Интегральное исчисление.

Первообразная функция.

Задача нахождения первообразной есть задача, обратная задаче дифференцирования: по заданной производной или по заданному дифференциалу найти саму функцию.

Функцию, восстанавливаемую по заданной производной или дифференциалу, называют **первообразной функцией.**

Опр. Функция $F(x)$ называется **первообразной** функцией для функции $f(x)$ на некотором промежутке, если $F'(x) = f(x)$ для любого x из этого промежутка.

Рассмотрим функции:

$F_1(x) = x^4$ $\qquad F_2(x) = x^4 + 3$ $\qquad F_3(x) = x^4 - 7$

Все они являются первообразными для одной и той же функции: $f(x) = 4x^3$.

$F_1'(x) = 4x^3 = f(x)$, $\quad F_2'(x) = \left(x^4+3\right)' = 4x^3 = f(x)$, $\quad F_3'(x) = \left(x^4-7\right)' = 4x^3 = f(x)$

Заметим, что эти функции отличаются друг от друга только константами, имея общую часть $F(x) = x^4$.

Таким образом, все первообразные функции $f(x)$ можно записать с помощью одной формулы, которую называют **общим видом первообразных для функции** $f(x)$.

Справедлива следующая теорема (основное свойство первообразных).

Теорема: Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на некотором промежутке, то множество всех первообразных для функции $f(x)$ задается формулой: $F(x)+C$, где C - произвольная постоянная.

Операция нахождения первообразной функции по ее производной (или ее дифференциалу) называется **интегрированием.**

Правильность интегрирования проверяется дифференцированием.

1.Неопределенный интеграл.

Опр: Неопределенным интегралом функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением: F(x) + C.

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C$;

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1^0. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+C)' = f(x)$;

2^0. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$;

3^0. $\int dF(x) = F(x) + C$;

4^0. $\int (u+v-w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx$; где u, v, w – некорые функции от x.

5^0. $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx$;

Замечание 1. Дифференцирование и интегрирование функций являются взаимно обратными операциями.

Замечание 2. Последовательное применение операций дифференцирования и интегрирования $\left(\int d, d\int\ \right)$ взаимно уничтожает друг друга.

Замечание 3. Неопределенный интеграл не зависит от обозначения переменной интегрирования. Он зависит только от вида подынтегральной функции.

Пример1: $\int (x^2-2\sin x+1)dx=\int x^2dx-2\int \sin xdx+\int dx=\frac{1}{3}x^3+2\cos x+x+C;$

Нахождение значения неопределенного интеграла связано главным образом с нахождением первообразной функции. Для некоторых функций это достаточно сложная задача. Ниже будут рассмотрены способы нахождения неопределенных интегралов для основных классов функций – рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и др.

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

1. $\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \alpha\neq -1$	7. $\int tgxdx$ =-ln|cosx|+C	13. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}}=\ln\left\|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right\|+C$
2. $\int \frac{dx}{x}=\ln\|x\|+C$	8. $\int ctgxdx$ = ln|sinx|+C	14. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\arcsin\frac{x}{a}+C$
3. $\int e^xdx=e^x+C$	9. $\int shxdx=chx+C$	15. $\int \frac{1}{\cos x}dx=\ln\left\|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\|+C$
4. $\int a^xdx=\frac{a^x}{\ln a}+C$	10. $\int chxdx=shx+C$	16. $\int \frac{1}{\sin x}dx=\ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\|+C$
5. $\int \cos xdx$ = sinx + C	11. $\int \frac{1}{\sin^2 x}dx$ =-ctgx + C	17. $\int \frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x+a}{x-a}\right\|+C$
6. $\int \sin xdx$ =-cosx + C	12. $\int \frac{1}{\cos^2 x}dx$ = tgx + C	18. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$

19. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{2}+C$;

20. $\int \sqrt{x^2\pm a^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{x^2\pm a^2}\pm\frac{a^2}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C$.

Методы интегрирования.

Рассмотрим три основных метода интегрирования.

1.Непосредственное интегрирование.

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Или при котором данный интеграл путем тождественных преобразований подынтегральных функций и применением свойств неопределенных интегралов приводится к одному или нескольким табличным интегралам, называется непосредственным интегрированием. Часто используется операция «внесение под знак интеграла» Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)'=\frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x+C$, где С – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $\left(\ln(-x)\right)' = -\frac{1}{x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод: $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$.

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Пример1. $\int \frac{dx}{x^2 - 6x + 25} = \int \frac{dx}{(x-3)^2 + 16} = \frac{1}{4} arctg\left(\frac{x-3}{4}\right) + C.$

Пример2. $\int \frac{\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx = \int \frac{\sqrt{2-x^2} + \sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{2+x^2}} dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} =$

$= \ln\left|x + \sqrt{x^2+2}\right| + \arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

2. Способ подстановки (замены переменных).

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dt получается: $\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Пример1. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x}\cos x dx$.

Сделаем замену *t = sinx, dt = cosxdx.* $\int \sqrt{t}dt = \int t^{1/2}dt = \frac{2}{3}t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$

Пример2. $\int x(x^2+1)^{3/2} dx = \left| \begin{array}{l} t = x^2+1 \\ dt = 2xdx \\ dx = \frac{dt}{2x} \end{array} \right| = \int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2}dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C =$

$= \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C\cdot$

Пример3.

$\int (2x+1)^{20}dx = \{2x+1 = t;\quad dt = 2dx;\} = \int t^{20}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{21}t^{21}\cdot\frac{1}{2} + C = \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C.$

Пример4.

$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}} dx = \int \sin^{-3/2} x\cos x dx = \{\sin x = t;\quad dt = \cos x dx\} = \int t^{-3/2}dt = -2t^{-1/2} + C =$

$= -2\sin^{-1/2} x + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C.$

Пример5. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x-1+9}} = \{dx = d(x+1)\} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{9-(x+1)^2}} = \{x+1=t\} =$

$= \int \frac{dt}{\sqrt{3^2-t^2}} = \arcsin\frac{t}{3} + C = \arcsin\frac{x+1}{3} + C.$

Пример 6. $\int e^{\cos^2 x}\sin 2x dx = \left\{t = e^{\cos^2 x};\quad dt = -e^{\cos^2 x}\cdot 2\cos x\sin x = -\sin 2x\cdot e^{\cos^2 x}dx\right\} =$

$= -\int dt = -t + C = -e^{\cos^2 x} + C.$

Пример7.

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \left\{\sqrt{x} = t;\quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2t}\right\} = \int \frac{2tdt}{(t^2+1)t} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2arctgt + C = 2arctg\sqrt{x} + C.$$

3. Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения: (uv)′ = u′v + v′u, где u и v – некоторые функции от x.

В дифференциальной форме: d(uv) = udv + vdu

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла: $uv = \int udv + \int vdu$ или $\int udv = uv - \int vdu$.

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Идея применения формулы заключается в следующем. Подынтегральная выражение всегда можно представить как произведение некоторой функции u и на дифференциал другой функции v. В левой части формулы записан именно такой интеграл. Обратите внимание на интеграл, стоящий в правой части формулы. Его подынтегральное выражение представляет собой произведение функции v на дифференциал du функции u. То есть функции u, v поменялись ролями, в результате чего интеграл, стоящий справа может оказаться более простым и даже табличным. Иначе говоря, формула позволяет интегрирование данной функции заменить интегрированием другой функции. Техника интегрирования сводится к тому, что за u берется такая часть подынтегральной функции, которая при дифференцировании сильно не усложняется, а за dv такая часть подынтегрального выражения, которая легко интегрируется. При интегрировании dv получается $\int dv = v + C$, то есть бесконечное множество первообразных. Для применения формулы интегрирования по частям можно взять любую из первообразных, в частности ту, для которой C=0.

Это упрощает решение. Поэтому при нахождении функции v произвольную постоянную C вводить не следует.

Чтобы предупредить неудачные действия при интегрировании по частям, рекомендуется в интегралах вида:

1. $\int P(x)a^{kx}dx, \int P(x)e^{kx}dx, \int P(x)\sin kxdx, \int P(x)\cos kxdx,$ где $P(x)$ - многочлен, $k = const$, принимать $u = P(x),$ а dv равным остальной части подынтегрального выражения, включая dx.
2. $\int P(x)\ln xdx, \int P(x)\arcsin xdx, P(x)\arccos xdx, P(x)arctgxdx, P(x)arctgxdx, P(x)arcctgxdx$ за u принимают логарифм или аркфункцию, а $dv = P(x)dx$;

3. $\int e^{kx}\sin pxdx, \int e^{kx}\cos pxdx$ за u можно принять либо e^{kx}, либо $\sin px$ или $(\cos px)$.

Остальная часть подынтегрального выражения принимается за dv.

В некоторых случаях интегрирование по частям приходится применять повторно, последовательно упрощая интеграл.

Пример1. $\int e^{2x}\cos xdx = \left\{\begin{matrix} u=e^{2x}; & du=2e^{2x}dx; \\ dv=\cos xdx; & v=\sin x \end{matrix}\right\} = e^{2x}\sin x - \int \sin x\cdot 2e^{2x}dx =$

$= \left\{\begin{matrix} u=e^{2x}; & du=2e^{2x}dx; \\ dv=\sin xdx; & v=-\cos x; \end{matrix}\right\} = e^{2x}\sin x - 2\left[-e^{2x}\cos x - \int -\cos x\cdot 2e^{2x}dx\right] = e^{2x}\sin x +$

$+2e^{2x}\cos x - 4\int \cos xe^{2x}dx$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x}\cos xdx = e^{2x}(\sin x + 2\cos x),\ \int e^{2x}\cos xdx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Пример2. $\int x^2\sin xdx = \left\{\begin{matrix} u=x^2; & dv=\sin xdx; \\ du=2xdx; & v=-\cos x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + \int \cos x\cdot 2xdx =$

$= \left\{\begin{matrix} u=x; & dv=\cos xdx; \\ du=dx; & v=\sin x \end{matrix}\right\} = -x^2\cos x + 2\left[x\sin x - \int \sin xdx\right] = -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C.$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Пример3. $\int x^2e^{5x}dx = \left\{\begin{matrix} u=x^2; & dv=e^{5x}dx; \\ du=2xdx; & v=\dfrac{e^{5x}}{5}; \end{matrix}\right\} = \frac{1}{5}e^{5x}x^2 - \int \frac{1}{5}e^{5x}2xdx = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\int xe^{5x}dx =$

$= \left\{\begin{matrix} u=x; & dv=e^{5x}dx; \\ du=dx; & v=\dfrac{1}{5}e^{5x}; \end{matrix}\right\} = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\left[\frac{xe^{5x}}{5} - \int \frac{1}{5}e^{5x}dx\right] = \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2}{25}\int e^{5x}dx =$

$= \frac{x^2e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} = \frac{e^{5x}}{5}\left(x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{2}{25}\right).$

Пример4.

$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = \left\{\begin{matrix} u=\ln x; & dv=\dfrac{1}{x^3}dx; \\ du=\dfrac{1}{x}dx; & v=-\dfrac{1}{2x^2}; \end{matrix}\right\} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int -\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{x}dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} +$

$+\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right] + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$

Пример 5. $\int x\ln xdx = \left\{\begin{matrix} u=\ln x; & dv=xdx; \\ du=\dfrac{1}{x}dx; & v=\dfrac{x^2}{2}; \end{matrix}\right\} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{1}{2}\int xdx =$

$= \frac{x^2\ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C = +\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^{-2}\right] + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$

Интегрирование элементарных дробей.

Опр: **Элементарными** называются дроби следующих четырех типов:

$$\text{I. } \frac{1}{ax+b}; \quad \text{II. } \frac{1}{(ax+b)^m}; \quad \text{III. } \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}; \quad \text{IV. } \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n},$$

m, n – натуральные числа ($m \ge 2$, $n \ge 2$) и $b^2 - 4ac < 0$.

Первые два типа интегралов от элементарных дробей довольно просто приводятся к табличной подстановке t = ax + b.

I. $$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\ln|t| + C = \frac{1}{a}\ln|ax+b| + C.$$

II. $$\int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t^m} = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + C = -\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C;$$

III. $$\int \frac{Ax+B\pm\frac{Ap}{2}}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx +$$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dx}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln|x^2+px+q| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}}\cdot arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

Здесь в общем виде показано приведение интеграла дроби вида III к двум табличным интегралам.

Рассмотрим применение указанной выше формулы на примерах.

Пример1.

$$\int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4}dx = \int \frac{84x-24}{36x^2-60x+48}dx = \int \frac{84x-24}{(6x-5)^2+23}dx = \left\{\begin{matrix} t = 6x-5; & dt = 6dx; \\ x = \frac{t+5}{6} & \end{matrix}\right\} =$$

$$= \frac{1}{6}\int \frac{14t+70-24}{t^2+23}dt = \frac{7}{3}\int \frac{tdt}{t^2+23} + \frac{23}{3}\int \frac{dt}{t^2+23} = \frac{7}{6}\ln(t^2+23) + \frac{23}{3\sqrt{23}}arctg\frac{t}{\sqrt{23}} + C =$$

$$= \frac{7}{6}\ln|36x^2-60x+48| + \frac{\sqrt{23}}{3}arctg\frac{6x-5}{\sqrt{23}} + C.$$

Вообще говоря, если у трехчлена $ax^2 + bx + c$ выражение $b^2 - 4ac > 0$, то дробь по определению не является элементарной, однако, тем не менее ее можно интегрировать указанным выше способом.

Пример2.

$$\int \frac{5x-3}{x^2+6x-40}dx = \int \frac{5x-3}{(x+3)^2-49}dx = \left\{\begin{matrix} t = x+3; & dt = dx; \\ x = t-3; & \end{matrix}\right\} = \int \frac{5t-15-3}{t^2-49}dt = 5\int \frac{tdt}{t^2-49} -$$

$$-18\int \frac{dt}{t^2-49} = \frac{5}{2}\ln|t^2-49| - \frac{18}{14}\ln\left|\frac{t-7}{t+7}\right| + C = \frac{5}{2}\ln|x^2+6x-40| - \frac{9}{7}\ln\left|\frac{x-4}{x+10}\right| + C.$$

Пример3.

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}}dx = \int \frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}}dx = \left\{\begin{matrix} t = x-3; & dt = dx; \\ x = t+3; & \end{matrix}\right\} = \int \frac{3t+9+4}{\sqrt{16-t^2}}dt = 3\int \frac{tdt}{\sqrt{16-t^2}} +$$

$$+13\int\frac{du}{\sqrt{16-t^2}}=-3\sqrt{16-t^2}+13\arcsin\frac{t}{4}+C=-3\sqrt{7-x^2-6x}+13\arcsin\frac{x-3}{4}+C.$$

Рассмотрим теперь методы интегрирования простейших дробей IV типа.

Сначала рассмотрим частный случай при M = 0, N = 1.

Тогда интеграл вида $\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$ можно путем выделения в знаменателе полного квадрата представить в виде $\int\frac{du}{(u^2+s)^n}$. Сделаем следующее преобразование:

$$\int\frac{du}{(u^2+s)^n}=\frac{1}{s}\int\frac{s+u^2-u^2}{(u^2+s)^n}du=\frac{1}{s}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}-\frac{1}{s}\int\frac{u^2du}{(u^2+s)^n}\text{ Equation.3 .}$$

Второй интеграл, входящий в это равенство, будем брать по частям.

Обозначим: $\left\{\begin{array}{l} dv_1=\dfrac{udu}{(u^2+s)^n};\quad u_1=u;\quad du_1=du;\\ v_1=\displaystyle\int\frac{udu}{(u^2+s)^n}=-\frac{1}{2(n-1)(u^2+s)^{n-1}};\end{array}\right\}$

$$\int\frac{u^2du}{(u^2+s)^n}=-\frac{u}{(2n-2)(u^2+s)^{n-1}}+\frac{1}{2n-2}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}.$$

Для исходного интеграла получаем:

$$\int\frac{du}{(u^2+s)^n}=\frac{1}{s}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}+\frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}}-\frac{1}{s(2n-2)}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}$$

$$\int\frac{du}{(u^2+s)^n}=\frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}}+\frac{2n-3}{s(2n-2)}\int\frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}.$$

Полученная формула называется **рекуррентной.** Если применить ее n-1 раз, то получится табличный интеграл $\int\frac{du}{u^2+s}$.

Вернемся теперь к интегралу от элементарной дроби вида IV в общем случае.

$$\int\frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n}dx=(4a)^n\int\frac{Mx+N}{\left[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)\right]^n}dx=\left\{\begin{array}{l} u=2ax+b;\quad du=2adx;\\ x=\dfrac{u-b}{2a};\quad s=4ac-b^2;\end{array}\right\}=$$

$$=\frac{(4a)^n}{2a}\int\frac{\frac{M(u-b)}{2a}+N}{(u^2+s)^n}du=\frac{(4a)^n}{2a}\left[\frac{M}{2a}\int\frac{udu}{(u^2+s)^n}+\frac{2aN-Mb}{2a}\int\frac{du}{(u^2+s)^n}\right]$$

В полученном равенстве первый интеграл с помощью подстановки $t = u^2 + s$ приводится к табличному $\int\frac{dt}{t^n}$, а ко второму интегралу применяется рассмотренная выше рекуррентная формула.

<u>Пример5:</u> $\int\frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2}dx=\int\frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2}dx=\left\{\begin{array}{l} u=x-2;\quad du=dx;\\ x=u+2;\end{array}\right\}=\int\frac{3u+6+5}{(u^2+3)^2}du=$

$$=3\int\frac{udu}{(u^2+3)^2}+11\int\frac{du}{(u^2+3)^2}=\left\{\begin{array}{l} t=u^2+3;\\ dt=2udu;\end{array}\right\}=\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t^2}+11\left[\frac{u}{3\cdot2(u^2+3)}+\frac{1}{3\cdot2}\int\frac{du}{u^2+3}\right]=$$

$$=-\frac{3}{2t}+\frac{11u}{6(u^2+3)}+\frac{11}{6\sqrt3}arctg\frac{u}{\sqrt3}+C=-\frac{3}{2(x^2-4x+7)}+\frac{11(x-2)}{6(x^2-4x+7)}+\frac{11}{6\sqrt3}arctg\frac{x-2}{\sqrt3}+C.$$

Интегрирование рациональных функций.

Для того, чтобы проинтегрировать рациональную дробь необходимо разложить ее на элементарные дроби.

Теорема: Если $R(x)=\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ - правильная рациональная дробь, знаменатель P(x) которой представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей (отметим, что любой многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в таком виде: $P(x) = (x - a)^{\alpha}\ldots(x - b)^{\beta}(x^2 + px + q)^{\lambda}\ldots(x^2 + rx + s)^{\mu}$), то эта дробь может быть разложена на элементарные по следующей схеме:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha}+\ldots+\frac{B_1}{(x-b)}+\frac{B_2}{(x-b)^2}+\ldots+\frac{B_\beta}{(x-b)^\beta}+\frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q}+$$
$$+\frac{C_2x+D_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{C_\lambda x+D_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda}+\ldots+\frac{E_1x+F_1}{x^2+rx+s}+\frac{E_2x+F_2}{(x^2+rx+s)^2}+\ldots+\frac{E_\mu x+F_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}$$

где A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, F_i – некоторые постоянные величины.

Схема (правило) интегрирования рациональных дробей:

1) Если дробь неправильная, то деля числитель $Q(x)$ на знаменатель $P(x)$ по правилу деления многочлена на многочлен: $R(x)=\dfrac{Q(x)}{P(x)}=M(x)+\dfrac{Q_1(x)}{P(x)}$.
2) Правильную остаточную дробь $\dfrac{Q_1(x)}{P(x)}$ разлагают на простейшие (элементарные) дроби методом «неопределенных коэффициентов» (способ сравнения коэффициентов) или «произвольных значений» (частных значений).
3) Находят интегралы выделенной целой части и всех простейших дробей (методами, рассмотренными ранее), которые затем складывают.

Рассмотрим некоторые случаи:

1. Знаменатель разлагается лишь на неповторяющиеся множители первой степени.

$$\int\frac{xdx}{2x^2-3x-2}=\int\frac{xdx}{2(x-2)(x+\frac{1}{2})}=\int\frac{xdx}{(x-2)(2x+1)}=\ldots\ (\frac{1}{5}\ln\left[(x-2)^2\sqrt{2x+1}\right]+C)$$

2. Знаменатель разлагается лишь на множители первой степени, среди которых есть повторяющиеся.

1) $\displaystyle\int\frac{(2x-1)dx}{(x-1)^2(x-2)}$.

Решение. Разложим подынтегральную дробь на простейшие дроби

$$\frac{2x-1}{(x-1)^2(x-2)}=\frac{A_1}{(x-1)^2}+\frac{A_2}{x-1}+\frac{A_3}{x-2}=\frac{A_1(x-2)+A_2(x-1)(x-2)+A_3(x-1)^2}{(x-1)^2(x-2)}.$$

Должны быть равны числители $2x-1=A_1(x-2)+A_2(x^2-3x+2)+A_3(x^2-2x+1)$

или $2x-1=(A_2+A_3)x^2+(A_1-3A_2-2A_3)x+(-2A_1+2A_2+A_3)$.

Приравнивая коэффициенты этих тождественных многочленов при одинаковых степенях x, получим систему трех уравнений с тремя неизвестными.

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \\ x & \\ x^0 & \end{array}\begin{cases} A_2+A_3=0 \\ A_1-3A_2-2A_3=2 \\ -2A_1+2A_2+A_3=-1 \end{cases}$$

$\Rightarrow A_3=-A_2$ подставим во второе и третье уравнения, получим $\begin{cases} A_1-A_2=2 \\ -2A_1+A_2=-1 \end{cases}$ складываем почленно, найдем $-A_1=1$

или $A_1=-1, A_2=-3, A_3=3$

Подставляем значения коэффициентов в простейшие дроби и почленно их интегрируем, вынося постоянные множители за знак интеграла,

$$\int\frac{(2x-1)dx}{(x-1)^2(x-2)}=-\int\frac{dx}{(x-1)^2}-3\int\frac{dx}{x-1}+3\int\frac{dx}{x-2}=\frac{1}{x-1}-3\ln|x-1|+3\ln|x-2|+C=$$

$$=\frac{1}{x-1}+3\ln\left|\frac{x-2}{x-1}\right|+C.$$

2) $$\int\frac{(x^2-3x+2)dx}{x(x^2+2x+1)}=\int\frac{(x^2-3x+2)dx}{x(x+1)^2}=\ldots\ (\ln\left|\frac{x^2}{x+1}\right|+\frac{6}{x+1}+C)$$

3. Знаменатель разлагается лишь на неповторяющиеся множители второй степени и, возможно, множители первой степени.

1) $$\int\frac{dx}{x(x^2+1)}$$

Решение. разложим подынтегральную дробь на простейшие дроби

$$\frac{1}{x(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{Mx+N}{x^2+1}=\frac{A(x^2+1)+(Mx+N)x}{x(x^2+1)}$$

$1=A(x^2+1)+(Mx+N)x$ или $1=(A+M)x^2+Nx+A$

$$\begin{array}{c|l} x^2 & \left\{\begin{array}{l} A+M=0 \\ N=0 \\ A=1 \end{array}\right. \\ x & \\ x^0 & \end{array} \qquad M=-A=-1$$

$$\int\frac{dx}{x(x^2+1)}=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{xdx}{x^2+1}=\int\frac{2xdx}{x^2+1}=\ln x-\frac{1}{`2}\ln(x^2+1)+C=\ln\frac{x}{\sqrt{x^2+1+C}}.$$

2) $$\int\frac{dx}{x^3+1}=\int\frac{dx}{(x+1)(1-x+x^2)}=\ldots\ (\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C)$$

4. Среди множителей знаменателя имеются повторяющиеся множители второй степени.

$$\int\frac{2xdx}{(x+1)(1+x^2)^2}=\ldots\ (\frac{x-1}{2(x^2+1)}-\frac{1}{2}\ln[x+1]+\frac{1}{4}\ln[x^2+1]+C)$$

Пример. $$\int\frac{6x^5-8x^4-25x^3+20x^2-76x-7}{3x^3-4x^2-17x+6}dx$$

Т.к. дробь неправильная, то предварительно следует выделить у нее целую часть:

$$\begin{array}{rl|l} - & 6x^5-8x^4-25x^3+20x^2-76x-7 & 3x^3-4x^2-17x+6 \\ \cline{3-3} & \underline{6x^5-8x^4-34x^3+12x^2} & 2x^2+3 \\ - & 9x^3+8x^2-76x-7 & \\ & \underline{9x^3-12x^2-51x+18} & \\ & 20x^2-25x-25 & \end{array}$$

$$\int\left[2x^2+3+\frac{20x^2-25x-25}{3x^3-4x^2-17x+6}\right]dx=\int 2x^2dx+\int 3dx+5\int\frac{4x^2-5x-5}{3x^3-4x^2-17x+6}dx=\frac{2}{3}x^3+3x+$$

$$+5\int\frac{4x^2-5x-5}{3x^3-4x^2-17x+6}dx$$

Разложим знаменатель полученной дроби на множители. Видно, что при x = 3 знаменатель дроби превращается в ноль. Тогда:

$$
\begin{array}{l|l}
\underline{-}\ 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 & \ x - 3 \\
\underline{\ 3x^3 - 9x^2\ } & \overline{3x^2 + 5x - 2} \\
\qquad \underline{-}\ 5x^2 - 17x & \\
\qquad \underline{\ 5x^2 - 15x\ } & \\
\qquad\qquad \underline{-}\ -2x + 6 & \\
\qquad\qquad \underline{\ -2x + 6\ } & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}
$$

Таким образом $3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 = (x - 3)(3x^2 + 5x - 2) = (x - 3)(x + 2)(3x - 1)$. Тогда:

$$\frac{4x^2 - 5x - 5}{(x-3)(x+2)(3x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{3x-1}$$

$$A(x+2)(3x-1) + B(x-3)(3x-1) + C(x-3)(x+2) = 4x^2 - 5x - 5$$

Для того, чтобы избежать при нахождении неопределенных коэффициентов раскрытия скобок, группировки и решения системы уравнений (которая в некоторых случаях может оказаться достаточно большой) применяют так называемый **метод произвольных значений**. Суть метода состоит в том, что в полученное выше выражение подставляются поочередно несколько (по числу неопределенных коэффициентов) произвольных значений х. Для упрощения вычислений принято в качестве произвольных значений принимать точки, при которых знаменатель дроби равен нулю, т.е. в нашем случае – 3, -2, 1/3. Получаем: $\begin{cases} 40A = 16 \\ 35B = 21 \\ C = 1 \end{cases}$

$$\begin{cases} A = 2/5 \\ B = 3/5 \\ C = 1 \end{cases}.$$

Окончательно получаем: $\int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx =$

$$= \frac{2}{3}x^3 + 3x + 3\int \frac{dx}{x+2} + 2\int \frac{dx}{x-3} + 5\int \frac{dx}{3x-1} = \frac{2}{3}x^3 + 3x + 3\ln|x+2| + 2\ln|x-3| + \frac{5}{3}\ln|3x-1| + C.$$

Интегрирование некоторых тригонометрических функций.

Интегралов от тригонометрических функций может быть бесконечно много. Большинство из этих интегралов вообще нельзя вычислить аналитически, поэтому рассмотрим некоторые главнейшие типы функций, которые могут быть проинтегрированы всегда.

I. *Интеграл вида* $\int R(\sin x, \cos x)dx$.

Здесь R – обозначение некоторой рациональной функции от переменных sinx и cosx.

Интегралы этого вида вычисляются с помощью подстановки $t = tg\frac{x}{2}$. Эта подстановка позволяет преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную.

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1 - tg^2\frac{x}{2}}{1 + tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}; \quad \text{Тогда} \quad x = 2arctgt; \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2};$$

Таким образом: $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}dt = \int r(t)dt.$

Описанное выше преобразование называется **универсальной тригонометрической подстановкой.**

Пример1. $\int\frac{dx}{\cos x}=|\,t=tg\frac{x}{2},\ \cos x=\dfrac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=\dfrac{1-t^2}{1+t^2};\ \ x=2arctgt;\quad dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}\,|=$

$$=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2dt}{1-t^2}=2*\frac{1}{2}\ln\frac{1-tg\frac{x}{2}}{1+tg\frac{x}{2}}+C=\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C\,.$$

Пример2.

$$\int\frac{dx}{4\sin x+3\cos x+5}=\int\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{4\frac{2t}{1+t^2}+3\frac{1-t^2}{1+t^2}+5}=2\int\frac{dt}{8t+3-3t^2+5+5t^2}=2\int\frac{dt}{2t^2+8t+8}=$$

$$=\int\frac{dt}{t^2+4t+4}=\int\frac{dt}{(t+2)^2}=-\frac{1}{t+2}+C=-\frac{1}{tg\frac{x}{2}+2}+C.$$

Несомненным достоинством этой подстановки является то, что с ее помощью всегда можно преобразовать тригонометрическую функцию в рациональную и вычислить соответствующий интеграл. К недостаткам можно отнести то, что при преобразовании может получиться достаточно сложная рациональная функция, интегрирование которой займет много времени и сил.

Однако при невозможности применить более рациональную замену переменной этот метод является единственно результативным.

II. *Интеграл вида* $\int R(\sin x,\cos x)dx$, *если функция R является нечетной относительно cosx.*

Несмотря на возможность вычисления такого интеграла с помощью универсальной тригонометрической подстановки, рациональнее применить подстановку *t = sinx*.

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int\frac{R(\sin x,\cos x)}{\cos x}\cos xdx$$

Функция $\dfrac{R(\sin x,\cos x)}{\cos x}$ может содержать cosx только в четных степенях, а следовательно, может быть преобразована в рациональную функцию относительно sinx.

$$\int R(\sin x,\cos x)dx=\int r(\sin x)\cos xdx=\int r(t)dt.$$

Пример 1. $\int\dfrac{\cos^3 xdx}{\sin^4 x}$ $\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{3\sin^3 x}+C\right)$

Пример 2.

$$\int\frac{\cos^7 xdx}{\sin^4 x}=\left\{\begin{aligned}&\sin x=t\\&dt=\cos xdx\\&\cos^2 x=1-\sin^2 x\end{aligned}\right\}=\int\frac{(1-t^2)^3}{t^4}dt=\int\frac{1-3t^2+3t^4-t^6}{t^4}dt=\int\frac{dt}{t^4}-3\int\frac{dt}{t^2}+$$

Equation.3

$$+3\int dt-\int t^2dt=-\frac{1}{3t^3}+\frac{3}{t}+3t-\frac{1}{3}t^3=-\frac{1}{3\sin^3 x}+\frac{3}{\sin x}+3\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+C.$$

Вообще говоря, для применения этого метода необходима только нечетность функции относительно косинуса, а степень синуса, входящего в функцию может быть любой, как целой, так и дробной.

III. ***Интеграл вида*** $\int R(\sin x, \cos x)dx$***, если функция R является нечетной относительно sinx.***

По аналогии с рассмотренным выше случаем делается подстановка $t = \cos x$.
Тогда $\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(\cos x)\sin x dx = -\int r(t)dt.$

Пример 1. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x}dx \quad (\frac{\cos^2 x}{2} - \ln(\cos x) + C.)$

Пример 2.

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx = \begin{Bmatrix} \cos x = t \\ dt = -\sin x dx \end{Bmatrix} = -\int \frac{1-t^2}{2+t}dt = \int \frac{t^2+4t+4-4t-5}{t+2}dt = \int \left[\frac{(t+2)^2-4t-5}{t+2}\right]dt =$$

$$= \int \left[t+2-\frac{4t}{t+2}-\frac{5}{t+2}\right]dt = \int tdt + \int 2dt - 4\int \frac{tdt}{t+2} - 5\int \frac{dt}{t+2} = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| - 4\int \frac{t}{t+2}dt =$$

$$= \begin{Bmatrix} \frac{t}{t+2} = \frac{A}{t+2} + B \\ A + Bt + 2 = t \\ B = 1, \quad A = -2 \\ \frac{t}{t+2} = \frac{-2}{t+2} + 1 \end{Bmatrix} = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| + 8\int \frac{dt}{t+2} - 4\int dt = \frac{t^2}{2} + 2t - 5\ln|t+2| + 8\ln|t+2| - 4t =$$

$$= \frac{t^2}{2} - 2t + 3\ln|t+2| + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln(\cos x + 2) + C.$$

Пример3. $\int \frac{1}{\sin^3 x}dx = \int \frac{\sin x}{\sin^4 x}dx = |t = \cos x|$ ….но этот способ очень трудоемкий, поэтому воспользуемся универсальной тригонометрической формулой!

VI. ***Интеграл вида*** $\int R(\sin x, \cos x)dx$***, функция R четная относительно sinx и cosx.***

Для преобразования функции R в рациональную используется подстановка $t = tgx$. Тогда
$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int r(t)dt$, $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $\sin x = tgx \cos x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$,

$x = arctgx,\ dx = \frac{dt}{1+t^2}$.

Пример1. $\int \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}dx = \ldots \left(tgx + \frac{1}{4}\sin 2x - \frac{2}{3}x + C\right)$

Пример.2 $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 6\sin x\cos x - 16\cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{tg^2 x + 6tgx - 16}dx = \begin{Bmatrix} tgx = t; \\ \frac{1}{\cos^2 x}dx = d(tgx) = dt \end{Bmatrix} =$

$$= \int \frac{dt}{t^2+6t-16} = \int \frac{dt}{(t+3)^2-25} = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{tgx+3-5}{tgx+3+5}\right| + C = \frac{1}{10}\ln\left|\frac{tgx-2}{tgx+8}\right| + C.$$

V. *Интеграл произведения синусов и косинусов различных аргументов.*

В зависимости от типа произведения применятся одна из трех формул:

$$\int \cos mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{m+n} + \frac{\sin(m-n)x}{m-n}\right]$$

$$\int \sin mx \cos nx dx = \int \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(m+n)x}{m+n} - \frac{\cos(m-n)x}{m-n}\right]$$

$$\int \sin mx \sin nx dx = \int \frac{1}{2}[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x]dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{\sin(m+n)}{m+n} + \frac{\sin(m-n)}{m-n}\right]$$

Пример1. $\int \sin 7x \sin 2x dx = \frac{1}{2}\int \cos 5x dx - \frac{1}{2}\int \cos 9x dx = \frac{1}{10}\sin 5x - \frac{1}{18}\sin 9x + C.$

Пример2.

$$\int \sin 10x \cos 7x \cos 4x dx = \int \sin 10x[\cos 7x \cos 4x]dx = \frac{1}{2}\int \sin 10x \cos 11x dx + \frac{1}{2}\int \sin 10x \cos 3x dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int \sin 21x dx - \frac{1}{4}\int \sin x dx + \frac{1}{4}\int \sin 13x dx + \frac{1}{4}\int \sin 7x dx = -\frac{1}{84}\cos 21x - \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{52}\cos 13x -$$

$$-\frac{1}{28}\cos 7x + C.$$

VI. *Интеграл вида* $\int \sin^m x \cos^n x dx$.

1) *Если m или n – нечетное положительное целое число, то за t принимаем другую функцию и сводим к табличным интегралам.*

Пример1. $\int \sin^5 x \cos^4 x dx = |t = \cos x| = \dots$

2) *Если m+ n – четное отрицательное целое число, то t=tgx:*

Пример2. $\int \frac{dx}{\cos x \sin^3 x} = \int \frac{dx}{\cos^4 x \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}} = \int \frac{\sec^2 x dx}{\cos^2 x tg^3 x} = \left| \begin{matrix} \sec^2 x = 1 + tg^2 x, \\ \sec x = \dfrac{1}{\cos x} \end{matrix} \right| = \dots$

3) *Если m и n – четные неотрицательные числа, то применяются формулы для понижения порядка функций:* $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$.

Пример3. $\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)dx =$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx = \frac{x}{4} - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{4}\int \frac{1}{2}(1+\cos 4x)dx = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} +$$

$$+ \frac{1}{8}\left[\int dx + \int \cos 4x dx\right] = \frac{x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + \frac{x}{8} + \frac{\sin 4x}{32} = \frac{1}{4}\left[\frac{3x}{2} - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8}\right] + C.$$

Пример4. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{4dx}{\sin^2 2x} = \left\{ \frac{dctg 2x}{dx} = \frac{-2}{\sin^2 x} \right\} = -2ctg 2x + C$

Интегрирование некоторых иррациональных функций.

Далеко не каждая иррациональная функция может иметь интеграл, выраженный элементарными функциями. Для нахождения интеграла от иррациональной функции следует применить подстановку, которая позволит преобразовать функцию в рациональную, интеграл от которой может быть найден как известно всегда.

Рассмотрим некоторые приемы для интегрирования различных типов иррациональных функций.

I. *Интеграл вида* $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ *где* n- *натуральное число.*

С помощью подстановки $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ функция рационализируется.

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n; \qquad x = \frac{t^n d - b}{a - ct^n}; \qquad dx = \left(\frac{t^n d - b}{a - ct^n}\right)' dt;$$

Тогда $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R\left(\frac{t^n d - b}{a - ct^n}, t\right)\left(\frac{t^n d - b}{a - ct^n}\right)' dt = \int r(t)dt.$

<u>Пример1.</u>

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}} = \left\{ \sqrt[4]{1-2x} = t; \quad dt = \frac{-2dx}{4\left(\sqrt[4]{1-2x}\right)^3} = \frac{-dx}{2t^3}; \right\} = \int \frac{-2t^3 dt}{t^2 - t} = -2\int \frac{t^2 dt}{t-1} =$$

$$= -2\int\left(t + \frac{t}{t-1}\right)dt = -2\int tdt - 2\int \frac{t}{t-1}dt = -t^2 - 2\int\left(1 + \frac{1}{t-1}\right)dt = -t^2 - 2t - 2\ln|t-1| + C =$$

$$= -\sqrt{1-2x} - 2\sqrt[4]{1-2x} - 2\ln\left|\sqrt[4]{1-2x} - 1\right| + C.$$

Если в состав иррациональной функции входят корни различных степеней, то в качестве новой переменной рационально взять корень степени, равной наименьшему общему кратному степеней корней, входящих в выражение.

Проиллюстрируем это на примере.

<u>Пример2.</u>

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1 + \sqrt[6]{x-1}\right)}dx = \left\{ \begin{array}{l} \sqrt[12]{x-1} = t; \quad x - 1 = t^{12}; \\ dx = 12t^{11}dt; \end{array} \right\} = \int \frac{(t^4 + t^3)12t^{11}dt}{t^{12}(1+t^2)} = 12\int \frac{t^3 + t^2}{t^2 + 1}dt =$$

$$= 12\left(\int \frac{t^3}{t^2+1}dt + \int \frac{t^2}{t^2+1}dt\right) = 12\left(\int\left(t - \frac{t}{t^2+1}\right)dt + \int\left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt\right) = 12\int tdt - 12\int \frac{tdt}{t^2+1} + 12\int dt -$$

$$-12\int \frac{dt}{1+t^2} = 6t^2 + 12t - 6\ln(t^2+1) - 12arctgt + C = 6\sqrt[6]{x-1} + 12\sqrt[12]{x-1} - 6\ln(\sqrt[6]{x-1} + 1) -$$

$$-12arctg\sqrt[12]{x-1} + C.$$

II. *Интегрирование биноминальных дифференциалов (биномиальных).*

Опр: Биноминальным дифференциалом называется выражение $x^m(a + bx^n)^p dx$, где $m, n,$ и p – рациональные числа.

Как было доказано академиком Чебышевым П.Л. (1821-1894), интеграл от биноминального дифференциала может быть выражен через элементарные функции только в следующих трех случаях:

1) Если p – целое число, то интеграл рационализируется с помощью подстановки $t = \sqrt[\lambda]{x}$, где λ - общий знаменатель m и n.

<u>Пример1.</u> $\int \sqrt{x}(1 + \sqrt[3]{x})^4 dx = \left|t = \sqrt[6]{x}\right| = \ldots$

2) Если $\dfrac{m+1}{n}$ - целое число, то интеграл рационализируется подстановкой $t=\sqrt[s]{a+bx^n}$, где s – знаменатель числа p.

Пример2. $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1-x^4}}{x^5}dx=\left|t=\sqrt{1-x^4}\right|=\ldots$

3) Если $\dfrac{m+1}{n}+p$ - целое число, то используется подстановка $t=\sqrt[s]{\dfrac{a+bx^n}{x^n}}$, где s – знаменатель числа p.

Пример3. $\displaystyle\int\frac{\sqrt[3]{1+x^3}}{x^2}dx=\left|t=\sqrt[3]{\frac{1+x^3}{x^3}}\right|=\ldots$

Однако, наибольшее практическое значение имеют интегралы от функций, рациональных относительно аргумента и квадратного корня из квадратного трехчлена.

На рассмотрении этих интегралов остановимся более подробно.

III. *Интегралы вида* $\int R\left(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$.

Существует несколько способов интегрирования такого рода функций. В зависимости от вида выражения, стоящего под знаком радикала, предпочтительно применять тот или иной способ.

Как известно, квадратный трехчлен путем выделения полного квадрата может быть приведен к виду:

$$\pm u^2\pm m^2.$$

Таким образом, интеграл приводится к одному из трех типов: $\int R(u,\sqrt{m^2-u^2})du;$

$\int R(u,\sqrt{m^2+u^2})du;$

$\int R(u,\sqrt{u^2-m^2})du;$

1 способ. Тригонометрическая подстановка.

1) Интеграл вида $\int R(u,\sqrt{m^2-u^2})du$ подстановкой $u=m\sin t$ или $u=m\cos t$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно sint или cost.

Пример1: $\displaystyle\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\left\{\begin{matrix}x=a\sin t;\\ dx=a\cos tdt\end{matrix}\right\}=\int\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos tdt=\int a^2\cos^2 tdt=$

$$=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt=\frac{a^2t}{2}+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C=\frac{a^2t}{2}+\frac{a^2}{2}\sin t\cos t+C=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

2) Интеграл вида $\int R(u,\sqrt{m^2+u^2})du$ подстановкой $u=mtgt$ или $u=mctgt$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно sint и cost.

Пример2: $\displaystyle\int\frac{dx}{x^4\sqrt{a^2+x^2}}=\left\{\begin{matrix}x=atgt;dx=\dfrac{a}{\cos^2 t}dt;\\ \sqrt{a^2+x^2}=\dfrac{a}{\cos t};\end{matrix}\right\}=\int\frac{a\cos tdt}{\cos^2 ta^4tg^4ta}=\int\frac{\cos^3 tdt}{a^4\sin^4 t}=$

$$=\frac{1}{a^4}\int\frac{(1-\sin^2 t)d\sin t}{\sin^4 t}=-\frac{1}{3a^4\sin^3 t}+\frac{1}{a^4\sin t}+C=\left\{\sin t=\sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+x^2}}=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\right\}=$$

$$=-\frac{(a^2+x^2)^{3/2}}{3a^4x^3}+\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a^4x}+C.$$

3) Интеграл вида $\int R(u,\sqrt{u^2-m^2})du$ подстановкой $u=\frac{m}{\sin t}$ или $u=\frac{m}{\cos t}$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно sint или cost.

Пример3: $$\int\frac{dx}{x(x^2-4)^{5/2}}=\left\{\begin{array}{l} x=\frac{2}{\cos t};dx=\frac{2\sin t}{\cos^2 t}dt; \\ \sqrt{x^2-4}=2tgt; \end{array}\right\}=\int\frac{2\sin t\cos tdt}{\cos^2 t\cdot 2\cdot 2^5 tg^5 t}=\frac{1}{32}\int ctg^4 tdt=$$

$$=\frac{1}{32}\int ctg^2 t\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=-\frac{1}{32}\int ctg^2 td(ctgt)-\frac{1}{32}\int ctg^2 tdt=-\frac{1}{96}ctg^3 t-\frac{1}{32}\int\left(\frac{1}{\sin^2 t}-1\right)dt=$$

$$=-\frac{1}{96}ctg^3 t+\frac{1}{32}ctgt+\frac{t}{32}+C=\left\{ctgt=\frac{2}{\sqrt{x^2-4}}\right\}=-\frac{1}{12(x^2-4)^{3/2}}+\frac{1}{16\sqrt{x^2-4}}+\frac{1}{32}\arccos\frac{2}{x}+C.$$

2 способ. Подстановки Эйлера. (1707-1783)

1) Если a>0, то интеграл вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm x\sqrt{a}$.

2) Если a<0 и c>0, то интеграл вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt{ax^2+bx+c}=tx\pm\sqrt{c}$.

3) Если a<0 , а подкоренное выражение раскладывается на действительные множители $a(x–x_1)(x–x_2)$, то интеграл вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt{ax^2+bx+c}=t(x-x_1)$.

Отметим, что подстановки Эйлера неудобны для практического использования, т.к. даже при несложных подынтегральных функциях приводят к весьма громоздким вычислениям. Эти подстановки представляют скорее теоретический интерес.

3 способ. Метод неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим интегралы следующих трех типов:

$$I.\int\frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}},\qquad II.\int P(x)\sqrt{ax^2+bx+c}dx,\qquad III.\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}\begin{pmatrix} замена \\ x-\alpha=\frac{1}{t}\end{pmatrix},$$

где P(x) – многочлен, n – натуральное число.

Причем интегралы II и III типов могут быть легко приведены к виду интеграла I типа.

Далее делается следующее преобразование:

$$\int\frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}};$$ Equation.3

в этом выражении Q(x)- некоторый многочлен, степень которого ниже степени многочлена P(x), а λ - некоторая постоянная величина.

Для нахождения неопределенных коэффициентов многочлена Q(x), степень которого ниже степени многочлена P(x), дифференцируют обе части полученного выражения, затем умножают на $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, определяют λ и коэффициенты многочлена Q(x).

Данный метод выгодно применять, если степень многочлена P(x) больше единицы. В противном случае можно успешно использовать методы интегрирования рациональных дробей, рассмотренные выше, т.к. линейная функция является производной подкоренного выражения.

Пример1. $\int \frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2-2x+5}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}$.

Теперь продифференцируем полученное выражение, умножим на $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и сгруппируем коэффициенты при одинаковых степенях x.

$$\frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}=(2Ax+B)\sqrt{x^2-2x+5}+\frac{Ax^2+Bx+C}{\sqrt{x^2-2x+5}}(x-1)+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2-2x+5}}$$

$$(2Ax+B)(x^2-2x+5)+(Ax^2+Bx+C)(x-1)+\lambda=3x^3-7x^2+1$$

$$2Ax^3-4Ax^2+10Ax+Bx^2-2Bx+5B+Ax^3+Bx^2+Cx-Ax^2-Bx-C+\lambda=3x^3-7x^2+1$$

$$3Ax^3-(5A-2B)x^2+(10A-3B+C)x+5B-C+\lambda=3x^3-7x^2+1$$

$$\begin{cases}A=1\\5A-2B=7\\10A-3B+C=0\\5B-C+\lambda=1\end{cases}\qquad\begin{cases}A=1\\B=-1\\C=-13\\\lambda=-7\end{cases}$$

Итого $\int\frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx=(x^2-x-13)\sqrt{x^2-2x+5}-7\int\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+4}}=$

$=(x^2-x-13)\sqrt{x^2-2x+5}-7\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5})+C.$

Пример2.

$$\int(4x^2-6x)\sqrt{x^2+3}dx=\int\frac{(4x^2-6x)(x^2+3)}{\sqrt{x^2+3}}dx=(Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{x^2+3}+\lambda\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$\frac{4x^4-6x^3+12x^2-18x}{\sqrt{x^2+3}}=(3Ax^2+2Bx+C)\sqrt{x^2+3}+\frac{(Ax^3+Bx^2+Cx+D)x}{\sqrt{x^2+3}}+\frac{\lambda}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$4x^4-6x^3+12x^2-18x=(3Ax^2+2Bx+C)(x^2+3)+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+\lambda$$

$$4x^4-6x^3+12x^2-18x=3Ax^4+2Bx^3+Cx^2+9Ax^2+6Bx+3C+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+\lambda$$

$$4x^4-6x^3+12x^2-18x=4Ax^4+3Bx^3+(2C+9A)x^2+(6B+D)x+3C+\lambda$$

$$A=1;\quad B=-2;\quad C=3/2;\quad D=-6;\quad \lambda=-9/2;$$

$$\int(4x^2-6x)\sqrt{x^2+3}dx=\left(x^3-2x^2+\frac{3}{2}x-6\right)\sqrt{x^2+3}-\frac{9}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right|+C.$$

Пример3.

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}=\left\{\begin{aligned}x&=\frac{1}{v};\\dx&=-\frac{dv}{v^2}\end{aligned}\right\}=-\int\frac{v^3dv}{v^2\sqrt{\frac{1}{v^2}-1}}=-\int\frac{v^2dv}{\sqrt{1-v^2}}=(Av+B)\sqrt{1-v^2}+\lambda\int\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}$$ Equation.3

$$-\frac{v^2}{\sqrt{1-v^2}}=A\sqrt{1-v^2}-\frac{(Av+B)v}{\sqrt{1-v^2}}+\frac{\lambda}{\sqrt{1-v^2}},\quad -v^2=A-Av^2-Av^2-Bv+\lambda,$$

$$-v^2=-2Av^2-Bv+A+\lambda,\qquad A=1/2;\quad B=0;\quad \lambda=-1/2;$$

$$-\int\frac{v^2dv}{\sqrt{1-v^2}}=\frac{v\sqrt{1-v^2}}{2}-\frac{1}{2}\arcsin v=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}-\arcsin\frac{1}{x}\right)+C$$

Второй способ решения того же самого примера.

$$\int\frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}}=\left\{\begin{matrix}x=\frac{1}{\cos t};dx=\frac{tgt}{\cos t}dt;\\ \sqrt{x^2-1}=tgt;\end{matrix}\right\}=\int\frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^3 t}\cdot tgt}dt=\int\frac{\sin t\cos^4 t}{\cos^2 t\sin t}dt=\int\cos^2 tdt=$$

$$=\int\frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t=\left\{\sin 2t=2\sin t\cos t=2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right\}=$$

$$\frac{1}{2}\left(\arccos\frac{1}{x}+\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\right)+C.$$

С учетом того, что функции arcsin и arccos связаны соотношением $\arcsin\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2}-\arccos\frac{1}{x}$, а постоянная интегрирования С – произвольное число, ответы, полученные различными методами, совпадают.

Как видно, при интегрировании иррациональных функций возможно применять различные рассмотренные выше приемы. Выбор метода интегрирования обуславливается в основном наибольшим удобством, очевидностью применения того или иного метода, а также сложностью вычислений и преобразований.

Пример4. $\int\frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}}=\left\{\begin{matrix}x=\sin t;\\ dx=\cos tdt;\\ \cos t=\sqrt{1-x^2}\end{matrix}\right\}=\int\frac{\cos tdt}{\cos^3 t}=\int\frac{dt}{\cos^2 t}=tgt+C=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+C.$

Несколько примеров интегралов, не выражающихся через элементарные функции.

К таким интегралам относится интеграл вида $\int R(x,\sqrt{P(x)})dx$, где P(x)- многочлен степени выше второй. Эти интегралы называются **эллиптическими.**

Если степень многочлена P(x) выше четвертой, то интеграл называется **ультраэллиптическим.**

Если все – таки интеграл такого вида выражается через элементарные функции, то он называется **псевдоэллиптическим.**

Не могут быть выражены через элементарные функции следующие интегралы:

1) $\int e^{-x^2}dx$ - интеграл Пуассона (Симеон Дени Пуассон – французский математик (1781-1840))

2) $\int\sin x^2dx;\ \int\cos x^2dx$ - интегралы Френеля (Жан Огюстен Френель – французский ученый (1788-1827) - теория волновой оптики и др.)

3) $\int\frac{dx}{\ln x}$ - интегральный логарифм

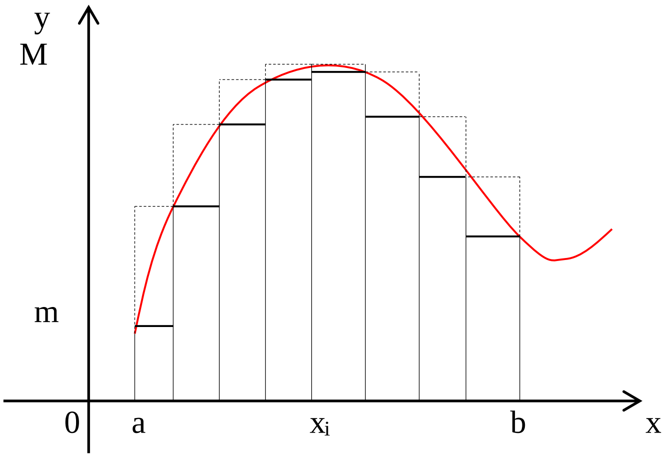
4) $\int\frac{e^x}{x}dx$ - приводится к интегральному логарифму

5) $\int \frac{\sin x}{x} dx$ - интегральный синус

6) $\int \frac{\cos x}{x} dx$ - интегральный косинус.

2. Определенный интеграл.

Пусть на отрезке [a, b] задана непрерывная функция f(x).



Обозначим m и M наименьшее и наибольшее значение функции на отрезке [a, b]

Разобьем отрезок [a, b] на части (не обязательно одинаковые) n точками: $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$

Тогда $x_1 - x_0 = \Delta x_1$, $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, … , $x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$;

На каждом из полученных отрезков найдем наименьшее и наибольшее значение функции.

$[x_0, x_1] \to m_1, M_1$; $[x_1, x_2] \to m_2, M_2$; … $[x_{n-1}, x_n] \to m_n, M_n$.

Составим суммы: $\underline{S}_n = m_1\Delta x_1 + m_2\Delta x_2 + \ldots + m_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$,

$$\overline{S}_n = M_1\Delta x_1 + M_2\Delta x_2 + \ldots + M_n\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Сумма $\underline{S}$ называется **нижней интегральной суммой**, а сумма $\overline{S}$ – **верхней интегральной суммой**.

Т.к. $m_i \le M_i$, то $\underline{S}_n \le \overline{S}_n$, а $m(b-a) \le \underline{S}_n \le \overline{S}_n \le M(b-a)$

Внутри каждого отрезка выберем некоторую точку ε: $x_0 < \varepsilon_1 < x_1$, $x_1 < \varepsilon < x_2$, … , $x_{n-1} < \varepsilon < x_n$.

Найдем значения функции в этих точках и составим выражение, которое называется **интегральной суммой** для функции f(x) на отрезке [a, b]:

$$S_n = f(\varepsilon_1)\Delta x_1 + f(\varepsilon_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\varepsilon_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i .$$

Тогда можно записать: $m_i\Delta x_i \le f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i$

Следовательно, $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$, $\underline{S}_n \le S_n \le \overline{S}_n$

Геометрически это представляется следующим образом: график функции f(x) ограничен сверху описанной ломаной линией, а снизу – вписанной ломаной.

Обозначим $max\Delta x_i$ – наибольший отрезок разбиения, а $min\Delta x_i$ – наименьший. Если $max\Delta x_i \to 0$, то число отрезков разбиения отрезка [a, b] стремится к бесконечности.

Если $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$, то $\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i = S.$

<u>Опр:</u> Если при любых разбиениях отрезка [a, b] таких, что $max\Delta x_i \to 0$ и произвольном выборе точек ε_i интегральная сумма $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i$ стремится к пределу S, то этот предел называется определенным интегралом от f(x) на отрезке [a, b].

Обозначение: $\int_a^b f(x)dx.$ a – нижний предел, b – верхний предел, x – переменная интегрирования, [a, b] – отрезок интегрирования.

Опр: Если для функции f(x) существует предел $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\varepsilon_i)\Delta x_i =$ Equation.3 $\int_a^b f(x)dx,$ то функция называется **интегрируемой** на отрезке [a, b].

Также верны утверждения: $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$, $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$.

Теорема: Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она интегрируема на этом отрезке.

Свойства определенного интеграла.

1) $\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx;$ 2) $\int_a^b (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx$; 3) $\int_a^a f(x)dx = 0$;

4) Если f(x) ≤ φ(x) на отрезке [a, b] a < b, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx$

5) Если m и M – соответственно наименьшее и наибольшее значения функции f(x) на отрезке [a, b], то: $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

6) **Теорема о среднем.** Если функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то на этом отрезке существует точка ε такая, что $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$.

Док-во: В соответствии со свойством 5: $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$, т.к. функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], то она принимает на этом отрезке все значения от m до M. Другими словами, существует такое число ε∈ [a, b], что если $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu$ и μ = f(ε), а a ≤ ε ≤ b, тогда $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(\varepsilon)$. Т. д.

7) Для произвольных чисел a, b, c справедливо равенство: $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

Разумеется, это равенство выполняется, если существует каждый из входящих в него интегралов.

8) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$. 9) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| = \int_a^b |f(x)|dx$.

Обобщенная теорема о среднем. Если функции f(x) и φ(x) непрерывны на отрезке [a, b], и функция φ(x) знакопостоянна на нем, то на этом отрезке существует точка ε, такая, что $\int_a^b f(x)\varphi(x)dx = f(\varepsilon)\int_a^b \varphi(x)dx$.

Вычисление определенного интеграла.

Пусть в интеграле $\int_a^b f(x)dx$ нижний предел a = const, а верхний предел b изменяется. Очевидно, что если изменяется верхний предел, то изменяется и значение интеграла.

Обозначим $\int_a^x f(t)dt$ = Ф(x). Найдем производную функции Ф(x) по переменному верхнему пределу x.

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

Аналогичную теорему можно доказать для случая переменного нижнего предела.

Теорема: Для всякой функции f(x), непрерывной на отрезке [a, b], существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

Теорема: (Теорема Ньютона – Лейбница) Если функция F(x) – какая- либо первообразная от непрерывной функции f(x), то $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Док-во: Пусть F(x) – первообразная функции f(x). Тогда в соответствии с приведенной выше теоремой, функция $\int_a^x f(t)dt$ - первообразная функция от f(x). Но т.к. функция может иметь бесконечно много первообразных, которые будут отличаться друг от друга только на какое – то постоянное число С, то $\int_a^x f(t)dt = F(x) + C$ при соответствующем выборе С это равенство справедливо для любого x, т.е. при x = a:

$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C$, $\quad 0 = F(a) + C$, $C = -F(a)$.

Тогда $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$. А при x = b: $\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$.

Заменив переменную t на переменную x, получаем формулу Ньютона – Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ч.т.д.

Иногда применяют обозначение F(b) – F(a) = $F(x)\Big|_a^b$.

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определенных интегралов.

Что касается приемов вычисления определенных интегралов, то они практически ничем не отличаются от всех тех приемов и методов, которые были рассмотрены выше при нахождении неопределенных интегралов.

Точно так же применяются методы подстановки (замены переменной), метод интегрирования по частям, те же приемы нахождения первообразных для тригонометрических, иррациональных и трансцендентных функций. Особенностью является только то, что при применении этих приемов надо распространять преобразование не только на подынтегральную функцию, но и на пределы интегрирования. Заменяя переменную интегрирования, не забыть изменить соответственно пределы интегрирования.

I. Замена переменных.

Пусть задан интеграл $\int_a^b f(x)dx$, где f(x) – непрерывная функция на отрезке [a, b].

Введем новую переменную в соответствии с формулой x = φ(t).

Тогда если

1) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ 2) $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны на отрезке $[\alpha, \beta]$

3) $f(\varphi(t))$ определена на отрезке $[\alpha, \beta]$, то $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$.

Тогда $\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_\alpha^\beta = F[\varphi(\beta)] - F[\varphi(\alpha)] = F(b) - F(a)$.

Пример1.

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left\{\begin{matrix} x = \sin t; \\ \alpha = 0;\ \beta = \pi/2 \end{matrix}\right\} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)dt =$$

$$= \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4}\sin\pi = \frac{\pi}{4}.$$

При замене переменной в определенном интеграле следует помнить о том, что вводимая функция (в рассмотренном примере это функция sin) должна быть непрерывна на отрезке интегрирования. В противном случае формальное применение формулы приводит к абсурду.

Например. $\int_0^\pi dx = x\Big|_0^\pi = \pi$, с другой стороны, если применить тригонометрическую подстановку,

$$\int_0^\pi dx = \int_0^\pi \frac{dx}{\sin^2 x + \cos^2 x} = \int_0^\pi \frac{dx}{\cos^2 x(1+tg^2 x)} = \{tgx = t\} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1+t^2} = 2arctgt\Big|_0^{\pi/2} = 2\cdot 0 = 0.$$

Т.е. два способа нахождения интеграла дают различные результаты. Это произошло из-за того, что не был учтен тот факт, что введенная переменная tgx имеет на отрезке интегрирования разрыв (в точке x = π/2). Поэтому в данном случае такая подстановка неприменима. При замене переменной в определенном интеграле следует внимательно следить за выполнением перечисленных выше условий.

II. Интегрирование по частям.

Если функции u = φ(x) и v = ψ(x) непрерывны на отрезке [a, b], а также непрерывны на этом отрезке их производные, то справедлива формула интегрирования по частям: $\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$

Вывод этой формулы абсолютно аналогичен выводу формулы интегрирования по частям для неопределенного интеграла, который был весьма подробно рассмотрен выше, поэтому здесь приводить его нет смысла.

Пример1. $\int_1^e x\ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx = \frac{e^2}{2} - 0 - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{1}{4}\left(e^2+1\right).$

Пример2.

$$\int_0^\pi x\sin x dx = \begin{vmatrix} u = x & du = dx \\ dv = \sin x dx & v = -\cos x \end{vmatrix} = -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx = -\pi\cdot(-1) + 0 + \sin x\Big|_0^\pi = \pi.$$

3. Несобственные интегралы.

Определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$, где промежуток интегрирования [a, b] конечный, а подынтегральная функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b], называют еще собственным интегралом.

Рассмотрим так называемые *несобственные интегралы*, т.е. определенный интеграл от непрерывной функции, но с бесконечным промежутком интегрирования или определенный интеграл с конечным промежутком интегрирования, но от функции, имеющей на нем бесконечный разрыв.

Интеграл с бесконечным промежутком интегрирования
(несобственный интеграл первого рода)

Пусть функция f(x) определена и непрерывна на интервале [a, ∞). Тогда она непрерывна на любом отрезке [a, b].

Опр. Если существует конечный предел $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx$, то этот предел называется **несобственным интегралом первого рода** от функции f(x) на интервале [a, ∞).

Обозначение: $\lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^\infty f(x)dx$.

Если этот предел **существует** и **конечен**, то говорят, что несобственный интеграл **сходится**.
Если предел не существует или бесконечен, то несобственный интеграл расходится.
Аналогичные рассуждения можно привести для несобственных интегралов вида:

$$\int\limits_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)dx \qquad\qquad \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int\limits_c^\infty f(x)dx$$

Конечно, эти утверждения справедливы, если входящие в них интегралы существуют.

Пример 1. $\int\limits_0^\infty \cos x dx = \lim\limits_{b\to\infty}\int\limits_0^b \cos x dx = \lim\limits_{b\to\infty}\sin x\Big|_0^b = \lim\limits_{b\to\infty}(\sin b - \sin 0) = \lim\limits_{b\to\infty}\sin b$ - не существует.

Несобственный интеграл расходится.

Пример 2. $\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to-\infty}\int\limits_b^{-1}\frac{dx}{x^2} = \lim\limits_{b\to-\infty}\left[-\frac{1}{x}\right]\Bigg|_b^{-1} = \lim\limits_{b\to-\infty}\left(1+\frac{1}{b}\right) = 1$ - интеграл сходится.

Теорема: Если для всех x (x ≥ a) выполняется условие $0 \le f(x) \le \varphi(x)$ и интеграл $\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx$ сходится, то $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ тоже сходится и $\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx \ge \int\limits_a^\infty f(x)dx$.

Теорема: Если для всех x (x ≥ a) выполняется условие $0 \le \varphi(x) \le f(x)$ и интеграл $\int\limits_a^\infty \varphi(x)dx$ расходится, то $\int\limits_a^\infty f(x)dx$ тоже расходится.

Теорема: Если $\int\limits_a^\infty |f(x)|dx$ сходится, то сходится и интеграл $\int\limits_a^\infty f(x)dx$.

В этом случае интеграл $\int\limits_a^{\infty} f(x)dx$ называется **абсолютно сходящимся**.

Интеграл от разрывной функции
(несобственный интеграл второго рода)

Пусть функция f(x) определена и непрерывна на интервале [a, b), а при x=b функция либо не определена, либо терпит бесконечный разрыв ($\lim\limits_{x\to b} f(x)=\infty$).

Опр. Несобственным интегралом от разрывной функции f(x) на [a; b] называют предел

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx. \quad (\varepsilon>0)$$

Если этот предел существует и конечен, то несобственный интеграл называют сходящимся.

Аналогично определяется интеграл от функции, имеющей бесконечный разрыв в точке x=a, т.е. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

$$\int\limits_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx. \quad (\varepsilon>0)$$

Если функция f(x) имеет бесконечный разрыв в какой-нибудь промежуточной точке x=c интервала [a; b], то $\int\limits_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx+\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$.

Таких точек внутри отрезка может быть несколько.

Если сходятся все интегралы, входящие в сумму, то сходится и суммарный интеграл.

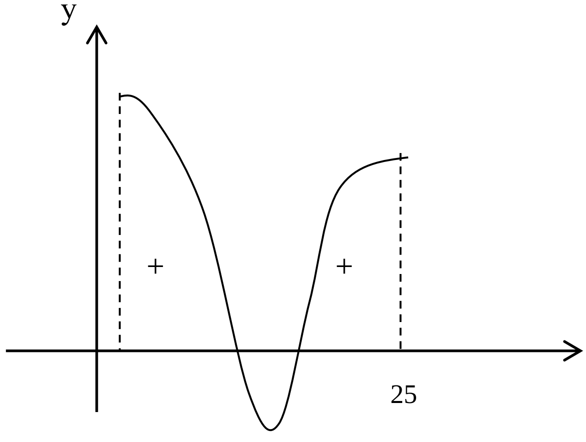
Пример. При x=0 функция $y=1/x^2$ терпит бесконечный разрыв, тогда

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{x^2}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{0+\varepsilon}^{1} x^2dx=-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{x}\Big|_{0+\varepsilon}^{1}=-(1-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon})=\infty - \text{интеграл расходится.}$$

Теорема: Пусть на промежутке [a, b) функции f(x) и φ(x) непрерывны, при x=b терпят бесконечный разрыв и удовлетворяют условию $0\le f(x)\le \varphi(x)$. Из сходимости интеграла $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$ вытекает сходимость интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$, а из расходимости интеграла $\int\limits_a^b f(x)dx$ вытекает расходимость интеграла $\int\limits_a^b \varphi(x)dx$.

4. Геометрические приложения определенного интеграла.

4.1.Вычисление площадей плоских фигур.



0 a - b x

Известно, что определенный интеграл на отрезке представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f(x). Если график расположен ниже оси Ox, т.е. $f(x) < 0$, то площадь имеет знак “-“, если график расположен выше оси Ox, т.е. $f(x) > 0$, то площадь имеет знак “+”.

Для нахождения суммарной площади используется формула $S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

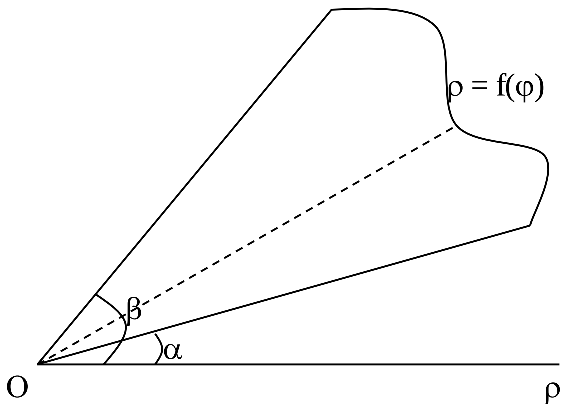
Площадь фигуры, ограниченной некоторыми линиями может быть найдена с помощью определенных интегралов, если известны уравнения этих линий.

<u>Пример1.</u> Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = x^2$, $x = 2$.

Искомая площадь (заштрихована на рисунке) может быть найдена по формуле:

$$S = \int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 x dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]\Bigg|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6} \text{ (ед}^2\text{)}$$

<u>4.2.Нахождение площади криволинейного сектора.</u>

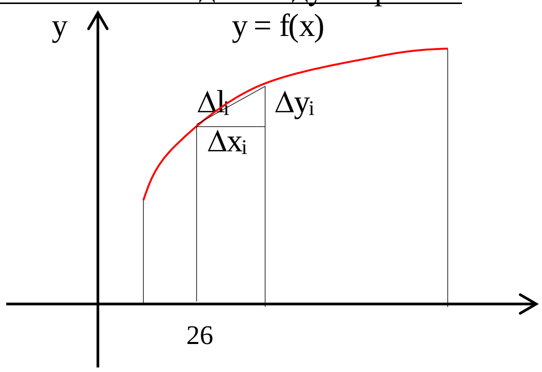


Для нахождения площади криволинейного сектора введем полярную систему координат. Уравнение кривой, ограничивающей сектор в этой системе координат, имеет вид $\rho = f(\varphi)$, где ρ - длина радиус – вектора, соединяющего полюс с произвольной точкой кривой, а φ - угол наклона этого радиус – вектора к полярной оси.

Площадь криволинейного сектора может быть найдена по формуле $S = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)d\varphi$.

Если криволинейная трапеция ограничена кривой, заданной параметрически $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ $t \in [\alpha; \beta]$, прямыми x=a и x=b и осью Ox, то площадь ее находится по формуле $S = \left|\int_\alpha^\beta y(t) \cdot x'(t)dt\right|$, где α и β определяется из равенств $x(\alpha)=a$ и $x(\beta)=b$.

<u>4.3. Вычисление длины дуги кривой.</u>



a b x

Длина ломаной линии, которая соответствует дуге, может быть найдена как $l_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$.

Тогда длина дуги равна $l = \lim_{\Delta l_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i$.

Из геометрических соображений: $\Delta l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$.

В то же время $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}$.

Тогда можно показать, что $l = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta l_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$. Т.е. $l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2} dx$.

Если уравнение кривой задано параметрически, то с учетом правил вычисления производной параметрически заданной функции, получаем $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2 + \left(\psi'(t)\right)^2} dt$, где x = φ(t) и y = ψ(t).

Если кривая задана в **полярных координатах**, то $l = \int_\alpha^\beta \sqrt{\left(\rho'(\varphi)\right)^2 + \rho^2} d\varphi$, ρ = f(φ).

Пример1: Найти длину окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = r^2$.

1 способ. Выразим из уравнения переменную y. $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

Найдем производную $y' = -\frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$. Тогда

$$\frac{1}{4} l = \int_0^r \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \int_0^r \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}} dx = r \arcsin \frac{x}{r}\Big|_0^r = r\frac{\pi}{2} .$$

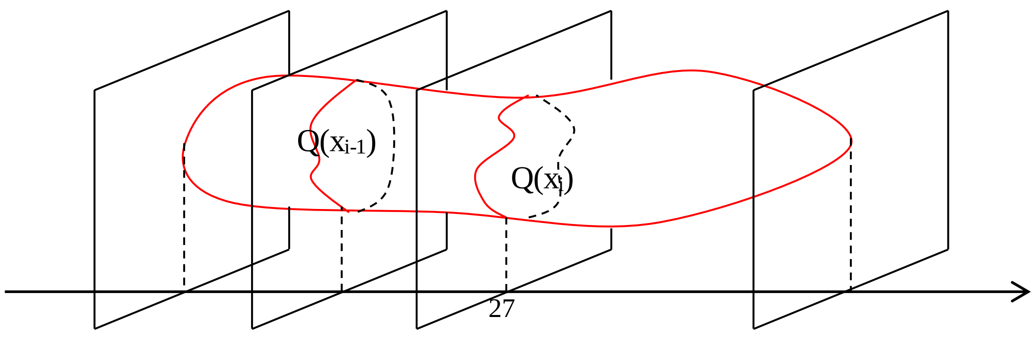
Тогда l= 2πr. Получили общеизвестную формулу длины окружности.

2 способ. Если представить заданное уравнение в полярной системе координат, то получим: $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$, т.е. функция ρ = f(φ) = r, $\rho' = \frac{df(\varphi)}{d\varphi} = 0$ тогда

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{0 + r^2} d\varphi = r \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi r .$$

4.4. Вычисление объемов тел.

4.4.1. Вычисление объема тела по известным площадям его параллельных сечений.



a x_{i-1} x_i b x

Пусть имеется тело объема V. Площадь любого поперечного сечения тела Q, известна как непрерывная функция Q=Q(x). Разобьем тело на “слои” поперечными сечениями, проходящими через точки x_i разбиения отрезка [a, b]. Т.к. на каком- либо промежуточном отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ функция Q(x) непрерывна, то принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Обозначим их соответственно M_i и m_i.

Если на этих наибольшем и наименьшем сечениях построить цилиндры с образующими, параллельными оси x, то объемы этих цилиндров будут соответственно равны $M_i\Delta x_i$ и $m_i\Delta x_i$ здесь $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Произведя такие построения для всех отрезков разбиения, получим цилиндры, объемы которых равны соответственно $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ и $\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$.

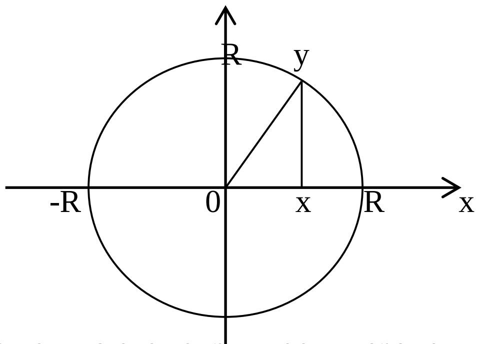
При стремлении к нулю шага разбиения λ, эти суммы имеют общий предел:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \int_a^b Q(x)dx$$

Таким образом, объем тела может быть найден по формуле: $V = \int_a^b Q(x)dx$.

Недостатком этой формулы является то, что для нахождения объема необходимо знать функцию Q(x), что весьма проблематично для сложных тел.

Пример: Найти объем шара радиуса R.



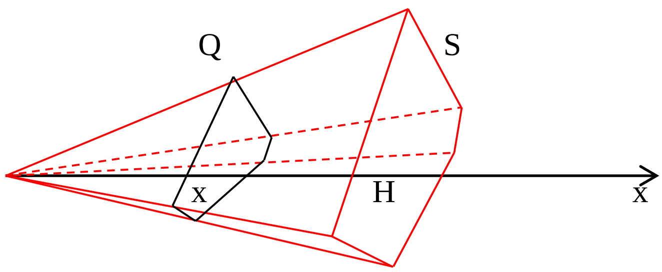
В поперечных сечениях шара получаются окружности переменного радиуса y. В зависимости от текущей координаты x этот радиус выражается по формуле $\sqrt{R^2 - x^2}$.

Тогда функция площадей сечений имеет вид: Q(x) = $\pi\left(R^2 - x^2\right)$.

Получаем объем шара:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi(R^2 x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-R}^{R} = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \pi\left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

Пример: Найти объем произвольной пирамиды с высотой H и площадью основания S.



При пересечении пирамиды плоскостями, перпендикулярными высоте, в сечении получаем фигуры, подобные основанию. Коэффициент подобия этих фигур равен отношению x/H, где x – расстояние от плоскости сечения до вершины пирамиды.

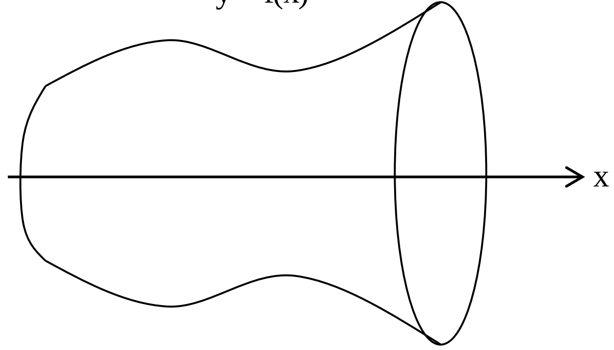
Из геометрии известно, что отношение площадей подобных фигур равно коэффициенту подобия в квадрате, т.е. $\frac{Q}{S} = \left(\frac{x}{H}\right)^2$.

Отсюда получаем функцию площадей сечений: $Q(x) = \frac{S}{H^2}x^2$.

Находим объем пирамиды: $V = \int_0^H \frac{S}{H^2}x^2dx = \frac{Sx^3}{3H^2}\Big|_0^H = \frac{1}{3}SH$.

4.4.2. Объем тел вращения.

Рассмотрим кривую, заданную уравнением y = f(x). Предположим, что функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b]. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями a и b вращать вокруг оси Ox, то получим так называемое **тело вращения**.



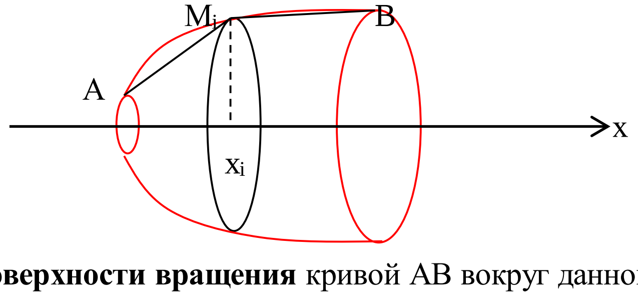
Т.к. каждое сечение тела плоскостью x = const представляет собой круг радиуса $R = |f(x)|$, то объем тела вращения может быть легко найден по полученной выше формуле: $V = \pi\int_a^b f^2(x)dx$.

Пример. Вычислить объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

Решение. Объем тела вращения находим по формуле $V_{ox} = \pi\int_a^b y^2dx$

$$V = \pi\int e^{-2x}dx = \pi\frac{e^{-2x}}{-2}\Bigg|_0^1 = -\frac{\pi}{2}\left(e^{-2}-1\right) = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)(e\partial^2)$$

4.5. Площадь поверхности тела вращения.



Опр: Площадью поверхности вращения кривой AB вокруг данной оси называют предел, к которому стремятся площади поверхностей вращения ломаных, вписанных в кривую AB, при стремлении к нулю наибольших из длин звеньев этих ломаных.

Разобьем дугу AB на n частей точками $M_0, M_1, M_2, \dots, M_n$. Координаты вершин полученной ломаной имеют координаты x_i и y_i. При вращении ломаной вокруг оси получим поверхность, состоящую из боковых поверхностей усеченных конусов, площадь которых равна ΔP_i. Эта площадь может быть найдена по формуле:

$\Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1}+y_i}{2}\Delta S_i$, здесь ΔS_i – длина каждой хорды. $\Delta S_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i$

Применяем теорему Лагранжа к отношению $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}$.

Получаем: $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f(\varepsilon_i), \qquad x_{i-1} < \varepsilon < x_i$.

Тогда $\Delta S_i = \sqrt{1+f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i, \quad \Delta P_i = 2\pi \frac{y_{i-1}+y_i}{2}\sqrt{1+f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i$

Площадь поверхности, описанной ломаной равна: $P_n = \pi\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1})+f(x_i)\right)\sqrt{1+f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i$.

Эта сумма не является интегральной, но можно показать, что

$$P = \lim_{\max\Delta x_i\to 0}\pi\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_{i-1})+f(x_i)\right)\sqrt{1+f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i = \lim_{\max\Delta x_i\to 0}\pi\sum_{i=1}^{n}2f(\varepsilon_i)\sqrt{1+f'^2(\varepsilon_i)}\Delta x_i$$

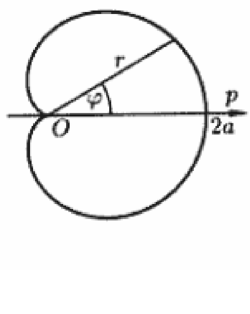
Тогда $P = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}dx$ - формула вычисления **площади поверхности тела вращения.**

$P = 2\pi\int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{\left(\varphi'(t)\right)^2+\left(\psi'(t)\right)^2}dt$, где x = x(t) и y = y(t).

Если кривая задана в *полярных координатах*, то $P = 2\pi\int_\alpha^\beta \rho\sin\varphi\sqrt{\left(\rho'(\varphi)\right)^2+\rho^2}d\varphi,$

$\rho = \rho(\varphi), \quad \alpha \le \varphi \le \beta$.

Пример. Найти площадь поверхности, образованной вращением кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$ вокруг полярной оси.



Решение. Имеем $\rho' = -a\sin\varphi$, $\rho^2 + (\rho')^2 = 4a^2\cos^2\frac{\varphi}{2}$.

Тогда $P = 4\pi a^2\int_0^\pi\left(1+\cos\varphi\right)\sin\varphi\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi =$

$= 16\pi a^2\int_0^\pi \sin\frac{\varphi}{2}\cos^4\frac{\varphi}{2}d\varphi = -32\pi a^2\int_0^\pi\cos^4\frac{\varphi}{2}d(\cos\frac{\varphi}{2}) =$

$= -32\pi a^2\left.\frac{\cos^4\frac{\varphi}{2}}{5}\right|_0^\pi = \frac{32}{5}\pi a^2$.