов инерции:

$$|J_{\text{теор}} - J_{\text{эксп}}| \leq \Delta J.$$

5. Сделать вывод о выполнении (в пределах погрешности измерений) теоремы Штейнера–Гюйгенса.

### Упражнение 3

#### Измерение моментов инерций тел относительно различных осей

1. Руководствуясь п. 1 (упр. 1) закрепить параллелепипед в рамке так, чтобы одна из граней была перпендикулярна оси вращения, а ось вращения проходила через центр масс (осью вращения является ось  $OX$ ). Измерить штангенциркулем размер ребра  $a$ , параллельного оси вращения. Руководствуясь п. 3 и 4 упражнения 1, измерить время десяти полных колебаний  $t_x$ .

2. Закрепляя параллелепипед в рамке поочередно в двух различных положениях, при которых ось вращения перпендикулярна двум другим граням, измерить время  $t_y$  и  $t_z$ , а также размеры  $b$  и  $c$  ребер, параллельных осям  $OY$  и  $OZ$  соответственно.

3. Закрепить параллелепипед в рамке так, чтобы ось вращения совпадала с диагональю параллелепипеда, и измерить время  $t$  десяти-

ти полных колебаний. Все измерения проделать не менее пяти раз, а результаты записать в табл. 3.

Таблица 3

№	$t_x$ , с	$a$ , мм	$t_y$ , с	$b$ , мм	$t_z$ , с	$c$ , мм	$t$ , с
1							
2							
3							
Ср.							

### Обработка результатов измерений

1. Рассчитать по формулам (17) и (18) экспериментальное значение момента инерции параллелепипеда относительно оси совпадающей с диагональю. При этом значения  $m_{\text{эт}}$ ,  $a_{\text{эт}}$ ,  $t_{\text{эт}}$  и  $t_0$  брать из табл. 1.

2. По формуле (21) вычислить теоретическое значение момента инерции.

3. Вычислить погрешности.

4. По данным табл. 2 проверить (в пределах погрешности измерений) справедливость уравнения (22), следовательно, и соотношения (8).

5. Сделать выводы.

### Контрольные вопросы и задания

1. Что называется моментом инерции тела относительно точки (полюса), оси? Как они связаны между собой?

2. Что называется главными центральными моментами инерции тела?

3. Сформулируйте теорему Штейнера – Гюйгенса.

4. Выведите формулу для периода колебаний крутильного маятника. От чего зависит период колебания крутильного маятника?

5. В чем отличие крутильных колебаний от колебаний физического маятника?

**Литература:** 1. Гл. 4, 18; 2. Гл. 4, 27; 3. Гл. 5; 6. С. 47.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 8

### ИЗУЧЕНИЕ ГИРОСКОПА

*Приборы и принадлежности:* гироскоп FPM-10.

*Цель работы* – изучение закона сохранения момента импульса, исследование гироскопического эффекта, ознакомление с особенностями движения гироскопа.

*Краткая теория.* **Гироскопом** (волчком) называется массивное тело, вращающееся с большой угловой скоростью вокруг оси симметрии. Основное свойство гироскопа – способность сохранять неизменное направление оси вращения в пространстве при отсутствии момента внешних сил. Поэтому гироскопы используются в качестве указателя заданного направления при движении самолетов, судов, ракет и т.д. (гиросkompасы, гиростабилизаторы, автопилоты). В основе устойчивого движения пуля, снарядов, ракет также лежит гироскопический эффект.

Если момент внешних сил, действующий на гироскоп, не равен нулю, то ось гироскопа начинает поворачиваться в пространстве с некоторой угловой скоростью  $\Omega$ , описывая коническую поверхность (рис.1). Такое движение называется **прецессией**. Если угловая скорость прецессии намного меньше угловой скорости вращения гироскопа вокруг своей оси ( $\Omega \ll \omega$ ), то можно приближенно считать вектор  $\vec{L}$  равным  $J\vec{\omega}$  и направленным вдоль оси гироскопа. При этом поворот вектора и поворот оси гироскопа означает одно и то же. Следовательно, о движении вектора момента импульса можно судить по движению видимой оси гироскопа. Рассмотрим гироскоп, состоящий из диска, который может вращаться вокруг горизонтальной оси  $OO_1$  и противовеса  $A$  (рис. 2). Ось гироскопа шарнирно закре-

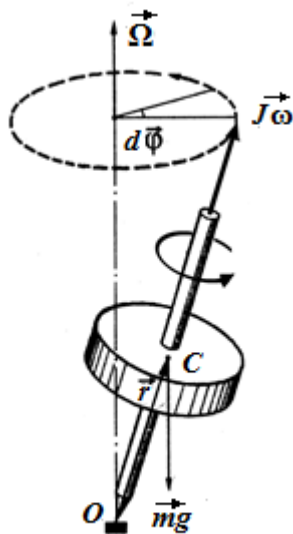
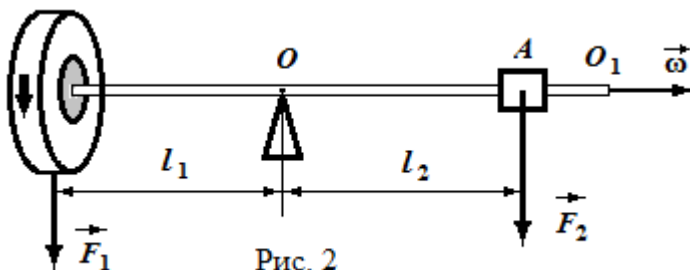


Рис. 1

плен. Рассмотрим гироскоп, состоящий из диска, который может вращаться вокруг горизонтальной оси  $OO_1$  и противовеса  $A$  (рис. 2). Ось гироскопа шарнирно закре-

плена в точке  $O$ . Противовес  $A$  можно перемещать вдоль оси  $OO_1$ . Если противовес  $A$  расположен так, что точка  $O$  является центром



масс системы, то такой гироскоп называется уравновешенным. Для уравновешенного гироскопа

$$F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2, \quad (1)$$

где  $F_1$  и  $F_2$  – силы тяжести диска и противовеса,  $l_1$  и  $l_2$  – расстояния от точки  $O$  до центров масс диска и противовеса (плечи сил  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ ).

Следовательно, результирующий момент сил, действующий на систему, равен нулю ( $M = 0$ ). Пусть диск уравновешенного гироскопа вращается с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ . В этом случае на основании основного закона динамики вращательного движения имеем

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \quad (2)$$

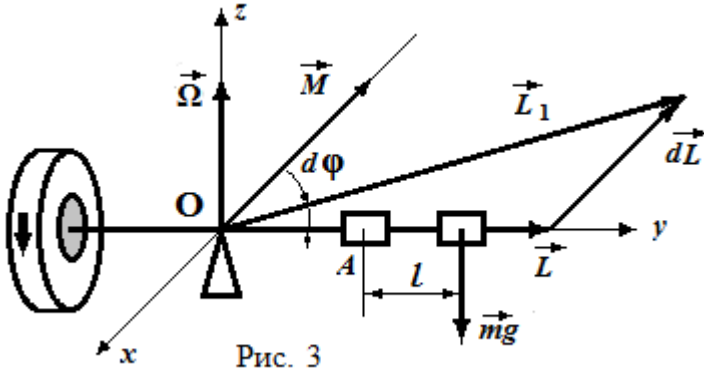
где  $\vec{L} = J\vec{\omega}$  – момент импульса диска. Из уравнения (2) следует, что вектор момента импульса не зависит от времени, т.е. гироскоп обладает постоянным моментом импульса  $\vec{L}$ , совпадающим по направлению с угловой скоростью  $\vec{\omega}$ :

$$\vec{L} = J\vec{\omega} = \text{const}. \quad (3)$$

Таким образом, при отсутствии момента внешних сил гироскоп сохраняет положение своей оси в пространстве.

Попытаемся теперь повернуть ось гироскопа в вертикальной плоскости  $yz$  по часовой стрелке (рис. 3). Для этого сдвинем противовес от положения равновесия вправо на некоторое расстояние

1. При этом на гироскоп будет действовать момент силы тяжести



$\vec{M}$ , направленный против оси  $Ox$  и по величине равный

$$M = mgl. \quad (4)$$

Из основного уравнения динамики вращательного движения следует, что момент силы  $\vec{M}$  вызовет за время  $dt$  изменение момента импульса

$$d\vec{L} = \vec{M} \cdot dt, \quad (5)$$

направление которого совпадает с направлением вектора  $\vec{M}$ , т.е. перпендикулярно первоначальному направлению вектора  $\vec{L}$ .

Следовательно, через время  $dt$  момент импульса гироскопа станет равным

$$\vec{L}_1 = \vec{L} + d\vec{L}, \quad (6)$$

и ось гироскопа изменит свое положение в пространстве, повернувшись на угол  $d\varphi$  в горизонтальной плоскости вокруг оси  $z$  (см. рис. 3). За следующий промежуток времени снова произойдет изменение момента импульса на величину  $d\vec{L}$  и т.д. В результате ось гироскопа под действием постоянного момента внешних сил будет непрерывно вращаться в горизонтальной плоскости с некоторой постоянной угловой скоростью  $\Omega$ , т.е. будет наблюдаться прецессия. При этом угловая скорость прецессии

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{\varphi}{t}. \quad (7)$$

Из рис. 3 видно, что при малых углах поворота оси гироскопа

$$d\varphi = \frac{dL}{L}. \quad (8)$$

Тогда из формул (7) и (8) следует, что

$$\frac{dL}{dt} = \Omega \cdot L. \quad (9)$$

На основании основного закона динамики вращательного движения с учетом формулы (4) имеем

$$\frac{dL}{dt} = M = mgl. \quad (10)$$

Следовательно, согласно формулам (3), (9) и (10), для угловой скорости прецессии окончательно получим выражение в виде

$$\Omega = \frac{mgl}{J\omega}. \quad (11)$$

### Описание экспериментальной установки

В экспериментальной установке, показанной на рис. 4, собст-

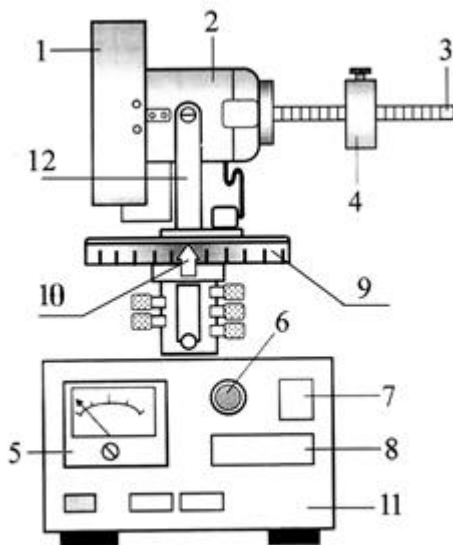


Рис. 4

венно гироскопом является ротор электрического мотора, с наса-



женным на его ось с массивным диском 1. Корпус электрического мотора шарнирно закреплен с вилкой 12, что позволяет ограниченное вращение оси гироскопа в вертикальной плоскости. Поворот в горизонтальной плоскости достигается благодаря вращению вилки 12 со скользящими контактами вокруг основания. Угол поворота гироскопа вокруг вертикальной оси можно отсчитывать по лимбу 9 с нанесенной угловой шкалой при помощи указателя 10. Лимб имеет прорези через каждые  $5^{\circ}$ , которые считываются фотоэлектрическим датчиком и передаются в блок управления. Информация об угле поворота отображается на индикаторе 7. Скорость вращения диска регулируется ручкой 6 «РЕГУЛЯТОР СКОРОСТИ», находящейся на лицевой панели блока управления 11. Измерение скорости вращения диска производится с помощью стрелочного прибора 5. Управление универсальным секундомером производится с помощью клавиш «СБРОС» и «СТОП». При этом время отображается на цифровом индикаторе 8. Питание электрического мотора и фотоэлектрических датчиков осуществляется с помощью системы скользящих контактов. К корпусу мотора закреплен рычаг 3 с нанесенной метрической шкалой (0–15 см). Горизонтальное положение оси гироскопа обеспечивается противовесом 4, находящимся на рычаге 3. Смещая противовес вдоль рычага, можно создать дополнительный момент силы тяжести, действующий на гироскоп при его вращении.

Погрешность измерения скорости вращения не менее  $\pm 2,5\%$ .

Погрешность измерения времени 0,02%.

### Упражнение 1

#### **Исследование зависимости угловой скорости прецессии от момента внешних сил**

1. Произвести выравнивание гироскопа с помощью регулировочных винтов (по необходимости).
2. Установить ручку «РЕГУЛЯТОР СКОРОСТИ» в крайнее левое положение.
3. Включить установку нажатием клавиши «СЕТЬ». При этом загораются световые индикаторы.

4. Освободить винт, закрепляющий противовес. Перемещая противовес, добиться равновесного горизонтального положения оси гироскопа. Закрепить противовес винтом в данном положении.

5. Медленно вращая ручку «РЕГУЛЯТОР СКОРОСТИ», установить по шкале прибора 5 число оборотов диска около 4000 об./мин (рекомендуется преподавателем). Дождаться установления стабильного показания прибора (~ 2 мин).

6. Придерживая рукой рычаг, освободить винт крепления противовеса, сдвинуть противовес влево на расстояние 2 см от равновесного положения и закрепить.

7. Продолжая придерживать рычаг рукой в горизонтальном положении, поворачивая гироскоп относительно вертикальной оси, привести указатель поворота 10 в нулевое положение по шкале 9. Нажать кнопку «СБРОС». Осторожно без рывков отпустить рычаг, в результате чего ось гироскопа начнет медленно вращаться в горизонтальной плоскости. В тот момент, когда на индикаторе 7 высветится цифра 5 (рекомендуется преподавателем), нажать кнопку «СТОП». При этом остановка времени произойдет при угле поворота  $\varphi=60^\circ$ .

8. Значения времени и угла поворота записать в табл. 1.

Таблица 1

№	l, см	$\varphi, ^\circ$	t, с			$t_{cp}, c$	n, c <sup>-1</sup>	m, г
			t <sub>1</sub>	t <sub>2</sub>	t <sub>3</sub>			

9. Повторить п. 7 еще два раза.

10. Руководствуясь п. 6 и сдвигая противовес каждый раз на 2 см влево, выполнить п. 7 и 8.

### Обработка результатов измерений

1. Провести статистическую обработку результатов.

2. По данным табл. 1 построить график зависимости  $\Omega = \Omega(l)$  при  $\omega = \text{const}$ .

3. По графику определить тангенс угла наклона

$$k_1 = \frac{\Delta\Omega}{\Delta l}.$$

4. Вычислить момент инерции  $J$  гироскопа по формуле

$$J = \frac{mg}{\omega \cdot k_1}$$

где  $\omega = 2\pi n$  – угловая скорость вращения диска.

5. Рассчитать погрешности.

6. Проверить соотношения

$$\frac{l_1}{\Omega_1} = \frac{l_2}{\Omega_2} = \frac{l_3}{\Omega_3} = \dots$$

*Примечание.* При устойчивой работе электрического мотора ( $\omega = \text{const}$ ) в пределах ошибок измерений должны соблюдаться данные соотношения.

7. Сделать выводы.

## Упражнение 2

### Исследование зависимости угловой скорости прецессии от угловой скорости вращения диска

#### Порядок выполнения работы

1. Установить гироскоп в горизонтальной плоскости пользуясь регулировочными винтами.

2. Установить ручку «РЕГУЛЯТОР СКОРОСТИ» в крайнее левое положение.

3. Включить установку нажатием клавиши «СЕТЬ». При этом загораются световые индикаторы.

4. Придерживая рукой рычаг, освободить винт крепления противовеса, сдвинуть противовес влево на расстояние 4 см от равновесного положения и закрепить (рекомендуется преподавателем).

5. Медленно вращая ручку «РЕГУЛЯТОР СКОРОСТИ», установить по шкале прибора 5 число оборотов диска около 2000 об./мин. Дождаться установления стабильного показания прибора ( $\sim 2$  мин).

6. Продолжая придерживать рычаг рукой в горизонтальном положении, поворачивая гироскоп относительно вертикальной оси,

привести указатель поворота 10 в нулевое положение по шкале 9. Нажать кнопку «СБРОС». Осторожно без рывков отпустить рычаг, в результате чего ось гироскопа начнет медленно вращаться в горизонтальной плоскости. В тот момент, когда на индикаторе 7 высветится цифра 5 (рекомендуется преподавателем), нажать кнопку «СТОП». При этом остановка времени произойдет при угле поворота  $\varphi=60^\circ$ .

7. Значения времени и угла поворота записать в табл. 2.

8. Повторить п. 6 и 7 еще два раза.

9. Руководствуясь п. 5–8 производят измерения для четырех других (3000, 4000, 5000, 6000 об./мин) частот вращения диска (рекомендуется преподавателем).

Таблица 2

№	$n, \text{с}^{-1}$	$\varphi, ^\circ$	$t, \text{с}$			$t_{\text{ср}}, \text{с}$	$l, \text{см}$	$m, \text{г}$
			$t_1$	$t_2$	$t_3$			

### Обработка результатов измерений

1. Провести статистическую обработку результатов.

2. По данным табл. 2 построить график зависимости  $\Omega = \Omega(1/\omega)$  при  $l = \text{const}$ .

3. По графику определить тангенс угла наклона

$$k_2 = \frac{\Delta\Omega}{\Delta\left(\frac{1}{\omega}\right)}.$$

4. Вычислить момент инерции гироскопа по формуле

$$J = \frac{mgl}{k_2}.$$

5. Вычислить погрешности.

6. Сделать выводы.

## Контрольные вопросы

1. Что называется моментом силы, моментом импульса относительно точки и относительно оси?
2. Как записывается основное уравнение динамики вращательного движения?
3. Сформулируйте закон сохранения момента импульса.
4. Что называется гироскопом?
5. Что такое прецессия?
6. От чего зависит угловая скорость прецессии гироскопа?
7. Объясните сущность гироскопического эффекта.

**Литература:** 1. Гл. 4; 2. Гл. 5; 3. Гл. 5; 7. С. 139; 10. С. 88.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 9

### ИЗУЧЕНИЕ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С ПОМОЩЬЮ МАЯТНИКА МАКСВЕЛЛА

*Приборы и принадлежност:* маятник Максвелла FPM-03, миллисекундомер FPM-15, набор сменных колец.

*Цель работы* – ознакомление со сложным движением твердого тела на примере маятника Максвелла, определение моментов инерции тел, а также проверка закона сохранения энергии.

*Краткая теория.* Маятник Максвелла представляет собой однородный диск, насаженный на цилиндрический вал радиуса  $r$  (рис. 1). На вал виток к витку наматываются две нити, концы которых прикреплены на кронштейне. Поскольку радиус вала  $r$  пренебрежимо мал по сравнению с длиной нити, моментом силы тяжести относительно точки  $A$  можно пренебречь. Следовательно, можно считать, что центр масс системы движется строго. Движение диска происходит под действием трех сил: силы тяжести  $mg$  и двух сил натяжения нитей  $T$ . Тогда уравнение движения диска без учета сил трения будет иметь вид

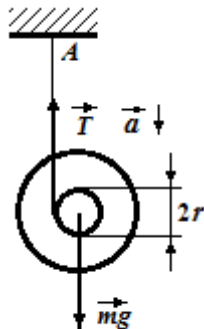


Рис. 1

$$Ma = mg - 2T. \quad (1)$$

Поскольку линия действия сил натяжения нитей не проходит через центр масс, то силы натяжения создают вращающий момент

$$M = 2T \cdot r. \quad (2)$$

Под действием моментов сил натяжения нитей диск, помимо поступательного движения, будет совершать вращательное движение вокруг оси, проходящей через центр масс.

Применяя к маятнику основное уравнение динамики вращательного движения, получим

$$J \cdot \varepsilon = 2T \cdot r, \quad (3)$$

где  $J$  – момент инерции системы.

Таким образом, диск будет совершать сложное движение, складывающееся из поступательного движения центра масс с ускорением  $a$  и вращательного движения с угловым ускорением  $\varepsilon$ . При этом угловое  $\varepsilon$  и линейное  $a$  ускорения связаны соотношением

$$a = \varepsilon \cdot r. \quad (4)$$

Решая систему уравнений (1), (3) и (4), получим

$$a = \frac{g}{\frac{J}{mr^2} + 1}. \quad (5)$$

### Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка, представленная на рис. 2 состоит из вертикальной стойки 1, на которой закреплены два кронштейна – верхний 2 и нижний 3. На верхнем кронштейне смонтированы: электромагнит 4, устройство для крепления и регулировки длины нитей подвеса, а также фотоэлектрический датчик, подающий сигнал начала отсчета времени. Нижний кронштейн может перемещаться вдоль вертикальной стойки и закрепляться в любом положении. На кронштейне 3 закреплен фотоэлектрический датчик 5, подающий сигнал окончания отсчета времени на миллисекундомер 9.

Маятник Максвелла представляет собой однородный диск 8, насаженный на цилиндрический вал 6. На диск насаживается

съемное кольцо 7. К концам вала прикреплены две прочные нити, концы которых закреплены к верхнему кронштейну.

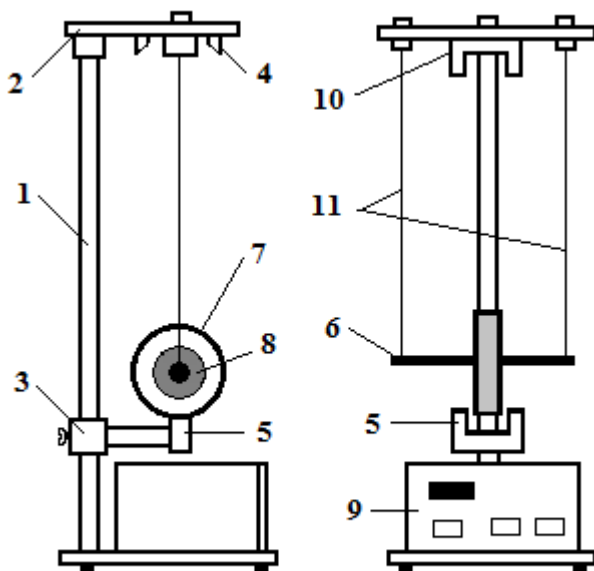


Рис. 2

1. Точность измерения времени не более  $\pm 0,02\%$ .
2. Точность измерения высоты падения не менее 2 мм.
3. Точность измерения высоты подъема не менее 5 мм.

### Порядок выполнения работы

1. Насадить на диск съемное кольцо.
2. Установить нижний кронштейн так, чтобы кольцо не задевало корпуса, но пересекало световой луч фотодатчика.
3. Нажать клавишу СЕТЬ. При этом загораются лампочки фотозлектрических датчиков, цифровые индикаторы, а также включается электромагнит.
4. Вращая маятник и следя за тем, чтобы нити наматывались на вал виток к витку, зафиксировать его в верхнем положении при помощи электромагнита.

5. Нажать кнопку СБРОС. При этом цифровые индикаторы должны показывать нули.

6. Нажать клавишу ПУСК. При этом цепь электромагнита размыкается, и маятник придет в движение.

7. Остановить маятник и записать время падения в таблицу.

8. Отжать клавишу ПУСК и проделать пункты 4–7 не менее пяти раз.

9. Измерить с помощью штангенциркуля внешние диаметры вала, диска и кольца. Результаты записать в таблицу.

10. Измерить при помощи шкалы, нанесенной на вертикальной стойке, высоту падения  $h$ .

11. Результаты измерений записать в таблицу.

### Упражнение 1

#### Изучение плоского движения маятника Максвелла

Маятник Максвелла, применяемый в данной работе, состоит из составных элементов правильной геометрической формы – вала, диска и съемного кольца, сделанных из однородного материала (см. табл. 12 прил.).

Момент инерции однородного вала

$$J_{\text{В}} = \frac{1}{8} m_{\text{В}} d_{\text{В}}^2. \quad (6)$$

Момент инерции диска

$$J_{\text{Д}} = \frac{1}{8} m_{\text{Д}} (d_{\text{В}}^2 + d_{\text{Д}}^2). \quad (7)$$

Момент инерции съемного кольца

$$J_{\text{К}} = \frac{1}{8} m_{\text{К}} (d_{\text{Д}}^2 + d_{\text{К}}^2). \quad (8)$$

Следовательно, в силу аддитивности момент инерции системы равен

$$J = \frac{1}{8} [m_{\text{В}} d_{\text{В}}^2 + m_{\text{Д}} (d_{\text{В}}^2 + d_{\text{Д}}^2) + m_{\text{К}} (d_{\text{Д}}^2 + d_{\text{К}}^2)], \quad (9)$$

где  $d_{\text{В}}$ ,  $d_{\text{Д}}$  и  $d_{\text{К}}$  – внешние диаметры вала, диска и съемного кольца.



Таким образом, согласно уравнению (5) ускорение при плоском движении

$$a_T = \frac{8mgr^2}{m_B d_B^2 + m_D (d_B^2 + d_D^2) + m_K (d_D^2 + d_K^2) + 2md_B^2}, \quad (10)$$

где  $m = m_B + m_D + m_K$  – масса маятника Максвелла.

Если маятник проходит расстояние  $h$  за время  $t$ , то ускорение системы

$$a = \frac{2h}{t^2}. \quad (11)$$

Именно с помощью этой формулы экспериментально проверяется соотношение (10).

### Обработка результатов измерений

1. Провести статистическую обработку результатов измерений.
2. Вычислить по формуле (10) теоретическое значение ускорения системы при плоском движении.
3. Вычислить по формуле (11) экспериментальное значение ускорения системы.
4. Вычислить погрешности измерений.
5. Сравнить теоретическое и экспериментальное значения ускорений.
6. Сделать выводы.

### Упражнение 2

#### Проверка закона сохранения механической энергии с помощью маятника Максвелла

Если принять потенциальную энергию маятника в нижнем его положении за нулевую конфигурацию ( $W_n = 0$ ), то в верхнем положении маятник будет обладать энергией

$$W_{n1} = mgh. \quad (12)$$

Кинетическая энергия маятника Максвелла, совершающего плоское движение в нижнем положении:

$$W_{\kappa 2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}. \quad (13)$$

Если пренебречь силами трения, то закон сохранения механической энергии для консервативной системы запишется в виде

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}. \quad (14)$$

Поскольку маятник движется постоянным ускорением, то его конечную скорость можно определить по формуле

$$v = \frac{2h}{t}. \quad (15)$$

Из уравнений (12) – (15) для момента инерции системы получим следующее выражение:

$$J_{\text{эксп}} = mr^2 \left( \frac{gt^2}{2h} - 1 \right). \quad (16)$$

Момент инерции составного маятника (см. упр. 1) равен

$$J_{\text{теор}} = \frac{1}{8} [m_B d_B^2 + m_D (d_B^2 + d_D^2) + m_K (d_D^2 + d_K^2)]. \quad (17)$$

Экспериментальная проверка закона сохранения механической энергии сводится к эквивалентности результатов, полученных с помощью формул (16) и (17).

### **Обработка результатов измерений**

1. Провести статистическую обработку результатов измерений.
2. Вычислить по формуле (16) экспериментальное значение момента инерции системы.
3. Рассчитать по формуле (17) теоретическое значение момента инерции системы.
4. Вычислить погрешности измерений.
5. Сравнить теоретическое и экспериментальное значения моментов инерции.
6. Сделать выводы.

### **Контрольные вопросы и задания**

1. Какое движение называется плоским?

2. Как влияет масса съемного кольца на характер движения маятника Максвелла?
3. Напишите основное уравнение динамики вращательного движения. Что такое момент силы, момент инерции?
4. Чему равна кинетическая энергия тела при плоском движении?
5. Сформулируйте закон сохранения механической энергии. Когда он выполняется?
6. Почему маятник Максвелла не поднимается на первоначальную высоту?

**Литература:** 1. Гл. 3, 4; 2. Гл. 3, 4; 3. Гл. 3, 5; 6. С. 34; 7. С. 137.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 10

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ПУЛИ С ПОМОЩЬЮ КРУТИЛЬНОГО БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

*Приборы и принадлежности:* крутильный баллистический маятник FPM-09, миллисекундомер FPM-14, стреляющее устройство, наборы пуль.

*Цель работы* – изучение законов сохранения момента импульса и механической энергии, измерение модуля кручения и скорости пули.

*Краткая теория.* Для измерения скорости пули в лабораторных условиях применяют прямые и косвенные методы. Прямой метод, основанный на измерении времени прохождения пуль определенного расстояния, является нелегкой задачей из-за большой скорости пули. В связи с этим широкое распространение получили различные косвенные методы, к числу которых относится применяемый в настоящей работе метод крутильного баллистического маятника.

Крутильный баллистический маятник представляет собой тело со значительным моментом инерции, подвешенное на упругом подвесе (рис. 1). Пусть летящая со скоростью  $v$  пуля массой  $m$  испытывает абсолютно неупругий удар с мишенью крутильного баллистического маятника. В результате удара пуля маятник отклоняется от положения равновесия. При этом кинетическая энергия ма-

маятника, полученная при ударе пули, постепенно переходит в потенциальную энергию упругой деформации подвеса. Когда потенциальная энергия достигнет максимальной величины, начинается обратный процесс перехода потенциальной энергии в кинетическую и т.д. Таким образом, маятник будет совершать колебания, период которых значительно больше времени соударения  $\tau \ll T$  (баллистический маятник). Следовательно, за время удара маятник не успевает заметно отклониться от положения равновесия. Это значит, что во время удара не возникают силы, стремящиеся вернуть маятник в исходное состояние. Поэтому систему можно рассматривать как замкнутую и применить закон сохранения момента импульса

$$mvl = (J + ml^2) \cdot \omega, \quad (1)$$

где  $m$  – масса пули,  $v$  – скорость пули,  $l$  – расстояние от оси вращения маятника до точки удара пули,  $\omega$  – угловая скорость маятника,  $J$  – момент инерции маятника.

На основании закона сохранения энергии имеем

$$\frac{1}{2} (J + ml^2) \cdot \omega^2 = \frac{1}{2} k\varphi^2, \quad (2)$$

где  $\varphi$  – наибольший угол поворота маятника,  $k$  – модуль кручения подвеса.

Из уравнений (1) и (2), учитывая, что момент инерции пули  $ml^2$  во много раз меньше момента инерции маятника  $J$ , получим

$$v^2 = \frac{k\varphi^2 J}{m^2 l^2}. \quad (3)$$

При малых углах отклонения маятник совершает гармонические колебания, период которых

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{k}}. \quad (4)$$

Следовательно, из формулы (3) с учетом (4) получим окончательное выражение для вычисления скорости пули с помощью крутильного баллистического маятника:

$$v = \frac{k \cdot \varphi \cdot T}{2\pi \cdot m \cdot l}. \quad (5)$$

С помощью формулы (5) по известному значению модуля кручения и измеренным экспериментальным значениям  $m$ ,  $l$ ,  $\varphi$  и  $T$  можно вычислить скорость пули. Однако часто бывает неизвестно значение модуля кручения подвеса.

### Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка, представленная на рис. 1, состоит из крутильного баллистического маятника и стреляющего устройства 9 (пружинный пистолет). Крутильный баллистический

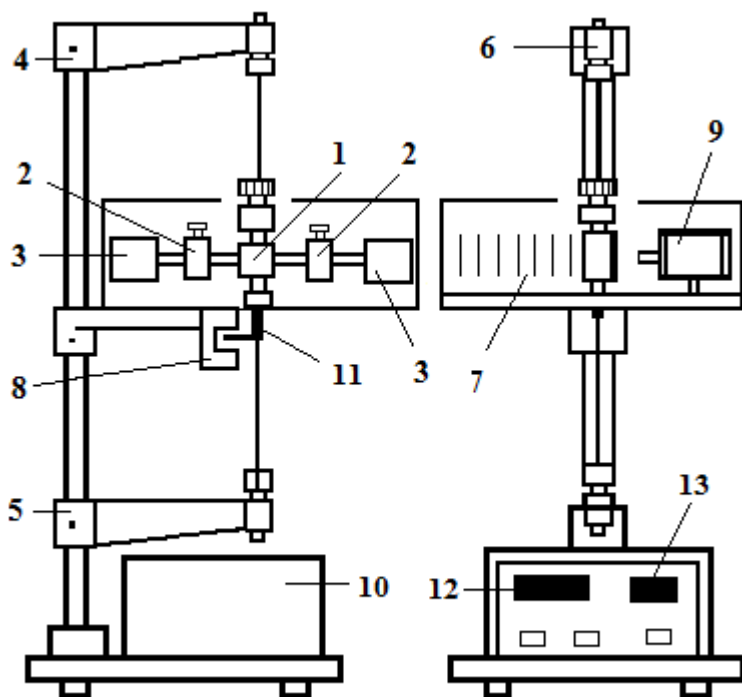


Рис. 1

маятник представляет собой крестовину 1 с двумя горизонтальными стержнями со значительным моментом инерции. По горизонтальным стержням крестовины могут перемещаться два груза 2, позволяющие изменить момент инерции маятника. Крестовина подвешена с помощью упругого подвеса (стальных проволок) к

кронштейнам 4 и 5. К концам горизонтальных стержней крестовины закреплены две мишени 3, заполненные пластилином (в котором задерживается пуля). Вращением головки 6 маятник может быть установлен в исходном положении (нулевая отметка шкалы совпадает с вертикальной чертой на мишени). На среднем кронштейне смонтирован фотоэлектрический датчик 8, подающий сигнал начала и окончания счета времени и числа колебаний на миллисекундомер 10. Отсчет времени и числа колебаний производится с помощью цифровых индикаторов 12 и 13, находящихся на лицевой панели миллисекундомера FPM-14. Для измерения угла поворота маятника на кожухе нанесена шкала 7.

Погрешность измерения времени не более  $\pm 0,02\%$ .

Погрешность измерения угла не менее  $1^\circ$ .

### Упражнение 1

#### **Измерение модуля кручения подвеса**

(выполняется по усмотрению преподавателя)

Когда цилиндрические грузы находятся на расстоянии  $R_1$  от оси вращения, маятник, имеющий момент инерции  $J_1$ , будет совершать колебания с периодом

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{J_1}{k}}. \quad (6)$$

При изменении расстояния до  $R_2$  маятник будет совершать колебания с периодом

$$T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{J_2}{k}}. \quad (7)$$

Из формул (6) и (7), для разности моментов инерции маятника при различных положениях грузов массой  $M$  получим выражение

$$J_1 - J_2 = k \frac{T_1^2 - T_2^2}{4\pi^2}. \quad (8)$$

С другой стороны согласно теореме Штейнера

$$J_1 - J_2 = 2M(R_1^2 - R_2^2). \quad (9)$$

Тогда для модуля кручения подвеса получим следующее выражение:

$$k = \frac{8\pi^2 \cdot M \cdot (R_1^2 - R_2^2)}{T_1^2 - T_2^2}. \quad (10)$$

## Упражнение 2

### Измерение скорости пули методом крутильного баллистического маятника

Экспериментальная формула (5) для измерения скорости пули методом крутильного баллистического маятника с учетом формулы (10) будет иметь вид

$$v = \frac{4\pi \cdot \varphi \cdot M \cdot T_1 \cdot (R_1^2 - R_2^2)}{m \cdot l \cdot (T_1^2 - T_2^2)}, \quad (11)$$

где  $\varphi$  выражается в радианах.

### Порядок выполнения работы

1. Нажать клавишу СЕТЬ, расположенную на лицевой панели миллисекундомера. При этом загораются цифровые индикаторы и лампочка фотоэлектрического датчика.

2. Раздвинуть цилиндрические грузы на стержне маятника так, чтобы расстояние от оси вращения маятника до центра масс каждого груза было  $R_1 = 9$  см.

3. Вращением головки установить маятник так, чтобы нулевая отметка шкалы совпадала с вертикальной чертой мишени. Нажать кнопку СБРОС.

4. Зарядить пружинный пистолет и выстрелить. Измерить по шкале максимальный угол отклонения маятника  $\varphi_1$ .

5. Измерить время десяти полных колебаний  $t_1$  маятника с моментом инерции  $J_1$ .

*Примечание.* Остановка счета времени производится нажатием кнопки СТОП в тот момент, когда на табло ПЕРИОДЫ высвечивается цифра 9.

6. Измерить расстояние  $l$  от оси вращения маятника до места удара пули.

7. Сдвинуть грузы на минимальное расстояние  $R_2 = 2$  см. Нажать кнопку СБРОС.

8. Отклонить маятник рукой на угол  $\varphi \approx 30^\circ$  и отпустить. Измерить время десяти полных колебаний  $t_2$  маятника с моментом инерции  $J_2$ .

9. П. 4–8 проделать не менее пяти раз. Результаты измерений занести в табл. 1.

### Обработка результатов измерений

#### Упражнение 1

1. Провести статистическую обработку результатов измерений.
2. По формуле (10) вычислить среднее значение модуля кручения  $k$  подвеса.
3. Вычислить погрешности измерений.
4. Записать ответ.

Таблица 1

№	$m$ , г	$M$ , г	$R_1$ , м	$R_2$ , м	$t_1$ , с	$t_2$ , с	$\varphi_1$ , °	$l$ , м
1								
2								
3								
4								
5								
Ср.								

#### Упражнение 2

1. По формуле (11) вычислить среднее значение скорости пули.
2. Рассчитать погрешности измерений.
3. Записать ответ в виде доверительного интервала.
4. Сделать выводы.

### Контрольные вопросы и задания

1. Как устроен крутильный баллистический маятник? Какой маятник называется баллистическим?



2. От чего зависит период колебаний крутильного баллистического маятника?

3. Сформулируйте закон сохранения момента импульса и механической энергии.

4. Выведите формулу для определения скорости пули, пользуясь законом сохранения момента импульса и механической энергии.

5. Почему в работе меняют положение цилиндрических грузов?

**Литература:** 1. Гл. 4, 18; 2. Гл. 5, 27; 3. Гл. 3; 6. С. 66; 7. С. 132; 10. С. 102.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 11

### ИЗУЧЕНИЕ ЗАКОНОВ КОЛЕБАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

*Приборы и принадлежности:* оборотный физический маятник FPM-04, миллисекундомер FPM-14, математический маятник.

*Цель работы* – изучение законов колебательного движения, измерение ускорения свободного падения.

*Краткая теория.* **Физическим маятником** называется твердое тело, совершающее колебания относительно неподвижной горизонтальной оси, не проходящей через центр масс под действием силы тяжести (рис. 1).

При отклонении маятника от положения равновесия на угол  $\varphi$  сила тяжести создает момент

$$M = -mgL \sin \varphi, \quad (1)$$

где  $m$  – масса маятника,  $L$  – расстояние от оси вращения до

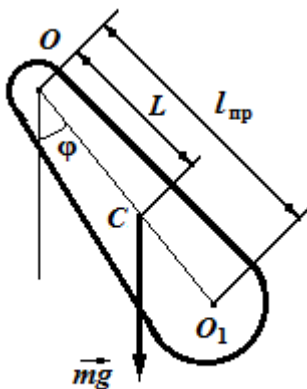


Рис. 1

центра масс системы. Знак «минус» показывает, что момент силы тяжести стремится вернуть маятник в положение равновесия, т.е. уменьшить угол  $\varphi$ . Если обозначить момент инерции маятника относительно оси  $O$  через  $J$ , то уравнение движения маятника в отсутствие трения запишется в виде

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mgL \sin \varphi, \quad (2)$$

где  $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$  – угловое ускорение. При малых углах отклонения  $\sin \varphi \approx \varphi$ , тогда уравнение (2) примет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgL}{J} \varphi = 0. \quad (3)$$

Непосредственной подстановкой можно убедиться, что частным решением дифференциального уравнения (3) является функция

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega t. \quad (4)$$

Из выражения (4) следует, что при малых колебаниях в отсутствие трения физический маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{J}}. \quad (5)$$

Следовательно, период колебания физического маятника

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgL}}. \quad (6)$$

Как видно из формул (5) и (6), частота  $\omega$  и период  $T$  определяются параметрами физического маятника.

**Математическим маятником** называется материальная точка, подвешенная к неподвижной опоре с помощью нерастяжимой и невесомой нити. Близким к математическому маятнику является тяжелый шарик, подвешенный на длинной тонкой нити. Момент инерции математического маятника относительно оси вращения, проходящей через точку подвеса:

$$J = m \cdot l^2. \quad (7)$$

Следовательно, период колебания математического маятника с учетом (6) и (7)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (8)$$

Из формулы (8) видно, что период колебания математического маятника не зависит от массы и амплитуды. Формула (8) справедлива лишь для малых углов отклонения от положения равновесия, т.е. при малых амплитудах. Если угол отклонения  $\varphi > 4^\circ$ , то более точное выражение для периода имеет вид

$$T = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right). \quad (9)$$

Экспериментально определив длину и период колебаний математического маятника, можно найти ускорение свободного падения (упр. 1).

Из сопоставления формул (6) и (8) следует, что математический маятник с длиной

$$l_{np} = \frac{J}{mL} \quad (10)$$

будет иметь такой же период, что и физический маятник. Величина  $l_{np}$  называется приведенной длиной физического маятника. Таким образом, **приведенная длина** физического маятника – это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.

Точка  $O_1$  (см. рис. 1), лежащая на прямой, соединяющей точку подвеса  $O$  с центром масс  $C$ , и отстоящая от точки подвеса на расстоянии  $l_{np}$ , называется *центром качания* физического маятника. Точка подвеса и центр качания взаимнообратимы. Если точку подвеса перенести в центр качания, то новый центр качания совпадет с положением прежней точки подвеса, т.е. приведенная длина и период колебаний маятника останутся прежними.

Таким образом, если у физического маятника найдены две точки подвеса, лежащие по разные стороны от центра масс, и периоды колебаний при этом совпадают, то расстояние между ними равно приведенной длине физического маятника. На этом свойстве основан метод определения ускорения свободного падения с помощью обратного маятника (упр. 2).

## Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка представлена на рис. 2. На вертикальной стойке 1 установки размещены два кронштейна: верхний и нижний с фотоэлектрическим датчиком. Верхний кронштейн 2 может поворачиваться вокруг вертикальной оси и фиксироваться в любом выбранном положении. С одной стороны кронштейна подвешен математический маятник, с другой – физический (оборотный) маятник. Математический маятник пред-

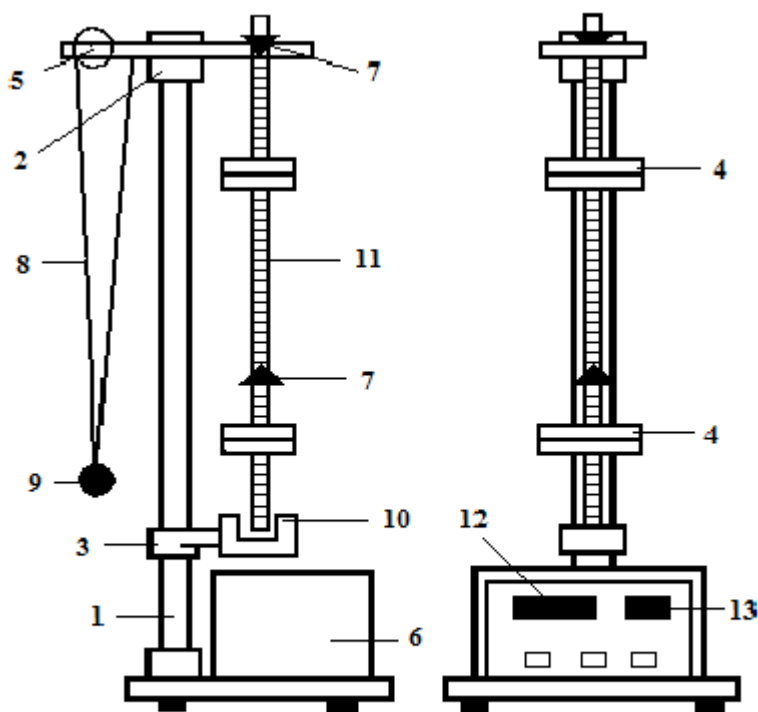


Рис. 2

ставляет собой стальной шарик 9, подвешенный на бифилярном подвесе 8. Длину математического маятника можно регулировать при помощи воротка 5, а ее величину можно измерить по милли-

метровой шкале, нанесенной на вертикальной стойке установки. Физический (оборотный) маятник представляет собой стальной стержень 11 с двумя грузами 4. Маятник может подвешиваться к верхнему кронштейну с помощью двух опорных призм 7. Грузы и опорные призмы могут перемещаться вдоль стержня и фиксироваться в определенных положениях. Для этого на стержне сделаны кольцевые выточки, нанесенные через 10 мм, позволяющие надежно фиксировать грузы и опорные призмы с точностью  $\pm 0,5$  мм. На нижнем кронштейне 3 смонтирован фотоэлектрический датчик, подающий сигнал окончания времени счета и числа колебаний на цифровой миллисекундомер 6. Кронштейн с фотоэлектрическим датчиком может перемещаться по вертикальной стойке и фиксироваться в любом положении. Измерение времени и числа колебаний производится с помощью цифровых индикаторов 12 и 13.

1. Точность определения длины математического маятника по шкале прибора не менее 2 мм.
2. Погрешность измерения времени не более  $\pm 0,02\%$ .
3. Точность определения расстояния между призмами не меньше 0,5 мм.

### Упражнение 1

#### **Определение ускорения свободного падения с помощью математического маятника.**

Если известны периоды колебаний двух математических маятников с различными длинами

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} \quad \text{и} \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}}, \quad (11)$$

то ускорение свободного падения можно вычислить по формуле

$$g = \frac{4\pi^2(l_1 - l_2)}{T_1^2 - T_2^2}. \quad (12)$$

Таким образом, для определения ускорения свободного падения необходимо измерить периоды колебаний и разность длин двух математических маятников.

## Порядок выполнения работы

1. Нижний кронштейн с фотоэлектрическим датчиком установить в нижней части стойки вблизи отметки 50 см и закрепить винтом.

2. Поворачивая верхний кронштейн, поместить над датчиком математический маятник.

3. Вращая вороток на верхнем кронштейне, установить длину маятника так, чтобы черта на шарике была на уровне черты датчика. По шкале измерить длину нити  $l_1$ .

4. Включить установку, нажав кнопку СЕТЬ на лицевой панели миллисекундомера.

5. Нажать клавишу СБРОС. При этом цифровые индикаторы должны показывать нули.

6. Отклонить маятник от положения равновесия на небольшой ( $5-10^\circ$ ) угол и отпустить. В тот момент, когда на табло ПЕРИОДЫ высвечивается цифра 9, произвести остановку счета нажатием кнопки СТОП. Записать время десяти полных колебаний в табл. 1.

7. П. 5 и 6 проделать не менее трех раз.

8. Поднять шарик на 10–20 см, наматывая нить на вороток, и закрепить его стопорным винтом. По шкале измерить длину  $l_2$

9. П. 5–7 аналогично проделать для другого маятника. Результаты измерений записать в табл. 1.

Таблица 1

№	$t_1, \text{с}$	$l_1, \text{м}$	$t_2, \text{с}$	$l_2, \text{м}$	$T_1, \text{с}$	$T_2, \text{с}$
1						
2						
3						
...						
Ср.						

## Обработка результатов измерений

1. Вычислить периоды колебаний  $T_1$  и  $T_2$  математических маятников по формуле

$$T = \frac{t}{N}, \quad (13)$$

где  $N = 10$  (число колебаний).

2. По формуле (12) вычислить среднее значение ускорения свободного падения  $g_{\text{ср}}$ .

3. Вычислить погрешности измерений по формуле

$$\frac{\Delta g}{g} = \frac{2\Delta\pi}{\pi} + \frac{\Delta l_1 + \Delta l_2}{l_1 + l_2} + \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{T_1 + T_2} + \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{T_1 - T_2}. \quad (14)$$

4. Записать ответ в виде

$$g = g_{\text{ср}} \pm \Delta g. \quad P = 0,95.$$

5. Сделать выводы.

### Упражнение 2

#### Измерение ускорения свободного падения с помощью оборотного маятника

*Оборотным* (рис. 3) называется такой маятник, у которого имеются две расположенные вблизи его концов опорные призмы, за которые он поочередно может подвешиваться. Вдоль маятника могут перемещаться и закрепляться на нем тяжелые грузы. Перемещением грузов добиваются того, чтобы при подвешивании маятника за любую из призм период колебаний был одинаков. Тогда расстояние между опорными призмами будет равно  $l_{\text{пр}}$ . Определив экспериментально период колебаний физического маятника, и зная его приведенную длину, можно найти ускорение свободного падения по формуле

$$g = 4\pi^2 \frac{l_{\text{пр}}}{T^2}. \quad (15)$$

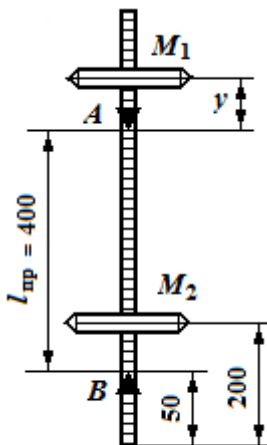


Рис. 3

Преимущество оборотного маятника состоит в том, что его приведенную длину можно установить, не зная его массы и момента инерции.

## Порядок выполнения работы

1. Повернуть верхний кронштейн вокруг стойки на  $180^\circ$ .

2. Снять оборотный маятник и закрепить опорную призму  $B$  на расстоянии 5 см от конца стержня, а груз  $M_2$  на расстоянии 20 см от того же конца (рис. 3). Опорную призму  $A$  закрепить так, чтобы расстояние между опорными призмами было равно  $l_{\text{пр}} = 40$  см (приведенная длина). Груз  $M_1$  установить на расстоянии  $y = 3$  см от опорной призмы  $A$ . Подвесить оборотный маятник на опорной призме  $A$ .

3. Нижний кронштейн с фотоэлектрическим датчиком закрепить в таком положении, чтобы нижний конец стержня пересекал световой луч фотоэлектрического датчика.

4. Нажать кнопку СБРОС. При этом цифровые индикаторы должны показывать нули.

5. Вывести маятник из положения равновесия, отклонив на угол  $5\text{--}10^\circ$  и отпустить. В тот момент, когда на табло ПЕРИОДЫ высвечивается цифра 9, произвести остановку счета нажатием кнопки СТОП. Записать время десяти полных колебаний  $t_1$  в табл. 2. П. 4 и 5 проделать не менее трех раз.

6. Перемещая груз  $M_1$  вдоль стержня каждый раз на 2 см (изменяя  $y$ ) и руководствуясь пунктами 4 и 5, измерить время десяти полных колебаний  $t_1$ . Результаты записать в табл. 2.

Таблица 2

y, см	$t_1, \text{с}$				$t_2, \text{с}$			
	1	2	3	Ср.	1	2	3	Ср.
3								
5								
7								
9								
11								

7. Снять оборотный маятник с кронштейна, перевернуть его и подвесить на другой опорной призме  $B$ . Провести п. 4–6 с перевернутым маятником и записать время десяти полных колебаний в табл. 2.



## Обработка результатов измерений

1. По данным табл. 2 в одной и той же системе координат построить графики зависимостей  $t_{1cp} = f(y)$  и  $t_{2cp} = f(y)$ .
2. По графику определить координаты точки пересечения графиков ( $t_{0cp}, y_0$ ).
3. Вычислить по формуле  $T_{0cp} = \frac{t_{0cp}}{N}$  период колебаний.
4. По формуле (15) вычислить среднее значение ускорения свободного падения  $g_{cp}$ .
5. Вычислить погрешности измерений.
6. Записать ответ в виде  $g = g_{cp} \pm \Delta g$ ,  $P = 0,95$ .
7. Сделать выводы.

### Упражнение 3

#### Изучение зависимости периода колебаний математического маятника от его длины

1. Нижний кронштейн с фотоэлектрическим датчиком установить в нижней части стойки вблизи отметки 50 см и закрепить винтом.
2. Поворачивая верхний кронштейн, поместить над датчиком математический маятник.
3. Вращая вороток на верхнем кронштейне, установить длину маятника так, чтобы черта на шарике была на уровне черты датчика. По шкале измерить длину нити  $l$ .
4. Включить установку, нажав кнопку СЕТЬ на лицевой панели миллисекундомера.
5. Нажать клавишу СБРОС. При этом цифровые индикаторы должны показывать нули.
6. Отклонить маятник от положения равновесия на небольшой ( $5-10^\circ$ ) угол и отпустить. В тот момент, когда на табло ПЕРИОДЫ высвечивается цифра 9, произвести остановку счета нажатием кнопки СТОП. Записать время десяти полных колебаний в табл. 3.
7. П. 5 и 6 проделать не менее трех раз.
8. Поднять нижний кронштейн на 5 см. Наматывая нить на вороток поднять шарик до совпадения черты шарика с чертой дат-

чика и закрепить его стопорным винтом. По шкале измерить длину нити маятника  $l$ .

9. Руководствуясь п. 5–8 проделать аналогичные измерения для других  $l$ . Результаты измерений записать в табл. 3.

Таблица 3

$l$ , см		50	45	40	35	30	25	20	15	10
$t$ , с	1									
	2									
	3									
	ср									
$T_{\text{ср}}^{\text{эксп}}$										
$T^{\text{теор}}$ , с										

### Обработка результатов измерений

1. Вычислить средние значения периодов колебаний  $T_{\text{ср}}^{\text{эксп}}$  математического маятника для заданных длин по формуле

$$T_{\text{ср}}^{\text{эксп}} = \frac{t_{\text{ср}}}{N},$$

где  $N = 10$  (число колебаний). Результаты занести в табл. 3.

По формуле (8) вычислить теоретические значения периодов колебаний ( $T^{\text{теор}}$ ) математического маятника при заданных длинах маятника. Результаты занести в табл. 3.

2. Построить на одном графике теоретическую и экспериментальную зависимости периода колебаний математического маятника от его длины.

3. Сравнить результаты и сделать выводы.

### Контрольные вопросы и задания

1. Что называется приведенной длиной физического маятника?

2. Выведите формулы для периодов физического и математического маятников.

3. Что такое центр качания физического маятника? Каким свойством он обладает?

4. Почему для определения ускорения свободного падения используются два математических маятника с разными длинами?

5. Почему амплитуда колебаний математического и физического маятников должна быть малой?

6. Как устроен оборотный маятник?

**Литература:** 1. Гл. 18; 2. Гл. 27; 3. Гл. 7; 6. С. 39; 10. С. 93; 12. С.79.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 12

### ИЗУЧЕНИЕ ЗАТУХАЮЩИХ КОЛЕБАНИЙ С ПОМОЩЬЮ КРУТИЛЬНОГО МАЯТНИКА

*Приборы и принадлежности:* крутильный маятник FPM-09, миллисекундомер FPM-14.

*Цель работы* – изучение затухающих колебаний с помощью крутильного маятника.

*Краткая теория.* **Затухающими** называются колебания, энергия которых уменьшается с течением времени. Затухание реальной колебательной системы связано с убылью механической энергии системы за счет действия сил трения и других сил сопротивления. Если убыль энергии не восполняется за счет работы внешних сил, колебания будут затухать. Закон затухания колебаний определяется свойствами колебательных систем. Линейные колебательные системы, на которые действуют силы сопротивления, пропорциональные скорости, описываются уравнением

$$\ddot{x} + 2\beta \cdot \dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (1)$$

где  $\delta = r/2m$  – **коэффициент затухания**,  $r$  – коэффициент сопротивления среды,  $\omega_0$  – циклическая частота свободных незатухающих колебаний. Уравнение (1) называется дифференциальным уравнением затухающих колебаний. Решением этого уравнения при малых затуханиях является уравнение

$$x = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi_0), \quad (2)$$

где  $A = A_0 e^{-\beta t}$  – амплитуда затухающих колебаний. График зависимости  $x = x(t)$  представлен на рис. 1.

Амплитуда затухающих колебаний уменьшается с течением времени и тем быстрее, чем больше коэффициент затухания. Промежуток времени  $\tau$ , в течение которого амплитуда затухающих колебаний уменьшится в  $e$  раз, называется **временем релаксации**. Время релаксации и коэффициент затухания связаны соотношением

$$\tau = 1/\beta. \quad (3)$$

Для количественной характеристики скорости затухания колебаний пользуются логарифмическим **декрементом затухания**:

$$\delta = \ln \frac{A(t)}{A(t+T)} = \beta T, \quad (4)$$

где  $A(t)$  и  $A(t+T)$  – амплитуды двух последовательных колеба-

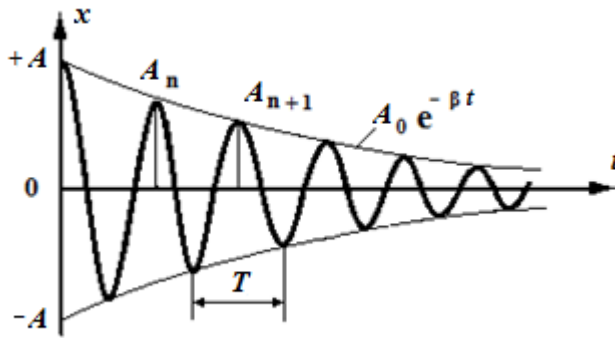


Рис. 1

ний, соответствующих моментам времени, отличающимся на период  $T$ . Обратная величина логарифмического декремента равна числу колебаний  $N_e$ , при совершении которых амплитуда колебаний уменьшится в  $e$  раз.

$$N_e = 1/\delta. \quad (5)$$

Затухающие колебания не являются периодическими. Однако если затухание мало, то величина  $x$  достигает максимальных значений через равные промежутки времени:

$$T = 2\pi / \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}. \quad (6)$$

Величина  $T$  называется **условным периодом** затухающих колебаний. Увеличение трения не только увеличивает затухание, но и

увеличивает период. При больших трениях затухающие колебания становятся аperiodическими.

Для характеристики колебательных систем часто пользуются понятием добротности. **Добротностью** называется безразмерная величина равная произведению  $2\pi$  на отношение энергии системы, в какой-либо момент времени, к убыли этой энергии за один условный период.

$$\Theta = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)}. \quad (7)$$

При малых затуханиях добротность связана с логарифмическим декрементом:

$$\Theta \approx \frac{\pi}{\delta} = \pi \cdot N_e. \quad (8)$$

Из формулы (8) видно, что добротность пропорциональна числу колебаний  $N_e$ , совершаемых системой за время релаксации.

### Описание экспериментальной установки

Экспериментальная установка, представленная на рис. 2, состоит из крутильного баллистического маятника и стреляющего устройства 9 (пружинный пистолет). Крутильный баллистический маятник FPM -09 представляет собой крестовину 1 с двумя горизонтальными стержнями со значительным моментом инерции. По горизонтальным стержням крестовины могут перемещаться два груза 2, позволяющие изменить момент инерции маятника. Крестовина подвешена с помощью упругого подвеса (стальных проволок) к кронштейнам 4 и 5. К концам горизонтальных стержней крестовины закреплены две мишени 3, заполненные пластилином (в котором задерживается пуля). Вращением головки 6 маятник может быть установлен в исходном положении (нулевая отметка шкалы совпадает с вертикальной чертой на мишени). На среднем кронштейне смонтирован фотоэлектрический датчик 8, подающий сигнал начала и окончания счета времени и числа колебаний на миллисекундомер 10. Отсчет времени и числа колебаний производится с помощью цифровых индикаторов 12 и 13, находящихся на

лицевой панели миллисекудомера FPM-14. Для измерения угла поворота маятника на кожухе нанесена шкала 7.

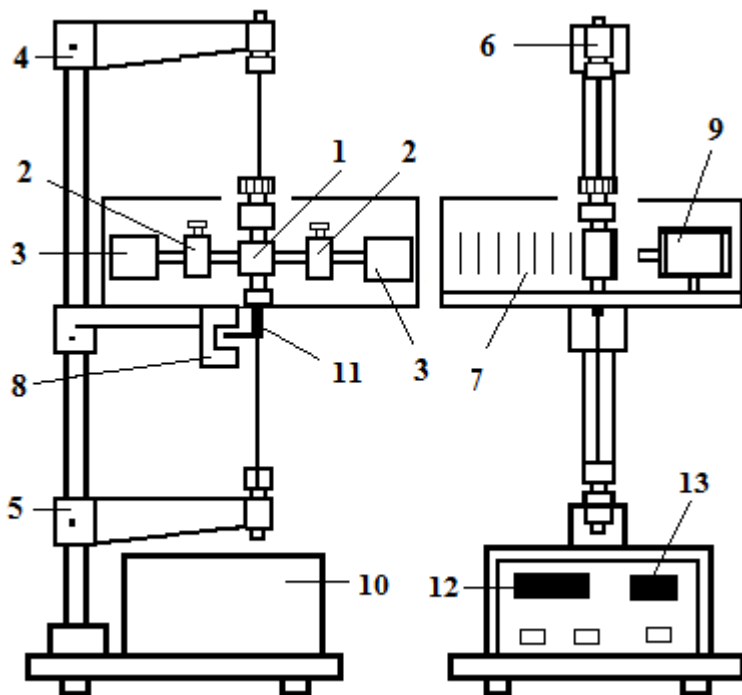


Рис. 2

*Примечание.* В данной работе стреляющее устройство и мишени не используются.

Погрешность измерения времени не более  $\pm 0,02\%$ .

Погрешность измерения угла не менее  $-1^{\circ}$ .

## Порядок выполнения работы

1. Нажать клавишу СЕТЬ, расположенную на лицевой панели миллисекундомера. При этом загораются цифровые индикаторы и лампочка фотоэлектрического датчика.

2. Закрепить цилиндрические грузы на стержне маятника так, чтобы расстояние от оси вращения маятника до центра масс каждого груза было одинаково ( $4 \div 9$  см).

3. Вращением головки установить маятник так, чтобы нулевая отметка шкалы совпадала с вертикальной чертой мишени. Нажать кнопку СБРОС.

4. Отклонить маятник рукой на угол  $\alpha_0 = 10^\circ \div 20^\circ$  и отпустить.

5. Измерить время  $n$  ( $20 - 30$ ) полных колебаний маятника. Одновременно измерить амплитудное значение угла отклонения  $\alpha_n$  маятника. Результаты измерений записать в табл. 1.

Таблица 1

№	$n$	$\alpha_0$	$\alpha_n$	$t$ , с
1				
2				
3				
4				
5				
ср				

*Примечание.* Измерение амплитуды  $n$ -го колебания и остановки счета времени производится нажатием кнопки СТОП в тот момент, когда на табло ПЕРИОДЫ высвечивается цифра  $n-1$ .

6. П. 4 и 5 проделать не менее трех раз.

### Обработка результатов измерений

1. Провести статистическую обработку результатов измерений.

2. Вычислить логарифмический декремент затухания по формуле  $\delta = \frac{1}{n} \cdot \ln \frac{\alpha_0}{\alpha_n}$ .

3. Вычислить коэффициент затухания  $\beta = \frac{1}{t} \cdot \ln \frac{\alpha_0}{\alpha_n}$ .

4. Рассчитать по формуле (8) добротность системы.

5. Вычислить погрешности измерений.

6. Записать ответы.

7. Сделать выводы.

## Контрольные вопросы и задания

1. Какими физическими величинами характеризуются затухающие колебания? Какова связь между ними?
2. Запишите дифференциальное уравнение затухающих колебаний и его решение.
3. Что называется добротностью колебательной системы? Что она характеризует?
4. Каков закон изменения амплитуды затухающих колебаний от времени?
5. Какое движение называется аperiодическим и где оно используется?

**Литература:** 1. Гл. 18; 2. Гл. 28; 3. Гл. 7; 7. С. 156; 10. С. 110.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 13

### ИЗУЧЕНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

*Приборы и принадлежности:* установка FPM-13.

*Цель работы* – изучение вынужденных колебаний несвязанных и слабосвязанных систем, изучение резонанса.

*Краткая теория.* **Вынужденными колебаниями** называются колебания, происходящие в какой-либо системе под действием переменного внешнего воздействия. Пусть на систему действует переменная сила, изменяющаяся по гармоническому закону:

$$F = F_0 \cos \omega t, \quad (1)$$

где  $F_0$  – амплитуда вынуждающей силы,  $\omega$  – циклическая частота вынуждающей силы.

Тогда дифференциальное уравнение вынужденных колебаний будет иметь вид

$$\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = F_0 \cos \omega t. \quad (2)$$

Полное решение этого дифференциального уравнения состоит из суммы общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнений



$$x = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A \cos(\omega t + \varphi), \quad (3)$$

где  $\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$  – циклическая частота затухающих колебаний,  $\beta = r/2m$  – коэффициент затухания,  $r$  – коэффициент сопротивления среды,  $\omega_0$  – собственная циклическая частота системы (см. работу № 12).

Первое слагаемое в уравнении (3), описывающее свободные затухающие колебания, играет существенную роль только в начальной стадии процесса, при так называемом установлении колебаний (рис. 1). Через некоторое время после начала колебаний благодаря затуханию, свободные колебания маятника практически прекращаются. Маятник переходит в состояние установившихся вынужденных колебаний, совершающихся с частотой вынуждающей силы. Амплитуда вынужденных колебаний пропорциональна амплитуде вынуждающей силы:

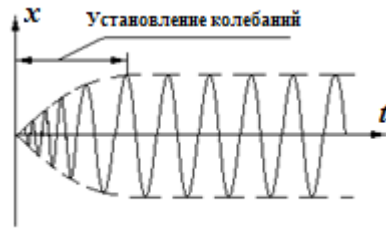


Рис. 1

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2}}. \quad (4)$$

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы приводит к тому, что при некоторой определенной для данной системы частоте амплитуда колебаний достигает максимального значения. Это явление называется **резонансом**, а соответствующая частота – **резонансной частотой**. Дифференцируя подкоренное выражение в уравнении (4) по  $\omega$  и приравняв его к нулю, получим выражение

$$-4(\omega_0^2 - \omega^2)\omega + 8\beta^2 \omega = 0. \quad (5)$$

Откуда резонансная циклическая частота

$$\omega_{\text{рез}} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\omega_1^2 - \beta^2}, \quad (6)$$

где  $\omega_1$  – циклическая частота затухающих колебаний.

Зависимость амплитуды вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы (амплитудная резонансная кривая) показана на рис. 2. Из рисунка видно, что чем меньше затухание, тем круче

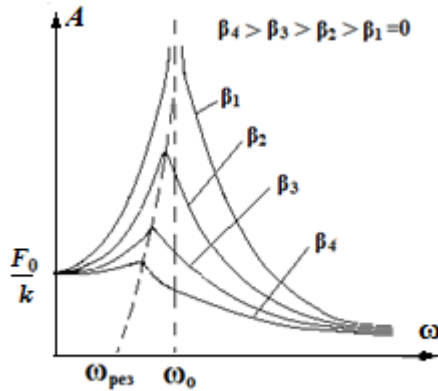


Рис. 2

зависимость амплитуды от частоты. При больших затуханиях резонанс выражен слабо. Амплитуда достигает небольших величин,

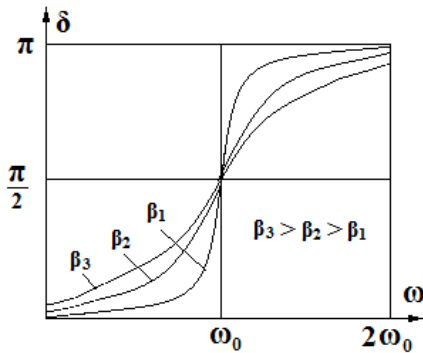


Рис. 3

и резонанс наступает при частоте, меньшей  $\omega_0$ .

Из уравнений (4) и (5) следует, что амплитуда при резонансе

$$A_{\text{рез}} = \frac{F_0/m}{2\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}. \quad (7)$$

При отсутствии сопротивления среды амплитуда при резонансе обращалась бы в бесконечность.

Вынужденные колебания отстают по фазе от колебаний вынуждающей силы, причем величина отставания  $\delta$  лежит в пределах 0 до  $\pi$ .

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (8)$$

Зависимость  $\delta$  от  $\omega$  (фазовая резонансная кривая) при различных значениях коэффициента затухания  $\beta$  показана на рис. 3.

Из формулы (5) видно, что резонансная частота меньше собственной  $\omega_0$ , следовательно, в момент резонанса  $\delta < \pi/2$ . При слабом затухании  $\omega_{\text{рез}} \approx \omega_0$  и значение  $\delta$  при резонансе можно считать равным  $\pi/2$ .

### **Описание экспериментальной установки**

Общий вид прибора FPM-13 для исследования вынужденных механических колебаний с двумя степенями свободы представлен на рис. 4. Установка представляет систему двух связанных физических маятников с двумя степенями свободы. На основании прибора закреплена стойка 2. К концу стойки прикреплен кронштейн 3, к которому с помощью подшипников подвешены два маятника и стержень, возбуждающий колебания. Маятники состоят из стержней 4 и 16 и перемещаемых грузов 7 и 14. Маятники сопряжены друг с другом при помощи двух пружин 5 и 6, закрепленных в специальной С-образной обойме, которую можно перемещать вдоль стержней маятников. Возбуждение колебаний осуществляется при помощи приводного диска 17, закрепленного на вале электродвигателя, который, двигая стержень 15, сопряженный при помощи двух пружин 12 и 13 со стержнем 16 второго маятника, возбуждает его колебания. Высота установки С-образной обоймы определяет амплитуду вынуждающей силы, а скорость вращения двигателя – частоту ее изменения. Электродвигатель находится в блоке управления 1. Скорость вращения диска регулируется с помощью ручки 11 находящегося на лицевой панели блока управления. К нижней части стойки с помощью кронштейна прикреплена угловая шкала 8, с помощью которой определяется амплитуда колебаний маятников. К нижнему кронштейну также закреплен фотоэлектрический дат-

чик 18, информация с которого передается на блок управления 1. Измерение времени и числа колебаний производится с помощью цифровых индикаторов 9 и 10, находящихся на лицевой панели блока управления.

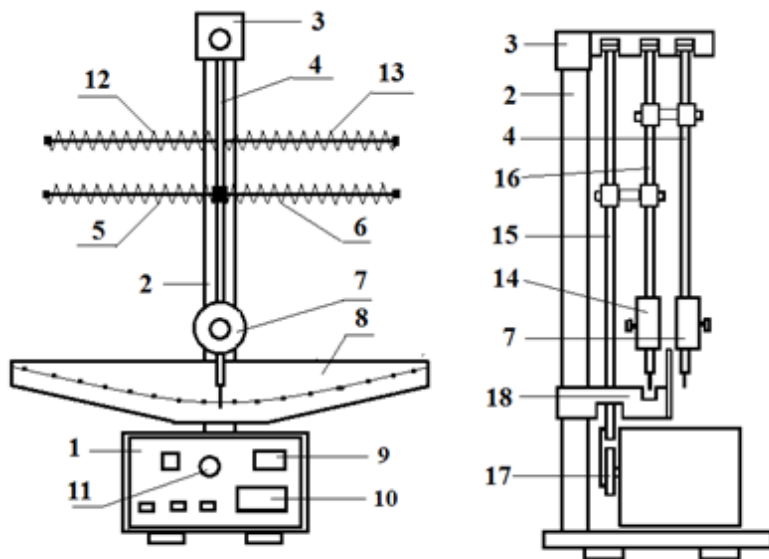


Рис. 4

Погрешность определения длины не менее 2 мм.

Погрешность измерения частоты – 8%.

Погрешность измерения времени не более  $\pm 0,02\%$ .

### Упражнение 1

### Изучение резонанса при различных положениях пружины связи

### Порядок выполнения работы

1. Установить груз 14 второго маятника массой 100 г на расстоянии  $l=45$  см от оси вращения (рекомендуется преподавателем в пределах 35 – 48 см).

2. Закрепить пружины, связывающие второй маятник с возбуждающим стержнем, на расстоянии  $r_1 = 8\text{ см}$  от оси вращения.

3. Нажать клавишу «СЕТЬ». При этом загораются цифровые индикаторы.

4. Ручку «ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЙ» привести в крайнее левое положение и включить питание двигателя.

5. Плавно вращая ручку «ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЙ» установить в положении 1.

6. После установления колебаний (1-2 минуты) нажать клавишу «СБРОС» и измерить время десяти полных колебаний маятника.

*Примечание.* Остановка счета времени производится нажатием кнопки «СТОП» в тот момент, когда на табло «ПЕРИОДЫ» высвечивается цифра 9.

7. По шкале 8 измерить амплитуду колебаний маятника.

8. Результаты измерений занести в табл. 1.

9. Прodelать аналогичные измерения для пяти других частот, установив ручку «ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЙ» в положения 2, 3, и т.д.

10. Руководствуясь п. 5–9, проделать измерения для двух других расстояний  $r_2 = 12\text{ см}$  и  $r_3 = 16\text{ см}$  (рекомендуется преподавателем).

Таблица 1

Положение регулятора «Частота»	$r_1 = 8\text{ см}$		$r_2 = 12\text{ см}$		$r_3 = 16\text{ см}$	
	$t_1, \text{ с}$	$\varphi_1, ^\circ$	$t_2, \text{ с}$	$\varphi_2, ^\circ$	$t_3, \text{ с}$	$\varphi_3, ^\circ$
1						
2						
3						
4						
5						
6						

11. Отсоединить пружины связи второго маятника с возбуждающим стержнем (выполняет лаборант).

12. Отклонить маятник на угол ( $5\text{--}10^\circ$ ) в сторону, предварительно записав начальную амплитуду  $\varphi_0$  и отпустить.

13. Нажать клавишу «СБРОС», измерить время  $n$  (20-30) полных колебаний маятника и конечную амплитуду  $\varphi_n$ . Результаты измерений занести в табл. 2.

Таблица 2

№	$\varphi_0, ^\circ$	$\varphi_n, ^\circ$	$t, \text{с}$	$n$
1				
2				
3				
4				
5				
Ср.				

*Примечание.* Измерение амплитуды  $n$ -го колебания и остановки счета времени производится нажатием кнопки СТОП в тот момент, когда на табло ПЕРИОДЫ высвечивается цифра  $n-1$ .

### Обработка результатов измерений

1. На основании полученных результатов по формулам

$$T = \frac{t}{N} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

вычислить частоту вынуждающей силы и собственную частоту колебаний маятника.

2. Используя данные, приведенные в табл. 1, построить амплитудную резонансную кривую  $\varphi = \varphi(\omega)$  и по ней найти резонансную частоту  $\omega_{\text{рез}}^1$ .

3. Используя данные, приведенные в табл. 2, вычислить коэффициент затухания по формуле

$$\beta = \frac{1}{t} \ln \frac{\varphi_0}{\varphi_n}.$$

4. Вычислить по формуле (6) резонансную частоту  $\omega_{\text{рез}}^2$ .
5. Сравнить результаты и сделать выводы.

## Упражнение 2

### Изучение резонанса при различных длинах маятника

#### Порядок выполнения работы

1. Установить груз 14 второго маятника массой 100 г на расстоянии  $l_1 = 35$  см от оси вращения.
2. Закрепить пружины, связывающие второй маятник с возбуждающим стержнем, на расстоянии  $r = 10$  см от оси вращения.
3. Руководствуясь п. 3–9 (упр. 1), провести измерения. Результаты измерений занести в табл. 3.
4. Руководствуясь п. 5–9, проделать аналогичные измерения для двух других расстояний  $l_2 = 40$  см и  $l_3 = 45$  см.
5. Произвести измерения согласно п.11-13 (см. упр. 1).

#### Обработка результатов измерений

1. На основании полученных результатов по формулам

$$T = \frac{t}{N} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

вычислить частоту вынуждающей силы и собственную частоту колебаний маятника.

Таблица 3

Положение регулятора «Частота»	$l_1 = 35$ см		$l_2 = 40$ см		$l_3 = 45$ см	
	$t_1, \text{с}$	$\varphi_1, ^\circ$	$t_2, \text{с}$	$\varphi_2, ^\circ$	$t_3, \text{с}$	$\varphi_3, ^\circ$
1						
2						
3						
4						
5						
6						

2. Используя данные, приведенные в табл. 3, построить амплитудные резонансные кривые  $\varphi = \varphi(\omega)$  и по ним найти резонансные частоты  $\omega_{\text{рез.1}}^1$ ,  $\omega_{\text{рез.2}}^1$  и  $\omega_{\text{рез.3}}^1$ .

3. Используя данные, приведенные в табл. 2, вычислить коэффициент затухания по формуле

$$\beta = \frac{1}{t} \ln \frac{\varphi_0}{\varphi_n}.$$

4. Вычислить по формуле (6) резонансную частоту  $\omega_{\text{рез}}^2$ .

5. Сравнить результаты и сделать выводы.

### Упражнение 3

## Изучение резонанса при различных массах маятника

### Порядок выполнения работы

1. Установить груз 14 второго маятника массой  $m_1 = 100$  г на расстоянии  $l = 40$  см от оси вращения.

2. Закрепить пружины, связывающие второй маятник с возбуждающим стержнем, на расстоянии  $r = 10$  см от оси вращения.

3. Руководствуясь п. 3–9 (упр. 1), провести измерения. Результаты измерений занести в табл. 4.

Таблица 4

Положение регулятора «Частота»	$m_1=100$ г		$m_2=150$ г		$m_3=200$ г	
	$t_1, \text{с}$	$\varphi_1, ^\circ$	$t_2, \text{с}$	$\varphi_2, ^\circ$	$t_3, \text{с}$	$\varphi_3, ^\circ$
1						
2						
3						
4						
5						
6						

4. Руководствуясь п. 5–9, проделать аналогичные измерения для двух других масс грузов  $m_2 = 150$  г и  $m_3 = 200$  г.

5. Произвести измерения согласно п.11–13 (упр. 1).

### Обработка результатов измерений

1. На основании полученных результатов по формулам



$$T = \frac{t}{N} \text{ и } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

вычислить частоту вынуждающей силы и собственную частоту колебаний маятника.

2. Используя данные, приведенные в табл. 4, построить амплитудные резонансные кривые  $\varphi = \varphi(\omega)$  и по ним найти резонансные частоты  $\omega_{\text{рез.1}}^1$ ,  $\omega_{\text{рез.2}}^1$  и  $\omega_{\text{рез.3}}^1$ .

3. Используя данные, приведенные в табл. 2, вычислить коэффициент затухания по формуле

$$\beta = -\frac{1}{t} \ln \frac{\varphi_0}{\varphi_n}.$$

4. Вычислить по формуле (6) резонансную частоту  $\omega_{\text{рез}}^2$ .

5. Сравнить результаты и сделать выводы.

#### Упражнение 4

#### Изучение резонанса связанных маятников

При возбуждении колебаний сопряженных маятников внешней силой синусоидального характера, действующей на один из них, оба маятника будут совершать колебания с частотой внешней

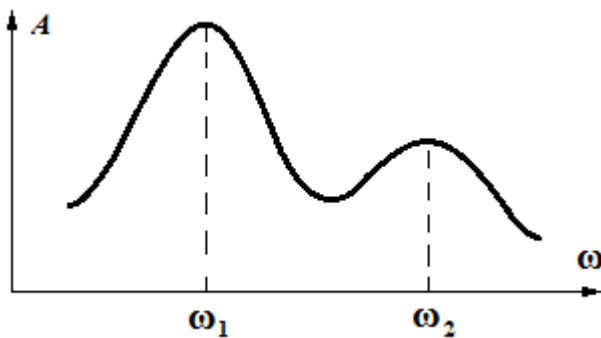


Рис. 5

силы. В случае разных длин маятников резонанс колебаний будет наблюдаться, когда одна из собственных частот сопряженных маятников будет равной частоте вынуждающей силы. В этом случае

будет наблюдаться «двугорбый» резонанс, амплитудно-частотная характеристика которого имеет вид, изображенный на рис. 5. При первом резонансе маятники будут иметь одинаковые фазы, но амплитуда колебаний более длинного маятника будет больше, и частота будет близка собственной частоте  $\omega_1$  более длинного маятника. При втором резонансе маятники будут иметь противоположные фазы, а частота будет близкой собственной частоте  $\omega_2$  более короткого маятника.

### **Порядок выполнения работы**

1. Закрепить пружины связи маятников на расстоянии  $r_1=15$  см, а пружины, связывающие второй маятник с возбуждающим стержнем, на расстоянии  $r_2 = 10$  см от оси вращения (рекомендуется преподавателем).

2. Установить на стержнях грузы массой  $m=100$  г на расстоянии  $l = 45$  см от оси вращения (рекомендуется преподавателем).

3. Установить на стержнях грузы массой  $m=100$  г на расстоянии  $l = 45$  см от оси вращения (рекомендуется преподавателем).

4. Нажать клавишу «СЕТЬ». При этом загораются цифровые индикаторы.

5. Ручку «ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЙ» привести в крайнее левое положение и включить питание двигателя.

6. Плавное вращая ручку «ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЙ», установить в положение 1.

7. После установления колебаний (1-2 минуты) нажать клавишу «СБРОС» и измерить время десяти полных колебаний маятника.

*Примечание.* Остановка счета времени производится нажатием кнопки «СТОП» в тот момент, когда на табло «ПЕРИОДЫ» высвечивается цифра 9.

8. По шкале 8 измерить амплитуду колебаний маятников.

9. Результаты измерений занести в табл. 2.

10. Установив ручку «ЧАСТОТА КОЛЕБАНИЙ» в положения 2, 3 и т.д., поделайте аналогичные измерения для пяти других частот.

11. Результаты измерений занести в табл. 5.

Таблица 5

Положение регулятора «Частота»	1	2	3	4	5	6
Время, $t$						
Число колебаний, $N$						
Амплитуда, $A$						

### Обработка результатов измерений

1. На основании полученных результатов по формулам

$$T = \frac{t}{N} \text{ и } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

вычислить частоту вынуждающей силы и собственные частоты колебаний маятников.

2. Построить резонансную кривую  $A = A(\omega)$ .
3. Сравнить полученные результаты и сделать выводы.

### Контрольные вопросы.

1. Что называется резонансом?
2. Чему равна резонансная частота и от чего зависит?
3. Как зависят амплитуда и фаза вынужденных колебаний от частоты вынуждающей силы? Как влияет среда?
4. Нарисуйте резонансную кривую.

**Литература:** 1. Гл. 18; 2. Гл. 27; 3. Гл.7; 10. С. 105.

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 14

### ИЗУЧЕНИЕ КОЛЕБАНИЙ СВЯЗАННЫХ СИСТЕМ

*Приборы и принадлежности:* установка FPM-13.

*Цель работы* – изучение свободных колебаний системы имеющей две степени свободы. Измерение частот нормальных колебаний и частоты биений.

*Краткая теория.* Совокупность двух или нескольких маятников, каким-либо образом связанных между собой, представляет

связанную систему. Многие колебательные системы представляют собой систему двух или нескольких связанных между собой осцилляторов. Рассмотрим систему, состоящую из двух одинаковых физических маятников, связанных между собой пружиной (рис. 1). При движении маятников в одной только вертикальной

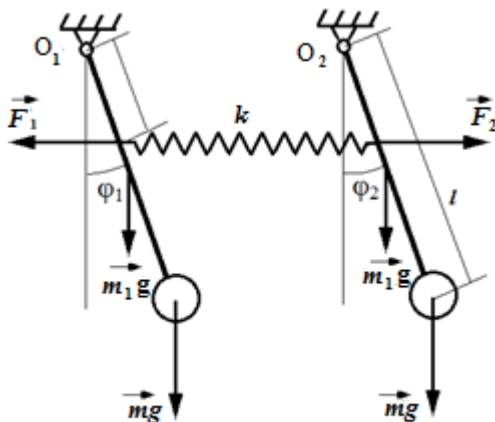


Рис. 1

плоскости состояние такой системы полностью описывается двумя независимыми параметрами, т.е. система обладает двумя степенями свободы. Выбор величин – это в значительной степени вопрос удобства. В качестве таких параметров мы выберем угловые смещения  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  маятников от вертикали. Пусть два одинаковых груза массой  $m$  подвешены на двух одинаковых стержнях длиной  $l$  и массой  $m_1$ . Стержни на расстоянии  $r$  от точки подвеса связаны между собой пружиной, имеющей коэффициент жесткости  $k$ . Длина пружины в недеформированном состоянии равна расстоянию между точками подвеса стержней. Движение такой системы согласно основному закону динамики вращательного движения описывается уравнениями

$$J_1 \cdot \ddot{\varphi}_1 = M_1 \text{ и } J_2 \cdot \ddot{\varphi}_2 = M_2, \quad (1)$$

где моменты инерции маятников с учетом массы стержней равны

$$J_1 = J_2 = \frac{1}{3} m_1 l^2 + m l^2. \quad (2)$$

Если углы отклонения маятников равны  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , то деформация пружины будет

$$\Delta x = r \sin \varphi_1 - r \sin \varphi_2 \approx r(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (3)$$

На каждый из маятников действуют моменты сил тяжести стержней, грузов и силы упругости пружины связи. Пренебрегая трением и массой пружины, при малых углах отклонения для результирующих моментов получим выражения

$$M_1 = -(m_1 g \frac{l}{2} + mgl)\varphi_1 - kr^2(\varphi_1 - \varphi_2) \quad \text{и} \quad (4)$$

$$M_2 = -(m_1 g \frac{l}{2} + mgl)\varphi_2 + kr^2(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (5)$$

где учтено, что для малых углов  $\sin \varphi \approx \varphi$ , а  $\cos \varphi \approx 1$ .

Тогда уравнения движения маятников будут иметь вид

$$(\frac{1}{3} m_1 l^2 + m l^2) \ddot{\varphi}_1 = -(m_1 g \frac{l}{2} + mgl)\varphi_1 - kr^2(\varphi_1 - \varphi_2) \quad (6)$$

$$(\frac{1}{3} m_1 l^2 + m l^2) \ddot{\varphi}_2 = -(m_1 g \frac{l}{2} + mgl)\varphi_2 + kr^2(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (7)$$

Складывая и вычитая уравнения (6) и (7), получим два независимых уравнения, описывающие гармонические колебания с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ :

$$\ddot{X} + \frac{B}{A} X = 0, \quad (8)$$

$$\ddot{Y} + \frac{B + 2kr^2}{A} Y = 0, \quad (9)$$

где  $X = \varphi_1 + \varphi_2$ ,  $Y = \varphi_1 - \varphi_2$ ,  $A = \frac{1}{3} m_1 l^2 + m l^2$  и  $B = m_1 g \frac{l}{2} + mgl$ .

Решения этих уравнений имеют вид

$$\varphi_1 + \varphi_2 = X_0 \cos(\omega_1 t + \alpha_1) \quad (10)$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = Y_0 \cos(\omega_2 t + \alpha_2), \quad (11)$$

где частоты

$$\omega_1 = \sqrt{\left(\frac{3m_1 + 6m}{2m_1 + 6m}\right) \frac{g}{l}} \quad \text{и} \quad (12)$$

$$\omega_2 = \sqrt{\left(\frac{3m_1 + 6m}{2m_1 + 6m}\right) \frac{g}{l} + \frac{6kr^2}{(m_1 + 3m)l^2}}. \quad (13)$$

Постоянные  $X_0$ ,  $Y_0$ ,  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в уравнениях (10) и (11) находятся из начальных условий. Если в начальный момент времени скорости маятников равны нулю, и маятники отклонены от положения равновесия на углы  $\varphi_{10}$  и  $\varphi_{20}$ , то уравнения движения маятников будут иметь следующий вид.

$$\varphi_1(t) = \frac{(\varphi_{10} + \varphi_{20})}{2} \cos \omega_1 t + \frac{(\varphi_{10} - \varphi_{20})}{2} \cos \omega_2 t \quad (14)$$

$$\varphi_2(t) = \frac{(\varphi_{10} + \varphi_{20})}{2} \cos \omega_1 t - \frac{(\varphi_{10} - \varphi_{20})}{2} \cos \omega_2 t. \quad (15)$$

Отсюда видно, что движение каждого маятника представляет суперпозицию двух гармонических колебаний с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Эти колебания носят название **нормальных колебаний** (его также часто называют **модой** колебаний). Число нормальных колебаний равно числу колебательных степеней свободы. Частоты  $\omega_1$  и  $\omega_2$  носят название **нормальных частот**. Характер конкретных колебаний в системе определяется начальными условиями.

1. Пусть маятники в начальный момент времени отклонены от положения равновесия на одинаковый угол в одном направлении  $\varphi_{10} = \varphi_{20} = \varphi_0$  (рис. 2). В этом случае, как видно из формул (14)

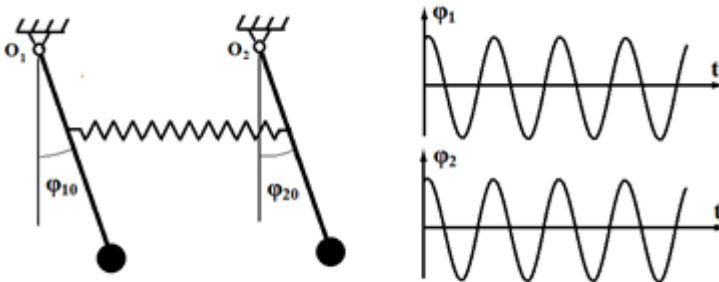


Рис. 2

и (15), в системе возбуждается одно нормальное колебание с час-

тотой  $\omega_1$ . Эта частота не зависит от наличия пружины. Именно с такой частотой колебались бы оба маятника при отсутствии связи между ними. Зависимости смещения от времени каждого маятника имеют одинаковый вид:

$$\varphi_1(t) = \varphi_2(t) = \varphi_0 \cos \omega_1 t. \quad (16)$$

Маятники при этом колеблются в одинаковых фазах. Такие колебания называются **синфазными**. Качаясь, маятники не изменяют длину пружины, как будто пружины нет вовсе. При таких колебаниях обмен энергии между маятниками отсутствует. Амплитуды колебаний остаются постоянными.

2. Пусть маятники в начальный момент времени отклонены от положения равновесия на одинаковый угол в противоположных направлениях  $\varphi_{10} = \varphi_0$ ,  $\varphi_{20} = -\varphi_0$  (рис. 3). При этом маятники будут

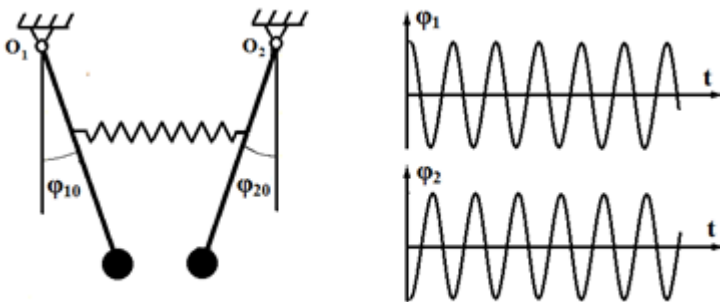


Рис. 3

колебаться в противофазе с частотой  $\omega_2$ . Частота  $\omega_2$  больше частоты  $\omega_1$ , и она растет с увеличением расстояния  $r$  от оси до места крепления пружины. В этом случае маятники колеблются согласно уравнениям

$$\varphi_1(t) = \varphi_0 \cos \omega_2 t \text{ и } \varphi_2(t) = -\varphi_0 \cos \omega_2 t. \quad (17)$$

Поэтому такие колебания называются **противофазными**. При таких колебаниях пружина то сжимается, то растягивается, что приводит к увеличению частоты колебаний. Обмен энергии между маятниками также отсутствует.

3. В общем случае в системе возбуждаются оба нормальных колебания. Пусть  $\varphi_{10} \neq 0$ , а  $\varphi_{20} = 0$ . Уравнения движения маятников в этом случае будут иметь вид (рис. 4).

$$\varphi_1(t) = \varphi_{01} \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t; \quad (18)$$

$$\varphi_2(t) = \varphi_{01} \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cdot \sin \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t. \quad (19)$$

Отсюда видно, что колебания маятников не являются гармониче-

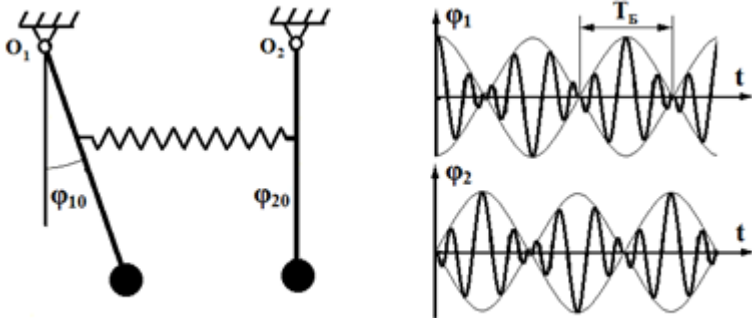


Рис. 4

скими, а представляют суперпозицию двух нормальных колебаний с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . В случае слабой связи  $\omega_2 - \omega_1 \ll \omega_1$ , поэтому колебания маятников можно рассматривать как гармонические с медленно изменяющейся амплитудой. Такие колебания называются **биениями**. Время между двумя последовательными моментами, когда амплитуда обращается в ноль, называется периодом биений

$$T_6 = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1}. \quad (20)$$

Следовательно, частота биений равна разности нормальных частот:

$$\omega_6 = \omega_2 - \omega_1. \quad (21)$$

При этом происходит обмен энергии между маятниками. Как только один из маятников потеряет всю энергию и остановится, другой маятник в данный момент колеблется с максимальной амплитудой. После этого процесс повторится.

### Описание экспериментальной установки

Установка, изображенная на рис. 5, представляет систему двух связанных физических маятников. На основании прибора



закреплена стойка 2. К концу стойки прикреплен кронштейн 3, к которому с помощью подшипников подвешены два маятника. Маятники состоят из стержней 4 и 13 и перемещаемых грузов 7 и 12. Маятники соединены между собой с помощью двух пружин 5 и 6. Маятники соединены между собой с помощью двух пружин 5 и 6.

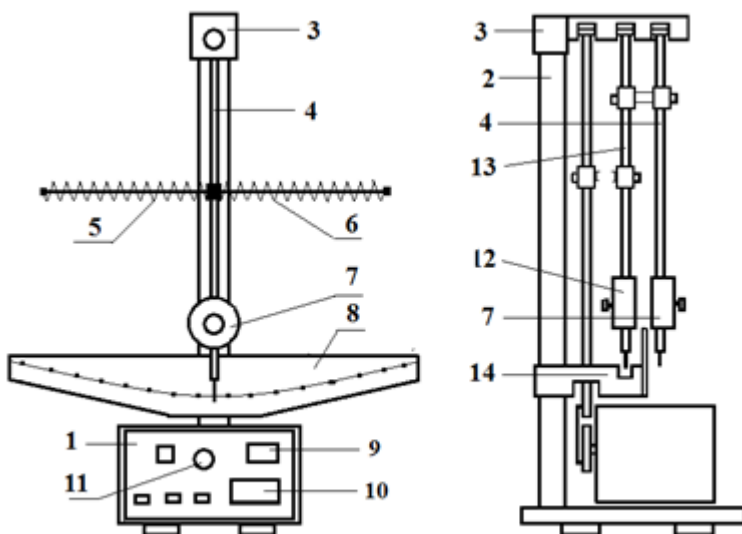


Рис. 5

Пружины могут перемещаться вдоль стержней и закрепляться в любом месте с помощью винтов. К нижней части стойки с помощью кронштейна прикреплена угловая шкала 8, с помощью которой определяется амплитуда колебаний маятников. К нижнему кронштейну также закреплен фотоэлектрический датчик 14, информация с которого передается на блок управления 1. Измерение времени и числа колебаний производится с помощью цифровых индикаторов 9 и 10, находящихся на лицевой панели блока управления.

Погрешность определения длины не менее 2 мм.

Погрешность измерения частоты – 8%.

Погрешность измерения времени не более  $\pm 0,02\%$ .

## Определение нормальных частот колебаний и частоты биений

### Порядок выполнения работы

1. Снять пружины связи маятников.
2. Нажать клавишу «СЕТЬ». При этом загораются цифровые индикаторы.
3. Установить грузы массой 100 г на одинаковом расстоянии  $l_1 = 45$  см от оси вращения (рекомендуется преподавателем).
4. Отклонить маятники на одинаковые углы ( $5-10^\circ$ ) в одну сторону и одновременно их отпустить. Проследить за 30 колебаниями маятников. Если частоты колебаний маятников отличаются друг от друга (обнаружен заметный сдвиг по фазе), то их необходимо уравнивать, перемещая груз одного из маятников вдоль стержня.

5. Нажать клавишу «СБРОС» и измерить время ( $t_0$ ) десяти полных собственных колебаний маятников.

*Примечание.* Остановка счета времени производится нажатием кнопки «СТОП» в тот момент, когда на табло «ПЕРИОДЫ» высвечивается цифра 9.

6. Прodelать п. 5 не менее пяти раз. Результаты измерений занести в табл.

№	$t_0, \text{с}$	$N_0$	$t_1, \text{с}$	$N_1$	$t_2, \text{с}$	$N_2$	$t_6, \text{с}$	$N_6$
1								
2								
3								
Ср.								

7. Закрепить пружины связи на расстоянии  $r_1 = 8$  см от оси вращения (рекомендуется преподавателем).

8. Отклонить маятники на одинаковые углы ( $5-10^\circ$ ) в одну сторону и одновременно их отпустить.

9. Руководствуясь п. 5 и 6, измерить время 10 полных синфазных колебаний.

10. Отклонив маятники на одинаковые углы ( $5-10^\circ$ ) в разные стороны и руководствуясь п. 5 и 6, измерить время десяти полных противофазных колебаний.

11. Отклонить один из маятников на угол ( $5-10^\circ$ ), придерживая рукой другой около положения равновесия, и одновременно их отпустить.

12. В момент остановки первого маятника включить секундомер. Визуально отсчитать определенное количество ( $N_6$ ) остановок первого маятника (не менее 5), после чего выключить секундомер. Результаты занести в таблицу.

13. Руководствуясь п. 1–12, проделать аналогичные измерения для двух других расстояний  $r_2 = 12$  см и  $r_3 = 16$  см (рекомендуется преподавателем).

### Обработка результатов измерений

1. На основании полученных результатов по формулам

$$T = \frac{t}{N} \quad \text{и} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

вычислить периоды и частоты собственных, синфазных, противофазных колебаний, а также частоты и периода биений.

2. Вычислить погрешности.

3. По формулам (12), (13), (20) и (21) рассчитать теоретические значения периодов и частот.

4. Построить графики зависимостей  $\omega_2 = \omega_2(r)$  и  $\omega_6 = \omega_6(r)$ .

5. Сравнить полученные результаты и сделать выводы.

### Контрольные вопросы

1. Что такое моды колебаний системы, нормальные частоты, парциальные частоты?

2. Сколько нормальных колебаний имеет система с  $n$  степенями свободы?

3. Какие колебания называются синфазными, противофазными?

4. Что такое биения? Когда они возникают?

**Литература:** 1. Гл. 18; 2. Гл. 27; 3. Гл. 7; 7. С. 163.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Трофимова Т.И.* Курс физики. М.: Высш. шк., 2001.
2. *Детлаф А.А., Яворский Б.М.* Курс физики. М.: Высш. шк., 2001.
3. *Савельев И.В.* Курс общей физики. Т.1. М.: Наука, 1982.
4. *Алексеев В.Г.* Лабораторный практикум по физике; Чуваш. ун-т. Чебоксары, 2000.
5. Механика и молекулярная физика: лаб. практикум/ А.М. Авакумов, А.В. Бурашников и др.; Чуваш. ун-т. Чебоксары, 1982.
6. Механика. Сборник лабораторных работ: / А.С. Марков, А.В. Бурашников и др.; Чуваш. ун-т. Чебоксары, 1989.
7. Физический практикум / под ред. В.И. Ивероновой. М.: Наука, 1967.
8. *Кассандрова О.И., Лебедев В.В.* Обработка результатов наблюдений. М.: Наука, 1970.
9. *Зайдель А.И.* Ошибки измерений физических величин. Л.: Наука, 1974.
10. *Кортнев А.В., Рублев Ю.В.* Практикум по физике. М.: Высш. шк., 1965.
11. Руководство к лабораторным занятиям по физике/ под ред. Л.Л. Гольдина. Наука, 1973.
12. Лабораторный практикум по курсу «Физика»/ К.С. Болотина, П.П. Щербаков. М.: Изд-во МЭИ, 1991.
13. *Алексеев В.Г.* Механика. Лабораторный практикум. Чуваш. ун-т. Чебоксары, 2004.

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### 1. ОСНОВНЫЕ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЕДИНИЦЫ СИ

Величина	Единица измерения	Обозначение	
		русское	междунар.
Основные единицы			
Длина	Метр	м	m
Масса	Килограмм	кг	kg
Время	Секунда	с	s
Сила тока	Ампер	А	A
Термодинамическая температура	Кельвин	К	K
Количество вещества	Моль	моль	mol
Сила света	Кандела	кд	cd
Дополнительные единицы			
Плоский угол	РадIAN	рад	rad
Телесный угол	Стерadian	ср	sr

**2. ПРОИЗВОДНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ  
ВЕЛИЧИНЫ И ИХ РАЗМЕРНОСТИ  
(МЕХАНИЧЕСКИЕ)**

Величина	Наименование	Размерность
1. Скорость линейная	Метр в секунду	$\text{м/с}$
2. Скорость угловая	РадIAN в секунду	$\text{с}^{-1}$
3. Ускорение линейное	Метр на секунду в квадрате	$\text{м/с}^2$
4. Ускорение угловое	РадIAN на секунду в квадрате	$\text{с}^{-2}$
5. Частота	Герц	$\text{с}^{-1}$
6. Плотность	Килограмм на метр в кубе	$\text{кг/м}^3$
7. Сила	Ньютон	$\text{кг} \cdot \text{м/с}^2$
8. Площадь	Квадратный метр	$\text{м}^2$
9. Объем	Кубический метр	$\text{м}^3$
10. Энергия	Джоуль	$\text{Н} \cdot \text{м}, \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$
11. Работа	Джоуль	$\text{Н} \cdot \text{м}, \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$
12. Мощность	Ватт	$\text{Дж/с}, \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^3$
13. Давление	Паскаль	$\text{Н/м}^2, \text{кг/м} \cdot \text{с}^2$
14. Модуль упругости	Паскаль	$\text{Н/м}^2, \text{кг/м} \cdot \text{с}^2$
15. Импульс	Килограмм на метр в секунду	$\text{кг} \cdot \text{м/с}$
16. Момент импульса	Килограмм на метр квадратный в секун- ду	$\text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}$
17. Момент силы	Ньютон на метр	$\text{Н} \cdot \text{м}, \text{кг} \cdot \text{м}^2/\text{с}^2$
18. Момент инерции	Килограмм на метр квадратный	$\text{кг} \cdot \text{м}^2$

### 3. ВНЕСИСТЕМНЫЕ ЕДИНИЦЫ И ИХ СВЯЗЬ С ЕДИНИЦАМИ СИ

Величина	Единица измерения		
	Наименование	Обозначение	СИ
Длина	Парсек	пк	$3,08 \cdot 10^{16}$ м
	Световой год	св.год	$9,46 \cdot 10^{15}$ м
	Астрономическая единица	а.е	$1,5 \cdot 10^{11}$ м
	Морская миля		1852 м
	Миля		1609 м
	Ярд		0,91 м
	Фут		0,3 м
	Дюйм		$25,4 \cdot 10^{-3}$ м
	Микрон	мк	$10^{-6}$ м
	Ангстрем	Å	$10^{-10}$ м
Масса	Тонна	<i>m</i>	$10^3$ кг
	Центнер	цн.	$10^2$ кг
	Пуд		16,38 кг
	Фунт		0,454 кг
	Унция (тройская)		$31,1 \cdot 10^{-3}$ кг
	Карат		$2 \cdot 10^{-4}$ кг
	Атомная единица массы	а.е.м.	$1,66 \cdot 10^{-27}$ кг
Площадь	Ар	<i>a</i>	$10^2$ м <sup>2</sup>
Объем	Литр	л	$10^{-3}$ м <sup>3</sup>
Энергия	Электрон-вольт	эВ	$1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж
	Калория	кал	4,19 Дж
	Ватт-час		$3,6 \cdot 10^3$ Дж
Мощность	лошадиная сила	л.с	735 Вт
Давление	Атмосфера		
	а) нормальная	атм	$1,013 \cdot 10^5$ Па
	б) техническая	ат	$9,8 \cdot 10^4$ Па
	Миллиметр ртутного столба	мм.рт.ст.	733,3 Па

#### 4. ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ ПОСТОЯННЫЕ

(округленные значения)

Физическая постоянная	Обозначение	Значение
Нормальное ускорение свободного падения	$g$	$9,81 \text{ м/с}^2$
Гравитационная постоянная	$G$	$6,67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{с}^2$
Постоянная Авогадро	$N_A$	$6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Молярная газовая постоянная	$R$	$8,31 \text{ Дж/моль} \cdot \text{К}$
Молярный объем газа при н.у.	$V_m$	$22,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3/\text{моль}$
Постоянная Больцмана	$k$	$1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
Элементарный заряд	$e$	$1,60 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Скорость света в вакууме	$c$	$3,0 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
Постоянная Стефана-Больцмана	$\sigma$	$5,67 \cdot 10^{-8} \text{ Вт/м}^2 \cdot \text{К}^4$
Постоянная Вина	$b$	$2,90 \cdot 10^{-3} \text{ м} \cdot \text{К}$
Постоянная Планка	$h$	$6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
	$\hbar$	$1,05 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Постоянная Ридберга	$R$	$1,10 \cdot 10^7 \text{ м}^{-1}$
Радиус боровской орбиты	$a_0$	$0,529 \cdot 10^{-10} \text{ м}$
Комтоновская длина волны электрона	$\lambda_K$	$2,43 \cdot 10^{-12} \text{ м}$
Магнетон Бора	$\mu_B$	$0,927 \cdot 10^{-23} \text{ А} \cdot \text{м}^2$
Энергия ионизации атома водорода	$E_i$	$2,18 \cdot 10^{-18} \text{ Дж}$
Атомная единица массы	а.е.м.	$1,66 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Электрическая постоянная	$\epsilon_0$	$8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
Магнитная постоянная	$\mu_0$	$4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$
Постоянная Фарадея	$F$	$9,65 \text{ Кл/моль}$
Нормальное атмосферное давление	$P_{\text{ат}}$	$1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$
Горизонтальная составляющая индукции магнитного поля Земли на широте $56^\circ$	$B_0$	$1,8 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$
Абсолютный ноль	$T_0$	$-273,15^0$



## 5. МНОЖИТЕЛИ ДЛЯ ОБРАЗОВАНИЯ ДЕСЯТИЧНЫХ И ДОЛЬНЫХ ЕДИНИЦ

Наименование	Множитель	Обозначение	
		русское	международное
Экса	$10^{18}$	Э	E
Пета	$10^{15}$	П	P
Тера	$10^{12}$	Т	T
Гига	$10^9$	Г	G
Мега	$10^6$	М	M
Кило	$10^3$	к	k
Гекто	$10^2$	г	h
Дека	$10^1$	да	da
Деци	$10^{-1}$	д	d
Санتي	$10^{-2}$	с	c
Милли	$10^{-3}$	м	m
Микро	$10^{-6}$	мк	$\mu$
Нано	$10^{-9}$	н	n
Пико	$10^{-12}$	п	p
Фемто	$10^{-15}$	ф	f
Атто	$10^{-18}$	а	a

## 6. НЕКОТОРЫЕ АСТРОНОМИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

Наименование	Значение
Радиус Земли	$6,37 \cdot 10^6$ м
Масса Земли	$5,98 \cdot 10^{24}$ кг
Радиус Солнца	$6,95 \cdot 10^8$ м
Масса Солнца	$1,98 \cdot 10^{30}$ кг
Радиус Луны	$1,74 \cdot 10^6$ м
Масса Луны	$7,33 \cdot 10^{22}$ кг
Расстояние от Земли до Солнца	$1,49 \cdot 10^{11}$ м
Расстояние от Земли до Луны	$3,84 \cdot 10^8$ м

## 7. ПЛОТНОСТИ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Вещество	Плотность, $10^3 \text{ кг/м}^3$	Вещество	Плотность, $10^3 \text{ кг/м}^3$
Алюминий	2,7	Мел	2,0-2,4
Алмаз	3,5	Никель	8,9
Асбест	2,5	Никелин	8,8
Бетон	2,0-2,2	Олово	7,3
Бронза	8,7-8,9	Платина	21,5
Вольфрам	19,4	Парафин	0,9
Ванадий	6	Пробка	0,2
Висмут	9,8	Пенопласт	0,02-0,1
Гранит	2,6-2,8	Плексиглас	1,2
Германий	5,3	Полиэтилен	0,9
Графит	2,2	Резина	1,2
Дерево	0,5-0,8	Свинец	11,3
Золото	19,3	Серебро	10,5
Иридий	22,4	Слюда	2,6-3,2
Кобальт	8,8	Сталь	7,7-7,9
Кварц	2,6	Стекло	2,2-2,7
Кирпич	1,6-1,8	Титан	4,5
Кремний	2,3	Текстолит	1,4
Корунд	4	Фарфор	2,2-2,4
Константан	8,9	Фторопласт	2,1-2,4
Латунь	8,4-8,7	Хром	7,2
Лед	0,9	Цинк	7,2
Магний	1,8	Цирконий	6,5
Медь	8,9	Чугун	7
Мрамор	2,5-2,8	Эбонит	1,2
Молибден	10,2	Янтарь	1,1

## 1. ПЛОТНОСТЬ ЖИДКОСТЕЙ

Жидкость	Плотность, $10^3 \text{ кг/м}^3$	Жидкость	Плотность, $10^3 \text{ кг/м}^3$
Ацетон	0,79	Молоко	1,03
Бензин	0,68-0,72	Масло касторовое	0,96
Бром	3,12	Нефть	0,8
Вода (4° С)	1,0	Ртуть	13,6
Вода морская	1,03	Скипидар	0,87
Глицерин	1,26	Уксусная кислота	1,05
Керосин	0,8	Эфир	0,7
Мазут	0,9		
Масло (смазочное)	0,9		

## 9. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ТВЕРДЫХ ТЕЛ

Вещество	Предел прочности на растяжение $\sigma$ , МПа	Модуль упругости Е, ГПа
Алюминий	100	70
Бетон	48	20
Вольфрам	2400	380
Гранит	150	49
Золото	140	79
Кварц	-	73
Кирпич	17	3
Лед	1	10
Медь	400	120
Мрамор	140	70
Олово	20	50
Свинец	15	16
Серебро	140	80
Сталь	500	200
Стекло	90	50
Фарфор	650	150
Цинк	150	80

## 10. КОЭФФИЦИЕНТЫ ТРЕНИЯ СКОЛЬЖЕНИЯ


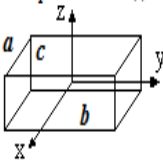
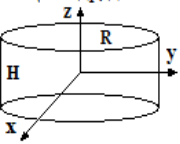
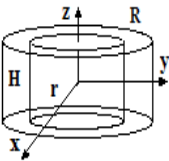
Соприкасающаяся поверхность	Коэффициент трения, $f$
Бронза по бронзе	0,20
Бронза по стали	0,18
Дерево сухое по дереву	0,25–0,5
Кожаный ремень по дубу	0,27–0,38
Кожаный ремень по металлу	0,56
Медь по чугуно	0,27
Металл по дубу	0,5–0,6
Подшипник скольжения при смазке	0,02–0,08
Резина по грунту	0,4–0,6
Резина по чугуно	0,8
Сталь по льду	0,02–0,03
Сталь по стали	0,18
Сталь по чугуно	0,16
Фторопласт по стали	0,06–0,08
Фторопласт по фторопласту	0,05–0,09
Чугун по бронзе	0,2
Чугун по чугуно	0,15
Уголь по меди	0,25
Кирпич по кирпичу	0,65

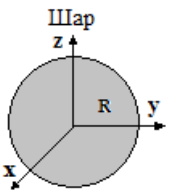
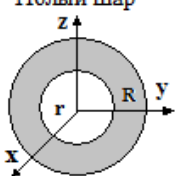
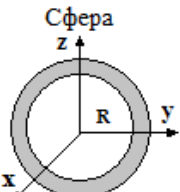
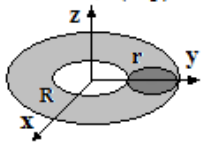
## 11. ПЛОТНОСТЬ ГАЗОВ

(При нормальных условиях)

Газ	Плотность, $10^3 \text{ кг/м}^3$	Газ	Плотность, $10^3 \text{ кг/м}^3$
Азот	1,25	Кислород	1,43
Аммиак	0,77	Криптон	3,74
Ацетилен	1,17	Метан	0,7
Аргон	1,78	Озон	2,14
Водород	0,09	Окись углерода	1,25
Воздух	1,29	Углекислый газ	1,98
Гелий	0,18	Хлор	3,2

## 12. ГЛАВНЫЕ ЦЕНТРАЛЬНЫЕ МОМЕНТЫ ИНЕРЦИИ ТЕЛ

Тело	$J_x$	$J_y$	$J_z$
<p>Стержень</p> 	$\frac{1}{12} ml^2$	0	$\frac{1}{12} ml^2$
<p>Параллелепипед</p> 	$\frac{1}{12} m(b^2 + c^2)$	$\frac{1}{12} m(a^2 + c^2)$	$\frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$
<p>Цилиндр, диск</p> 	$\frac{m}{12} (3R^2 + H^2)$	$\frac{m}{12} (3R^2 + H^2)$	$\frac{1}{2} mR^2$
<p>Полый цилиндр</p> 	$\frac{m}{12} (3R_1^2 + 3R_2^2 + H^2)$	$\frac{m}{12} (3R_1^2 + 3R_2^2 + H^2)$	$\frac{m}{2} (R_1^2 + R_2^2)$

Тело	$J_x$	$J_y$	$J_z$
	$\frac{2}{5} m R^2$	$\frac{2}{5} m R^2$	$\frac{2}{5} m R^2$
	$\frac{2}{5} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$	$\frac{2}{5} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$	$\frac{2}{5} m \frac{R^5 - r^5}{R^3 - r^3}$
	$\frac{2}{3} m R^2$	$\frac{2}{3} m R^2$	$\frac{2}{3} m R^2$
	$\frac{m}{8} (4R^2 + 5r^2)$	$\frac{m}{8} (4R^2 + 5r^2)$	$m \left( R^2 + \frac{3}{4} r^2 \right)$

### 13. КОЭФФИЦИЕНТЫ СТЬЮДЕНТА

Число измерений	Надежность					
	0,5	0,7	0,9	0,95	0,98	0,999
2	1,00	2,0	6,3	12,7	31,8	636,6
3	0,82	1,3	2,9	4,3	7,0	31,6
4	0,77	1,3	2,4	3,2	4,5	12,9
5	0,74	1,2	2,1	2,8	3,7	8,6
6	0,73	1,2	2,0	2,6	3,4	6,9
7	0,72	1,1	1,9	2,4	3,1	6,0
8	0,71	1,1	1,9	2,4	3,0	5,4
9	0,71	1,1	1,9	2,3	2,9	5,0
10	0,70	1,1	1,8	2,3	2,8	4,8
15	0,69	1,1	1,8	2,1	2,6	4,1
20	0,69	1,1	1,7	2,1	2,5	3,9
40	0,68	1,1	1,7	2,0	2,4	3,6
60	0,68	1,0	1,7	2,0	2,4	3,5

### 14. ГРЕЧЕСКИЙ АЛФАВИТ

Обозначение буквы	Название буквы	Обозначение буквы	Название буквы
A, α	Альфа	N, ν	Ни
B, β	Бета	Ξ, ξ	Кси
Γ, γ	Гамма	O, ο	Омикрон
Δ, δ	Дельта	Π, π	Пи
E, ε	Эпсилон	P, ρ	Ро
Z, ζ	Дзета	Σ, σ	Сигма
H, η	Эта	T, τ	Тау
Θ, θ	Тета	Υ, υ	Ипсилон
I, ι	Йота	Φ, φ	Фи
K, κ	Каппа	X, χ	Хи
Λ, λ	Ламбда	Ψ, ψ	Пси
M, μ	Ми	Ω, ω	Омега

**15. ПРИМЕРЫ ДЛЯ УПРАЖНЕНИЯ**  
(к работе №1)

1	$v = v_0 t + at$	14	$x = A \sin(\omega t + \varphi_0)$
2	$s = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}$	15	$A = A_0 e^{-\beta t}$
3	$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$	16	$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
4	$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}$	17	$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}$
5	$J = \frac{1}{2} m(r_1^2 + r_2^2)$	18	$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot d^2 n}$
6	$E = \frac{mv^2}{2} + mgh$	19	$Q = cm(t - t_0)$
7	$s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$	20	$A = \frac{m}{M} R(T_2 - T_1)$
8	$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$	21	$A = RT \cdot \ln \frac{V_1}{V_2}$
9	$F = \frac{mv^2}{R}$	22	$p = p_0 \left( \frac{V_0}{V} \right)^\gamma$
10	$v = u \cdot \ln \frac{m_0}{m}$	23	$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$
11	$r_c = \frac{m_1 r_1 + m_2 r_2}{m_1 + m_2}$	24	$h = \frac{2\alpha \cos \Theta}{\rho gh}$
12	$g = G \frac{M}{(R+h)^2}$	25	$p = \alpha \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$
13	$J = J_C + ma^2$	26	$Q = I^2 R t$



## **16. ОБРАЗЕЦ ОФОРМЛЕНИЯ ОТЧЕТА**

**Федеральное государственное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Чувашский государственный университет им. И. Н. Ульянова»**

Кафедра общей физики

Лабораторная работа №

### **ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ПУЛИ МЕТОДОМ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА**

Выполнил: студент гр. ЭЭ-21-09  
Иванов Иван Иванович

Принял: доц. Алексеев В. Г.

г. Чебоксары 2017

## ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА

### ИЗМЕРЕНИЕ СКОРОСТИ ПУЛИ МЕТОДОМ БАЛЛИСТИЧЕСКОГО МАЯТНИКА

**Приборы и принадлежности:** баллистический маятник, пружинный пистолет, набор пуль, измерительная линейка.

**Цель работы** – применение законов сохранения импульса и механической энергии и ознакомление с одним из методов измерения скорости быстро перемещающихся тел малых размеров.

**Краткая теория.** Баллистический маятник представляет собой цилиндр, наполненный вязким веществом, подвешенный на четырех нитях. Это дает возможность цилиндру перемещаться поступательно при отклонении маятника.

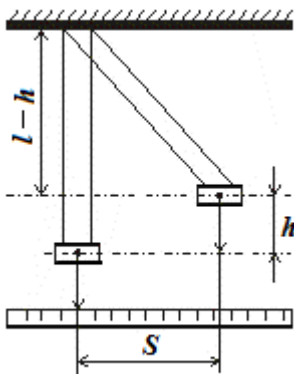


Рис. 1

Из пружинного пистолета стреляют в вязкое вещество цилиндра, в результате маятник с цилиндром отклоняется. Центр массы маятника поднимается на высоту  $h$  (рис. 1).

Как показывает опыт, период колебаний маятника намного превосходит время движения пули внутри вязкого вещества в цилиндре

( $\tau \ll T$ ), поэтому систему «пуля – цилиндр» можно считать замкнутой, а удар пули в цилиндр – неупругим и применять для этой системы закон сохранения импульса.

$$mv = (M + m) u, \quad (1)$$

где  $M$  – масса цилиндра с веществом,  $m$  – масса пули,  $v$  – скорость пули до удара,  $u$  – скорость цилиндра с пулей после удара.

Когда пуля прекратит свое движение внутри вязкого вещества цилиндра, система «пуля – цилиндр» станет не только замкнутой, но и консервативной. Следовательно, для нее будет применим закон сохранения механической энергии. Закон сохранения механической энергии после удара в этом случае запишется в виде

$$\frac{(M+m)v^2}{2} = (M+m)gh. \quad (2)$$

Решая уравнения (1) и (2) относительно  $v$ , найдем

$$v = \frac{M+m}{m} \sqrt{2gh}. \quad (3)$$

Так как  $h$  экспериментально определяется с трудом, то легче выразить  $h$  через величину отклонения маятника по горизонтали  $S$ . Из рисунка следует:

$$S^2 = l^2 - (l-h)^2 = 2hl - h^2 \approx 2hl. \quad (4)$$

Отсюда

$$h = \frac{S^2}{2l}. \quad (5)$$

Подставляя значение  $h$  из формулы (4) в (3), получим

$$v = \frac{M+m}{m} S \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (6)$$

### Порядок выполнения работы

1. Зарядить пружинный пистолет пулей и установить его ствол против цилиндра на небольшом удалении от него.
2. Соблюдая правила техники безопасности, выстрелить из пружинного пистолета в вязкую массу цилиндра.
3. Определить с помощью горизонтально расположенной линейки величину смещения цилиндра  $S$ .

№	$m$ , г	$M$ , г	$l$ , см	$S$ , см	$\Delta S$ , см
1	2,0	200	150	14,0	0,6
2				12,5	0,9
3				13,0	0,4
4				13,5	0,1
5				12,0	1,4
Ср.				13,4	

4. Повторить опыты при одном и том же сжатии пружины

не менее пяти раз. Результаты измерений записать в таблицу.

5. Провести статистическую обработку результатов измерений и по формуле (6) определить скорость пули  $v$ .

6. Вычислить погрешность  $\Delta v$  и записать конечный результат измерений.

### Обработка результатов измерений

1. Вычисляем среднее значение смещения маятника  $S_{cp}$ :

$$S_{cp} = \frac{14,0 + 12,5 + 13,0 + 13,5 + 14,0}{5} = 13,4 \text{ см}$$

2. Вычислим среднее значение скорости пули:

$$v_{cp} = \frac{0,2 + 0,002}{0,002} 13,4 \cdot 10^{-2} \sqrt{\frac{9,8}{1,5}} = 34,6 \text{ м/с.}$$

3. Случайную погрешность смещения вычислим по формуле Стьюдента:

$$\Delta S_{cl} = 2,8 \sqrt{\frac{0,6^2 + 0,9^2 + 0,4^2 + 0,1^2 + 1,4^2}{20}} = 1,1 \text{ см.}$$

Так как  $\Delta S_{cl} > \Delta S_{np}$ ,  $\Delta S = \Delta S_{cl}$ .

4. Вычислим относительную погрешность измерений скорости пули по формуле

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{\Delta M + \Delta m}{M + m} + \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta S}{S} + \frac{\Delta g}{2g} + \frac{\Delta l}{2l}$$

$$\frac{\Delta v}{v} = \frac{0,5 + 0,5}{202} + \frac{0,05}{2} + \frac{1,5}{13,4} + \frac{0,01}{2 \cdot 9,8} + \frac{1}{2 \cdot 150} = 0,11$$

5. Абсолютная погрешность скорости пули

$$\Delta v = \left( \frac{\Delta v}{v} \right) v_{cp} = 0,11 \cdot 34,6 = 4 \text{ м/с.}$$

6. Запишем окончательный ответ в виде доверительного интервала с указанием доверительной вероятности

$$v = (35 \pm 4) \text{ м/с.} \quad P = 0,95.$$

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
Общие методические указания и требования к выполнению лабораторных работ.....	4
Обработка результатов измерений.....	6
1. Измерения и классификация погрешностей.....	6
2. Учет случайных ошибок при прямых измерениях.....	10
3. Погрешности косвенных измерений.....	14
4. Приборные погрешности .....	16
5. Погрешности табличных значений .....	19
6. Правила приближенных вычислений .....	20
7. Запись результатов измерений .....	22
8. Построение графиков .....	23
9. Порядок обработки результатов измерений .....	26
10. Пример расчета.....	28
 МЕХАНИКА.....	 30
<i>Лабораторная работа 1. Измерение линейных размеров и объемов твердых тел правильной формы.....</i>	 30
<i>Лабораторная работа 2. Изучение основных законов механики на машине Атвуда.....</i>	 35
<i>Лабораторная работа 3. Измерение коэффициента трения качения методом наклонного маятника.....</i>	 44
<i>Лабораторная работа 4. Изучение столкновения шаров .....</i>	 49
<i>Лабораторная работа 5. Изучение основного закона динамики вращательного движения.....</i>	 58
<i>Лабораторная работа 6. Определение момента инерции маятника .....</i>	 68
<i>Лабораторная работа 7. Измерение моментов инерции тел методом крутильных колебаний.....</i>	 74
<i>Лабораторная работа 8. Изучение гироскопа.....</i>	 85
<i>Лабораторная работа 9. Изучение плоского движения твердого тела с помощью маятника Максвелла.....</i>	 93
<i>Лабораторная работа 10. Определение скорости пули с помощью крутильного баллистического маятника.....</i>	 99

<i>Лабораторная работа 11. Изучение законов колебательного движения.....</i>	<i>105</i>
<i>Лабораторная работа 12. Изучение затухающих колебаний с помощью крутильного маятника.....</i>	<i>115</i>
<i>Лабораторная работа 13. Изучение вынужденных колебаний.....</i>	<i>120</i>
<i>Лабораторная работа 14. Изучение колебаний связанных систем.....</i>	<i>131</i>
<i>Список литературы.....</i>	<i>140</i>
<i>Приложения.....</i>	<i>141</i>

*Учебно-практическое издание*

АЛЕКСЕЕВ Владимир Германович  
АЛЕКСЕЕВ Сергей Владимирович

**МЕХАНИКА**

Практикум

2-е издание, переработанное и дополненное

Редактор Г.В. Плотникова

Компьютерная верстка и правка В.Г. Алексеева

Подписано в печать . Формат 60×84/16.

Бумага газетная. Печать офсетная. Гарнитура Times.

Усл. печ.л. . Уч.-изд. л. . Тираж 500 экз. Заказ №

Издательство Чувашского университета

Типография университета

428015 Чебоксары, Московский просп., 15