1. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВЫСШИХ ПОРЯДКОВ

Основные понятия

Опр. Дифференциальным уравнением *n*-го порядка называется уравнение вида: $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$.

В некоторых случаях это уравнение можно разрешить относительно $y^{(n)}$: $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$.

Так же, как и уравнение первого порядка, уравнения высших порядков имеют бесконечное количество решений.

Опр. Общее решение ДУ *n*-го порядка является функция вида $y = \varphi(x; C_1; C_2; \ldots; C_n)$, содержащей n произвольных, не зависящих от x постоянных.

Опр. Решение ДУ $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0$, получающееся из общего решения при конкретных значениях постоянных $C_1 = C_1^0$, $C_2 = C_2^0, \ldots,$ $C_n = C_n^0$, называется **частным решением**.

Опр. Решение $y = \varphi(x)$ удовлетворяет начальным условиям $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$, если $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y'_0$, ... , $\varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

Опр. Нахождение решения уравнения $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, удовлетворяющего начальным условиям $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$, называется **решением задачи Коши.**

Теорема Коши. (Теорема о необходимых и достаточных условиях существования решения задачи Коши).

Если в уравнении $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ *функция* $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ и ее частные производные *по* $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ непрерывны *в некоторой области D, то какова бы не была точка* $(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)})$ *в этой области, существует единственное решение* $y = \varphi(x)$ *уравнения* $y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, *определенного в некотором интервале, содержащем точку* x_0, *удовлетворяющее начальным условиям* $x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$.

Дифференциальные уравнения высших порядков, решение которых может быть найдено аналитически, можно разделить на несколько основных типов.

Рассмотрим подробнее методы нахождения решений этих уравнений.

2.1. Уравнения, допускающие понижение порядка.

Метод «понижение порядка» ДУ – основной метод решения уравнений высших порядков. Суть метода состоит в том, что с помощью замены переменной (подстановкой) данное ДУ сводится к уравнению, порядок которого ниже. Этот метод дает возможность сравнительно легко находить решение, однако, он применим далеко не ко всем уравнениям. Рассмотрим случаи, когда возможно понижение порядка.

1.1.1. Уравнения вида $y^{(n)} = f(x)$.

Если *f(x)* – функция непрерывная на некотором промежутке $a < x < b$, то решение может быть найдено последовательным интегрированием.

$$y^{(n-1)} = \int f(x)dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int\left(\int f(x)dx + C_1\right)dx + C_2 = \int dx\int f(x)dx + C_1x + C_2,$$

$$\dots$$

$$y = \int dx\int dx....\int f(x)dx + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2\frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + ... + C_n.$$

Пример1. Решить уравнение $y''' = e^{2x}$ с начальными условиями $x_0 = 0$, $y_0 = 1$, $y_0' = -1$, $y_0'' = 0$.

Решение: $y'' = \int e^{2x}dx + C_1 = \frac{1}{2}e^{2x} + C_1$, $y' = \int\left(\frac{1}{2}e^{2x} + C_1\right)dx = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2$,

$$y = \int\left(\frac{1}{4}e^{2x} + C_1x + C_2\right)dx = \frac{1}{8}e^{2x} + \frac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3.$$

Подставим начальные условия: $1 = \frac{1}{8} + C_3$, $-1 = \frac{1}{4} + C_2$, $0 = \frac{1}{2} + C_1$,

$$C_1 = -\frac{1}{2},\quad C_2 = -\frac{5}{4},\quad C_3 = \frac{7}{8}.$$

Получаем частное решение (решение задачи Коши): $y = \frac{1}{8}e^{2x} - \frac{1}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{7}{8}$.

Пример2: $y'' = \frac{1}{1+x^2}$.

Решение: $y' = \int\frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C_1 \Rightarrow y = \int(arctgx + C_1)dx = x(arctgx + C_1) - \ln\sqrt{1+x^2} + C_2$,

$$y = x(arctgx + C_1) - \ln\sqrt{1+x^2} + C_2.$$

2.1.2. Уравнения, не содержащие явно искомой функции и ее производных до порядка *k*-1 включительно.

Это уравнения вида: $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, ..., y^{(n)}) = 0$.

В уравнениях такого типа возможно понижение порядка на *k* единиц. Для этого производят замену переменной: $y^{(k)} = z(x)$, $y^{(k+1)} = z'$, ... $y^{(n)} = z^{(n-k)}$.

Тогда получаем: $F(x, z, z', ..., z^{(n-k)}) = 0$.

Теперь допустим, что полученное дифференциальное уравнение проинтегрировано и совокупность его решений выражается соотношением: $z = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$.

Делая обратную подстановку, имеем: $y^{(k)} = \psi(x, C_1, C_2, ..., C_{n-k})$

Интегрируя полученное соотношение последовательно *k* раз, получаем окончательный ответ: $y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n)$.

Пример1. Найти общее решение уравнения $y''' = \frac{y''}{x}$.

Решение. Применяем подстановку $z = y''$, $z' = y'''$, $z' = \frac{z}{x}$, $\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x}$, $\frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}$, $\int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x}$, $\ln|z| = \ln|x| + \ln C_1$, $z = C_1 x$.

Произведя обратную замену, получаем: $y'' = C_1 x$, $y' = \int C_1 x dx = \frac{C_1}{2}x^2 + C_2$,

$$y = \int\left(\frac{C_1}{2}x^2 + C_2\right)dx = \frac{C_1}{6}x^3 + C_2 x + C_3.$$

Общее решение исходного дифференциального уравнения: $y = Cx^3 + C_2 x + C_3$.

Отметим, что это соотношение является решением для всех значений переменной x кроме значения x=0.

<u>Пример 2.</u> $x^4 y''' + 2x^3 y'' = 1$, $y(1) = \frac{1}{2}$, $y'(1) = \frac{1}{2}$, $y''(1) = -1$.

Решение: Уравнение не содержит переменной y, y'' - самая «младшая» производная.

Замена: $y'' = p(x) \Rightarrow y''' = p'(x)$.

Получаем: $x^4 p' + 2x^3 p = 1 \,|\, : y$

$$p' + \frac{2}{x}p = \frac{1}{x^4}$$ - линейное уравнение I-го порядка

Замена: $p = uv \Rightarrow u'v + uv' + \frac{2}{x}uv = \frac{1}{x^4}$, $v\left(u' + \frac{2}{x}u\right) + uv' = \frac{1}{x^4}$

1) $u' = -\frac{2}{x}u$, $\frac{du}{u} = -\frac{2dx}{x}$

$u = \frac{1}{x^2}$

2) $\frac{v'}{x^2} = \frac{1}{x^4}$, $v' = \frac{1}{x^2}$

$v = -\frac{1}{x} + C_1$

Таким образом: $p = \frac{1}{x^2}\left(C_1 - \frac{1}{x}\right)$. Но $p = y'' \Rightarrow y'' = \frac{1}{x^2}\left(C_1 - \frac{1}{x}\right)$.

Т.к. $y''(1) = -1 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow y'' = -\frac{1}{x^3} \Rightarrow y' = -\int \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2x^2} + C_2$.

$$y' = \frac{1}{2x^2} + C_2, \text{ т.к. } y'(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow y' = \frac{1}{2x^2}$$

$$y = \int \frac{dx}{2x^2} = -\frac{1}{2x} + C_3, \text{ т.к. } y(1) = \frac{1}{2} \Rightarrow C_3 = 1,\ y = 1 - \frac{1}{2x}.$$

2.1.3. <u>Уравнения, не содержащие явно независимой переменной *x*.</u>

Это уравнения вида $F(y, y', ..., y^{(n)}) = 0$.

Порядок таких уравнений может быть понижен на единицу с помощью замены переменных $y' = p$, где $p = p(y(x))$.

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dp(y)}{dy}p, \quad y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = \frac{dy''}{dy}p = \frac{d\left(\frac{dp}{dy}p\right)}{dy}p = \frac{d^2p}{dy^2}p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p,$$

и т.д.

Подставляя эти значения в исходное дифференциальное уравнение, получаем: $F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, ..., \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0$.

Если это уравнение проинтегрировать, и $\Phi(y, p, C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0$ - совокупность его решений, то для решения данного ДУ остается решить уравнение первого порядка: $\Phi(y, y', C_1, C_2, ..., C_{n-1}) = 0.$

Пример 1. Найти общее решение уравнения $yy'' - (y')^2 - 4yy' = 0.$

Решение: Замена переменной: $p = y',\quad y'' = \frac{dp}{dy}p,\quad yp\frac{dp}{dy} - p^2 - 4yp = 0,$ $p\left(y\frac{dp}{dy} - p - 4y\right) = 0$.

1) $y\frac{dp}{dy} - p - 4y = 0,\quad \frac{dp}{dy} = 4 + \frac{p}{y}.$

Для решения полученного дифференциального уравнения произведем замену переменной: $u = \frac{p}{y}.$

$$u + \frac{du}{dy}y = 4 + u,\quad du = 4\frac{dy}{y},\ \int du = 4\int\frac{dy}{y},\quad u = 4\ln|y| + 4\ln C_1,\quad u = 4\ln|C_1 y|,\quad p = 4y\ln|C_1 y|.$$

С учетом того, что $p = \frac{dy}{dx}$, получаем: $\frac{dy}{dx} = 4y\ln|C_1 y|,\ \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x},\ \int\frac{dz}{z} = \int\frac{dx}{x},$

$$x = \frac{1}{4}\int\frac{d(\ln|C_1 y|)}{\ln|C_1 y|} = \frac{1}{4}\ln\left|\ln|C_1 y|\right| + C_2.$$

Общий интеграл имеет вид: $\ln\left|\ln|C_1 y|\right| = 4x + C.$

2) $p = 0,\quad y' = 0.\quad y = C.$ Таким образом, получили два общих решения.

Пример 2: $y'y''' - 2y''^2 = 0$.

Решение: Замена: $y' = p(y) \Rightarrow y'' = p'p \Rightarrow y''' = p''p^2 + p'^2 p$.

Получим: $p\left(p''p^2 + p'^2 p\right) - 3p'^2 p^2 = 0$, $p^3 p'' + p^2 p'^2 - 3p'^2 p^2 = 0$, $p^2\left(pp'' + p'^2 - 3p'^2\right) = 0$.

$$p^2\left(pp'' - 2p'^2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} p^2 = 0 \\ pp'' - 2p'^2 = 0 \end{array}\right.$$

1) $p^2 = 0$

$p = 0 \Rightarrow y'(x) = 0 \Rightarrow y(x) = C$.

2) $pp'' - 2p'^2 = 0$, где $p = p(y)$. Уравнение не содержит $y \Rightarrow$ замена:

$$p'(y) = z(p) \Rightarrow p'' = z'\cdot z \Rightarrow pz'z - 2z^2 = 0 \Rightarrow z(pz' - 2z) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 0 \\ pz - 2z = 0 \end{array}\right..$$

2.1) $z = 0 \Rightarrow p'(y) = 0 \Rightarrow p = C_1 \Rightarrow y'(x) = C_1 \Rightarrow y(x) = C_1 x + C_2$

2.2) $pz' = 2z$, $\frac{dz}{z} = \frac{2dp}{p} \Rightarrow z = Cp^2 \Rightarrow p' = C_1 p^2 \Rightarrow$

$\frac{dp}{p^2} = C_1 dy \Rightarrow -\frac{1}{p} = C_1 y + C_2 \Rightarrow p = -\frac{1}{C_1 y + C_2} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow -\frac{dx}{dy} = C_1 y + C_2 \Rightarrow -x = \frac{C_1 y^2}{2} + C_2 y + C_3 \Rightarrow$

$x = \tilde{C}_1 y^2 + \tilde{C}_2 y + \tilde{C}_3$, где $\tilde{C}_1 = -\frac{C_1}{2}$, $\tilde{C}_2 = -C_2$, $\tilde{C}_3 = C_3$.

$$y = C,$$

$$y(x) = C_1 x + C_2, \ x = \tilde{C}_1 y^2 + \tilde{C}_2 y + \tilde{C}_3.$$

1.2. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков Основные понятия

Опр. **Линейным дифференциальным уравнением *n*-го порядка** называется любое уравнение первой степени относительно функции y и ее производных $y', y'', ..., y^{(n)}$ вида:

$$b_0 y^{(n)} + b_1 y^{(n-1)} + b_2 y^{(n-2)} + ... + b_{n-1} y' + b_n y = g(x), \qquad (1)$$

где $b_0, b_1, ..., b_n$ – функции от x, причем $b_0 \neq 0$, а функция $g(x)$ – *его свободным членом.*

Опр. Если $g(x) \equiv 0$, то уравнение (1) называется **линейным однородным** уравнением (ЛОДУ), если $g(x) \neq 0$, то уравнение (1) называется **линейным неоднородным** уравнением (ЛНДУ).

Разделив уравнение (1) на $b_0 \neq 0$ и обозначив

$$a_1(x) = \frac{b_1(x)}{b_0(x)}, ..., \quad a_n(x) = \frac{b_n(x)}{b_0(x)}, \quad \frac{g(x)}{b_0(x)} = f(x),$$

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = f(x).$$

Рассмотрим способы интегрирования некоторых типов линейных дифференциальных уравнений высших порядков.

2.2.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения с произвольными коэффициентами.

Рассмотрим уравнение вида

$$y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}(x) y' + a_n(x) y = 0 \qquad (2)$$

Если функции $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), ..., y_n = y_n(x)$ - решение ЛОДУ, то любая их линейная комбинация $y(x) = C_1 y_1(x), + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x)$ является решением ЛОДУ.

Опр. Функции $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ называются **линейно зависимыми** на интервале (a, b), если существуют постоянные числа $C_1, C_2, ..., C_n$, не все равные нулю, что на (a, b) справедливо тождество

$$y(x) = C_1 y_1(x), + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x) \equiv 0 \qquad (3)$$

Если тождество (3) справедливо только при нулевых постоянных $C_1 = C_2 = ... = C_n = 0$, то функции $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ называются **линейно независимыми**.

Пример 1. Функции $y_1(x)=\sin^2 x,\ y_2(x)=\cos^2 x,\ y_3(x)\equiv 1$ линейно зависимы на всей числовой оси $\mathbb{R}$, так как существуют числа $y_1(x)=1\neq 0,\ \ y_2(x)=1\neq 0,$ $y_3(x)=-1\neq 0$, что $1\cdot\sin^2 x+1\cdot\cos^2 x-1\cdot 1\equiv 0$ на $\mathbb{R}$.

Функции $y_1(x)\equiv,\ y_2(x)=x,\ y_3(x)=x^2$ линейно независимы на всей числовой оси $\mathbb{R}$, так как линейная комбинация $C_1\cdot 1+C_2\cdot x+C_3\cdot x^2\equiv 0$ только при нулевых коэффициентах $C_1=C_2=C_3=0$.

Опр. Если из функций y_i составить определитель n-го порядка $W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$, то этот определитель называется **определителем Вронского (вронскиан)**(Юзеф Вроньский (1776 – 1853) – польский математик и философ - мистик).

Теорема. *Если функции $y_1,y_2,\dots,y_n$ линейно зависимы, то составленный для них определитель Вронского равен нулю.*

Теорема. *Если функции $y_1,y_2,\dots,y_n$ линейно независимы, то составленный для них определитель Вронского не равен нулю ни в одной точке рассматриваемого интервала.*

Частные решения $y_1,y_2,\dots,y_n$ уравнения (2) **образуют фундаментальную систему решений (ФСР)** на (a,b), если ни в одной этого интервала вронскиан не обращается в нуль, т.е. $W(x)\neq 0$ для всех $x\in(a,b)$.

Если $y_1,y_2,\dots,y_n$ - фундаментальная система решений на интервале (a, b), то общее решение ЛОДУ является линейной комбинацией этих решений, т.е. $y=C_1y_1+C_2y_2+\dots+C_ny_n$, где C_i ($i=1,\ \dots,\ n$) – постоянные коэффициенты.

Пример 2. Показать, что функции $y_1(x)=e^x,\ y_2(x)=xe^x,\ y_3(x)=x^2e^x$ образуют ФСР некоторого ЛОДУ третьего порядка и составить это уравнение.

Решение. Найдем $W(x)$:

$$W(x)=\begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & (1+x)e^x & (x^2+2x)e^x \\ e^x & (2+x)e^x & (x^2+4x+2)e^x \end{vmatrix}=e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & (1+x) & (x^2+2x) \\ 1 & (2+x) & (x^2+4x+2) \end{vmatrix}=e^{3x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 1 & 2x \\ 0 & 2 & 4x+2 \end{vmatrix}=$$

$=e^{3x}(4x+2-4x)=2e^{3x}$. Ясно, что $W(x)\neq 0$ для всех $x\in\mathbb{R}$. Следовательно, данные функции образуют ФСР ЛОДУ третьего порядка. В общем виде ЛОДУ третьего порядка выглядит так: $y'''+a_1y''+a_2y'+a_3y=0.$

Подставив функции y_1,y_2,y_3 в это уравнение, получим систему из трех уравнений относительно функций $a_1(x),a_2(x),a_3(x)$. Решая ее, получим ЛОДУ $y'''-3y''+3y'-y=0$, его общее решение: $y=C_1\cdot e^x+C_2\cdot xe^x+C_3\cdot x^2e^x$.

Общее решение линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка.

Из вышеизложенного видно, что отыскание общего решения линейного однородного дифференциального уравнения сводится к нахождению его фундаментальной системы решений.

Однако, даже для уравнения второго порядка, если коэффициенты *p* зависят от *x*, эта задача не может быть решена в общем виде.

Тем не менее, если известно одно ненулевое частное решение, то задача может быть решена.

Теорема. *Если задано уравнение вида* $y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$ *и известно одно ненулевое решение* $y = y_1$, *то общее решение может быть найдено по формуле*: $y = C_2 y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int p_1(x)dx} dx + C_1 y_1.$

Таким образом, для получения общего решения надо подобрать какое – либо частное решение дифференциального уравнения, хотя это бывает часто довольно сложно.

Пример. Решить уравнение $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0.$

Решение: Это линейное однородное дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами второго порядка. Для нахождения общего решения необходимо отыскать какое - либо частное решение.

Таким частным решением будет являться функция $y_1 = x.$

$$y_1' = 1; \quad y_1'' = 0; \; 0 - 2x + 2x = 0.$$

Исходное дифференциальное уравнение можно преобразовать: $y'' - \frac{2x}{1 - x^2} y' + \frac{2y}{1 - x^2} = 0.$

Общее решение имеет вид: $y = C_1 x \int \frac{1}{x^2} e^{\int \frac{2x}{1-x^2}dx} dx + C_2 x; \quad y = C_1 x \int \frac{e^{-\ln(1-x^2)}}{x^2} dx + C_2 x;$

$$y = C_1 x \int \frac{dx}{x^2(1 - x^2)} + C_2 x; \quad y = C_2 x + C_1 x \int \left[\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2(1 - x)} + \frac{1}{2(1 + x)} \right] dx;$$

$$y = C_2 x + C_1 x \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln\left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| \right];$$

Окончательно: $y = C_2 x + C_3 x \ln\left| \frac{1 + x}{1 - x} \right| + C_4.$

2.2.2. Линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Решение дифференциального уравнения вида $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0$ (4), где a_i, $i = \overline{1, n}$ - числа, будем искать в виде $y = e^{kx}$, где $k = const$.

Т.к. $y' = ke^{kx}$, $y'' = k^2 e^{kx}$, ..., $y^{(n)} = k^n e^{kx}$, то подставляя найденные производные в уравнение (4), получаем: $e^{kx}(k^n + a_1 k^{n-1} + \ldots + a_n)$ =0.

<u>Опр.</u> Многочлен $F(k) = k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n$ называется **характеристическим многочленом** дифференциального уравнения.

Для того, чтобы функция $y = e^{kx}$ являлась решением исходного дифференциального уравнения, необходимо и достаточно, чтобы $e^{kx}F(k) = 0.$

Т.к. $e^{kx} \neq 0$, то $F(k) = 0$ - это уравнение называется **характеристическим уравнением**.

Как и любое алгебраическое уравнение степени *n*, характеристическое уравнение $k^n + a_1 k^{n-1} + ... + a_n = 0$ имеет *n* корней. Каждому корню характеристического уравнения k_i соответствует решение дифференциального уравнения.

В зависимости от коэффициентов *k* характеристическое уравнение может иметь либо *n* различных действительных корней, либо среди действительных корней могут быть кратные корни, могут быть комплексно – сопряженные корни, как различные, так и кратные.

Не будем подробно рассматривать каждый случай, а сформулируем общее правило нахождения решения линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

1) Составляем характеристическое уравнение и находим его корни.

2) Находим частные решения дифференциального уравнения, причем:

а) каждому действительному корню соответствует решение e^{kx}:

<u>Пример 1.</u> Решить уравнение $y''' - 7y'' + 6y' = 0.$

Решение: Характеристическое уравнение: $k^3 - 7k^2 + 6k = 0, \qquad k(k^2 - 7k + 6) = 0,$ $k_1 = 0, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 6.$

Общее решение: $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{6x}.$

б) каждому действительному корню кратности *m* ставится в соответствие *m* решений:

$$e^{kx}, \quad xe^{kx}, \quad ..., \quad x^{m-1}e^{kx}.$$

<u>Пример 2.</u> Решить уравнение $y'' - 4y' + 4y = 0.$

Решение. Характеристическое уравнение: $k^2 - 4k + 4 = 0 \Rightarrow (k-2)^2 = 0,$ $k_1 = 2, \quad k_2 = 2.$

Общее решение: $y = C_1 e^{2x} + C_2 x e^{2x}.$

в) каждой паре комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнение ставится в соответствие два решения: $e^{\alpha x}\cos\beta x$ и $e^{\alpha x}\sin\beta x$.

<u>Пример 3.</u> Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 0.$

Решение: Характеристическое уравнение:

$k^2 + 2k + 5 = 0 \Rightarrow D = -16, \qquad k_1 = -1 + 2i, \quad k_2 = -1 - 2i.$

Общее решение: $y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$

г) каждой паре m – кратных комплексно – сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ характеристического уравнения ставится в соответствие $2m$ решений:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \quad ..., \quad x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x, \quad xe^{\alpha x}\sin\beta x, \quad ..., \quad x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

3) Составляем линейную комбинацию найденных решений.

Эта линейная комбинация и будет являться общим решением исходного линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами.

Пример 4. Решить уравнение $y^{V} + y^{IV} + 2y''' + 2y'' + y' + y = 0.$

Решение: Характеристическое уравнение:

$k^5 + k^4 + 2k^3 + 2k^2 + k + 1 = 0, \qquad (k+1)(k^4 + 2k^2 + 1) = 0,$

$k_1 = -1, k_2 = i, k_3 = -i, k_4 = i, k_{\ 3} = -i.$

Общее решение: $y = C_1 e^{-x} + C_2\cos x + C_3 \sin x + C_2 x\cos x + C_3 x \sin x.$

Корни характеристического уравнения	**Частные решения**	**Общее решение**
k - простой вещественный корень	e^{kx}	Ce^{kx}
k - вещественный корень кратности m	$e^{kx}, \quad xe^{kx}, \quad ..., \quad x^{m-1}e^{kx}$	$e^{kx}(C_1 + C_2 x + ... + C_m x^{m-1})$
$\alpha \pm i\beta$ - комплексно–сопряженные корни	$e^{\alpha x}\cos\beta x$, $e^{\alpha x}\sin\beta x$	$e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$
$\alpha \pm i\beta$ - комплексно–сопряженные корни кратности m	$e^{\alpha x}\cos\beta x, \quad xe^{\alpha x}\cos\beta x, \quad ...,$ $x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \text{ и } e^{\alpha x}\sin\beta x,$ $xe^{\alpha x}\sin\beta x, \quad ..., \quad x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$	$e^{\alpha x}((C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x) +$ $+x(C_3\cos\beta x + C_4\sin\beta x) + ... +$ $+x^{m-1}(C_{2m+1}\cos\beta x + C_{2m+2}\sin\beta x).$

2.2.3. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с произвольными коэффициентами.

Рассмотрим уравнение вида $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + ... + a_n(x)y = f(x)$ (5).

При этом будем полагать, что коэффициенты и правая часть этого уравнения непрерывны на некотором интервале (конечном или бесконечном).

Теорема. *Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения (5) в некоторой области есть сумма* ***любого*** *его решения и общего* *решения соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения, т.е.* $y = y_{о.о.} + y_{ч.н.}$

<u>Теорема (о наложении решений).</u> *Если правая часть уравнения (5) представляет собой сумму двух функций:* $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, а $y^1_{о.о.}$ *и* $y^2_{о.о.}$ - *частные решения уравнений* $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f_1(x)$ и $y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = f_2(x)$ соответственно, то функция $y_{о.о.} = y^1_{о.о.} + y^2_{о.о.}$ *является решением данного уравнения.*

Для нахождения $y_{ч.н.}$ можно применить метод **вариации произвольных постоянных (метод Лагранжа)**, который состоит в следующем:

1) находят общее решение соответствующего однородного уравнения в виде: $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n = \sum_{i=1}^{n} C_iy_i$;

2) полагая коэффициенты C_i функциями от x, ищется решение неоднородного уравнения: $y = \sum_{i=1}^{n} C_i(x)y_i$.

3) Для нахождения функций $C_i(x)$ надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i' = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{i=1}^{n} C_i'(x)y_i^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

, которая всегда имеет решение $C_i'(x),\ i = \overline{1,n}$. Вычисляя от полученных функций интегралы, находят $C_i(x)$.

<u>Пример.</u> Решить уравнение $y'' + y = x - \sin 2x$.

Решение: Решаем линейное однородное уравнение $y'' + y = 0$.

$$k^2 + 1 = 0 \Rightarrow k_1 = i, \quad k_2 = -i.$$

$$y = e^{\alpha x}(A\cos\beta x + B\sin\beta x), \quad \alpha = 0, \quad \beta = 1 \Rightarrow \ y = A\cos x + B\sin x.$$

Решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$y = A(x)\cos x + B(x)\sin x$.

Составляем систему уравнений: $\begin{cases} A'(x)\cos x + B'(x)\sin x = 0 \\ -A'(x)\sin x + B'(x)\cos x = x - \sin 2x \end{cases}$.

Решим эту систему:

$$\begin{cases} B'(x) = -A'(x)\dfrac{\cos x}{\sin x} \\ -A'(x)\sin x - A'(x)\dfrac{\cos^2 x}{\sin x} = x - \sin 2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-A'(x)}{\sin x} = x - \sin 2x \\ B'(x) = \cos x(x - \sin 2x) \end{cases}.$$

Из соотношения $A'(x) = 2\sin^2 x\cos x - x\sin x$ найдем функцию *A(x)*.

$$A(x) = \int\left(2\sin^2 x\cos x - x\sin x\right)dx = 2\int\sin^2 x\cos x dx - \int x\sin x dx = \frac{2}{3}\sin^3 x - \int x\sin x dx =$$

$$=\begin{Bmatrix} u=x & dv=\sin x dx \\ du=dx & v=-\cos x \end{Bmatrix}=\frac{2}{3}\sin^3 x+x\cos x-\int\cos x dx=\frac{2}{3}\sin^3 x+x\cos x-\sin x+C_1.$$

Теперь находим *B(x)*.

$$B(x)=\int x\cos x dx-2\int\cos^2 x\sin x dx=\begin{Bmatrix} u=x & dv=\cos x dx \\ du=dx & v=\sin x \end{Bmatrix}=x\sin x-\int\sin x dx+\frac{2}{3}\cos^3 x=$$

$$=\frac{2}{3}\cos^3 x+x\sin x+\cos x+C_2.$$

Подставляем полученные значения в формулу общего решения неоднородного уравнения:

$$y=\frac{2}{3}\sin^3 x\cos x+x\cos^2 x-\sin x\cos x+C_1\cos x+\frac{2}{3}\sin x\cos^3 x+x\sin^2 x+\sin x\cos x+C_2\sin x=$$

$$=\frac{2}{3}\sin x\cos x(\sin^2 x+\cos^2 x)+x(\sin^2 x+\cos^2 x)+C_1\cos x+C_2\sin x.$$

Окончательный ответ: $y=\frac{1}{3}\sin 2x+x+C_1\cos x+C_2\sin x.$

Таким образом, удалось избежать нахождения частного решения неоднородного уравнения методом подбора или методом неопределенных коэффициентов.

Вообще говоря, метод вариации произвольных постоянных пригоден для нахождения решений любого линейного неоднородного уравнения. Но т.к. нахождение фундаментальной системы решений соответствующего однородного уравнения может быть достаточно сложной задачей, этот метод в основном применяется для неоднородных уравнений с постоянными коэффициентами.

2.2.4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.

Уравнения с правой частью специального вида.

Представляется возможным представить вид частного решения в зависимости от вида правой части неоднородного уравнения $y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+...+a_n(x)y=f(x)$ (6).

Различают следующие случаи:

I. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид: $f(x)=P(x)e^{\alpha x}$,

где $P(x)=A_0x^m+A_1x^{m-1}+...+A_m$ - многочлен степени *m*.

Тогда частное решение ищется в виде: $y=x^r e^{\alpha x}Q(x)$

Здесь *Q(x)* - многочлен той же степени, что и *P(x)*, но с неопределенными коэффициентами, а *r* – число, показывающее сколько раз число α является корнем характеристического уравнения для соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения.

Пример 1. Решить уравнение $y'''-4y'=x$.

Решение: Решим соответствующее однородное уравнение: $y''' - 4y' = 0.$

$$k^3 - 4k = 0, \quad k(k^2 - 4) = 0 \Rightarrow \quad k_1 = 0, \quad k_2 = 2, \quad k_3 = -2.$$

$$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}.$$

Теперь найдем частное решение исходного неоднородного уравнения.

Сопоставим правую часть уравнения с видом правой части, рассмотренным выше.

$$P(x) = x, \quad \alpha = 0.$$

Частное решение ищем в виде: $y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$, где $r = 1, \quad \alpha = 0, \quad Q(x) = Ax + B.$

Т.е. $y = Ax^2 + Bx.$

Теперь определим неизвестные коэффициенты A и B.

Подставим частное решение в общем виде в исходное неоднородное дифференциальное уравнение, т.е. $y' = 2Ax + B, \quad y'' = 2A, \quad y''' = 0.$

$$0 - 8Ax - 4B = x, \quad -8A = 1, \quad A = -\frac{1}{8}, \quad B = 0.$$

Итого, частное решение: $y = -\dfrac{x^2}{8}.$ Тогда общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения: $y = -\dfrac{x^2}{8} + C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 e^{-2x}.$

<u>Пример 2.</u> Решить уравнение $y'' - 2y' + y = 3e^x.$

Решение: Составим характеристическое уравнение для соответствующего ЛОДУ: $k^2 - 2k + 1 - 0, \quad k_1 = k_2 = 1.$ Общее решение однородного уравнения: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x.$ Теперь найдем частное решение неоднородного уравнения в виде: $y = x^r e^{\alpha x} Q(x)$, где $\alpha = 1, \ r = 2, \ Q(x) = C, \ \ y = Cx^2 e^x.$

Воспользуемся методом неопределенных коэффициентов: $y' = 2Cxe^x + Cx^2 e^x,$

$$y'' = 2Ce^x + 2Cxe^x + 2Cxe^x + Cx^2 e^x.$$

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$2Ce^x + 4Cxe^x + Cx^2 e^x - 4Cxe^x - 2Cx^2 e^x + Cx^2 e^x = 3e^x \Rightarrow 2C = 3, \quad C = \frac{3}{2}.$$

Частное решение имеет вид: $y = \dfrac{3}{2} x^2 e^x.$

Общее решение линейного неоднородного уравнения: $y = C_1 e^x + C_2 x e^x + \dfrac{3}{2} x^2 e^x.$

<u>Пример 3.</u> Решить уравнение $y''' - y' = x^2 - 1.$

Решение: Характеристическое уравнение:

$k^3 - k = 0, \quad k(k^2 - 1) = 0, \quad k_1 = 0, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = -1.$

Общее решение однородного уравнения: $y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x}.$

Частное решение неоднородного уравнения: $y = x^r e^{\alpha x} Q(x).$

$$\alpha = 0, \quad r = 1, \quad Q(x) = Ax^2 + Bx + C \Rightarrow \quad y = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

Находим производные и подставляем их в исходное неоднородное уравнение:

$$y' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad y'' = 6Ax + 2B, \quad y''' = 6A$$

$$6A - 3Ax^2 - 2Bx - C = x^2 - 1 \Rightarrow \begin{cases} -3A = 1, \\ -2B = 0, \\ 6A - C = -1. \end{cases} \Rightarrow A = -\frac{1}{3}, \quad B = 0, \quad C = -1.$$

Получаем общее решение неоднородного дифференциального уравнения:
$y = C_1 + C_2 e^x + C_3 e^{-x} - \frac{1}{3}x^3 - x.$

II. Правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения имеет вид:

$$f(x) = e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x\right]$$

Здесь $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ – многочлены степени n и m соответственно, α и β - действительные числа. Тогда частное решение неоднородного уравнения будет иметь вид:

$y = x^r e^{\alpha x}\left[M_l(x)\cos\beta x + N_l(x)\sin\beta x\right]$, где число r показывает сколько раз число $\alpha + i\beta$ является корнем характеристического уравнения для соответствующего однородного уравнения, а $M_1(x)$ и $N_1(x)$ – многочлены степени l с неопределенными коэффициентами, l - наивысшая степень многочленов $P_n(x)$ и $Q_m(x)$, т.е. $l=\max(n, m)$.

Пример 1. Решить уравнение $y'' - 4y' + 13y = 40\cos 3x.$

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение: $k^2 - 4k + 13 = 0, \quad k_{1,2} = 2 \pm 3i.$ Следовательно, $y_{o.o.} = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x)$.

Для функции $f(x) = 40\cos 3x$ решение ищем в виде:

$$y = x^r e^{\alpha x}(M_l(x)\cos\beta x + N_l(x)\sin\beta x) .$$

Анализируя функцию $f(x)$, получаем: $P_n(x) = 40, \quad Q_m(x) = 0, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 3, \quad r = 0.$

Таким образом, $y_{ч.н.} = A\cos 3x + B\sin 3x$, $y_{ч.н.}{}' = -3A\sin 3x + 3B\cos 3x$, $y_{ч.н.}{}'' = -9A\cos 3x - 9B\sin 3x,$

$-9A\cos 3x - 9B\sin 3x - 4(-3A\cos 3x + 3B\sin 3x) + 13(A\cos 3x + B\sin 3x) = 40\cos 3x$, или

$$(-9A - 12B + 13A)\cos 3x + (-9B + 12A + 13B)\sin 3x = 40\cos 3 + 0\cdot\sin 3x .$$

Следовательно, $A = 1, B = -3.$ Итого: $y_{ч.н.} = \cos 3x - 3\sin 3x.$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения:
$y = e^{2x}(C_1\cos 3x + C_2\sin 3x) + \cos 3x - 3\sin 3x$ - общее решение уравнения.

Заметим, что если правая часть уравнения является комбинацией выражений рассмотренного выше вида, то решение находится как комбинация решений вспомогательных уравнений, каждое из которых имеет правую часть, соответствующую выражению, входящему в комбинацию.

Для иллюстрации решим рассмотренный выше пример другим способом.

Пример 2. Решить уравнение $y'' + y = x - \sin 2x.$

Решение. Правую часть дифференциального уравнения представим в виде суммы двух функций $f_1(x) + f_2(x) = x + (-\sin x)$.

Составим и решим характеристическое уравнение: $k^2 + 1 = 0, \quad k_{1,2} = \pm i$.

1. Для функции $f_1(x)$ решение ищем в виде $y_1 = x^r e^{\alpha x} Q(x)$.

Получаем: $\alpha = 0, \quad r = 0, \quad Q(x) = Ax + B$. Т.е. $y_1 = Ax + B, \; y_1' = A, \quad y_1'' = 0$.

$$Ax + B = x, \quad A = 1, \quad B = 0.$$

Итого: $y_1 = x$.

2. Для функции $f_2(x)$ решение ищем в виде:

$$y_2 = x^r e^{\alpha x}(Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x).$$

Анализируя функцию $f_2(x)$, получаем:

$P_1(x) = 0, \quad P_2(x) = -1, \quad \alpha = 0, \quad \beta = 2, \quad r = 0.$

Таким образом, $y_2 = C\cos 2x + D\sin 2x$, $y_2' = -2C\sin 2x + 2D\cos 2x$,

$y_2'' = -4C2\cos x - 4D\sin 2x, \quad -4C\cos 2x - 4D\sin 2x + C\cos 2x + D\sin 2x = -\sin 2x$,

$-3C\cos 2x - 3D\sin 2x = -\sin 2x$, $A = 0, B = \frac{1}{3}$. Итого: $y_2 = \frac{1}{3}\sin 2x$.

Т.е. искомое частное решение имеет вид: $y = y_1 + y_2 = \frac{1}{3}\sin 2x + x$.

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$y = \frac{1}{3}\sin 2x + x + C_1\cos x + C_2\sin x.$$

3. Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Основные понятия

Опр. Совокупность соотношений вида: $\begin{cases} F_1(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ F_2(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_n(x, y_1, y_2, ..., y_n, y_1', y_2', ..., y_n') = 0 \end{cases}$,

где x - независимая переменная, $y_1, y_2, ..., y_n$ – искомые функции, называется **системой дифференциальных уравнений первого порядка**.

Опр. Система дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных от неизвестных функций называется **нормальной системой дифференциальных уравнений**.

Такая система имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dfrac{dy_2}{dx} = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \qquad (1)$$

Для примера можно сказать, что график решения системы двух дифференциальных уравнений представляет собой интегральную кривую в трехмерном пространстве.

Опр. **Общим решением** системы дифференциальных уравнений вида (1) будет совокупность функций $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, $y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, …, $y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, ..., C_n)$, которые при подстановке в систему (1) обращают ее в тождество.

Начальные условия для системы (1) имеют вид

$$y_1(x_0) = y_1^0,\ y_2(x_0) = y_2^0,\ \dots,\ y_n(x_0) = y_n^0. \qquad (2)$$

Опр. Решение, получающееся из общего при конкретных значениях постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$, называется **частным решением** системы (1).

Задача Коши для системы (1) ставится следующим образом: найти решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям (2).

Теорема. (Теорема Коши). Если в системе (1) все функции $f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, $f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n)$, …, $f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n)$ в некоторой области D (n+1)–мерного пространства непрерывны и имеют непрерывные частные производные по $y_1, y_2, ..., y_n$, то для любой точки $M_0(x_0, y_1^0, y_2^0, ..., y_n^0)$ этой области существует, и притом единственное, решение $y_1 = \varphi_1(x)$, $y_2 = \varphi_2(x)$, … $y_n = \varphi_n(x)$ системы дифференциальных уравнений вида (1), удовлетворяющее начальным условиям (2).

3.1. Нормальные системы линейных однородных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

При рассмотрении систем дифференциальных уравнений ограничимся случаем системы трех уравнений (n = 3). Все нижесказанное справедливо для систем произвольного порядка.

Опр. Нормальная система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами называется **линейной однородной**, если ее можно записать в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = a_{11}y + a_{12}z + a_{13}u \\ \dfrac{dz}{dx} = a_{21}y + a_{22}z + a_{23}u \\ \dfrac{du}{dx} = a_{31}y + a_{32}z + a_{33}u \end{cases} \qquad (3)$$

Решения системы (3) обладают следующими свойствами:

1) Если y, z, u – решения системы, то Cy, Cz, Cu, где $C = const$ – тоже являются решениями этой системы.

2) Если y_1, z_1, u_1 и y_2, z_2, u_2 – решения системы, то $y_1 + y_2, z_1 + z_2, u_1 + u_2$ – тоже являются решениями системы.

Решения системы ищутся в виде: $y = \alpha e^{kx}; \quad z = \beta e^{kx}; \quad u = \gamma e^{kx}, \quad \alpha, \beta, \gamma, k = const$

Подставляя эти значения в систему (3) и перенеся все члены в одну сторону и сократив на $e^{kx} \neq 0$, получаем:

$$\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta + a_{13}\gamma = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta + a_{23}\gamma = 0 \\ a_{31}\alpha + a_{32}\beta + (a_{33} - k)\gamma = 0 \end{cases}$$

Для того, чтобы полученная система имела ненулевое решение необходимо и достаточно, чтобы определитель системы был равен нулю, т.е.:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - k \end{vmatrix} = 0$$

В результате вычисления определителя получаем уравнение третьей степени относительно k. Это уравнение называется **характеристическим уравнением** и имеет три корня k_1, k_2, k_3. Каждому из этих корней соответствует ненулевое решение системы (3):

$$y_1 = \alpha_1 e^{k_1 x}, \qquad z_1 = \beta_1 e^{k_1 x}, \qquad u_1 = \gamma_1 e^{k_1 x},$$

$$y_2 = \alpha_2 e^{k_2 x}, \qquad z_2 = \beta_2 e^{k_2 x}, \qquad u_2 = \gamma_2 e^{k_2 x},$$
$$y_3 = \alpha_3 e^{k_3 x}, \qquad z_3 = \beta_3 e^{k_3 x}, \qquad u_3 = \gamma_3 e^{k_3 x}.$$

Линейная комбинация этих решений с произвольными коэффициентами будет решением системы (3):

$$y = C_1\alpha_1 e^{k_1 x} + C_2\alpha_2 e^{k_2 x} + C_3\alpha_3 e^{k_3 x};$$
$$z = C_1\beta_1 e^{k_1 x} + C_2\beta_2 e^{k_2 x} + C_3\beta_3 e^{k_3 x};$$
$$u = C_1\gamma_1 e^{k_1 x} + C_2\gamma_2 e^{k_2 x} + C_3\gamma_3 e^{k_3 x}.$$

Пример 1. Найти общее решение системы уравнений: $\begin{cases} x' = 5x + 2y \\ y' = 2x + 2y \end{cases}$.

Решение: Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 5-k & 2 \\ 2 & 2-k \end{vmatrix} = 0, \quad (5-k)(2-k) - 4 = 0,\ k^2 - 7k + 6 = 0 \Rightarrow k_1 = 1,\ k_2 = 6.$$

Решим систему уравнений: $\begin{cases} (a_{11} - k)\alpha + a_{12}\beta = 0 \\ a_{21}\alpha + (a_{22} - k)\beta = 0 \end{cases}$.

Для k_1=1: $\begin{cases} (5-1)\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + (2-1)\beta_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4\alpha_1 + 2\beta_1 = 0 \\ 2\alpha_1 + \beta_1 = 0 \end{cases}$

Полагая $\alpha_1 = 1$ (принимается любое значение), получаем: $\beta_1 = -2$.

Для k_2=6: $\begin{cases} (5-6)\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 + (2-6)\beta_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -1\alpha_2 + 2\beta_2 = 0 \\ 2\alpha_2 - 4\beta_2 = 0 \end{cases}$

Полагая $\alpha_2 = 2$ (принимается любое значение), получаем: $\beta_2 = 1$.

Общее решение системы: $\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{6t} \\ y = -2C_1 e^t + C_2 e^{6t} \end{cases}$

2 способ. Этот пример может быть решен другим способом. Продифференцируем первое уравнение: $x'' = 5x' + 2y'$.

Подставим в это выражение производную $y' = 2x + 2y$ из второго уравнения, т.е. $x'' = 5x' + 4x + 4y$.

Подставим сюда y, выраженное из первого уравнения:

$$x'' = 5x' + 4x + 2x' - 10x, \ x'' - 7x' + 6x = 0, \ k_1 = 6; \qquad k_2 = 1.$$

Тогда $x = Ae^t + Be^{6t}, \quad x' = Ae^t + 6Be^{6t}, \ 2y = x' - 5x = Ae^t + 6Be^{6t} - 5Ae^t - 5Be^{6t},$

$$y = -2Ae^t + \frac{1}{2}Be^{6t}.$$

Обозначив $A = C_1, \ \frac{1}{2}B = C_2$, получаем решение системы: $\begin{cases} x = C_1 e^t + 2C_2 e^{6t} \\ y = -2C_1 e^t + C_2 e^{6t} \end{cases}$.

Пример 2. Найти решение системы уравнений: $\begin{cases} y' = z + w \\ z' = 3y + w \\ w' = 3y + z \end{cases}.$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} -k & 1 & 1 \\ 3 & -k & 1 \\ 3 & 1 & -k \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad -k\begin{vmatrix} -k & 1 \\ 1 & -k \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -k \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$$-k(k^2-1) + 3k + 3 + 3 + 3k = 0 \Rightarrow k^3 - 7k - 6 = 0 \Rightarrow k_1 = -1, \quad k_2 = -2, \quad k_3 = 3.$$

1) k = -1: $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha = 0, \quad \beta = -\gamma.$

Если принять $\gamma = 1$, то решения в этом случае получаем:

$y_1 = 0, \quad z_1 = -e^{-x}, \quad w_1 = e^{-x}.$

2) k_2 = -2: $\begin{cases} 2\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta + 2\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha = -\gamma, \quad \beta = \gamma.$

Если принять $\gamma = 1$, то получаем: $y_2 = -e^{-2x}, \quad z_2 = e^{-2x}, \quad w_2 = e^{-2x}.$

3) k_3 = 3: $\begin{cases} -3\alpha + \beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha - 3\beta + \gamma = 0 \\ 3\alpha + \beta - 3\gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \alpha = \frac{2}{3}\gamma, \quad \beta = \gamma.$

Если принять $\gamma = 3$, то получаем: $y_3 = 2e^{3x}, \quad z_3 = 3e^{3x}, \quad w_3 = 3e^{3x}.$

Общее решение имеет вид: $\begin{cases} y = -C_2e^{-2x} + 2C_3e^{3x} \\ z = -C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + 3C_3e^{3x} \\ w = C_1e^{-x} + C_2e^{-2x} + 3C_3e^{3x} \end{cases}.$

Метод исключения неизвестных

Этот способ удобен для решения лишь несложных систем.

Путем исключения неизвестных систему можно свести к уравнению более высокого порядка, но с одной неизвестной функцией.

Пример 1. Решить систему ДУ

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} + 2y + 4z = 1 + 4x \\ \dfrac{dz}{dx} + y - z = \dfrac{3}{2}x^2. \end{cases}$$

Решение:

1) Продифференцируем первое уравнение по x: $\dfrac{d^2y}{dx^2} + 2\dfrac{dy}{dx} + 4\dfrac{dz}{dx} = 4.$

2) Из первого уравнения легко определяется z: $z=\frac{1}{4}\left(1+4x-\frac{dy}{dx}-2y\right)$

и тогда из второго уравнения будем иметь: $\frac{dz}{dx}=\frac{3}{2}x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}y-\frac{1}{4}\frac{dy}{dx}$.

Подставляя z и $\frac{dz}{dx}$ в уравнение, полученное после дифференцирования, получим: $\frac{d^2y}{dx^2}+2\frac{dy}{dx}+4\left(\frac{3}{2}x^2+x+\frac{1}{4}-\frac{3}{2}y-\frac{1}{4}\frac{dy}{dx}\right)=4$, $\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{dy}{dx}-6y=-6x^2-4x+3$.

Т.е. $y''+y'-6y=-6x^2-4x+3$.

Решая его, получим: $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}+x^2+x$.

Тогда $z=\frac{1}{4}\left(1+4x-\frac{dy}{dx}-2y\right)=-C_1e^{2x}+\frac{C_2}{4}e^{-3x}-\frac{x^2}{2}-x$.

Следовательно, $\begin{cases} y=C_1e^{2x}+C_2e^{-3x}+x^2+x \\ z=-C_1e^{2x}+\frac{C_2}{4}e^{-3x}-\frac{x^2}{2}-x. \end{cases}$