Т. В. Картузова
А. С. Сабиров
Л. В. Селиверстова

Прикладные задачи по высшей математике

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Чувашский государственный университет имени И. Н. Ульянова»

Т. В. Картузова
А. С. Сабиров
Л. В. Селиверстова

Прикладные задачи по высшей математике

Учебное пособие

Чебоксары 2017

УДК 51(076.1)
ББК В1я73
К 21

Рецензенты:

Н. И. Мерлина — д-р пед. наук, профессор кафедры дискретной математики и информатики ПМФиИТ ЧГУ им. И. Н. Ульянова;

Т. И. Рыбакова — канд. физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедрой математического анализа, алгебры и геометрии ЧГПУ им. И. Я. Яковлева

К 21 **Картузова Т. В.** Прикладные задачи по высшей математике: учеб. пособие / Т. В. Картузова, А. С. Сабиров, Л. В. Селиверстова. — Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2017. — 150 с.

ISBN 978-5-7677-2627-1

Содержит краткий теоретический материал, большое количество разобранных и проиллюстрированных рисунками примеров. Изложена методика решения прикладных задач по математике. В процессе решения конкретных задач разбираются основные понятия различных разделов высшей математики, их применение к решению прикладных задач. В каждом разделе приведены кейс-задания, которые помогут студентам подготовиться к интернет-тестированию.

Для бакалавров высших учебных заведений технического профиля.

Ответственный редактор канд. физ.-мат. наук, доцент А. С. Сабиров

Утверждено Учебно-методическим советом университета

ISBN 978-5-7677-2627-1

УДК 51(076.1)
ББК В1я73

Введение

Математика играет важную роль в естественнонаучных, инженерно-технических и других видах исследований. Она стала для многих отраслей знаний не только орудием количественного расчета, но также методом точного исследования и средством предельно четкой формулировки понятий и проблем. Без современной математики с ее развитым логическим и вычислительным аппаратом был бы невозможен прогресс в различных областях человеческой деятельности.

Задачи прикладного характера играют важную роль в подготовке инженера, они оживляют учебный процесс и вызывают интерес к углубленному изучению математики. В задачниках по общему курсу высшей математики задач прикладного характера бывает недостаточно. Данное пособие представляет собой попытку несколько восполнить этот пробел. Содержание задач соответствует программе вузов для инженерных специальностей. Некоторые задачи затрагивают и другие отрасли практических знаний, с которыми будущий инженер может столкнуться в своей практической деятельности.

Настоящее пособие предоставляет студентам возможность подготовиться к сдаче интернет-тестирования по соответствующим разделам высшей математики. В последнее время при проведении итогового тестирования широко используют кейс-задания практической направленности. Применение метода кейсов позволяет включать в учебный процесс элементы профессиональной деятельности, обеспечивает переход учебных ситуаций к профессиональным, где требуется использовать знания и соответствующие компетенции, формируемые при обучении математике.

Решение задач пособия поможет установлению тесного контакта курса высшей математики с интересами специальных кафедр, будет способствовать повышению заинтересованности студентов в овладении математическим аппаратом.

Глава 1

Приложения линейной алгебры и аналитической геометрии к решению прикладных задач

§ 1.1. Прикладные задачи векторной алгебры

1. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением векторов **a** и **b** называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними:

$$\mathbf{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi,$$

где φ — угол между векторами **a** и **b**.

Скалярное произведение нулевого вектора на любой другой полагается равным нулю. Если векторы **a** и **b** заданы своими координатами в ортонормированном базисе: $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, их скалярное произведение можно представить в виде

$$\mathbf{ab} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Некоторые физические величины определяются как скалярное произведение векторных величин. Например, *работа A постоянной силы F на прямолинейном перемещении s* ее точки приложения равна скалярному произведению векторов **F** и **s**:

$$A = \mathbf{Fs} = |\mathbf{F}||\mathbf{s}|\cos(\mathbf{F}, \mathbf{s}).$$

Пример 1.1. При перемещении материальной точки из точки пространства $M_1(1; -2; 3)$ в $M_2(\lambda; 2-\lambda; 1)$ под действием силы $\mathbf{F} = (-1; 3; 2)$ была совершена работа 1 Дж. Найти модуль перемещения материальной точки.

► Вычитая из координат конца вектора перемещения координаты начала, запишем его в виде

$$\mathbf{s} = M_1M_2 = (\lambda - 1; 4 - \lambda; -2),$$

где λ — неизвестный параметр. Работа силы $\mathbf{F}$ на данном перемещении будет равна

$$A = \mathbf{Fs} = -1 \cdot (\lambda - 1) - 3 \cdot (4 - \lambda) + 2 \cdot (-2) = -4\lambda + 9.$$

Так как по условию задачи эта работа равна 1, то из равенства $-4\lambda + 9 = 1$ определяем $\lambda = 2$. Следовательно, $\mathbf{s} = (1; 2; -2)$, и для искомого модуля получаем

$$|\mathbf{s}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3. \quad ◀$$

Через скалярное произведение выражаются и другие величины, встречающиеся в физике. Еще одной такой величиной является *поток вектора через заданную площадку*. В частности, через понятие потока формулируется закон электромагнитной индукции Фарадея. Отвлекаясь от физического смысла вектора $\mathbf{A}$, дадим общее определение потока.

Пусть задана некоторая элементарная площадка с площадью dS. Введем вектор $\mathbf{dS} = \mathbf{n}\,dS$, где $\mathbf{n}$ — нормаль к этой площадке. Потоком вектора $\mathbf{A}$ через данную площадку dS называется величина

$$d\Phi_A = \mathbf{A}\,\mathbf{dS} = A\,dS\cos\varphi,$$

где φ — угол между вектором $\mathbf{A}$ и нормалью $\mathbf{n}$. Предположение малости площадки было сделано, чтобы пренебречь кривизной площадки и изменением вектора $\mathbf{A}$ в пределах площадки. В общем случае произвольной поверхности Σ поток вектора выражается через поверхностный интеграл II рода:

$$\Phi_A = \iint\limits_{\Sigma} \mathbf{A}\,\mathbf{dS}.$$

Пример 1.2. Найти поток постоянного вектора $\mathbf{A} = 2\mathbf{i}+3\mathbf{j}-\mathbf{k}$ через часть плоскости $x+y+z-a = 0$, лежащей в первом октанте в направлении нормали, образующей острый угол с координатными осями.

▶ Коэффииенты при x, y и z в уравнении плоскости определяют координаты вектора нормали к этой плоскости. В нашем случае вектор $\mathbf{N} = (1; 1; 1)$ образует острый угол с координатными осями. Модуль этого вектора равен $|\mathbf{N}| = \sqrt{3}$. Единичную нормаль получим, поделив вектор $\mathbf{N}$ на его модуль:

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{N}}{|\mathbf{N}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Нетрудно убедиться, что часть плоскости, отсекаемой координатными плоскостями, представляет собой равносторонний треугольник со сторонами $\sqrt{2}\,a$. Следовательно, ее площадь равна $S = a^2/\sqrt{2}$. Тогда поток вектора $\mathbf{A}$ через указанную часть плоскости определится следующим образом:

$$\Phi_A = \mathbf{A}\mathbf{n}S = (2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k})\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{k}\right)S =$$

$$= \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}a^2 = 2a^2.$$ ◄

2. Векторное произведение векторов

Векторным произведением векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называется вектор $\mathbf{c}$, который обозначается $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ и удовлетворяет следующим трем условиям:

1) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\varphi$, где φ — угол между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$;

2) $\mathbf{c} \perp \mathbf{a}$ и $\mathbf{c} \perp \mathbf{b}$;

3) векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ образуют правую тройку, т.е. из конца вектора $\mathbf{c}$ кратчайший поворот от вектора $\mathbf{a}$ к вектору $\mathbf{b}$ виден против часовой стрелки.

Если хотя бы один из сомножителей — нулевой вектор, то векторное произведение считается равным нулевому вектору. Если векторы $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$ заданы своими координатами в ортонормированном базисе, то векторное произведение может быть записано в виде определителя:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Модуль вектора $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ равен *площади параллелограмма*, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Отсюда следует, что *площадь треугольника*, сторонами которого являются векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, выражается формулой

$$S_0 = \frac{1}{2}|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|.$$

Моментом силы $\mathbf{F}$ *относительно точки* O называется векторное произведение радиус-вектора $\mathbf{r}$ точки приложения силы, проведенного из точки O, на вектор силы $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Пример 1.3. В прямоугольной системе координат даны две точки $A(3; -2; 1)$ и $B(-2; 0; -1)$. К точке B приложена сила $\mathbf{F}(2; 3; 1)$. Найти момент силы $\mathbf{F}$ относительно точки A.

► Момент силы $\mathbf{F}$ относительно точки A равен $\mathbf{M}_A(\mathbf{F}) = \overrightarrow{AB} \times \mathbf{F}$, где $\overrightarrow{AB} = (-5; 2; -2)$. Вычисляя векторное произведение, найдем:

$$\mathbf{M}_A(\mathbf{F}) = \overrightarrow{AB} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -5 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 8\mathbf{i} + \mathbf{j} - 19\mathbf{k}.$$ ◄

Пример 1.4. К тетраэдру в точке B вдоль ребер приложены силы $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ (рис. 1.1). Определить момент равнодействующей сил относительно начала координат O, если $OA = OB = OC = a$.

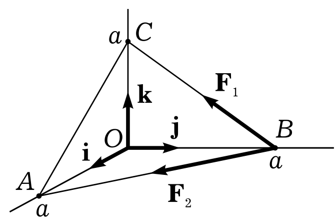


Рис. 1.1

► Запишем заданные силы в базисе $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$:

$$\mathbf{F}_1 = -\frac{F_1}{\sqrt{2}}\mathbf{j} + \frac{F_1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}, \quad \mathbf{F}_2 = \frac{F_2}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{F_2}{\sqrt{2}}\mathbf{j}.$$

Найдем равнодействующую сил и вектор момента сил:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \frac{F_2}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \left(\frac{F_1}{\sqrt{2}} + \frac{F_2}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j} + \frac{F_1}{\sqrt{2}}\mathbf{k},$$

$$\mathbf{M}_O(\mathbf{F}) = \mathbf{r}_B \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & a & 0 \\ \dfrac{F_2}{\sqrt{2}} & -\dfrac{(F_1 + F_2)}{\sqrt{2}} & \dfrac{F_1}{\sqrt{2}} \end{vmatrix}.$$

Отсюда для модуля векторного момента имеем

$$|\mathbf{M}_O(\mathbf{F})| = \sqrt{\frac{a^2 F_1^2}{2} + \frac{a^2 F_2^2}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{F_1^2 + F_2^2}.$$ ◄

§ 1.2. Прикладные задачи аналитической геометрии

Отношением, в котором точка M делит отрезок M_1M_2, называется число λ, удовлетворяющее равенству

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda\overrightarrow{MM_2}.$$

Связь между координатами делящей точки $M(x, y, z)$, точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и числом λ задается равенствами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Деление отрезка M_1M_2 будет *внутренним*, если $\lambda > 0$, и *внешним*, если $\lambda < 0$. При $\lambda = 1$ точка M будет серединой отрезка M_1M_2, $\lambda \neq -1$.

Пример 1.5. Концы однородного стержня находятся в точках $M_1(3; -5; 8)$ и $M_2(7; 13; -6)$. Найти координаты центра масс стержня.

► Центр масс $C(x, y, z)$ однородного стержня находится в его середине. Поэтому $\lambda = 1$ и

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3+7}{2} = 5, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-5+13}{2} = 4,$$

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{8-6}{2} = 1. \qquad ◄$$

Уравнения прямой:

— с угловым коэффициентом k и начальной ординатой b:

$$y = kx + b;$$

— проходящей в данном направлении (с угловым коэффициентом k) через данную точку $M(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = k(x - x_0);$$

— проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

(с угловым коэффициентом $k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$);

— в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1,$$

где a и b — соответственно отрезки, отсекаемые на осях Ox и Oy;

— общее:

$$Ax + By + C = 0,$$

где $A^2 + B^2 \neq 0$.

Пример 1.6. Первый цех, производя 10 единиц продукции ежемесячно, выполнил годовой план. Первые три месяца года второй цех проводил реконструкцию и лишь после этого стал выпускать 15 единиц продукции в месяц. Определить графически, удалось ли второму цеху выполнить годовой план выпуска продукции? В результате, какой цех произвел больше продукции за этот год?

► За x месяцев первый цех произведет $y_1 = 10x$ единиц продукции. Так как второй цех приступил к выпуску продукции на 3 месяца позже, то он через $x \geqslant 3$ месяцев от начала года произведет $y_2 = 15(x - 3) = 15x - 45$ единиц продукции.

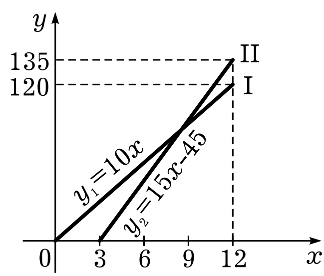


Рис. 1.2

Для наглядности построим графики функций y_1 и y_2 (рис. 1.2). Абсцисса точки пересечения графиков соответствует числу месяцев, по прошествии которых цеха выпустят равное количество продукции, в нашем случае через 9 месяцев. Действительно, из уравнения $10x = 15x - 45$, получим $x = 9$. За год, что соответствует $x = 12$, первый цех произведет 120 единиц, а второй — 135 единиц продукции. Таким образом, второй цех не только выполнит годовой план, но и на 15 единиц продукции перевыполнит его. ◄

Пример 1.7. В прошлом году средняя цена данного товара была 15 денежных единиц, а в настоящем году — 18 денежных единиц. Найти зависимость цены товара от номера года, при условии, что тенденция роста сохранится, т.е. цена будет увеличиваться на одно и то же число. Составить прогноз средней цены на три года вперед.

► Составим уравнение, связывающее номер года x и цену товара y, как уравнение прямой, проходящей через две данные точки $A(1;15)$ и $B(2;18)$:

$$\frac{y-15}{18-15}=\frac{x-1}{2-1} \quad \text{или} \quad y=3x+12.$$

Так как номер прошлого года равен 1, а текущего — 2, то через три года, т.е. при $x=5$, цена товара составит $y = 3\cdot 5+12=27$ денежных единиц. ◄

Пример 1.8. Издержки y (в рублях) на изготовление партии деталей находятся в линейной зависимости от объема партии x. Для первого варианта технологического процесса известно, что $y=210x+560$. Для второго варианта известно, что $y=2900$ руб. при $x=12$ деталей и $y=10550$ руб. при $x=46$ деталей. Провести оценку двух вариантов технологического процесса и найти себестоимость продукции для обоих вариантов при $x=225$ деталей.

► Для второго варианта технологического процесса найдем уравнение, описывающее зависимость издержек от количества деталей. Рассмотрим два способа составления такого уравнения.

I способ. Так как по условию известно, что эта зависимость линейная, то уравнение имеет вид $y=ax+b$. Найдем параметры a и b из системы уравнений

$$\begin{cases} 2900=a\cdot 12+b, \\ 10550=a\cdot 46+b. \end{cases}$$

Отсюда $a=225$ и $b=200$, т.е. $y=225x+200$.

II способ. Составим уравнение как уравнение прямой, проходящей через две известные точки $M_1(12;2900)$ и $M_2(46;10550)$:

$$\frac{y-2900}{10550-2900}=\frac{x-12}{46-12}$$

или

$$\frac{y-2900}{7650}=\frac{x-12}{34}.$$

Тогда $y=225x+200$.

Найдем точку пересечения двух прямых, описывающих зависимость издержек от количества деталей:

$$\begin{cases} y = 210x + 560, \\ y = 225x + 200, \end{cases}$$

откуда $x_0 = 24$, $y_0 = 5600$.

Итак, при объеме партии $x < 24$ выгоднее второй вариант технологического процесса, при $x > 24$ — первый вариант. Себестоимость выпуска 225 деталей первым технологическим способом находим как $y(225) = 210 \cdot 225 + 560 = 47810$ условных денежных единиц. Для второго технологического способа себестоимость составит $y(225) = 225 \cdot 225 + 200 = 50825$ условных денежных единиц. ◀

Пример 1.9. Кронштейн посредством стержней с шарнирами соединен со стеной. (рис. 1.3). К шарнирному болту A подвешен груз весом P. Стержни AC и AB образуют угол α. Найти силы реакции со стороны стержней.

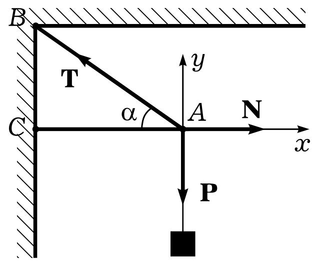


Рис. 1.3

► На узел A действует три силы: вес груза $\mathbf{P}$ и силы реакции $\mathbf{N}$ и $\mathbf{T}$ со стороны стержней. Данная система сил находится в равновесии, отсюда следует, что

$$\mathbf{P} + \mathbf{N} + \mathbf{T} = 0.$$

Проецируя это векторное равенство на оси x и y, получим:

$$Ox: \ -T\cos\alpha + N = 0; \quad Oy: \ T\sin\alpha - P = 0.$$

Из образовавшейся системы легко получить $N = P \operatorname{ctg}\alpha$, $T = P/\sin\alpha$. ◀

Пример 1.10. Из окна, расположенного на высоте 16 м над поверхностью земли, нижний край дома, стоящего прямо на другой стороне улицы, виден под углом понижения $\alpha = 30°$. Вычислить ширину улицы (рис. 1.4).

► Углом понижения называется угол, образованный направлением луча на предмет и горизонтальной прямой. Следовательно, $\angle DAC = 30°$ и $\angle ACB = 30°$. По условию задачи оба дома стоят друг против друга. Следовательно, длина BC равна ширине улицы. Из треугольника ABC имеем $BC/AB = \operatorname{ctg}\alpha$, откуда

$$BC = AB\operatorname{ctg}\alpha = 16\operatorname{ctg}30^\circ = 16\sqrt{3}\text{ м.} \qquad \blacktriangleleft$$

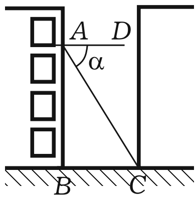


Рис. 1.4

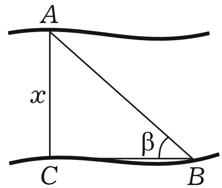


Рис. 1.5

Пример 1.11. Чтобы определить ширину реки, на ее одном (доступном) берегу непосредственно у воды берут базис BC длиной a м. Из одного конца C базиса по перпендикулярному к нему направлению на противоположном берегу у самой воды виден предмет A, а из другого конца B базиса этот предмет виден под углом β к нему (рис. 1.5). Вычислить ширину реки, если $a = 200$ м и $\beta = 60^\circ$.

► Из прямоугольного треугольника ABC имеем $AC/BC = \operatorname{tg}\beta$, откуда $AC = BC\operatorname{tg}\beta = 200\operatorname{tg}60^\circ \approx 346$ м. ◄

§ 1.3. Применение алгебры матриц в экономических задачах

Пример 1.12. Две фирмы производят комплектующие к компьютерам: материнские платы, процессоры и видеокарты. Данные о количестве произведенной продукции за два года приведены в виде матриц (в тыс. единиц)

$$A_1 = \begin{pmatrix} 340 & 215 & 205 \\ 182 & 204 & 264 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 148 & 322 & 281 \\ 129 & 310 & 192 \end{pmatrix}.$$

В первой строке каждой матрицы указано количество произведенных первой фирмой комплектующих (соответственно материнских плат, процессоров и видеокарт), во второй строке — количество тех же видов комплектующих, произведенных второй фирмой. Найти: а) объемы произведенной продукции за два года (A_1 и A_2); б) прирост объемов производства во втором году по сравнению с первым годом по видам продукции и фирмам; в) матрицу среднегодового производства комплектующих. Пояснить экономический смысл элементов полученных матриц.

► а) Объемы продукции за два года определяются суммой матриц:

$$B = A_1 + A_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} 340 & 215 & 205 \\ 182 & 204 & 264 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 148 & 322 & 281 \\ 129 & 310 & 192 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 488 & 537 & 486 \\ 311 & 514 & 456 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица имеет следующий экономический смысл. Объемы продукции в первой фирме составили 488 тыс. материнских плат, 537 тыс. процессоров и 486 тыс. видеокарт. Объемы продукции во второй фирме составили 311 тыс. материнских плат, 514 тыс. процессоров и 456 тыс. видеокарт.

б) Прирост объемов производства во втором году по сравнению с первым определяется разностью матриц:

$$C = A_2 - A_1 =$$

$$= \begin{pmatrix} 148 & 322 & 281 \\ 129 & 310 & 192 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 340 & 215 & 205 \\ 182 & 204 & 264 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -192 & 107 & 76 \\ -53 & 106 & -72 \end{pmatrix}.$$

Отрицательные элементы полученной матрицы указывают на то, что в данной фирме объем производства комплектующих данного вида уменьшился, а положительные — увеличился.

в) Матрицу среднегодового производства продуктов найдем как среднее арифметическое матриц A_1 и A_2:

$$D = \frac{1}{2}(A_1 + A_2) = \frac{1}{2}B =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 488 & 537 & 486 \\ 311 & 514 & 456 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 244 & 268{,}5 & 243 \\ 155{,}5 & 257 & 228 \end{pmatrix}.$$

Поясним экономический смысл элементов полученной матрицы. Среднегодовое производство комплектующих в первой фирме составляет: материнских плат — 244 тыс., процессоров — 268,5 тыс., видеокарт — 243 тыс. единиц. Во второй фирме: материнских плат — 155,5 тыс., процессоров — 257 тыс., видеокарт — 228 тыс. единиц. ◄

Пример 1.13. Предприятие по плану должно выпустить 1020 высоковольтных диодов, 1545 транзисторов и 1270 тиристоров. Для их изготовления требуется пять видов сырья. Расход сырья и стоимость единицы каждого его вида (в условных денежных единицах) даны в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Виды изделий	Типы сырья				
	I	II	III	IV	V
Диоды	5	10	3	9	2
Транзисторы	4	8	5	6	8
Тиристоры	6	12	4	3	10
Стоимость единицы сырья	7	4	5	10	2

Найти: а) необходимое количество каждого вида сырья для обеспечения плана; б) стоимость сырья для единицы каждого вида продукции; в) общую стоимость всего сырья для всей продукции.

► Составим матрицу-строку $X = (1020\ 1545\ 1270)$, характеризующую план предприятия, а также матрицу A, характеризующую расход сырья на единицу продукции, и матрицу-столбец C стоимости единицы каждого вида сырья (в условных денежных единицах):

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 3 & 9 & 2 \\ 4 & 8 & 5 & 6 & 8 \\ 6 & 12 & 4 & 3 & 10 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

а) Необходимое количество каждого вида сырья для обеспечения плана найдем как произведение матрицы X на матрицу A:

$$B = X \cdot A = (1020\ 1545\ 1270) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 10 & 3 & 9 & 2 \\ 4 & 8 & 5 & 6 & 8 \\ 6 & 12 & 4 & 3 & 10 \end{pmatrix} =$$

$$= (18900\ 37800\ 15865\ 22260\ 27100).$$

Сырья первого вида необходимо 18900 у.е, второго — 37800 у.е., третьего — 15865 у.е., четвертого — 22260 у.е. и пятого вида сырья — 27100 у.е.

б) Стоимость сырья для единицы каждого вида продукции найдем как произведение матриц A и C:

$$D = A \cdot C = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 3 & 9 & 2 \\ 4 & 8 & 5 & 6 & 8 \\ 6 & 12 & 4 & 3 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 5 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 184 \\ 161 \\ 160 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, на производство одного диода расходуется 184, одного транзистора — 161 и одного тиристора — 160 усл. ден. ед.

в) Общую стоимость всего сырья для всей продукции найдем как произведение матрицы-строки, характеризующей план, и матрицы-столбца, характеризующей стоимость сырья для единицы каждого вида продукции:

$$Q = X \cdot D = (1020\ 1545\ 1270) \cdot \begin{pmatrix} 184 \\ 161 \\ 160 \end{pmatrix} = (639625).$$

Итак, всего для выполнения плана необходимо 639625 усл. ден. ед. ◀

Пример 1.14. Расход угля и мазута (в условных единицах) тремя предприятиями указан в табл. 1.2, а стоимость их перевозки (в условных денежных единицах) — в табл. 1.3. Найти затраты на перевозку сырья каждым предприятием по видам транспорта.

Таблица 1.2

Предприятия	Тип сырья	
	уголь	мазут
I	10	20
II	50	0
III	30	10

Таблица 1.3

Тип сырья	Вид транспорта		
	автомобильный	железнодорожный	водный
Уголь	3	5	8
Мазут	7	2	8

► По табл. 1.2 составляем матрицу X расхода сырья, а по табл. 1.3 — матрицу P стоимостей перевозок:

$$X = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 50 & 0 \\ 30 & 10 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 7 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу затрат по видам транспорта:

$$Y = X \cdot P = \begin{pmatrix} 10 & 20 \\ 50 & 0 \\ 30 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 8 \\ 7 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 170 & 90 & 240 \\ 150 & 250 & 400 \\ 160 & 170 & 320 \end{pmatrix}.$$

Строки полученной матрицы определяют расходы на перевозку сырья соответственно первым, вторым и третьим предприятиями, а столбцы соответствуют видам применяемого для этого транспорта. Итак:

— первому предприятию необходимо затратить на перевозку сырья автомобильным транспортом 170, железнодорожным транспортом — 90, водным транспортом — 240 усл. ден. ед.;

— второму предприятию необходимо затратить на перевозку сырья автомобильным транспортом 150, железнодорожным транспортом — 250, водным транспортом — 400 усл. ден. ед.;

— третьему предприятию необходимо затратить на перевозку сырья автомобильным транспортом 160, железнодорожным транспортом — 170, водным транспортом — 320 усл. ден. ед. ◄

Пример 1.15. Завод по производству бытовой техники закупил на общую сумму 210 тыс. у.е. сырья в следующем ассортименте: высокопрочной стали — 5, мягкой стали — 6, пластика — 4 т. Найти стоимость тонны каждого вида сырья, если 4 т высокопрочной стали сто́ят столько же, сколько 6 т мягкой стали, а 2 т пластика на 3 тыс. у.е. дешевле трех тонн мягкой стали.

► Пусть x_1, x_2 и x_3 — стоимость одной тонны высокопрочной стали, мягкой стали и пластика, соответственно. Из условия задачи имеем систему

$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 210, \\ 4x_1 - 6x_2 = 0, \\ 3x_1 - 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Найдем ее решение, для этого составим определитель матрицы системы и вычислим его по правилу Саррюса:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 4 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-6) \cdot (-2) + 6 \cdot 0 \cdot 3 +$$
$$+ 4 \cdot 4 \cdot 0 - 4 \cdot (-6) \cdot 3 - 6 \cdot 4 \cdot (-2) - 5 \cdot 0 \cdot 0 =$$
$$= 60 + 0 + 0 + 72 + 48 - 0 = 180 \neq 0.$$

Определитель матрицы системы не равен нулю, следовательно, система имеет единственное решение. Найдем его с помощью обратной матрицы по формуле $X = A^{-1}B$, где:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 4 \\ 4 & -6 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ — матрица системы;}$$

$$B = \begin{pmatrix} 210 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ — столбец свободных членов;}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ — столбец неизвестных.}$$

Найдем обратную матрицу A^{-1}. Составим присоединенную матрицу, состоящую из алгебраических дополнений элементов исходной матрицы:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 18 \\ 12 & -22 & 18 \\ 24 & 16 & -54 \end{pmatrix}.$$

Построим союзную матрицу, получающуюся при транспонировании присоединенной матрицы:

$$A^* = (\bar{A})^T = \begin{pmatrix} 12 & 12 & 24 \\ 8 & -22 & 16 \\ 18 & 18 & -54 \end{pmatrix}.$$

Обратную матрицу получим по формуле $A^{-1} = (1/\Delta)A^*$:

$$A^{-1} = \frac{1}{180}\begin{pmatrix} 12 & 12 & 24 \\ 8 & -22 & 16 \\ 18 & 18 & -54 \end{pmatrix}.$$

Находим X:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{180}\begin{pmatrix} 12 & 12 & 24 \\ 8 & -22 & 16 \\ 18 & 18 & -54 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 210 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{180}\begin{pmatrix} 12\cdot 210 + 12\cdot 0 + 24\cdot 3 \\ 8\cdot 210 - 22\cdot 0 + 16\cdot 3 \\ 18\cdot 210 + 18\cdot 0 - 54\cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14{,}4 \\ 9{,}6 \\ 20{,}1 \end{pmatrix}.$$

Итак, стоимость одной тонны высокопрочной стали равна 14,4 тыс. у.е., мягкой стали — 9,6 тыс. у.е., а пластика — 20,1 тыс. у.е. ◄

Пример 1.16. Пусть завод производит продукцию четырех видов: А, Б, В и Г. Известно количество продукции каждого вида, произведенное за год: 300, 250, 90 и 120 штук продукции видов А, Б, В и Г соответственно. Записать вектор объема производства за год.

► Вектор объема производства будет иметь вид

$$\mathbf{V} = (300; 250; 90; 120).$$ ◄

Пример 1.17. Известно, что первый завод выпустил продукции (в т): ферросплавов — 950; электродной продукции — 700; сварочной проволоки — 450. Второй завод выпустил, соответственно: ферросплавов — 730; электродной продукции — 530; сварочной проволоки — 630. Найти совокупный объем продукции по каждому виду, выпущенной двумя заводами.

► Объем выпуска первого и второго заводов представим в виде векторов: $\mathbf{V}_1 = (950; 700; 450)$ и $\mathbf{V}_2 = (730; 510; 680)$. Тогда объем продукции, выпущенной двумя заводами, найдем как сумму этих двух векторов:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 = (1680; 1210; 1130).$$ ◄

Пример 1.18. За год с нового прокатного стана металлургического комбината было выпущено: швеллеров — 200, балок — 300 и уголков 150 тыс. т. В следующем году комбинат планирует увеличить выпуск продукции в полтора раза. Найти планируемый объем продукции и вектор роста объемов выпуска продукции по сравнению с этим годом.

► Объем выпуска продукции в этом году составил $\mathbf{V}_1 = (200; 300; 150)$. Объем планируемого выпуска продукции найдем как произведение вектора $\mathbf{V}$ на число 1,5. Получим $\mathbf{V}_2 = (300; 450; 225)$. Планируемый вектор роста объемов выпуска продукции найдем как разность между векторами $\mathbf{V}_2$ и $\mathbf{V}_1$:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_1 = (100; 150; 75). \quad ◄$$

Пример 1.19. По табл. 1.4, которая представляет собой фрагмент потребительской корзины, вычислить индекс цен и индекс инфляции для определенного месяца по отношению к предыдущему месяцу.

Таблица 1.4

Вид товара	Количество	Цена единицы товара в текущем месяце	Цена единицы товара в предыдущем месяце
Хлеб	10	21	18
Молоко	5	60	54
Мыло	3	18	17

► Обозначим через $\mathbf{q} = (10; 5; 3)$ вектор количества потребляемых товаров, $\mathbf{c}_{\text{тек}} = (21; 60; 18)$ — вектор цен в текущем периоде, $\mathbf{c}_{\text{пред}} = (18; 54; 17)$ — вектор цен в предыдущем периоде.

Индекс цен определяется как коэффициент p, который делает вектор $\mathbf{q}$ ортогональным вектору $100\mathbf{c}_{\text{тек}} - p\mathbf{c}_{\text{пред}}$. Тогда $(100\mathbf{c}_{\text{тек}} - p\mathbf{c}_{\text{пред}}, \mathbf{q}) = 0$, откуда имеем $100(\mathbf{c}_{\text{тек}}, \mathbf{q}) = p(\mathbf{c}_{\text{пред}}, \mathbf{q})$. Итак, индекс цен найдем по формуле

$$p = \frac{(\mathbf{c}_{\text{тек}}, \mathbf{q})}{(\mathbf{c}_{\text{пред}}, \mathbf{q})} \cdot 100\%.$$

Получаем
$$p = \frac{21 \cdot 10 + 60 \cdot 5 + 18 \cdot 3}{18 \cdot 10 + 54 \cdot 5 + 17 \cdot 3} \cdot 100\% = 112{,}6\%.$$
Индекс инфляции можно найти по формулам
$$i = p - 100 \quad \text{или} \quad i = \frac{(\mathbf{c}_{\text{тек}} - \mathbf{c}_{\text{пред}}, \mathbf{q})}{(\mathbf{c}_{\text{пред}}, \mathbf{q})} \cdot 100\%.$$
Итак, индекс инфляции составил $i = 12{,}6\%$. ◀

Пример 1.20. Предприниматель взял в банке кредит на 150 000 денежных единиц под 12% простых годовых. (Простым процентом в банковской практике называют процентные деньги, начисляемые только на основной капитал по истечении каждого установленного договором промежутка времени.) Найти количество денежных единиц долга через полгода, три года.

▶ Если на основной капитал B начисляются простые проценты из расчета $R\%$ годовых, то процентные деньги за один год составят
$$\frac{RB}{100} = rB,$$
где $r = R/100$. За t лет процентные деньги составят rBt. Обозначим наращенную сумму за t лет через S. Получим, что S есть линейная функция от времени t:
$$S(t) = rBt + B = B(1 + rt).$$
По условию $B = 150\,000$ ден. ед., $r = 0{,}12$. Тогда
$$S = 18\,000t + 150\,000 = 150\,000(1 + 0{,}12t).$$
При $t = 6$ месяцев ($= 0{,}5$ года) имеем
$$S = 150\,000(1 + 0{,}12 \cdot 0{,}5) = 159\,000 \text{ ден. ед.}$$
При $t = 3$ года получим
$$S = 150\,000(1 + 0{,}12 \cdot 3) = 204\,000 \text{ ден. ед.}$$ ◀

Пример 1.21. Постоянные издержки F (не зависящие от числа x единиц произведенной продукции) составляют 125 тыс. руб. в месяц, а переменные издержки $V(x)$ (пропорциональные x) — 700 руб. за каждую единицу продукции. Цена единицы продукции 1200 руб. Найти объем продукции x, при котором прибыль равна: а) нулю (точка безубыточности); б) 105 тыс. руб. в месяц.

► а) Издержки производства x ед. продукции составят

$$C(x) = F + V(x) = 125 + 0{,}7x \text{ тыс. руб.}$$

Совокупный доход (выручка) от реализации этой продукции $R(x) = 1{,}2x$, а прибыль

$$P(x) = R(x) - C(x) = 0{,}5x - 125 \text{ тыс. руб.}$$

Точка безубыточности, в которой $P(x) = 0{,}5x - 125 = 0$, равна $x = 250$ ед.

б) Прибыль $P(x)$ равна 105 тыс. руб., т.е. $P(x) = 0{,}5x - 125 = 105$ при $x = 460$ ед. ◄

Пример 1.22. Предложение S и спрос D на муку в определенный период выражены функциями

$$S = 0{,}8p + 0{,}5, \quad D = -0{,}4p + 1{,}5,$$

где p — цена муки (измеряется в долларах, а S и D — в центнерах). Найти рыночную цену муки. (Рыночная цена товара — это цена, при которой его предложение и спрос на рынке совпадают.)

► Рыночная цена определяется условием $S = D$, т.е. является решением уравнения $0{,}8p + 0{,}5 = -0{,}4p + 1{,}5$ и равна $p_0 = 0{,}83$ доллара. На рис. 1.6 изображены графики функций S и D (по оси абсцисс откладывается цена товара p, по оси ординат — количество товара Q). Рыночная цена муки p_0 является абсциссой точки пересечения этих графиков. ◄

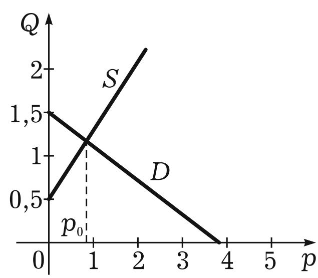


Рис. 1.6

Задачи для самостоятельного решения

1.1. Концы однородного стержня находятся в точках $M_1(3; -5; 8)$ и $M_2(7; 13; -6)$. Найти координаты центра масс стержня.

Ответ: $C(5; 4; 1)$.

1.2. Сила $\mathbf{F} = (2; 3; -5)$ приложена к точке $A(1; -2; 2)$. Вычислить: а) работу силы $\mathbf{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинено, перемещается из положения A в положение $B(1;4;0)$; б) модуль момента силы относительно точки B.

Ответ: $28;\ 4\sqrt{46}$.

1.3. Завод выпускает станки A и B, которые имеют массу 2700 кг. Конструкторы после модернизации снизили массу каждого станка типа A на 7%, а типа B — на 5%, и они вместе стали иметь массу 2535 кг. Найти: а) массу станков старой конструкции; б) снижение материалоемкости станков A и B и годовую экономию металла, если вместо старых станков завод будет выпускать в год по 5000 станков типа A и B новой конструкции.

Ответ: 825 кг.

1.4. Определить работу силы $\mathbf{F}$, $|\mathbf{F}| = 15$ Н, которая, действуя на тело, вызывает его перемещение на 4 м под углом $\pi/3$ к направлению действия силы.

Ответ: 30 Дж.

1.5. Сила $\mathbf{F} = (2;2;9)$ приложена к точке $A(4;2;-3)$. Вычислить величину и направляющие косинусы момента $\mathbf{M}$ этой силы относительно точки $B(2;4;0)$.

Ответ: $|\mathbf{M}| = 28$, $\cos\alpha = -3/7$, $\cos\beta = -6/7$, $\cos\gamma = 2/7$.

1.6. Сила $\mathbf{F} = (3;2;-4)$ приложена к точке $A(2;-1;1)$. Найти вращающий момент $\mathbf{M}$ этой силы относительно начала координат.

Ответ: $\mathbf{M} = (2;11;7)$.

1.7. Даны три силы $\mathbf{F} = (2;-1;-3)$, $\mathbf{Q} = (3;2;-1)$ и $\mathbf{P} = (-4;1;3)$, приложенные к точке $C(-1;4;-2)$. Определить величину и направляющие косинусы момента равнодействующей этих сил относительно точки $A(2;3;-1)$.

Ответ: $\sqrt{66}$; $\cos\alpha = 1/\sqrt{66}$, $\cos\beta = -4/\sqrt{66}$, $\cos\gamma = -7/\sqrt{66}$.

1.8. К вершине куба приложены три силы, равные по величине соответственно 1, 2, 3 и направленные по диагоналям граней куба, выходящих из данной вершины. Найти величину равнодействующей этих трех сил и углы, образованные ею с составляющими силами.

О т в е т : 5; arccos(7/10), arccos(8/10), arccos(9/10).

1.9. Луч света выходит из точки $M(2;1)$ под углом $\alpha = \operatorname{arctg} 3$ к оси y и отражается от нее. Написать уравнение отраженного луча.

О т в е т : $y = x/3 + 5/3$.

1.10. Луч света направлен по прямой $x + y + 3 = 0$. Дойдя до прямой $3x - y + 5 = 0$, луч отразился. Составить уравнение отраженного луча.

О т в е т : $y = x + 1$.

1.11. Сила $\mathbf{F}$, $|\mathbf{F}| = 1000$ Н, разложена на две составляющие $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, образующие между собой угол $108°$ (рис. 1.7). Найти модули составляющих, если они равны.

О т в е т : 850,6 Н.

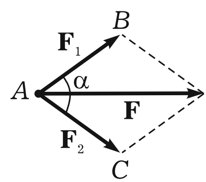


Рис. 1.7

1.12. Луч света направлен по прямой $y = \frac{2}{3}x - 4$. Найти координаты точки M встречи луча с осью Ox и уравнение отраженного луча.

О т в е т : $M(6;0)$, $y = -\frac{2}{3}x + 4$.

1.13. Сила $\mathbf{F} = (m, n)$ приложена к точке $M_0(x_0, y_0)$. Записать уравнение прямой, вдоль которой направлена эта сила.

О т в е т : $nx - my + my_0 - nx_0 = 0$.

1.14. Точка $M(x, y, z)$ движется прямолинейно и равномерно из начального положения $M_0(15; -24; -16)$ со скоростью $v = 12$ в направлении вектора $\mathbf{s} = (-2; 2; 1)$. Убедившись, что траектория движения точки M пересекает плоскость $3x + 4y + 7z - 17 = 0$, найти координаты точки M_1 их пересечения.

О т в е т : $M_1(-25; 16; 4)$.

1.15. Нужно восстановить границы квадратного участка земли по трем сохранившимся столбам: один — в центре участка, остальные — на двух противоположных границах. На плане положение центрального столба определено точкой $M(1;6)$, а боковых — точками $A(5;9)$ и $B(3;0)$. Составить уравнения прямых, изображающих границы участка.

О т в е т : $x+2y-23=0$, $x+2y-3=0$, $2x-y-6=0$, $2x-y+14=0$.

1.16. Перевозка груза от данного города в первый пункт, находящийся на расстоянии 100 км, стоит 2000 руб., а в другой, находящийся на расстоянии 400 км, — 3590 руб. Установить зависимость стоимости перевозки y от расстояния x, если стоимость есть линейная функция расстояния.

О т в е т : $y=5{,}3x+1470$.

1.17. Издержки y (в руб.) на изготовление партии деталей определяются по формуле $y=ax+b$, где x — объем партии. Для первого варианта технологического процесса $y=1{,}45x+20$. Для второго варианта известно, что $y=157{,}5$ руб. при $x=100$ дет. и $y=452{,}5$ руб. при $x=300$ дет. Провести оценку двух вариантов технологического процесса и найти себестоимость продукции для обоих вариантов при $x=200$ дет.

О т в е т : при $x=200$ деталей по первому варианту $y=$ $=310$ руб., а по второму — $y=305$ руб.

1.18. Предприятие выпускает четыре вида изделий с использованием четырех видов сырья. Нормы расхода сырья даны как элементы матрицы A:

$$A=\begin{array}{cl}\begin{pmatrix}2&3&4&5\\1&2&5&6\\7&2&3&2\\4&5&6&8\end{pmatrix}&\begin{array}{l}1\\2\\3\\4\end{array}\end{array}\ \text{Вид изделия}$$

Требуется найти затраты сырья каждого вида при заданном плане выпуска каждого изделия соответственно 60, 50, 35 и 40 ед.

О т в е т : 575, 550, 835, 990.

1.19. Предприятие выпускает ежесуточно четыре вида изделий, основные производственно-экономические показатели которых приведены в табл. 1.5.

Таблица 1.5

Вид изделия	Количество изделий	Расход сырья, кг/изд.	Затраты времени, ч/изд.	Цена изделия, ден. ед./изд.
1	20	5	10	30
2	50	2	5	15
3	30	7	15	45
4	40	4	8	20

Требуется определить следующие ежесуточные показатели: расход сырья S, затраты рабочего времени T и стоимость P выпускаемой продукции предприятия.

О т в е т : 270 кг; 1220 ч; 3500 ден. ед.

1.20. Обувная фабрика специализируется по выпуску изделий трех видов: сапог, кроссовок и ботинок. При этом используется сырье трех типов: S_1, S_2, S_3. Нормы расхода каждого из них на одну пару обуви и объем расхода сырья на 1 день заданы в табл. 1.6.

Таблица 1.6

Вид сырья	Нормы расходы сырья на 1 пару, усл. ед.			Расход сырья на 1 день, усл. ед.
	сапоги	кроссовки	ботинки	
S_1	5	3	4	2700
S_2	2	1	1	800
S_3	3	2	2	1600

Найти ежедневный объем выпуска каждого вида обуви.

У к а з а н и е. Пусть ежедневно фабрика выпускает x_1 пар сапог, x_2 пар кроссовок и x_3 пар ботинок. Тогда в соответствии с расходом сырья каждого вида имеем систему

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 2700, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 900, \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 1600. \end{cases}$$

Решая систему любым способом, находим $(200; 300; 200)$, т.е. фабрика выпускает 200 пар сапог, 300 — кроссовок и 200 пар — ботинок.

1.21. Предприятие купило автомобиль стоимостью 150 тыс. руб. Ежегодная норма амортизации составляет 9%. Полагая зависимость стоимости автомобиля от времени линейной, найти стоимость автомобиля через 4,5 года.

Ответ: 89,25 тыс. руб.

1.22. Зависимость уровня потребления y некоторого вида товара от уровня дохода семьи x выражается формулой $y = a - [b/(x + c)]$. Найти уровень потребления товара при уровне дохода семьи 158 ден. ед. Известно, что при $x = 50 \quad y = 0$; при $x = 74 \quad y = 0{,}8$; при $x = 326 \quad y = 2{,}3$.

Ответ: 1,8.

Глава 2
Приложения производной к решению прикладных задач

§ 2.1. Геометрические приложения производной

Дадим сначала общее определение касательной к кривой. Возьмем на непрерывной кривой L две точки M и M_1 (рис. 2.1). Прямую MM_1, проходящую через эти точки, называют *секущей*. Пусть точка M_1, двигаясь вдоль кривой L, неограниченно приближается к точке M. Тогда секущая, поворачиваясь около точки M, стремится к некоторому предельному положению MT. *Касательной к данной кривой в данной точке* M называется предельное положение MT секущей MM_1, проходящей через точку M, когда вторая точка пересечения M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M.

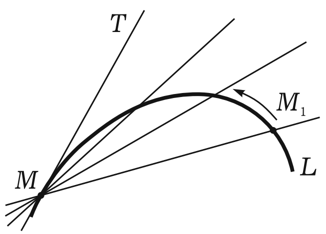


Рис. 2.1

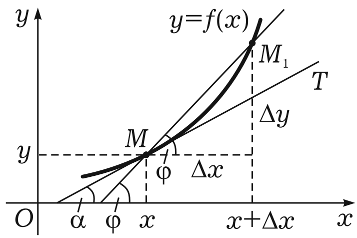


Рис. 2.2

Рассмотрим теперь график непрерывной кривой $y = f(x)$, имеющей в точке $M(x, y)$ невертикальную касательную (рис. 2.2). Найдем ее угловой коэффициент $k = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол касательной с осью Ox. Для этого проведем через точку M и точку M_1 графика с абсциссой $x + \Delta x$ секущую. Обозначим через φ угол между секущей MM_1 и осью Ox. На рис. 2.2 видно, что угловой коэффициент секущей равен

$$k_{\text{сек}} = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

При $\Delta x \to 0$ в силу непрерывности функции приращение Δy тоже стремится к нулю, поэтому точка M_1 неограниченно приближается по кривой к точке M, а секущая MM_1, поворачиваясь около точки M, переходит в касательную. Угол $\varphi \to \alpha$, т.е. $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha$. Следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \operatorname{tg}\alpha.$$

Поэтому угловой коэффициент касательной равен

$$k = \operatorname{tg}\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\varphi = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке x_0 имеет вид

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0),$$

а *уравнение нормали* —

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Углом между двумя кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ в точке их пересечения $M_0(x_0, y_0)$ называется угол между касательными к этим кривым в точке M_0, тангенс которого находится по формуле

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{f_2'(x_0) - f_1'(x_0)}{1 + f_1'(x_0) f_2'(x_0)}.$$

Пример 2.1. Написать уравнение касательной к кривой $y = x^2 - 9x - 4$ в точке с абсциссой $x = -1$.

► Ордината точки касания равна $y(-1) = 1 + 9 - 4 = 6$. В любой точке $y' = 2x - 9$. В точке касания $y'(-1) = -11$. Поэтому уравнение касательной к графику функции в точке $(-1; 6)$ имеет вид

$$y - 6 = -11(x+1) \quad \text{или} \quad y = -11x - 5. \qquad ◄$$

Пример 2.2. Написать уравнения всех касательных к графику функции $y = -x^2$, проходящих через заданную точку $M(4; 0)$.

► Запишем уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Здесь (x, y) — произвольная точка на касательной; $y_0 = f(x_0)$. По условию касательная проходит через точку $M(4; 0)$, следовательно, получим уравнение

$$-y_0 = f'(x_0)(4 - x_0).$$

Отсюда, с учетом $f'(x) = -2x$, имеем

$$x_0^2 = (-2x_0)(4 - x_0).$$

Решив это уравнение, найдем два значения: $x_0 = 0$ и $x_0 = 8$. Таким образом, две касательные к графику функции $y = -x^2$ проходят через точку M. Запишем их уравнения:

$$y = 0 \quad \text{и} \quad y = -16x + 64. \qquad ◄$$

Пример 2.3. На параболе $y = x^2 - 6x + 11$ найти точку, наименее удаленную от прямой $y = -x$ (рис. 2.3). Вычислить это расстояние.

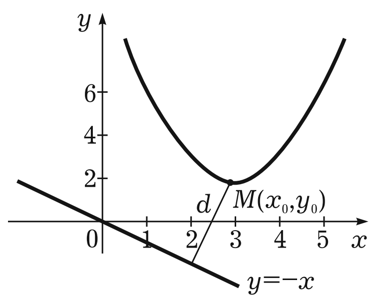


Рис. 2.3

► Пусть $M(x_0, y_0)$ — точка, удовлетворяющая заданному условию. Поскольку M принадлежит параболе, ее координаты удовлетворяют уравнению параболы, т.е. $y_0 = x_0^2 - 6x_0 + 11$, $M(x_0; x_0^2 - 6x_0 + 11)$. Расстояние от точки до прямой определяется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Запишем уравнение прямой $y = -x$ в общем виде: $x + y = 0$. Отсюда $A = 1$, $B = 1$, $C = 0$. Подставив вместо x_0, y_0 в формулу координаты точки M, получим:

$$d = \frac{|1 \cdot x_0 + 1 \cdot (x_0^2 - 6x_0 + 11) + 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|x_0^2 - 5x_0 + 11|}{\sqrt{2}}.$$

Решая уравнение $x_0^2 - 5x_0 + 11 = 0$, находим дискриминант $D = 25 - 44 < 0$, т.е. выражение $x_0^2 - 5x_0 + 11$ для всех x_0

имеет один знак, а именно $x_0^2-5x_0+11>0$. Таким образом,

$$d=\frac{x_0^2-5x_0+11}{\sqrt{2}}.$$

Область определения этой функции $x_0\in\mathbb{R}$. Требуется найти наименьшее значение функции $d(x_0)$, для этого вычислим ее производную:

$$d'(x_0)=\frac{2x_0-5}{\sqrt{2}}.$$

Производная $d'(x_0)$ равна нулю, когда $2x_0-5=0$, т.е. получаем $x_0=2{,}5$. Так как $d''(x_0)=2$, $d''(x_0)>0$, то при $x_0=2{,}5$ функция $d(x_0)$ достигает минимума, который и является ее наименьшим значением. Тогда $y_0=2{,}5^2-6\cdot2{,}5+11=$ $=2{,}25$ и минимальное расстояние между прямой и параболой равно

$$d=\frac{2{,}5^2-5\cdot2{,}5+11}{\sqrt{2}}\approx3{,}36.$$

◄

§ 2.2. Приложения производной в задачах физики

Производная — одно из наиболее важных фундаментальных математических понятий, широко применяемое в математике, физике и в целом ряде других приложений.

Пусть материальная точка M движется по некоторой прямой. В некоторой точке O этой прямой поместим начало декартовой системы координат и направим ось x вдоль этой прямой. Тогда каждому моменту времени t будет соответствовать определенное значение координаты $x(t)$. Зависимость $x=x(t)$ называют *законом движения точки*.

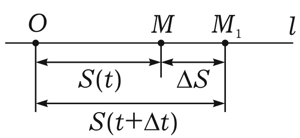


Рис. 2.4

Введем понятие скорости точки. Если в некоторый момент времени t точка занимает положение $x(t)$, то в момент времени $t+\Delta t$ (Δt — приращение времени) точка займет положение $x(t+\Delta t)$, где (рис. 2.4). Таким образом, перемещение точки M за время Δt будет $\Delta x=x(t+\Delta t)-x(t)$.

Отношение $\Delta x/\Delta t$ выражает *среднюю скорость* движения точки за время Δt:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta x}{\Delta t}.$$

Средняя скорость зависит от значения Δt: чем меньше Δt, тем точнее средняя скорость выражает скорость движения точки в данный момент времени t. Предел средней скорости движения при стремлении к нулю промежутка времени Δt называется *скоростью движения точки в данный момент времени* (или *мгновенной скоростью*). Обозначив эту скорость через v, получим:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad \text{или} \quad v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t}.$$

В общем случае скорость движения материальной точки также зависит от времени $v = v(t)$. Изменение скорости за промежуток времени Δt равно $\Delta v = v(t+\Delta t) - v(t)$. Отношение $\Delta v/\Delta t$ выражает *среднее ускорение* движения точки за время Δt. Предел этого отношения при $\Delta t \to 0$ называется *ускорением a точки M в данный момент t*:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Поскольку $a = v'_t$, $v = x'_t$, то $a = (x'_t)'$. Таким образом, ускорение можно найти как вторую производную от координаты точки: $a = x''_t$.

К нахождению подобных пределов приводят решения множества других задач. Можно показать, что:

— если $Q = Q(t)$ — электрический заряд, проходящий через поперечное сечение проводника за время t, то *сила тока в момент времени t* равна

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{Q(t+\Delta t) - Q(t)}{\Delta t};$$

— если $N = N(t)$ — количество вещества, вступающего в химическую реакцию за время t, то *скорость химической реакции в момент времени t* равна

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t};$$

— если $m = m(x)$ — масса неоднородного стержня между точками $O(0;0)$ и $M(x;0)$, то *линейная плотность стержня в точке x* есть

$$S = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x}.$$

Вышеприведенные пределы имеют одинаковый вид: везде требуется найти предел отношения приращения функции к приращению аргумента. Этот предел и называется *производной*. Вышеперечисленные пределы можно записать так: $v = S'_t$, $I = Q'_t$, $v = N'_t$, $S = m'_x$.

Далее рассмотрим ряд простых примеров с применением производных. Во всех случаях время задано в секундах, а координаты — в метрах.

Пример 2.4. По оси Ox движутся две материальные точки, законы движения которых имеют вид $x_1 = \frac{1}{3}t^3 - 4$ и $x_2 = \frac{7}{2}t^2 - 12t + 3$. В какой момент времени их скорости окажутся равными?

► Находим скорости обеих точек: $x'_1 = t^2$, $x'_2 = 7t - 12$. Так как по условию $x'_1 = x'_2$, то

$$t^2 = 7t - 12, \quad t^2 - 7t + 12 = 0, \quad t_1 = 3 \text{ с}, \quad t_2 = 4 \text{ с}. \qquad ◄$$

Пример 2.5. Пусть закон прямолинейного движения материальной точки имеет вид $x(t) = 3t^2 + 5t + 1$. Вычислить среднюю скорость за первые 5 секунд движения и скорость точки в момент времени $t = 2$ с.

► Вычислим среднюю скорость в первые 5 с:

$$v_{\text{ср}} = \frac{x(5) - x(0)}{5 - 0} =$$

$$= \frac{3 \cdot 5^2 + 5 \cdot 5 + 1 - (3 \cdot 0^2 + 5 \cdot 0 + 1)}{5} = 20 \text{ м/с},$$

и мгновенную скорость в момент времени $t = 2$ с:

$$v(t) = (3t^2 + 5t + 1)' = 6t + 5,$$

$$v(2) = 6 \cdot 2 + 5 = 17 \text{ м/с}. \qquad ◄$$

Пример 2.6. Задан закон прямолинейного движения материальной точки $x(t) = 16/(t + 1)^2$, где t — время. Вычислить ускорение точки через 3 с после начала движения.

► Используя формулу $a = x''(t)$, находим:

$$x'(t) = \left(\frac{16}{(t+1)^2}\right)' = \frac{-32}{(t+1)^3},$$

$$a(t) = x''(t) = \left(\frac{-32}{(t+1)^3}\right)' = \frac{64}{(t+1)^4}.$$

Вычислим ускорение через 3 с после начала движения:

$$a(3) = \frac{64}{(3+1)^4} = \frac{3}{8} \approx 0{,}38 \text{ м/с}.$$

◄

Пример 2.7. При $t \geqslant 0$ законы движения по прямой двух материальных точек имеют вид $x_1(t) = 5t^2 + 2t + 6$ и $x_2(t) = 4t^2 + 3t + 18$. С какой скоростью удаляются эти точки друг от друга в момент встречи?

► В момент встречи координаты точек совпадают. Из этого условия найдем момент встречи точек:

$$5t^2 + 2t + 6 = 4t^2 + 3t + 18,$$

$$t^2 - t - 12 = 0, \quad t_1 = -3, \quad t_2 = 4.$$

Следовательно, с учетом $t \geqslant 0$, точки встретятся в момент $t = 4$ с. Найдем скорости точек:

$$v_1(t) = (5t^2 + 2t + 6)' = 10t + 2,$$

$$v_2(t) = (4t^2 + 3t + 18)' = 8t + 3.$$

Скорость их относительного движения равна

$$v(t) = v_1(t) - v_2(t) = 2t - 1.$$

Для момента встречи получим $v(4) = 7$ м/с. ◄

Пример 2.8. Зависимость угла поворота φ маховика от времени задана функцией $\varphi(t) = 5t - 0{,}02t^2$ рад. Найти угловую скорость вращения маховика через 10 с после начала движения и тот момент времени, в который маховик остановится.

► Угловая скорость маховика определяется как производная угла поворота по времени:

$$\omega(t) = \frac{d\varphi}{dt} = (5t - 0{,}02t^2)' = 5 - 0{,}04t.$$

Значение угловой скорости в момент $t = 10$ с равно

$$\omega(10) = 5 - 0{,}04 \cdot 10 = 4{,}6 \text{ рад/с}.$$

Из условия $\omega(t) = 0$ найдем момент остановки маховика:

$$5 - 0{,}04t = 0, \quad t = 125 \text{ с.}$$ ◀

§ 2.3. Задачи на экстремум

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции широко применяется при решении многих практических задач математики, физики, химии, экономики и других дисциплин. Например, транспортная задача о перевозке груза с минимальными затратами, задача об организации производственного процесса с целью получения максимальной прибыли и другие задачи, связанные с поиском оптимального решения, приводят к развитию и усовершенствованию методов отыскания наибольших и наименьших значений. Решением таких задач занимается особая ветвь математики — линейное программирование.

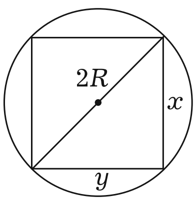


Рис. 2.5

Пример 2.9. Из шара радиуса R надо выточить цилиндр наибольшего объема. Каковы его размеры?

▶ Обозначим через x и y высоту и диаметр цилиндра. Тогда, как видно из рис. 2.5, $y = \sqrt{4R^2 - x^2}$, а потому объем цилиндра равен

$$V = V(x) = \pi\frac{4R^2 - x^2}{4}x = \pi R^2 x - \frac{\pi x^3}{4},$$

где $x \in [0; 2R]$. Находим наибольшее значение функции $V = V(x)$ на промежутке $[0; 2R]$. Так как

$$V'(x) = \pi R^2 - \frac{3}{4}\pi x^2,$$

то $V'(x) = 0$ при $x = 2R\sqrt{3}/3$; кроме того, $V''(x) = -\frac{3}{2}\pi x < 0$. Поэтому $x = 2R\sqrt{3}/3$ — точка максимума. Так как функция имеет одну критическую точку, то цилиндр будет иметь наибольший объем (равный $V_{\max}$) при $x = 2R\sqrt{3}/3$; диаметр основания цилиндра равен

$$\sqrt{4R^2 - \left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{2R\sqrt{6}}{3}.$$

Таким образом, искомый цилиндр имеет высоту, равную $2R\sqrt{3}/3$, и диаметр, равный $2R\sqrt{6}/3$. ◀

Рассмотрим типичные геометричские и физические задачи на экстремум.

1. Геометрические задачи

Пример 2.10. Через точку $M(2;3)$ провести прямую так, чтобы площадь треугольника, отсекаемого в первом квадранте данной прямой и осями координат, была наименьшей (рис. 2.6). Записать уравнение этой прямой.

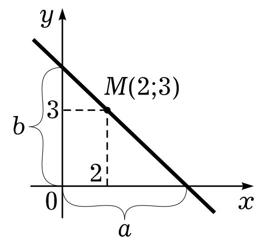


Рис. 2.6

▶ В данном случае удобнее всего применить уравнение прямой в отрезках $x/a + y/b = 1$. По условию задачи $a > 0$, $b > 0$. Площадь треугольника равна $S = ab/2$. В силу того, что точка $M(2;3)$ принадлежит искомой прямой, величины a и b связаны соотношением $2/a + 3/b = 1$. Выразив отсюда величину $a = 2b/(b-3)$, представим площадь треугольника как функцию одной переменной b:

$$S(b) = \frac{ab}{2} = \frac{b^2}{b-3}.$$

Исследуем функцию $S(b)$ в области $(3;\infty)$, так как искомая прямая будет отсекать треугольник только при выполнении условия $b > 3$. Найдем точки возможного экстремума из условия равенства нулю первой производной функции $S(b)$:

$$S'(b) = \frac{b(b-6)}{(b-3)^2} = 0.$$

В области $(3;\infty)$ имеется только одна такая точка: $b = 6$. Это точка минимума, поскольку вторая производная в ней положительна: $S''(6) = 2 > 0$. Отсюда следует, что $b = 6$ является точкой минимума, который в данном случае является и наименьшим значением функции. Уравнение искомой прямой имеет вид

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1 \quad \text{или} \quad 3x + 2y - 12 = 0. \qquad ◀$$

Пример 2.11. Около цилиндра с боковой поверхностью 2π описан шар. Найти наименьшее значение объема шара.

► Введем обозначения: h — высота цилиндра, r — радиус основания, R — радиус описанного шара. Рассмотрим осевое сечение цилиндра (рис. 2.7), имеем

$$R = \sqrt{OE^2 + ED^2} = \sqrt{\frac{h^2}{4} + r^2}\,.$$

Боковая поверхность цилиндра известна и равна 2π. Отсюда $2\pi r h = 2\pi$ или $r = 1/h$. Тогда объем шара в зависимости от h будет задаваться функцией

$$V(h) = \frac{4}{3}\pi R^2 = \frac{\pi}{6}\frac{(h^4+4)^{3/2}}{h^3}.$$

Проведем исследование этой функции на интервале $0 < h < \infty$. Для этого найдем критические точки из условия

$$V'(h) = \frac{\pi}{2}\sqrt{h^4+4}\left(\frac{h^4-4}{h^4}\right) = 0.$$

Единственной критической точкой в указанном интервале является $h = \sqrt{2}$. Это точка минимума, т.к. знак производной меняется с отрицательного на положительный при прохождении этой точки слева направо. Она же является точкой, в которой функция принимает наименьшее значение, поскольку $V(h)$ неограниченно возрастает при $h \to 0$ или $h \to \infty$. Это значение равно $V(\sqrt{2}) = 4\pi/3$. ◄

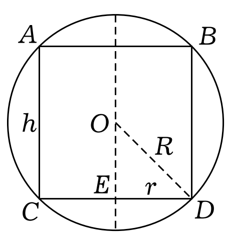


Рис. 2.7

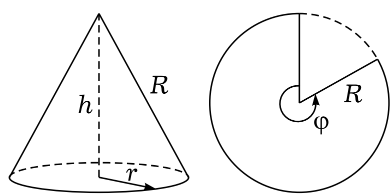


Рис. 2.8

Пример 2.12. Из круга вырезать сектор так, чтобы свернув его получить конус наибольшего объема.

► Допустим, что дан круг радиусом R. Необходимо определить такой угол φ сектора круга, чтобы объем конуса при фиксированном R был наибольшим (рис. 2.8). Объем конуса равен $V = \frac{1}{3}\pi h r^2$, где h — высота конуса, r — радиус основания. Очевидно, $2\pi r = \varphi R$ и $h = \sqrt{R^2 - r^2}$. Выразим объем конуса через φ:

$$V(\varphi) = \frac{1}{3}\pi r^2 \sqrt{R^2 - r^2} = \frac{R^3}{24\pi^2}\varphi^2\sqrt{4\pi^2 - \varphi^2}.$$

Найдем наибольшее значение функции $V(\varphi)$ на отрезке $[0; 2\pi]$. Очевидно, $V(0) = V(2\pi) = 0$. Из условия $V'(\varphi) = 0$ найдем критические точки:

$$V'(\varphi) = \frac{R^3}{24\pi^2}\frac{\varphi(8\pi^2 - 2\varphi^2)}{\sqrt{4\pi^2 - \varphi^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Объем конуса при этом равен $2\pi R^3/(9\sqrt{3})$. Это наибольшее значение. Таким образом, из круга необходимо вырезать сектор с углом $2\pi\sqrt{2/3}$. ◄

Пример 2.13. Из всех прямоугольных треугольников с заданной площадью S найти треугольник с наименьшей гипотенузой.

► Пусть катеты треугольника равны a и b. Заметим, что по смыслу задачи $a > 0$, $b > 0$. Площадь треугольника S задана и $S = ab/2$. Отсюда можем выразить один из катетов через другой, например, $b = 2S/a$. Гипотенуза треугольника $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ будет представлена как функция одного из катетов:

$$c = \sqrt{a^2 + \frac{4S^2}{a^2}} = \frac{a^2 + 4S^2}{a}.$$

Вычислив производную, найдем:

$$c'(a) = \frac{a^4 - 4S^2}{a^2\sqrt{a^4 + 4S^2}}.$$

В данном случае критические точки функции $c(a)$ определяются равенством нулю ее производной. Это приводит к условию

$$a^4 - 4S^2 = (a - \sqrt{2S})(a + \sqrt{2S})(a^2 + 2S) = 0.$$

Отсюда с учетом положительности a получим критическую точку $a = \sqrt{2S}$. Это точка минимума, поскольку знак производной в этой точке меняется с отрицательного на положительный. Итак, гипотенуза имеет наименьшее значение при $a = \sqrt{2S}$, т.к. функция $c(a)$ неограниченно возрастает при $a \to 0$ или $a \to \infty$. При этом другой катет равен $b = 2S/a = \sqrt{2S}$, т.е. при заданной площади прямоугольный треугольник с наименьшей гипотенузой — это треугольник с равными катетами. ◀

Пример 2.14. В прямоугольный треугольник с гипотенузой 8 см и углом 60° вписан прямоугольник наибольшей площади так, что одна из его сторон лежит на гипотенузе. Определить бо́льшую сторону прямоугольника.

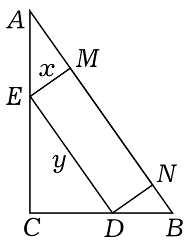


Рис. 2.9

▶ Обозначим стороны вписанного прямоугольника через x и y (рис. 2.9), тогда его площадь равна $S = xy$. Из прямоугольного треугольника CDE находим $CD = y \sin 30^\circ = y/2$. Аналогично, из ΔBDN определим $BD = x/\sin 60^\circ = 2x/\sqrt{3}$. С учетом $BC = AB/2 = 4$ придем к соотношению

$$\frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{y}{2} = 4.$$

Выразим площадь прямоугольника через y:

$$S(y) = xy = 2\sqrt{3}\,y - \frac{\sqrt{3}}{4}y^2.$$

По смыслу задачи переменная y может принимать значения из отрезка $[0; 4]$. Найдем наибольшее значение функции $S(y)$ на этом отрезке. Критические точки определяются из условия

$$S'(y) = 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0.$$

Получим единственную критическую точку $y = 4$. Так как $S(0) = 0$, $S(8) = 0$ и $S(4) = 4\sqrt{3}$, то наибольшее значение функции достигается в точке $y = 4$, при этом $x = \sqrt{3}$. Таким образом, длина бо́льшей стороны прямоугольника равна 4. ◀

Пример 2.15. Определить максимальную площадь равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна l.

► Пусть x — высота треугольника, опущенная на основание равнобедренного треугольника. Тогда площадь треугольника можно выразить через величины x и l следующим образом: $S = x\sqrt{l^2 - x^2}$. Согласно условию задачи теперь необходимо определить наибольшее значение непрерывной функции $S(x) = x\sqrt{l^2 - x^2}$ на отрезке $[0; l]$. Вычислим производную $S'(x)$ этой функции:

$$S'(x) = \sqrt{l^2 - x^2} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{l^2 - x^2}} = \frac{l^2 - 2x^2}{\sqrt{l^2 - x^2}}.$$

Единственной критической точкой внутри интервала $(0; l)$ является $x = l/\sqrt{2}$, в которой производная $S'(x)$ обращается в ноль. В этой точке значение функции $S(x)$ равно $S(l/\sqrt{2}) = l^2/2$. Поскольку на концах отрезка $S(x)$ обращается в ноль, то значение $S = l^2/2$ является наибольшим значением площади треугольника. ◄

Пример 2.16. В правильной четырехугольной призме периметр диагонального сечения равен 6. При каком значении угла, образованного диагональю призмы и основанием призмы, объем призмы будет наибольшим?

► Пусть a — сторона основания призмы, α — указанный в задаче угол (рис. 2.10). Найдем высоту призмы: $h = AC\,\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{2}\,a\,\mathrm{tg}\,\alpha$. Вычислив периметр прямоугольника AA_1C_1C, найдем: $2\sqrt{2}\ \mathrm{tg}\,\alpha + 2\sqrt{2}\,a = 6$. Отсюда

$$a = \frac{3}{\sqrt{2}\,(1 + \mathrm{tg}\,\alpha)},$$

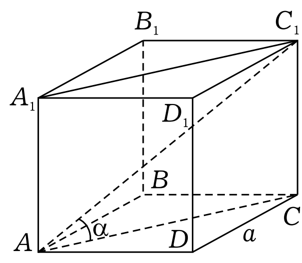


Рис. 2.10

и, соответственно, объем призмы равен

$$V(\alpha) = \frac{27\,\mathrm{tg}\,\alpha}{2(1 + \mathrm{tg}\,\alpha)^3}.$$

Найдем критические точки функции $V(\alpha)$ из условия
$$V'(\alpha) = \frac{27}{2\cos^2\alpha}\frac{1-2\operatorname{tg}\alpha}{(1+\operatorname{tg}\alpha)^4} = 0.$$
В точке $\alpha_0 = \operatorname{arctg}(1/2)$ производная $V'(\alpha)$ меняет знак с положительного на отрицательный. Значит, α_0 — точка максимума функции $V(\alpha)$. Поскольку при $\alpha \to 0$ или $\alpha \to \pi/2$ имеем $V(\alpha) \to 0$, то в указанной точке данная функция достигает также наибольшего значения для всех α из отрезка $[0, \pi/2]$. ◀

2. Физические задачи

Пример 2.17. Капля дождя начальной массой m_0 падает под действием силы тяжести. Ввиду испарения по мере падения капля теряет массу по линейному закону $m(t) = m_0 - \mu t$, где μ — скорость испарения. В какой момент времени кинетическая энергия капли будет наибольшей? Считать, что высота, с которой падает капля, достаточна, чтобы капля полностью испарилась до того как достигнет земли.

▶ Зависимость от времени кинетической энергии капли, падающей из состояния покоя с ускорением g, определяется формулой
$$T(t) = \frac{mv^2}{2} = \frac{m(gt)^2}{2} = \frac{(m_0 - \mu t)g^2t^2}{2}.$$
Капля испарится полностью через время $\tau = m_0/\mu$. Найдем наибольшее значение кинетической энергии на промежутке времени $[0, \tau]$. Приравняем производную функции $T(t)$ нулю и найдем стационарные точки:
$$T'(t) = \frac{g^2t}{2}(2m_0 - 3\mu t) = 0.$$
Получим $t_1 = 0$ и $t_2 = 2m_0/(3\mu) = (2/3)\tau$. При $t = 0$ и $t = \tau$ кинетическая энергия равна нулю. Таким образом, наибольшее значение кинетической энергии $2m_0^3g^2/(27\mu^2)$ достигается при $t = t_2 = (2/3)\tau$. ◀

Пример 2.18. На какой высоте h над центром круглого стола радиусом R следует разместить точечный источник света, чтобы на краю стола освещенность была максимальной (рис. 2.11)?

▶ Освещенность заданной точки поверхности прямо пропорциональна косинусу угла падения лучей света и обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника света (рис. 2.11):

$$E = k\frac{\cos\varphi}{r^2}.$$

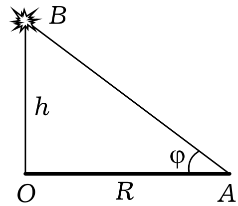


Рис. 2.11

Из геометрии задачи определяем

$$r = \sqrt{R^2 + h^2}, \quad \cos\varphi = \frac{h}{r} = \frac{h}{\sqrt{R^2+h^2}}.$$

Тогда для освещенности на краю стола имеем

$$E(h) = k\frac{h}{(R^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

По смыслу задачи областью исследования функции $E(h)$ является интервал $(0; \infty)$. Вычислим производную:

$$E'(h) = k\left[\frac{h}{(R^2+h^2)^{\frac{3}{2}}}\right]' =$$

$$= k\frac{(R^2+h^2)^{\frac{3}{2}} - h\cdot\frac{3}{2}(R^2+h^2)^{\frac{1}{2}}\cdot 2h}{(R^2+h^2)^3} = \frac{R^2-2h^2}{(R^2+h^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

Из условия равенства нулю производной $E'(h) = 0$ найдем единственную критическую точку $h_0 = R/\sqrt{2}$ из интервала $(0; \infty)$. Так как в точке h_0 производная меняет знак с положительного на отрицательный, то в этой точке функция имеет максимум. Кроме того, она в этой точке достигает наибольшего значения на промежутке $[0; \infty)$. Это следует из того, что функция $E(h)$ везде на промежутке $[0; h_0)$ возрастает, а на промежутке $(h_0; \infty)$ убывает. Итак, для наибольшей освещенности на краю стола источник света следует располагать на высоте $h_0 = R/\sqrt{2}$. ◀

Пример 2.19. Из бокового отверстия сосуда с жидкостью высотой H, расположенного на горизонтальной поверхности, вытекает струя. При каком положении отверстия дальность струи будет максимальной?

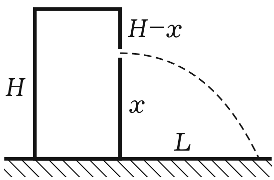


Рис. 2.12

► При вытекании воды из отверстия уровень воды в сосуде понижается. Полагая этот процесс достаточно медленным, для каждого момента времени можем записать уравнение Бернулли:

$$p_0 + \rho g(H - x) = p_0 + \rho\frac{v^2}{2},$$

где p_0 — атмосферное давление, g — ускорение свободного падения. Отсюда найдем скорость вытекающей жидкости:

$$v = \sqrt{2g(H - x)}\,.$$

При выходе из отверстия вертикальная составляющая скорости струи равна нулю. Свободно падающая струя достигнет поверхности за время $t = \sqrt{2x/g}$. За это же время, имея горизонтальную скорость v, струя удалится от отверстия на расстояние $L = vt$. Таким образом, для дальности струи получим формулу

$$L = vt = \sqrt{2g(H - x)}\sqrt{\frac{2x}{g}} = 2\sqrt{(H - x)x} = 2\sqrt{Hx - x^2}\,.$$

Рассматривая дальность струи L как функцию x, найдем ее наибольшее значение. Очевидно, областью допустимых значений x является промежуток $[0; H]$. Из равенства нулю производной

$$L'(x) = 2(\sqrt{Hx - x^2}\,)' = \frac{H - 2x}{\sqrt{Hx - x^2}}$$

найдем единственную критическую точку в области $(0; H)$: $x = H/2$. На концах отрезка $[0; H]$ функция $L(x)$ принимает нулевые значения. При $x = H/2$ дальность струи будет наибольшей и равной H. ◄

Пример 2.20. В горизонтальной трубке длиной L, на концах которого закреплены положительные заряды q_1 и q_2, свободно может перемещаться положительно заряженный шарик малого размера. Из условия минимума потенциальной энергии системы найти равновесное положение шарика.

► Пусть x — расстояние от шарика до заряда q_1. Тогда потенциальная энергия данной системы взаимодействующих зарядов может быть записана в виде

$$U(x) = kq\left(\frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{L-x}\right).$$

Коэффициент k зависит от выбора системы единиц. Условию устойчивого равновесия шарика соответствует минимум функции $U(x)$. В точке минимума сила $F(x) = -U'(x)$, действующая на заряд q, обращается в нуль. Вычислив производную, получим условие:

$$kq\left(\frac{q_1}{x^2} - \frac{q_2}{(L-x)^2}\right) = 0.$$

Везде внутри интервала $(0, L)$ это условие равносильно следующему:

$$(q_2 - q_1)x^2 + 2q_1 Lx - q_1 L^2 = 0.$$

Решив это квадратное уравнение, найдем корень x_0 из интервала $(0, L)$:

$$x_0 = L\frac{\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}.$$

Точка x_0 является точкой минимума потенциальной энергии $U(x)$, т.к. выполнено условие

$$U''(x_0) = \frac{2kq}{L^3}\frac{\left(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}\right)^4}{\sqrt{q_1 q_2}} > 0.$$

Следовательно, равновесие является устойчивым. ◄

Пример 2.21. В цилиндре под поршнем идеальный газ массой m при давлении p_1 занимает объем V_1. Этот газ медленно переводят в состояние с параметрами V_2 и p_2, причем процесс перехода характеризуется законом $p = b - aV$. Определить максимальную температуру в этом процессе.

► Запишем уравнение состояния идеального газа — уравнение Менделеева–Клапейрона, которое для данной массы газа устанавливает связь между макроскопическими параметрами — давлением p, объемом V и температурой T:

$$pV = \frac{m}{\mu}RT.$$

Здесь μ — молярная масса газа, R — универсиальная газовая постоянная. Учитывая связь $p = a - bV$ между давлением p и объемом газа V, получим:

$$(b - aV)V = \frac{m}{\mu}RT.$$

Отсюда выразим зависимость температуры газа от занимаемого объема:

$$T(V) = \frac{\mu}{mR}V(b - aV).$$

Коэффициенты a и b можно выразить через параметры газа в начальном и конечном состояниях

$$\begin{cases} p_1 = b - aV_1, \\ p_2 = b - aV_2. \end{cases}$$

Решая систему, получим:

$$a = \frac{p_1 - p_2}{V_2 - V_1}, \qquad b = \frac{p_1V_2 - p_2V_1}{V_2 - V_1}.$$

Теперь с математической точки зрения требуется найти наибольшее значение функции $T(V)$ на отрезке $[V_1, V_2]$. Эта задача не представляет особой сложности при конкретных значениях p_1, V_1, p_2, V_2. ◀

Пример 2.22. Имея n одинаковых электрических элементов, можно различными способами составить из них батарею, соединяя по a элементов последовательно, а затем полученные группы (числом n/a) — параллельно. Ток, даваемый такой батареей, определяется формулой

$$I = \frac{na\mathcal{E}}{nR + a^2r},$$

где $\mathcal{E}$ — электродвижущая сила одного элемента, r — его внутреннее сопротивление, R — внешнее сопротивление. Определить, при каком значении a батарея даст наибольший ток.

▶ Исходя из условия задачи $a \in (0; n]$. Исследуем на этом полуинтервале функцию $I = I(a)$ на наибольшее значение. Вычислим производную:

$$I' = n\mathcal{E}\left(\frac{a}{nR + a^2r}\right)' = n\mathcal{E}\frac{nR + a^2r - (2ar)a}{(nR + a^2r)^2} = n\mathcal{E}\frac{nR - a^2r}{(nR + a^2r)^2}.$$

Найдем критические точки:
$$nR - a^2 r = 0, \quad a_1 = -\sqrt{\frac{nR}{r}}, \quad a_2 = \sqrt{\frac{nR}{r}}.$$
Промежутку $(0; n]$ принадлежит только критическая точка $a = \sqrt{nR/r}$. Так как при переходе через критическую точку знак производной меняется с «+» на «−», то в этой точке функция имеет максимум. Поскольку это единственная критическая точка на промежутке $(0; n]$, то наибольший ток достигается при $a = \sqrt{nR/r}$. ◄

Пример 2.23. При каком значении сопротивления нагрузки R мощность, выделяемая во внешней цепи, будет наибольшей, если $\mathcal{E}$ — ЭДС источника тока и r — его внутреннее сопротивление.

► Согласно закону Ома для замкнутой цепи сила тока в ней равна
$$I = \frac{\mathcal{E}}{(R + r)}.$$
Следовательно, мощность W во внешней цепи (нагрузке) определяется формулой
$$W = I^2 R = \frac{R\mathcal{E}^2}{(R + r)^2}.$$
Найдем производную полученной функции $W(R)$:
$$W'(R) = \mathcal{E}^2 \frac{r - R}{(R + r)^3}.$$
Отсюда видно, что она обращается в нуль при $R = r$. Так как ее знак меняется с плюса на минус при переходе через это значение слева направо, то мощность $W(R)$ достигает максимума при $R = r$. Учитывая, что функция $W(R)$ монотонно растет на интервале $(0, r)$ и убывает на (r, ∞), заключаем, что при $R = r$ мощность имеет наибольшее значение, причем $W_{\max} = \mathcal{E}^2/4R$. ◄

Пример 2.24. Под каким углом α нужно тянуть за веревку тяжелый контейнер массы m для того, чтобы равномерно передвигать его волоком по горизонтальной поверхности с наименьшим усилием, если коэффициент трения контейнера о поверхность равен μ? Предполагется, что внешняя сила приложена так, что контейнер совершает поступательное движение.

► Контейнер будет двигаться равномерно, если сумма всех приложенных сил равна нулю:

$$\mathbf{F} + \mathbf{N} + \mathbf{F}_{\text{тр}} + m\mathbf{g} = 0.$$

Проецируя данное соотношение на горизонтальную и вертикальную оси координат, получим систему:

$$\begin{cases} F\cos\alpha - F_{\text{тр}} = 0, \\ F\sin\alpha + N - mg = 0. \end{cases}$$

Сила трения выражается через силу нормальной реакции N со стороны поверхности следующим образом: $F_{\text{тр}} = \mu N$. Исключая из системы силы реакций, получим:

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}.$$

Отсюда видно, что сила, которую нужно приложить для равномерного перемещения контейнера, зависит от угла α. Стандартными методами найдем угол α, при котором функции $F = F(\alpha)$ имеет минимум. Так как в выражении для силы от α зависит только знаменатель, то достаточно найти максимум выражения $f(\alpha) = \cos\alpha + \mu\sin\alpha$. Приравнивая к нулю производную $f'(\alpha)$, получим $-\sin\alpha + \mu\cos\alpha = 0$. Отсюда угол α_0, при котором $f(\alpha)$ имеет максимум, определяется из условия $\operatorname{tg}\alpha_0 = \mu$. Этот угол действительно соответствует максимуму знаменателя, т.к. $f''(\alpha_0) = -(\cos\alpha_0 + \mu\sin\alpha_0) < 0$. Таким образом, угол α_0, при которой сила $F(\alpha)$ будет минимальной, определяется из условия $\operatorname{tg}\alpha_0 = \mu$. ◄

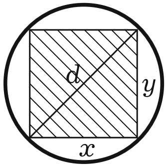


Рис. 2.13

Пример 2.25. Известно, что прочность на горизонтальный изгиб балки прямоугольного перпендикулярного сечения пропорциональна произведению ширины балки на квадрат высоты. Найти отношение ширины к высоте поперечного сечения наиболее прочной балки, которую можно вырезать из цилиндрического бревна диаметром d см.

► На рис. 2.13 изображено сечение балки. Пусть x — ширина, y — высота перпендикулярного сечения балки. По теореме Пифагора имеем $d^2 = x^2 + y^2$. Прочность σ балки определяется соотношением

$$\sigma = kxy^2 = kx(d^2 - x^2) = kd^2x - kx^3,$$

где k — коэффициент пропорциональности, зависящий от материала. Исследуем функцию $\sigma(x) = kd^2x - kx^3$ на максимум и минимум:

$$\sigma'(x) = kd^2 - 3kx^2 = k(d^2 - 3x^2) = 0,$$

откуда $x_1 = d/\sqrt{3}$ и $x_2 = -d/\sqrt{3}$. Второй корень отбрасываем, так как отрицательное решение не имеет смысла. Пусть $x = d/2$, тогда $\sigma'(x) = k(d^2 - d^2/4) > 0$. Пусть $x = 3d/2$, тогда $\sigma'(x) = k(d^2 - 9d^2/4) < 0$. Следовательно, знак производной меняется с «+» на «–» и при $x_1 = d/\sqrt{3}$ функция имеет максимум. Чтобы найти отношение ширины балки к высоте перпендикулярного поперечного сечения, нужно найти высоту y:

$$y = \sqrt{d^2 - \left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{d\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно,

$$\frac{x}{y} = \frac{d/\sqrt{3}}{d\sqrt{2}/\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx \frac{5}{7}.$$

Таким образом, балка имеет наибольшую прочность на горизонтальный изгиб, если отношение ширины к высоте есть 5 : 7. ◄

§ 2.4. Дифференциал длины дуги и кривизна плоской линии

Дифференциал ds длины дуги s плоской линии, заданной уравнением $y = f(x)$, выражается формулой

$$ds = \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Если линия задана уравнением $x = \varphi(y)$, то

$$ds = \sqrt{1 + (f'(y))^2}\, dy.$$

В случае параметрического задания линии уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ имеем

$$ds = \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\,dt.$$

Если линия задана в полярной системе координат уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, то

$$ds = \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2}\,d\varphi.$$

Пример 2.26. Найти дифференциал длины дуги циклоиды, заданной уравнениями $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ $(a > 0)$.

► Имеем $x' = a(1 - \cos t)$, $y' = a\sin t$. Тогда

$$ds = \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t}\,dt =$$

$$= a\sqrt{1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t}\,dt = a\sqrt{2(1-\cos t)}\,dt =$$

$$= a\sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}}\,dt = 2a\sin\frac{t}{2}\,dt. \qquad ◄$$

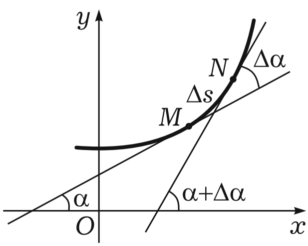


Рис. 2.14

Кривизной K любой плоской линии в точке M называется предел модуля отношения угла между положительными направлениями касательных в точках M и N линии (*угла смежности*) к длине дуги $MN = \Delta s$, когда $N \to M$ (рис. 2.14), т.е. по определению

$$K = \lim_{\Delta s \to 0}\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\alpha}{ds}\right|,$$

где α — угол наклона касательной в точке M к оси Ox.

Радиусом кривизны называется величина R, обратная кривизне K линии, т.е. $R = 1/K$. Например, для окружности $K = 1/R$, где R — радиус окружности; для прямой $K = 0$. Для произвольной линии кривизна, вообще говоря, не является постоянной величиной.

Если линия задана уравнением $y = f(x)$, то кривизна в любой ее точке вычисляется по формуле

$$K = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

В случае параметрического задания линии уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ для вычисления кривизны применяется формула

$$K = \frac{|y''x' - x''y'|}{((x')^2 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}},$$

где производные берутся по переменной t.

Если кривая задана уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$, то

$$K = \frac{|\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''|}{(\rho^2 + (\rho')^2)^{\frac{3}{2}}},$$

где производные вычисляются по полярному углу φ.

Пример 2.27. Найти кривизну и радиус кривизны линии $y = x^2$ в точке $M(1;1)$.

► Вычислим значения первой и второй производных данной функции в точке M: $y' = 2x$, $y'(1) = 2$, $y'' = 2$. Тогда

$$K = \frac{|y''|}{(1 + (y')^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(1+4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{5\sqrt{5}}, \quad R = \frac{1}{K} = \frac{5\sqrt{5}}{2}.$$ ◄

Построим в точке $M(x,y)$ нормаль к данной кривой, направленную в сторону ее вогнутости (рис. 2.15), и отложим на этой нормали отрезок $|MC|$, равный радиусу кривизны R кривой в точке M. Точка C называется *центром кривизны кривой* в точке M, а круг (окружность) радиусом R с центром в точке C — *кругом* (*окружностью*) *кривизны кривой* в точке M. Координаты α и β центра кривизны кривой для точки $M(x,y)$ вычисляются по формулам

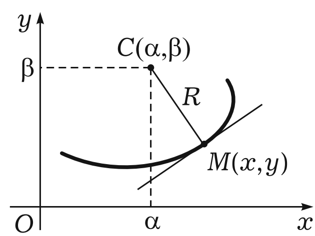


Рис. 2.15

$$\alpha = x - y'\frac{1 + (y')^2}{y''}, \quad \beta = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}.$$

Пример 2.28. Записать уравнение окружности кривизны линии $y = x^2 - 6x + 10$ в точке $M_0(3;1)$.

► Находим значения y' и y'' в точке M_0: $y' = 2x - 6$, $y'(3) = 0$, $y'' = 2$. Тогда кривизна кривой в точке M_0 равна $K = 2$, радиус кривизны $R = 1/2$. По формулам находим координаты центра кривизны: $\alpha = 3$, $\beta = 3/2$. Уравнение окружности кривизны имеет вид

$$(x-3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}.$$ ◄

Задачи для самостоятельного решения

2.1. В каком отношении находятся наибольшая площадь равнобедренного треугольника, вписанного в круг, к площади этого круга?

Ответ: $3\sqrt{3}/(4\pi)$.

2.2. Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак с полной поверхностью, равной S. Какой должна быть высота бака, чтобы его объем был наибольшим?

Ответ: $2\sqrt{S}/\sqrt{6\pi}$.

2.3. Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. Каковы должны быть его стороны, чтобы объем конуса, образованного вращением этого треугольника вокруг высоты, опущенной на основание, был наибольшим?

Ответ: $3p/5$.

2.4. Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, вписанного в эллипс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Ответ: $\sqrt{2}\,a; \sqrt{2}\,b$.

2.5. Объем правильной треугольной призмы равен V_0. Какова должна быть сторона основания, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?

Ответ: $a = \sqrt[3]{4V_0}$.

2.6. Составить уравнение касательной к графику функции $y = \sqrt{5x-9}$, проходящей через точку $M(0; -4)$.

Ответ: $2y - 5x + 1 = 0$.

2.7. Составить уравнение касательной и нормали в точке $(1;4)$ к кривой, заданной параметрически: $x = (2+t)/t^2$, $y = t^2$.

Ответ: $3y + 16x - 28 = 0$, $16y - 3x - 61 = 0$.

2.8. Пусть материальная точка движется по закону $s(t) = -t^3 + 6t^2 + 37t + 30$. Найти наибольшую скорость точки и момент времени, в который скорость наибольшая.

Ответ: $v(2) = 49$.

2.9. Тело массой $m = 1{,}5$ кг движется прямолинейно по закону $s(t) = t^2 + t + 1$ (s — в метрах, t — в секундах). Найти кинетическую энергию тела через 5 с после начала движения.

Ответ: 90,75 Дж.

2.10. Материальная точка движется по спирали Архимеда $\rho = a\varphi$ так, что угловая скорость вращения ее полярного радиуса постоянна и равна $\pi/30$ рад/с. Определить скорость удлинения полярного радиуса ρ, если $a = 10$ м.

Ответ: $\pi/3$ м/с.

2.11. Количество теплоты Q Дж, необходимое для нагревания 1 кг воды от 0 до t °C, определяется формулой $Q = t + 2\cdot 10^{-5}t^2 + 3\cdot 10^{-7}t^3$. Определить теплоемкость воды при $t = 100$ °C.

Ответ: 1,013 Дж/(кг·град).

2.12. Участок земли прямоугольной формы площадью 40 000 м^2 нужно окопать вдоль всей границы рвом. Какой размер должен иметь участок, чтобы длина рва была наименьшей?

Ответ: 200×200 м^2.

2.13. Из листового железа квадратной формы размером 60×60 см^2 нужно вырезать по четырем углам квадратики так, чтобы из оставшейся части, сгибая выступы, изготовить коробку наибольшей емкости. Каковы должны быть размеры вырезанных квадратиков?

О т в е т : 10 см.

2.14. К заводской стене нужно пристроить помещение прямоугольной формы под новый цех. Каково должно быть соотношение ширины к длине нового цеха, чтобы на его строительство израсходовать наименьшее количество строительного материала?

О т в е т : 1 : 2. Стена цеха параллельна заводской стене.

2.15. Требуется изготовить ящик с крышкой объемом 576 дм^3, стороны основания которого должны относиться как 1 : 2. Каковы должны быть его стороны, чтобы полная поверхность ящика была наименьшей?

О т в е т : $6 \times 12 \times 8$ дм^3.

2.16. Найти радиус основания и высоту цилиндра объемом 27π дм^3, имеющего наименьшую полную поверхность.

О т в е т : $2r = h = 3\sqrt[3]{4}$ дм.

2.17. Сечение шлюзового канала имеет форму прямоугольника, заканчивающегося полукругом. При каком радиусе полукруга площадь поперечного сечения канала будет максимальной, если периметр сечения равен 9 м?

О т в е т : $\approx 1{,}26$ м.

2.18. Объем правильной четырехугольной призмы равен 27 дм^3. Какова должна быть сторона основания призмы, чтобы полная поверхность ее была наименьшей?

О т в е т : 3 дм.

2.19. Найти стороны прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в полуокружность радиуса R.

О т в е т : $4R\sqrt{5}/5$ и $R\sqrt{5}/5$.

2.20. Известно, что прочность бруса с прямоугольным поперечным сечением пропорциональна его ширине a и квадрату высоты b. Найти размеры бруса наибольшей прочности, который можно вырезать из бревна диаметром d.

О т в е т : $a = d/\sqrt{3}$ и $b = \sqrt{2}\,d/\sqrt{3}$.

2.21. Каковы должны быть размеры (радиус основания R и высота H) открытого сверху цилиндрического бака максимальной вместимостью, если для его изготовления отпущено $S = 27\pi$ м^2 материала?

О т в е т : $R = 3$ м, $H = 3$ м.

2.22. Проволока длиной l согнута в прямоугольник. Каковы размеры этого прямоугольника, если его площадь наибольшая?

О т в е т : $(l/4) \times (l/4)$.

2.23. Из фигуры, ограниченной кривой $y = 3\sqrt{x}$ и прямыми $x = 4$, $y = 0$, вырезать прямоугольник наибольшей площади.

О т в е т : $S = 9{,}22$.

2.24. Найти радиус конуса наименьшего объема, описанного около цилиндра радиусом R (плоскости оснований цилиндра и конуса должны совпадать).

О т в е т : $1{,}5R$.

2.25. В каком отношении находятся наименьший объем конуса, описанного около шара, к объему шара?

О т в е т : 2.

2.26. В каком отношении находится объем конуса к наибольшему объему цилиндра, вписанного в конус?

О т в е т : 9/4.

2.27. Найти отношение между объемом шара и наибольшим объемом цилиндра, вписанного в шар.

О т в е т : $\sqrt{3}$.

2.28. Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак вместимостью $V = 16\pi \approx 50$ м^3. Каковы должны быть размеры бака (радиус R и высота H), чтобы на его изготовление пошло наименьшее количество материала?

Ответ: $R = 2$ м, $H = 4$ м.

2.29. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом R.

Ответ: $H = 4R/3$.

2.30. Найти стороны прямоугольника наибольшей площади, вписанного в эллипс $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

Ответ: $a\sqrt{2}$, $b\sqrt{2}$.

2.31. Через точку $M(1;4)$ провести прямую так, чтобы сумма величин положительных отрезков, отсекаемых ею на осях координат, была наименьшей. Записать уравнение этой прямой.

Ответ: $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{6} = 1$.

2.32. Найти высоту H цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиусом R.

Ответ: $H = 2R/\sqrt{3}$.

2.33. Какой наибольший объем может иметь палатка в форме правильной четырехугольной пирамиды, если она сшита из материала площадью S? Считать, что пол палатки сшит из того же материала.

2.34. Для осушения болот надо вырыть открытый канал, поперечное сечение которого — равнобедренная трапеция. Канал должен быть устроен так, чтобы при движении воды потери на трение были наименьшими. Определить величину угла откоса α, при котором эти потери будут наименьшими, если площадь поперечного сечения канала S, а глубина h.

Ответ: $\alpha = \pi/6$.

2.35. Сечение шлюзового канала имеет форму прямоугольника, заканчивающегося полукругом. Периметр сечения равен 45 м. При каком радиусе полукруга сечение будет иметь наибольшую площадь?

Ответ: $45/(4+\pi)$ м.

2.36. Вода вытекает через отверстие в толстой стене. При этом секундный расход воды определяется по формуле $Q = cy\sqrt{h-y}$, где c — некоторая положительная постоянная; y — диаметр отверстия; h — глубина его низшей точки. Определить, при каком диаметре отверстия y секундный расход воды Q будет наибольшим.

Ответ: $2h/3$.

2.37. Найти наименьшую длину стрелы крана, необходимую для монтажа плит перекрытия здания высотой H и шириной a, при условии, что кран может двигаться вдоль фасада здания параллельно ему, высота основания стрелы крана над землей h, зазор между стеной здания и стрелой крана всегда не менее m. Кран должен подавать детали так, чтобы крюк его приходился точно над серединой здания. Решить задачу в общем виде, сделать расчет при $H = 125$ м, $m = 15$ м, $a = 10$ м, $h = 116$ м.

Ответ: 23,3 м.

2.38. По трубе круглого сечения радиусом r течет вода. Известно, что скорость течения прямо пропорциональна так называемому гидравлическому радиусу R, вычисляемому по формуле $R = S/p$, где S — площадь сечения потока воды по трубе; p — смоченный (подводный) периметр сечения трубы. При каком центральном угле заполнения трубы водой скорость течения воды будет наибольшей?

Ответ: 258°.

2.39. Показать, что точка максимума момента изгиба равномерно нагруженного бруса длиной l находится в центре бруса. (Момент изгиба бруса в точке M задается формулой $M = lx/2 - \omega x^2/2$, где ω – удельная нагрузка; x — расстояние от точки до начала бруса.)

2.40. Однородный стержень AB, который может вращаться около точки A, несет груз Q на расстоянии s от точки A и удерживается в равновесии вертикальной силой P, приложенной к свободному концу B стержня. Вес погонного сантиметра стержня q. Определить длину стержня, при которой вертикальная сила P будет наименьшей.

О т в е т : $|AB| = \sqrt{2sQ/q}$, $P_{\text{наим}} = \sqrt{2sqQ}$.

2.41. Камень брошен с заданной начальной скоростью под углом α к горизонту. Пренебрегая сопротивлением воздуха, определить, при каком значении α дальность полета камня будет наибольшей.

О т в е т : $\pi/4$.

2.42. Внутреннее сопротивление гальванического элемента равно R Ом. При каком внешнем сопротивлении мощность тока, получаемого от этого элемента во внешней цепи, будет наибольшей?

О т в е т : R Ом.

2.43. Вычислить наибольшее значение радиуса кривизны линии $\rho = a\sin^3(\varphi/3)$.

О т в е т : $3a/4$.

2.44. Найти в точке $(0;1)$ уравнение окружности кривизны линии $y = e^x$.

О т в е т : $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 8$.

Глава 3
Определенный интеграл в физических задачах

§ 3.1. Давление жидкости

Из физики известно, что *давление p покоящейся жидкости* с удельным весом γ на глубине h определяется формулой

$$p = p_0 + \gamma h,$$

где p_0 — давление жидкости на ее свободной поверхности.

Величина *силы давления*, действующей на элементарную площадку ds по нормали к ней, равна $dF = p\,ds$.

Рассчитаем силу давления на вертикально погруженную в жидкость пластину заданной формы. Для этого выберем удобным образом систему координат. Пусть ось Ox направлена вертикально вниз (ось лучше направить в сторону увеличения искомой величины, хотя это не принципиально), а ось Oy совпадает с поверхностью жидкости (рис. 3.1).

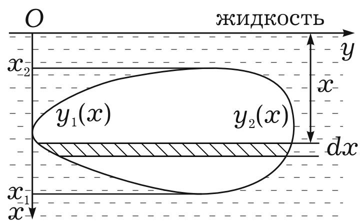


Рис. 3.1

Пусть в выбранной системе координат левый и правый край пластины соответственно заданы функциями $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$. На глубине x выделим на пластине полосу малой ширины dx площадью $ds = (y_2(x) - y_1(x))dx$. В пределах этой пластины давление считаем одинаковым. Тогда величина силы давления, действующая на нее, запишется в виде

$$dF = \gamma x(y_2(x) - y_1(x))\,dx.$$

Сила давления, действующую на всю погруженную в жидкость пластину, находится интегрированием по всем таким элементарным полосам:

$$F = \gamma \int\limits_{x_1}^{x_2} x(y_2(x) - y_1(x))\, dx,$$

где x_1, x_2 — значения переменной x, которые соответствуют верхнему и нижнему краю пластинки.

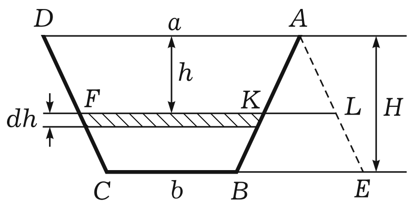


Рис. 3.2

Пример 3.1. Вычислить силу давления воды F на плотину, имеющую форму трапеции, верхнее и нижнее основания которой равны соответственно a и b, а высота — H (рис. 3.2).

► Задачу можно было бы решить, прибегая к полученной нами общей формуле для силы давления жидкости на вертикальную пластину. Для этого достаточно записать уравнения боковых сторон трапеции. Однако будет не лишним еще раз повторить схожие рассуждения, демонстрирующие принцип составления определенных интегралов в приложениях к задачам физики или техники.

Снова разобьем поверхность, испытывающую давление, на горизонтальные полоски малой высоты. Пусть dh — высота полоски, залегающей на глубине h. Оценим ее ширину x. Очевидно, что x есть переменная величина, зависящая от h. Проведем прямую AE параллельно DC и продолжим FK до пересечения с AE. Из подобия треугольников ABE и AKL следует

$$\frac{a-x}{a-b} = \frac{h}{H},$$

откуда находим

$$x = a - \frac{h}{H}(a-b).$$

Сила давления воды на полоску равна $\gamma x h\, dh$. Строго говоря, при этом мы допускаем погрешность, поскольку предполагаем, что вся полоска находится на одной и той же глубине h. Еще одно допущение — замена точного значения площади полоски ее приближенным значением $x\, dh$.

Однако обе эти погрешности имеют более высокий порядок малости по dh и могут быть сделаны сколь угодно малыми при $dh \to 0$. Таким образом, силу давления воды на всю плотину получим, суммируя вклад от каждой полоски, что равносильно интегралу

$$F = \gamma \int_0^H xh\,dh = \gamma \int_0^H \left(a - \frac{h}{H}(a-b)\right) h\,dh = \gamma \frac{H^2(a+2b)}{6}. \blacktriangleleft$$

Пример 3.2. Найти давление воды на поверхность шара диаметром $2R$, если его центр находится на глубине H от поверхности воды.

► Рассечем шар вертикальной плоскостью, проходящей через центр шара, и построим в ней прямоугольную систему координат xOy так, чтобы центр шара совпал с началом координат. На глубине h пересечем шар горизонтальной плоскостью. Тогда давление воды на отсеченную часть поверхности шара будет функцией $p(h)$ от этого h. Будем изменять глубину h на малую величину $\Delta h = dh$. Тогда и давление $p(h)$ изменится на величину Δp, которая зависит от приращения ΔS площади отсеченной части поверхности шара (площадь поверхности шара рассматривается как площадь поверхности вращения вокруг оси Ox): $dS = \Delta S \approx 2\pi y\,dl$. Дифференциал дуги окружности равен $dl = \sqrt{1+(y')^2}\,dx$. Из уравнения окружности $x^2+y^2=R^2$ найдем $2x + 2yy' = 0$, откуда $y' = -x/y$. Тогда

$$dl = \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\,dx = \sqrt{\frac{y^2+x^2}{y^2}}\,dx = \sqrt{\frac{R^2}{y^2}}\,dx = \frac{R}{y}\,dx.$$

Таким образом, приращение давления равно

$$\Delta p \approx h\Delta S = h \cdot 2\pi y\,dl = 2\pi hy\frac{R}{y}\,dx = 2R\pi h\,dx.$$

Так как $h = H + x$, то

$$p = 2\pi R \int_{-R}^{R} (H+x)\,dx = \pi R(H+x)^2\Big|_{-R}^{R} = 4\pi R^2 H. \blacktriangleleft$$

Пример 3.3. Вычислить давление воды на плотину, сечение которой имеет форму параболы (рис. 3.3). Удельный вес воды γ.

► Введем систему координат, как показано на рис. 3.3.

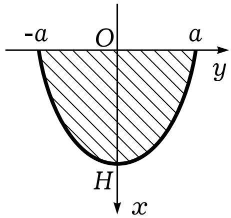


Рис. 3.3

Чтобы найти выражения для функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$, составим уравнение параболы. Так как ось Ox является осью симметрии параболы, то ее уравнение имеет вид $x = \alpha y^2 + \beta$, где α, β — неизвестные пока параметры. Искомая парабола проходит через точки $(H, 0)$ и $(0, a)$, отсюда имеем условия

$$\begin{cases} H = \beta, \\ 0 = \alpha a^2 + \beta. \end{cases}$$

Решая систему, получим $\alpha = -H/a^2$, $\beta = H$. Значит, уравнение параболы имеет вид $x = H(1 - y^2/a^2)$, откуда

$$y_1(x) = -a\sqrt{1 - \frac{x}{H}}, \quad y_2(x) = a\sqrt{1 - \frac{x}{H}}.$$

Сила давления воды на пластину будет равна

$$F = \gamma \int\limits_{x_1}^{x_2} x\,(y_2(x) - y_1(x))\,dx =$$

$$= \gamma \int\limits_0^H x\left(\sqrt{1 - \frac{x}{H}} - \left(-\sqrt{1 - \frac{x}{H}}\right)\right) dx =$$

$$= 2\gamma a \int\limits_0^H x\sqrt{1 - \frac{x}{H}}\,dx = \frac{8}{15}\gamma a H^2.$$ ◄

Пример 3.4. Рассчитать давление жидкости удельным весом γ на пластинку в форме треугольника, изображенную на рис. 3.4.

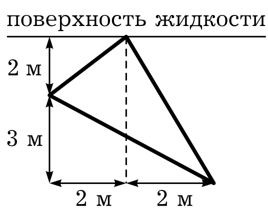


Рис. 3.4

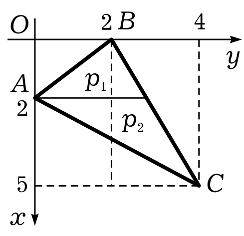


Рис. 3.5

► Выберем систему координат, как показано на рис. 3.5. Разделим пластину на две части, обозначив силы давления на них через F_1 и F_2, соответственно.

Вычислим F_1. Составим уравнения прямых AB и BC, проходящих через вершины треугольника: $A(2;0)$, $B(0;2)$ и $C(5;4)$. Для этого применим уравнение прямой, проходящей через две заданные точки:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Тогда уравнение прямой AB будет иметь вид

$$\frac{x-2}{0-2}=\frac{y-0}{2-0}, \quad y=x-2,$$

а уравнение прямой BC —

$$\frac{x-0}{5-0}=\frac{y-2}{4-2}, \quad y=\frac{2}{5}x+2.$$

Значит,

$$y_2(x)-y_1(x)=\frac{2}{5}x+2-(x-2)=-\frac{3}{5}x+4.$$

$$F_1=\gamma\int\limits_0^2 x\left(4-\frac{3}{5}x\right)\,dx=\gamma\left(2x^2-\frac{x^3}{5}\right)\Big|_0^2=\frac{32}{5}\gamma.$$

Вычислим F_2. Составим уравнение прямой AC:

$$\frac{x-2}{5-2}=\frac{y-0}{4-0}, \quad y=\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}.$$

Тогда

$$y_2(x)-y_1(x)=\frac{4}{3}x-\frac{8}{3}-(x-2)=\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}.$$

$$F_2=\gamma\int\limits_2^5 x\left(\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}\right)dx=\gamma\left(\frac{x^3}{9}-\frac{x^2}{3}\right)\Big|_2^5=\frac{53}{9}\gamma.$$

Получаем

$$F=F_1+F_2=\frac{32}{5}\gamma+\frac{53}{9}\gamma=\frac{553}{45}\gamma.$$ ◄

Пример 3.5. Конец трубы, погруженной горизонтально в воду, закрыт заслонкой. Определить силу давления, действующую на заслонку, если ее диаметр равен $d=2$ м, а центр находится на глубине $H=5$ м под водой.

► Длина хорды, отстоящей от центра круга на расстоянии x, равна $2\sqrt{(d/2)^2 - x^2}$. При этом она находится на глубине $H - x$ ($x > 0$ для верхней половины круга, $x < 0$ — для нижней). Соответственно, площадь соответствующей тонкой полоски шириной dx определится выражением

$$dS = 2\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - x^2}\; dx.$$

Отсюда сила давления, действующая на полоску, равна

$$dF = (H - x)\, dS = 2(H - x)\sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - x^2}\; dx.$$

Следовательно, сила давления воды на заслонку (с учетом $d = 2$ м и $H = 5$ м) равна

$$F = 2\int\limits_{-1}^{1} (5 - x)\sqrt{1 - x^2}\; dx = 5\pi.$$

◄

Пример 3.6. Вычислить силу, действующую на стенки резервуара со стороны жидкости (удельный вес γ), представляющего собой полусферу радиусом R. Резервуар заполнен до краев.

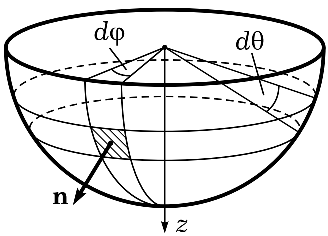


Рис. 3.6

► Выберем систему координат, как показано на рис. 3.6. Рассмотрим элементарную площадку на поверхности резервуара на глубине $z = R\cos\theta$, заключенную между близкими координатными поверхностями в сферической системе координат. Ее площадь запишется в виде $ds = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$. По нормали $\mathbf{n}$ к ней со стороны жидкости на нее действует сила

$$dF = p\, ds = R\cos\theta\, ds = \gamma R^3 \cos\theta \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Соответственно, проекция силы на ось z будет равна

$$dF_z = \gamma\cos\theta\, dF = R^3 \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Интегрирование по φ в пределах $[0; 2\pi]$ дает проекцию силы на ось z, действующей на полосу, заключенную между углами θ и $\theta + d\theta$:

$$dF_z^* = 2\pi R^3 \gamma \cos^2\theta \, \sin\theta \, d\theta.$$

Вычисляя интеграл по θ, учтем вклад от каждой такой элементарной полосы и получим проекцию полной силы, действующей со стороны жидкости на резервуар:

$$F_z = \gamma \int\limits_{\pi/2}^{0} R^3 \cos^2\theta \sin\theta \, d\theta = \frac{2}{3}\pi\gamma R^3.$$

Как и следовало ожидать, данная сила равна весу жидкости в резервуаре. Из симметрии задачи ясно, что проекции полной силы на оси x и y равны нулю, в чем можно убедиться и непосредственными вычислениями, аналогичными приведенным. ◄

§ 3.2. Работа переменной силы

Пусть под действием постоянной силы F материальная точка движется по прямолинейному участку пути s. Тогда работа A силы на этом участке вычисляется по известной формуле $A = Fs$.

1. Работа по откачиванию жидкости из резервуара. Пусть γ — удельный вес откачиваемой жидкости (вес единицы ее объема). Введем систему координат, как показано на рис. 3.7. Изначально предполагаем, что исходя из геометрии сосуда известна площадь его сечения $S(x)$ при произвольном значении x. Рассмотрим слой жидкости малой высоты dx, залегающий на глубине x. Вес указанного слоя будет равен $\gamma S(x)\, dx$. Чтобы поднять этот слой на высоту $x+h$ необходимо совершить элементарную работу $dA = \gamma(x+h)S(x)\, dx$. Соответственно, полная работа по закачиванию жидкости на нужную высоту, определится интегралом

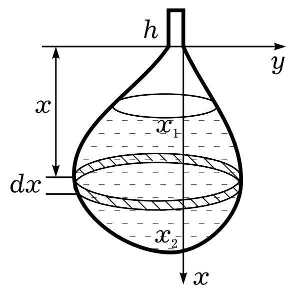


Рис. 3.7

$$A = \gamma \int\limits_{x_1}^{x_2} (x+h)S(x)\, dx,$$

где x_1 и x_2 — уровни дна сосуда и ее свободной поверхности соответственно по отношению к выбранной системе координат.

2. Работа сил поля тяготения. Вычислим работу, совершаемую силами поля тяготения Земли при перемещении в нем материальной точки массой m. Известно, что на точечную массу m при этом действует сила тяготения

$$F(r) = G\frac{Mm}{r^2},$$

где G — гравитационная постоянная, M — масса Земли, r — расстояние от центра Земли. Введем систему координат, как показано на рис. 3.8. Элементарная работа, совершаемая силой тяготения на перемещении dr, определится выражением

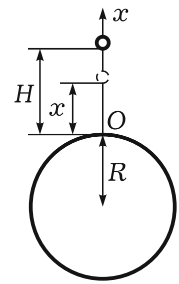


Рис. 3.8

$$dA = F(r)\,dr = -G\frac{mM}{r^2}\,dr.$$

Тогда общая работа при перемещении массы m с поверхности Земли на высоту H определится интегралом

$$A = -\int\limits_R^{R+H} G\frac{mM}{r^2}\,dr = G\frac{mM}{r}\bigg|_R^{R+H} = -GmM\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R+H}\right).$$

Как и следовало ожидать, работа силы тяготения при поднятии массы над Землей является отрицательной, так как эта сила направлена противоположно перемещению.

Найденная работа может быть записана также следующим образом:

$$A = -\left(U(R+H) - U(R)\right),$$

где $U(r) = -GmM/r$ — потенциальная энергия массы m в поле тяготения.

Произведение GM можно легко выразить через ускорение g свободного падения на поверхности Земли. Действительно, имеем $mg = GmM/R^2$, отсюда $GM = gR^2$.

3. Работа по растяжению пружины. Чтобы вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на s единиц длины, воспользуемся законом Гука

$F = ks$, где F — сила, растягивающая пружину; k — коэффициент жесткости пружины.

Чтобы растянуть пружину на длину dx, необходимо затратить элементарную работу $dA = F(x)\,dx$. Тогда

$$A = \int_0^s F(x)\,dx,$$

где s — удлинение пружины.

4. Работа по сжатию газа. Допустим, что газ подвергается сжатию в цилиндре под поршнем. Тогда внешние силы совершают над газом некоторую положительную работу A'. В то же время силы давления, действующие со стороны газа на поршень, совершают работу $A = -A'$. При изменения объема газа на малую величину dV газ совершает работу

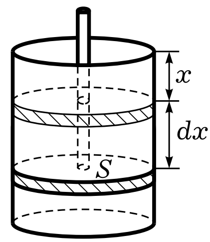


Рис. 3.9

$$dA = pS\,dx = p\,dV,$$

где p — давление газа, S — площадь поршня, dx — его перемещение (рис. 3.9).

При расширении работа, совершаемая газом, положительна, при сжатии — отрицательна. В общем случае при переходе из некоторого начального состояния (1) в конечное состояние (2) работа газа выражается формулой

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p(V)\,dV.$$

Для замкнутого цикла работа газа определяется площадью фигуры, образованной кривыми $p = p(V)$, образующих этот цикл.

Зависимость $p(V)$ определяется уравнением процесса. В частности, если процесс изотермический, то $pV = \mathrm{const}$. Связь между термодинамическими параметрами при адиабатическом процессе определяется уравнением Пуассона. В (p,V)-координатах оно имеет вид $pV^\gamma = \mathrm{const}$, где γ — показатель адиабаты, определяемый как отношение теплоемкостей газа при постоянном давлении и постоянном объеме.

Пример 3.7. Над идеальным газом в цилиндрическом сосуде радиуса R на высоте H находится поршень. Какую работу нужно совершить, чтобы опустить поршень при неизменной температуре газа на расстояние $a < H$, если первоначальное давление газа p_0?

► В начале процесса газ занимал объем $V_0 = \pi R^2 H$. Обозначим через $p(x)$ давление газа в цилиндре при перемещении поршня на расстояние x от начального положения (рис. 3.9). При этом объем части цилиндра с газом равен $V(x) = \pi R^2(H - x)$. Тогда из уравнения для изотермического процесса имеем

$$p_0 V_0 = p(x)V(x), \quad p_0 \pi R^2 H = p(x)\pi R^2 (H - x),$$

откуда

$$p(x) = \frac{p_0 H}{H - x}.$$

Если переместить поршень на малое расстояние dx, совершается элементарная работа

$$dA = \pi R^2 p(x)\, dx = \pi R^2 \frac{p_0 H}{H - x}\, dx.$$

Соответственно, при перемещении поршня на конечное расстояние a работа определится интегралом

$$A = \pi R^2 \int\limits_0^a \frac{p_0 H}{H - x}\, dx = -\pi R^2 p_0 H \ln\left(1 - \frac{a}{H}\right).$$ ◄

Пример 3.8. Найти работу газа в адиабатическом процессе.

► Пусть p_1 и V_1 — давление и объем газа в начальном состоянии. Тогда из уравнения Пуассона имеем

$$p_1 V_1^\gamma = pV^\gamma, \quad p(V) = p_1 \frac{V_1^\gamma}{V^\gamma}.$$

Тогда для работы газа в адиабатическом процессе $(p_1,V_1) \to$ $\to (p_2,V_2)$ получим

$$A_{12} = \int\limits_{V_1}^{V_2} p_1 \frac{V_1^\gamma}{V^\gamma}\, dV = p_1 V_1^\gamma \frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma}\bigg|_{V_1}^{V_2} = \frac{p_1 V_1}{\gamma - 1}\left(1 - \frac{V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}}\right).$$ ◄

Пример 3.9. Вычислить работу по выкачиванию жидкости удельным весом γ из конического резервуара высотой H и радиусом основания R.

► Введем систему координат и обозначения, как показано на рис. 3.10. Обозначим через $S(x)$ площадь сечения конуса на расстоянии x от начала координат. Найдем радиус сечения $r(x)$. Из подобия треугольников BOC и AOD имеем $AD/BC = OA/OB$. Так как $AD = r(x)$, $BC = R$, $OA = x$, $OB = H$, то получим

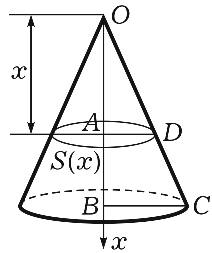


Рис. 3.10

$$\frac{r(x)}{R} = \frac{x}{H}, \quad r(x) = \frac{xR}{H}.$$

Тогда

$$S(x) = \pi r^2(x) = \pi\frac{x^2R^2}{H^2}.$$

Используя формулу из п. 1 этого параграфа (в данном случае $h = 0$), вычислим работу:

$$A = \int_0^H x \cdot \pi\frac{x^2R^2}{H^2}\,dx = \frac{\pi R^2}{H^2}\int_0^H x^3\,dx = \frac{\pi R^2H^2}{4}.$$ ◄

Пример 3.10. Вычислить работу внешних сил по выкачиванию жидкости с плотностью ρ_0 из емкости, имеющей форму полуцилиндра длиной L и радиусом R.

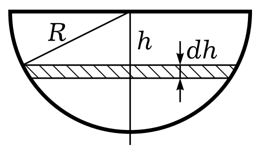


Рис. 3.11

► Выделим в емкости на глубине h слой воды бесконечно малой толщины dh (рис. 3.11, вид с торца). Длина этого слоя в форме прямоугольника равна L, а ширина $2\sqrt{R^2 - h^2}$. Соответственно, объем жидкости в этом слое запишется в виде

$$dV = 2L\sqrt{R^2 - h^2}\,dh.$$

Элементарная работа, совершаемая внешними силами по перемещению данного слоя воды на поверхность, равна

$$dA = 2\rho_0 ghL\sqrt{R^2 - h^2}\,dh.$$

Здесь g — ускорение свободного падения. Интегрируя в пределах от 0 до R, получим искомую работу:

$$A = 2\rho_0 gL \int\limits_0^R h\sqrt{R^2 - h^2}\, dh =$$
$$= -\frac{2}{3}\rho_0 gL\sqrt{(R^2 - h^2)^3}\,\Big|_0^R = \frac{2}{3}\rho_0 gLR^3. \qquad ◀$$

Пример 3.11. Вычислить работу, которую нужно затратить, чтобы растянуть пружину на 0,1 м, если известно, что для удлинения ее на 0,01 м необходимо приложить силу в $2 \cdot 10^3$ Н.

▶ Найдем коэффициент жесткости пружины. Используя закон Гука $F = ks$, при $F = 2 \cdot 10^3$ и $s = 0{,}01$ имеем $k = 2 \cdot 10^3/0{,}01 = 2 \cdot 10^5$. Используя формулу из п. 3 этого параграфа, вычислим работу:

$$A = 2 \cdot 10^5 \int\limits_0^{0,1} x\, dx = 2 \cdot 10^5 \frac{0{,}1^2}{2} = 10^3 \text{ Дж.} \qquad ◀$$

§ 3.3. Задачи на движение

1. Прямолинейное движение. Пусть материальная точка движется прямолинейно с переменной скоростью, являющейся известной функцией от времени $v = v(t)$. Требуется найти путь, пройденный точкой от момента времени t_1 до момента t_2.

Рассмотрим движение за элементарный промежуток времени $[t, t + \Delta t]$. За это время точка пройдет путь $ds = v(t)\, dt$. Интегрируя по отрезку $[t_1, t_2]$, получим величину пути, пройденного точкой за этот отрезок времени:

$$s = \int\limits_{t_1}^{t_2} v(t)\, dt. \tag{1}$$

2. Криволинейное движение. Пусть траектория движения точки задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t). \end{cases}$$

Чтобы вычислить путь, пройденный точкой за отрезок времени $[t_1, t_2]$, воспользуемся формулой длины дуги линии, заданной в параметрической форме:

$$s = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\, dt. \tag{2}$$

Пример 3.12. Материальная точка движется прямолинейно со скоростью $v(t) = 6t^2 + 4t + 1$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за промежуток времени $[0; 3]$.

► Согласно формуле (1) имеем

$$s = \int\limits_0^3 (6t^2 + 4t + 1)\, dt = (2t^3 + 2t^2 + 1)\Big|_0^3 = 56 \text{ м.}$$ ◄

Пример 3.13. Скорость прямолинейного движения точки $v(t) = te^{-\alpha t}$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за первые β с от начала движения.

► Путь, пройденный точкой за β с, вычислим по формуле

$$s = \int\limits_0^{\beta} te^{-\alpha t}\, dt.$$

Интегрируем по частям:

$$s = \int\limits_0^{\beta} te^{-\alpha t}\, dt = \left| \begin{array}{c} u = t,\ dv = e^{-\alpha t}\, dt, \\ du = dt,\ v = -\dfrac{1}{\alpha} e^{-\alpha t} \end{array} \right| =$$

$$= -\frac{t}{\alpha} e^{-\alpha t}\Big|_0^{\beta} - \int\limits_0^{\beta} \left(-\frac{1}{\alpha}\right) e^{-\alpha t}\, dt = -\frac{t}{\alpha} e^{-\alpha t}\Big|_0^{\beta} - \frac{1}{\alpha^2} e^{-\alpha t}\Big|_0^{\beta} =$$

$$= -\left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}\right) e^{-\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha^2} \text{ м.}$$ ◄

Пример 3.14. Скорость движения точки определяется формулой $v = \sqrt{1 + t}$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за первые 15 с от начала движения. Чему равна средняя скорость на этом промежутке времени?

► Путь, пройденный точкой за 15 с, вычисляем по формуле

$$s = \int\limits_0^{15} \sqrt{1+t}\,dt = \frac{2}{3}(1+t)^{3/2}\Big|_0^{15} = \frac{2}{3}(16\sqrt{16}-1) = 42 \text{ м}.$$

Средняя скорость точки равна

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{15} = \frac{42}{15} \approx 2{,}8 \text{ м/с}. \qquad ◄$$

Пример 3.15. Вычислить среднюю скорость и путь, пройденный точкой за время $t \in [0;6]$, если закон движения точки имеет вид

$$\begin{cases} x = (t^2-2)\sin t + 2t\cos t, \\ y = (2-t^2)\cos t + 2t\sin t. \end{cases}$$

► Чтобы вычислить путь, пройденный точкой, воспользуемся формулой (2). Учитывая, что

$$\begin{cases} x' = ((t^2-2)\sin t + 2t\cos t)' = t^2\cos t, \\ y' = ((2-t^2)\cos t + 2t\sin t)' = t^2\sin t, \end{cases}$$

находим путь, пройденный точкой за $t \in [0;6]$:

$$s = \int\limits_0^6 \sqrt{t^4\cos^2 t + t^4\sin^2 t}\;dt = \int\limits_0^6 t^2\,dt = \frac{t^3}{3}\Big|_0^6 = 72.$$

Вычислим среднюю скорость:

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t} = \frac{72}{6} = 12. \qquad ◄$$

§ 3.4. Количество электричества

Пусть по проводнику течет ток переменной силы $I = I(t)$, где $I(t) \geqslant 0$. Возникает задача определения заряда Q, прошедшего через поперечное сечение проводника за промежуток времени $[t_1, t_2]$. Известно, что для постоянного тока I прошедший заряд равен $Q = I(t_1 - t_2)$.

Пример 3.16. Сила тока в проводнике меняется со временем по закону $I(t) = 2 + 3t^2$. Какой заряд пройдет через поперечное сечение проводника с момента времени $t_1 = 2$ с до момента $t_2 = 5$ с, если сила тока I задана в амперах, время t — в секундах?

► Прошедший через сечение проводника заряд найдем по формуле

$$Q = \int\limits_{t_1}^{t_2} I(t)\,dt = \int\limits_{2}^{5} (2+3t^2)\,dt = (2t+t^3)\Big|_2^5 = 123\ \text{Кл}.$$

◄

Пример 3.17. Известно, что сопротивление металлических проводников линейно растет с температурой согласно формуле $R = R_0(1+0{,}004T)$, где R_0 — сопротивление при $0\ ^\circ$С. Проводник, сопротивление которого при $0\ ^\circ$С равно $R_0 = 10$ Ом, равномерно нагревают от $T_1 = 20\ ^\circ$С до $T_2 = 200\ ^\circ$С в течение 10 мин. Какой заряд пройдет за это время через проводник, если к нему приложено напряжение $U = 120$ В?

► По условию задачи температура проводника растет с постоянной скоростью $dT/dt = (200^\circ - 20^\circ)/600 = 0{,}3$ град/с. Иначе говоря, температура поднимается на $0{,}3\ ^\circ$С каждую секунду. Это значит, температура T растет по линейному закону $T = T_1 + 0{,}3t = 20 + 0{,}3t$. При этом сопротивление проводника будет определяться выражением

$$R = R_0(1+0{,}004T) =$$
$$= 10(1 + 0{,}004(20 + 0{,}3t)) = 10{,}8 + 0{,}012t.$$

Тогда по закону Ома для силы тока имеем

$$I = \frac{120}{10{,}8 + 0{,}012t}.$$

Искомый заряд получим, проинтегрировав эту функцию по промежутку $[0; 600]$:

$$Q = \int\limits_0^{600} \frac{120}{10{,}8+0{,}012t} = \frac{120}{0{,}012}\ln(10{,}8+0{,}012t)\Big|_0^{600} =$$
$$= 10^4(\ln 8 - \ln 10{,}8) \approx 5110\ \text{Кл}.$$

◄

Пример 3.18. Какое количество теплоты (в ккал) выделится в проводнике сопротивлением R в течение периода T при прохождении по нему переменного синусоидального тока $I = I_0 \sin(2\pi t/T - \varphi)$?

► По закону Джоуля–Ленца за бесконечно малый промежуток времени dt количество теплоты, выделяемой в проводнике, равно $dQ = 0{,}24 I^2(t) R\,dt$. Тогда за конечный промежуток времени $[t_1, t_2]$ в проводнике выделится количество теплоты, определяемое интегралом

$$Q = 0{,}24 \int\limits_{t_1}^{t_2} I^2(t) R\,dt.$$

Согласно исходным данным задачи имеем

$$Q = 0{,}24 R I_0^2 \int\limits_0^T \sin^2\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi\right) dt =$$

$$= 0{,}12 R I_0^2 \left(t - \frac{T}{4\pi}\sin 2\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi\right)\right)\Bigg|_0^T = 0{,}12 R T I_0^2. \quad ◀$$

§ 3.5. Вычисление массы. Моменты. Центр масс

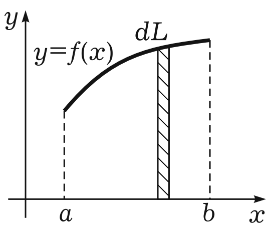


Рис. 3.12

Рассмотрим плоскую кривую $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, плотность которой $\rho = \rho(x)$ (рис. 3.12). Выделим элемент дуги кривой dL.

1. Масса этого участка кривой равна $dm = \rho(x)\,dL$. Используя формулу $dL = \sqrt{1 + (y')^2}\,dx$, для массы дуги имеем

$$m = \int\limits_a^b \rho(x)\sqrt{1 + (y')^2}\,dx.$$

2. Моментом инерции материальной точки A относительно точки (прямой) вращения называется величина $I = mr^2$, где m — масса точки A, r — расстояние до точки (прямой), вокруг которой происходит вращение. Согласно определению момент инерции плоской кривой относительно начала координат вычисляется по формуле

$$I_0 = \int\limits_a^b \rho(x)(x^2 + y^2)\sqrt{1 - (y')^2}\,dx,$$

а моменты инерции относительно координатных осей Ox и Oy — по формулам

$$I_x = \int_a^b \rho(x) y^2 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx, \quad I_y = \int_a^b \rho(x) x^2 \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

3. Статическим моментом точки A относительно точки (прямой) называется величина $M = mr$, где m — масса точки A, r — расстояние до точки (прямой), относительно которой вычисляется момент. Согласно определению статический момент плоской кривой относительно начала координат вычисляется по формуле

$$M_0 = \int_a^b \rho(x) \sqrt{x^2 + y^2}\, \sqrt{1 + (y')^2}\, dx,$$

а статические моменты относительно координатных осей Ox и Oy — по формулам

$$M_x = \int_a^b \rho(x) y \sqrt{1 + (y')^2}\, dx, \quad M_y = \int_a^b \rho(x) x \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

4. Из соотношений $M_x = my_C$ и $M_y = mx_C$ находятся **координаты центра масс** $C(x_C, y_C)$:

$$x_C = \frac{\int_a^b \rho(x) x \sqrt{1 + (y')^2}\, dx}{\int_a^b \rho(x) \sqrt{1 + (y')^2}\, dx}, \quad y_C = \frac{\int_a^b \rho(x) y \sqrt{1 + (y')^2}\, dx}{\int_a^b \rho(x) \sqrt{1 + (y')^2}\, dx}.$$

Рассмотрим плоскую область, ограниченную сверху графиком функции $y = f(x)$, $x \in [a, b]$, плотность которой $\rho = \rho(x)$ (рис. 3.13). Выделим элемент площади ds.

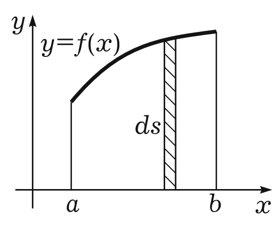


Рис. 3.13

5. Масса участка ds области равна $dm = \rho(x)\, ds$. Используя геометрическую интерпретацию определенного интеграла, для массы плоской области имеем:

$$m=\int\limits_a^b \rho(x)f(x)\,dx.$$

6. Согласно определению (см. п. 2 этого параграфа) **момент инерции плоской области** относительно начала координат вычисляется по формуле

$$I_0=\int\limits_a^b \rho(x)(x^2+f^2(x))f(x)\,dx,$$

а моменты инерции относительно координатных осей Ox и Oy — по формулам

$$I_x=\int\limits_a^b \rho(x)f^3(x)\,dx,\quad I_y=\int\limits_a^b \rho(x)x^2f(x)\,dx.$$

7. Согласно определению (см. п. 3 этого параграфа) **статический момент плоской области** относительно начала координат вычисляется по формуле

$$M_0=\int\limits_a^b \rho(x)\sqrt{x^2+f^2(x)}\,f(x)\,dx,$$

а статические моменты относительно координатных осей Ox и Oy — по формулам

$$M_x=\int\limits_a^b \rho(x)f^2(x)\,dx,\quad M_y=\int\limits_a^b \rho(x)xf(x)\,dx.$$

8. Координаты центра масс $C(x_C,y_C)$ вычисляются по формулам

$$x_C=\frac{\int\limits_a^b x\rho(x)f(x)\,dx}{\int\limits_a^b \rho(x)f(x)\,dx},\quad y_C=\frac{\int\limits_a^b \rho(x)f^2(x)\,dx}{\int\limits_a^b \rho(x)f(x)\,dx}.$$

Пример 3.19. Вычислить момент инерции и статичный момент однородной ($\rho=\text{const}$) окружности $x^2+y^2=R^2$ относительно центра.

► Так как

$$y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}\,, \quad y' = \pm\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,,$$

то имеем

$$I_0 = 4\rho\int\limits_0^R R^2\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\;dx = 4\rho R^3\int\limits_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 2\pi\rho R^3,$$

$$M_0 = 4\rho\int\limits_0^R R\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\;dx = 4\rho R^2\int\limits_0^R \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 2\pi\rho R^2.$$ ◄

Пример 3.20. Вычислить координаты центра масс однородной пластинки (ρ = const), ограниченной кривыми $y = 5 - x^2$, $y = 0$.

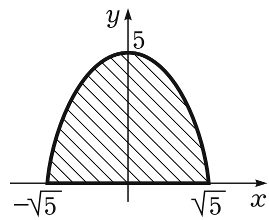


Рис. 3.14

► Построим заданную область (рис. 3.14). Из однородности и симметричности данной фигуры относительно Ox следует, что $x_C = 0$. Для определения y_C воспользуемся формулами п. 8 этого параграфа. Имеем

$$y_C = \frac{\int\limits_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}(5-x^2)^2\,dx}{\int\limits_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}(5-x^2)\,dx} = \frac{\left(25x - \dfrac{10}{x}x^3 - \dfrac{x^5}{5}\right)\Big|_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}}{\left(5x - \dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}}} = \frac{\dfrac{20}{3}\sqrt{5}}{\dfrac{20}{3}\sqrt{5}} = 1.$$ ◄

Пример 3.21. Вычислить массу и координаты центра масс плоской материальной дуги $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, если плотность $\rho(x) = \sqrt{1 + x}\,$.

► Для вычисления массы воспользуемся формулой п. 1 этого параграфа. Учитывая, что

$$y' = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)' = x^{\frac{1}{2}},$$

имеем

$$m = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + x}\sqrt{1 + \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\;dx =$$

$$= \int\limits_0^1 (1+x)\,dx = \left(x + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{3}{2}.$$

Чтобы вычислить координаты центра масс кривой, найдем интегралы

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1+x}\; x\sqrt{1+\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\;dx = \int\limits_0^1 x(1+x)\,dx =$$

$$= \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{5}{6},$$

$$\int\limits_0^1 \sqrt{1+x}\;\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\sqrt{1+\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2}\;dx = \frac{2}{3}\int\limits_0^1 x^{\frac{3}{2}}(1+x)\,dx =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\right)\Big|_0^1 = \frac{16}{35}.$$

Воспользуемся формулами п. 4 настоящего параграфа:

$$x_C = \frac{5}{6} : \frac{3}{2} = \frac{10}{8}, \quad y_C = \frac{16}{35} : \frac{3}{2} = \frac{32}{105}.$$ ◄

§ 3.6. Приложения определенного интеграла к решению экономических задач

1. Коэффициент Джини

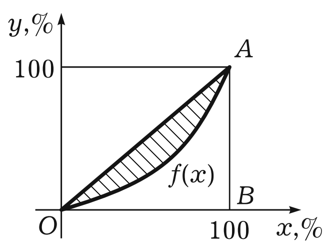


Рис. 3.15

Рассмотрим зависимость процента доходов населения y от процента x, имеющего эти доходы населения, т.е. функцию $y = f(x)$. С помощью функции $f(x)$ (кривая Лоренца, рис. 3.15) можно оценить степень неравенства в распределении доходов населения. При равномерном распределении доходов кривая $f(x)$ вырождается в биссектрису OA. Площадь сегмента OfA, отнесенная к площади треугольника OAB, называется *коэффициентом*

Джини. Этот коэффициент характеризует степень неравенства в распределении доходов населения:

— если коэффициент Джини не превышает 0,33, то распределение доходов можно считать близким к равномерному;

— если коэффициент Джини находится в пределах от 0,33 до 0,67, то распределение доходов считают неравномерным;

— если коэффициент Джини более 0,67, то распределение доходов можно считать существенно неравномерным.

Пример 3.22. По данным исследований в распределении доходов в одной из стран кривая Лоренца может быть описана уравнением

$$y = \frac{3}{2-x} - \frac{5}{3},$$

где x — доля населения, y — доля доходов населения. Вычислить коэффициент Джини.

► Площадь сегмента OfA, отнесенная к площади треугольника OAB, называется коэффициентом Джини (см. рис. 3.15):

$$k = \frac{S_{OfA}}{S_{\Delta OAB}} = \frac{S_{\Delta OAB} - S_{OfAB}}{S_{\Delta OAB}} = \frac{S_{\Delta OAB}}{S_{\Delta OAB}} - \frac{S_{OfAB}}{S_{\Delta OAB}} =$$

$$= 1 - \frac{S_{OfAB}}{S_{\Delta OAB}} = 1 - \frac{S_{OfAB}}{1/2} = 1 - 2S_{OfAB},$$

(так как, если проценты перевести в доли, $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$). Вычислим площадь $OfAB$ с помощью определенного интеграла:

$$S_{OfAB} = \int\limits_0^1 \left(\frac{3}{2-x} - \frac{5}{3}\right) dx = 3\int\limits_0^1 \frac{dx}{2-x} - \frac{5}{3}\int\limits_0^1 dx =$$

$$= -3\ln|2-x|\Big|_0^1 - \frac{5}{3}x\Big|_0^1 = -3(\ln 1 - \ln 2) - \frac{5}{3} =$$

$$= 3\ln 2 - \frac{5}{3} \approx 3 \cdot 0{,}69 - \frac{5}{3} = 0{,}403.$$

Тогда $k = 1 - 2 \cdot 0{,}403 = 0{,}194$. Так как коэффициент Джини не превышает 0,33, то распределение доходов можно считать близким к равномерному. ◄

2. Объем выпускаемой продукции. Среднее значение функции

Известно, что производительность труда в течение рабочего дня изменяется. Пусть изменение производительности труда определяется функцией $f(t)$, где t — отрезок времени, отсчитываемый от начала рабочего дня, а $f(t)$ — производительность труда в данный момент. Тогда величина

$$U = \int\limits_0^T f(t)\,dt$$

есть *объем выпускаемой продукции* за время $[0;T]$.

Часто при решении практических задач приходится находить *средние значения функции*, например, средняя производительность труда, средние издержки производства, средняя мощность двигателя и т.д. В этих случаях используют теорему о среднем значении (интеграла).

Теорема (о среднем). Если функция непрерывна на отрезке $[a,b]$, то найдется такое значение $c \in [a,b]$, что

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(t)\,dt = L.$$

Число L называется средним значением функции $f(t)$ на отрезке $[a,b]$.

Пусть известна функция $t = t(x)$, описывающая изменение затрат времени на изготовление изделия в зависимости от степени освоения производства, где x — порядковый номер изделия в партии. Тогда среднее время $t_{\text{ср}}$, затраченное на изготовление одного изделия в период освоения от x_1 до x_2 изделий, вычисляется по теореме о среднем:

$$t_{\text{ср}} = \frac{1}{x_2 - x_1}\int\limits_{x_1}^{x_2} t(x)\,dx.$$

Что касается функции изменения затрат времени на изготовление изделий $t = t(x)$, то часто она имеет вид $t = ax^{-b}$, где a — затраты времени на первое изделие, b — показатель производственного процесса.

Пусть $p = f(x)$ — кривая спроса D на некоторый товар и $p = g(x)$ — кривая предложения S, где p — цена на товар, x — величина спроса. Обозначим через (x_0, p_0) точку рыночного равновесия. Доход от реализации количества товара x_0 по равновесной цене p_0 равен произведению $x_0 p_0$. Если предполагать непрерывное снижение цены от максимального $P_D = f(0)$ до равновесной p_0 по мере удовлетворения спроса, то доход составляет

$$\int_0^{x_0} f(x)\,dx.$$

Величина денежных средств

$$C = \int_0^{x_0} f(x)\,dx - p_0 x_0$$

сберегается потребителями, если предполагать продажу товара по равновесной цене p_0, поэтому C называется *выигрышем потребителя*. Аналогично

$$P = p_0 x_0 - \int_0^{x_0} g(x)\,dx$$

называется *выигрышем поставщиков*.

Пример 3.23. В течение рабочего дня изменение производительности труда характеризуется функцией $f(t) = -t^2 + 6t + 7$. Найти: а) объем выпускаемой продукции за время $[0; 4]$; б) среднее значение производительности за время $[0; 4]$ и моменты t_0 и t_1, в которые достигаются среднее и максимальное значения производительности; в) результат пояснить графически.

► а) Объем выпускаемой продукции за время $[0; T]$ равен

$$U = \int_0^4 (-t^2 + 6t + 7)\,dt = \left(-\frac{t^3}{3} + 6\frac{t^2}{2} + 7t\right)\Big|_0^4 =$$

$$= -\frac{4^3}{3} + 6 \cdot \frac{4^2}{2} + 7 \cdot 4 - 0 = \frac{164}{3}.$$

б) Среднее значение производительности $f(t)$ за время $[0;T]$ равно

$$F(c) = \frac{1}{4}\int\limits_0^4 (-t^2+6t+7)\,dt = \frac{1}{4}\cdot\frac{164}{3} = \frac{41}{3}.$$

Чтобы найти момент времени t_0, в который достигается среднее значение производительности, решим уравнение:

$$-t^2+6t+7=\frac{41}{3},\quad 3t^2-18t+20=0,$$

$$t_1=\frac{18-\sqrt{84}}{6}\approx 1{,}5,\quad t_2=\frac{18+\sqrt{84}}{6}\approx 4{,}5\notin[0;4].$$

Значит, $t_0\approx 1{,}5$, причем $f(t_0)=41/3$.

Чтобы найти момент времени t_1, в который достигается максимальное значение производительности, найдем вершину параболы $f(t)=-t^2+6t+7$ (максимальное значение будет достигаться именно в вершине, т.к. ветви параболы направлены вниз): $t_1=t_{\text{в}}=-b/(2a)=-6/-2=3$.

в) Для построения параболы найдем вторую координату вершины:

$$f(t_{\text{в}})=f(3)=-(3)^2+6\cdot 3+7=16.$$

Значит, вершина параболы находится в точке $(3;16)$. Найдем точки пересечения параболы с осью Ot:

$$-t^2+6t+7=0,\quad D=64,\quad t_1=-1,\ t_2=7.$$

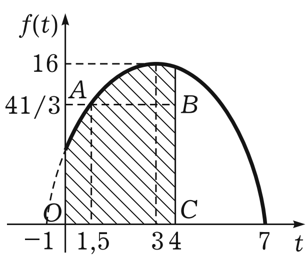


Рис. 3.16

Построим график функции производительности (рис. 3.16). Из него видно, что площадь заштрихованной фигуры, выражающая собой объем выпускаемой продукции за 4 часа, равна площади прямоугольника $OABC$, высотой которого является отрезок прямой, равный среднему значению производительности труда за первые 4 часа работы. ◄

Пример 3.24. Найти среднее значение издержек $K = 2x^2+12x+7$, если объем продукции x изменяется от 1 до 3 единиц. Указать объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение. Результат пояснить графически.

► Среднее значение издержек $K(x)$, если объем продукции x изменяется от m до n единиц, равно

$$l = \frac{1}{3-1}\int_1^3 (2x^2+12x+7)\,dx = \frac{1}{2}\left(\frac{2x^3}{3}+\frac{12x^2}{2}+7x\right)\Big|_1^3 = \frac{134}{3}.$$

Чтобы найти объем продукции, при котором издержки принимают среднее значение, решим уравнение:

$$2x^2+12x+7=\frac{134}{3},\quad 6x^2+36x-113=0,$$

$$x_1 = \frac{-26-\sqrt{4008}}{12} \approx -8{,}3 \notin [1;3],\quad x_2 = \frac{-26+\sqrt{4008}}{12} \approx 2{,}3.$$

Поясним результат графически. График функции $K = 2x^2 + 12x + 7$ представляет собой параболу, ветви которой направлены вверх. Найдем вершину параболы:

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-12}{2\cdot 2} = \frac{-12}{4} = -3,$$

$$K(x_0) = K(-3) = $$

$$= 2\cdot(-3)^2 + 12\cdot(-3) + 7 = -11.$$

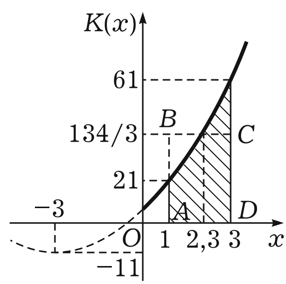


Рис. 3.17

Построим параболу на отрезке от 1 до 3 (рис. 3.17):

$$K(1) = 2\cdot 1^2 + 12\cdot 1 + 7 = 21,$$

$$K(3) = 2\cdot 3^2 + 12\cdot 3 + 7 = 61.$$

На графике видно, что площадь прямоугольника $ABCD$, стороной которого является отрезок $[1;3]$, а высотой — среднее значение функции на этом отрезке, равна площади заштрихованной области. ◄

Пример 3.25. Найти среднее время, затраченное на освоение одного изделия в период освоения от $x_1 = 100$ до $x_2 = 121$ изделий, полагая в функции изменения затрат $a = 600$ мин, $b = 0{,}5$.

►
$$t_{\text{ср}} = \frac{1}{121-100}\int\limits_{100}^{121} 600x^{-1/2}\,dx = \frac{600}{21}\int\limits_{100}^{121}\frac{dx}{\sqrt{x}} =$$
$$= \frac{600}{21}2\sqrt{x}\,\Big|_{100}^{121} = \frac{400}{7} \approx 57{,}2 \text{ мин.}$$ ◄

Пример 3.26. Найти выигрыши потребителей и поставщиков в предположении установления рыночного равновесия, если законы спроса и предложения имеют вид $p = 186 - x^2$, $p = 20 + 11x/6$.

► Решая систему
$$\begin{cases} p = 186 - x^2, \\ p = 20 + 11x/6, \end{cases}$$
найдем точку рыночного равновесия $x_0 = 12, p_0 = 42$. Тогда
$$C = \int\limits_0^{12}(186-x^2)\,dx - 12\cdot 42 = \left(186x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^{12} - 504 = 1152,$$
$$P = 12\cdot 42 - \int\limits_0^{12}\left(20 + \frac{11}{6}x\right)dx =$$
$$= 504 - \left(20x - \frac{11}{6}\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^{12} = 132 \text{ у.е.}$$ ◄

3. Дисконтированный доход

При изучении экономической эффективности капитальных вложений встречаются задачи, связанные с определением начальной суммы по ее конечной величине, полученной через t лет при годовом проценте p (процентная ставка). Такая задача называется *дисконтированием*.

Пусть поступающий ежегодно доход изменяется во времени и описывается функцией $f(t)$ при удельной норме процента, равной $i = p/100$. Процент начисляется непрерывно. Тогда дисконтированный доход K за время T вычисляется по формуле
$$K = \int\limits_0^T f(t)e^{-it}\,dt.$$

Если базовое капиталовложение составляет N усл. ед. и намечается ежегодно увеличивать капиталовложения на m усл. ед., то $f(t) = N + mt$.

Пример 3.27. Определить дисконтированный доход K за 4 года при процентной ставке $p = 6\%$, если первоначальные капиталовложения составили 12 тыс. руб. и ежегодно намечается увеличивать капиталовложения на 1 тыс. руб. Найти $\lim\limits_{T\to\infty} K(T)$.

► Введем функцию $f(t) = N + mt$, где N — начальные капиталовложения; m — сумма, на которую намечается ежегодно увеличивать капиталовложения. Значит, $f(t) = 12+t$. Дисконтированный доход за время T вычисляется по формуле

$$K = \int\limits_0^T f(t)e^{-it}\,dt,$$

где $i = p/100 = 6/100 = 0{,}06$. Значит,

$$K = \int\limits_0^4 (12+t)e^{-0{,}06t}\,dt = \left| \begin{array}{c} u = 12+t,\ dv = e^{-0{,}06t}\,dt, \\ du = dt,\ v = \dfrac{1}{-0{,}06}e^{-0{,}06t} \end{array} \right| =$$

$$= (12+t)\frac{1}{-0{,}06}e^{-0{,}06t}\Big|_0^4 - \int\limits_0^4 \frac{1}{-0{,}06}e^{-0{,}06t}\,dt =$$

$$= (12+t)\frac{1}{-0{,}06}e^{-0{,}06t}\Big|_0^4 - \frac{1}{0{,}06^2}e^{-0{,}06t}\Big|_0^4 =$$

$$= \frac{-16}{0{,}06}e^{-0{,}24} + \frac{12}{0{,}06} - \frac{1}{0{,}06^2}e^{-0{,}24} + \frac{1}{0{,}06^2} \approx 49{,}5.$$

Найдем величину $\lim\limits_{T\to\infty} K(T)$:

$$\lim_{T\to\infty} K(T) = \lim_{T\to\infty}\left((12+t)\frac{1}{-0{,}06}e^{-0{,}06t}\Big|_0^T - \frac{1}{0{,}06^2}e^{-0{,}06t}\Big|_0^T\right) =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\left(\left[(12+T)\frac{1}{-0{,}06}e^{-0{,}06T} - (12+0)\frac{1}{-0{,}06}e^{-0{,}06\cdot 0}\right] - \right.$$

$$\left. - \left[\frac{1}{0{,}06^2}e^{-0{,}06T} - \frac{1}{0{,}06^2}e^{-0{,}06\cdot 0}\right]\right).$$

Учитывая, что $\lim\limits_{T\to\infty} e^{-0{,}06T} = 0$ и $\lim\limits_{T\to\infty} e^{-0{,}06\cdot 0} = 1$, получаем

$$\lim_{T\to\infty} K(T) = \left(\left[0 - 12\frac{1}{-0{,}06}\cdot 1\right] - \left[0 - \frac{1}{0{,}06^2}\cdot 1\right]\right) =$$

$$= \frac{12}{0{,}06} + \frac{1}{0{,}06^2} \approx 477{,}8.$$

◄

Задачи для самостоятельного решения

3.1. Кривая Лоренца, описывающая распределение доходов в одной из стран, задается уравнением $y = 2^x - 1$. Вычислить коэффициент Джини.

Ответ: $k = 0{,}12$.

3.2. В течение рабочего дня изменение производительности труда характеризуется функцией $f(t) = 3t^2 + 6t - 1$. Найти объем выпускаемой продукции за время $[1; 3]$.

Ответ: 48.

3.3. Найти среднее значение издержек $K = 6x^2 + 8x - 3$, если объем продукции x меняется от 2 до 5 единиц.

Ответ: 103.

3.4. В течение 7 с величина тока в проводнике изменялась по закону $I = (3t^2 + 2t)$ А. Какое количество электричества прошло через проводник за это время?

Ответ: 392 Кл.

3.5. Напряжение на клеммах электрической цепи $U = 120$ В. В цепь равномерно вводится сопротивление со скоростью 0,1 Ом/с. Кроме того, в цепь включено постоянное сопротивление $R_0 = 10$ Ом. Сколько кулонов электричества пройдет через цепь в течение двух минут?

Ответ: $1200 \ln 2{,}2 \approx 946$ Кл.

3.6. Определить силу давления воды на вертикальный прямоугольный шлюз с основанием $a = 18$ м и высотой $h = 6$ м единиц.

Ответ: 324 кДж.

3.7. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть пружину на 4 см, если известно, что от нагрузки в 1 Н она растягивается на 1 см?

Ответ: 0,08 Дж.

3.8. Зная, что растяжение пружины пропорционально растягивающей силе, найти работу, затрачиваемую при растяжении пружины на 4 см, если для удлинения ее на 1 см требуется сила 3 кг.

Ответ: 0,24 кГм.

3.9. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из ямы, глубина которой 6 м, а основание — со стороной 2 м.

Ответ: ≈ 706 кДж.

3.10. Вычислить работу, необходимую для выкачивания воды из котла, имеющего форму полусферы радиусом 2 м.

Ответ: 4000π кГм.

3.11. Деревянная прямоугольная балка плавает в воде. Вычислить работу, необходимую для извлечения балки из воды, если известны ее размеры $a = 6$ м, $b = 0{,}3$ м, $c = 0{,}2$ м, а ее удельный вес $0{,}8$.

Ответ: 23,04 кГм.

3.12. Определить давление воды, наполняющей аквариум, на вертикальную стенку, имеющую длину $a = 60$ см, а высоту $b = 25$ см.

3.13. Скорость прямолинейного движения материальной точки $v = te^{-0{,}01t}$ м/с. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до полной остановки.

Ответ: 10^4 м.

3.14. Вычислить работу, которую необходимо затратить, чтобы выкачать воду из резервуара, представляющего собой правильную треугольную пирамиду со стороной основания 2 м и высотой 5 м, обращенную вершиной вверх.

Ответ: 10,8 Дж.

3.15. Какую работу нужно совершить, чтобы тело массой m поднять с поверхности Земли на высоту h? Чему равна эта работа, если тело должно быть удалено на бесконечность?

Ответ: $A = mgRh/(R + h)$.

3.16. Определить работу, совершаемую при подъеме спутника с поверхности Земли на высоту 600 м. Масса спутника 7 т. (Радиус Земли $6{,}38 \cdot 10^6$ м, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.)

Ответ: $38{,}39 \cdot 10^9$ Дж.

3.17. Вычислить массу неоднородной пластины, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $x = 3$, $y = 0$, если плотность в каждой точке $\rho(x) = x$.

Ответ: $18\sqrt{3}/5$.

3.18. Найти координаты центра масс однородной фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

Ответ: $(\pi/2; \pi/8)$.

3.19. Вычислить момент инерции треугольника с основанием b и высотой h относительно его основания.

Ответ: $bh^3/12$.

3.20. Найти статический момент пластинки, ораниченной одной аркой циклоиды $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ и ее основанием, относительно оси Ox.

Ответ: $5\pi a^3/2$.

3.21. Мощность $y(t)$ потребляемой городом электроэнергии выражается формулой

$$y(t) = \begin{cases} a, \ t < 6, \\ a + b\pi \sin[\pi(t - 6)/18], \ t \geqslant 6, \end{cases}$$

где t — текущее время суток. Найти суточное потребление электроэнергии при $a = 15000$ кВт, $b = 12000$ кВт.

Ответ: 797500 кВт·ч.

3.22. Вычислить работу, необходимую для выкачивания масла из вертикального цилиндрического резервуара высотой $H = 6$ м и радиусом основания $R = 2$ м. (Удельный вес масла $\gamma = 0{,}9$.)

Ответ: $\approx 64800 \cdot 9{,}81\pi$ Дж.

Глава 4

Дифференциальные уравнения в геометрических и физических задачах

1. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Дифференциальное уравнение первого порядка называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если оно может быть представлено в виде

$$f(x)\,dx = g(y)\,dy.$$

К решению дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными приводятся очень многие практические задачи.

2. Однородные и линейные дифференциальные уравнения. Дифференциальное уравнение первого порядка называется *однородным*, если оно может быть представлено в виде

$$y' = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ — однородная функция, т.е. $f(kx, ky) = kf(x, y)$. С помощью замены $u = y/x$ ($y = ux$, $y' = u'x + u$), где $u = u(x)$ — новая неизвестная функция, однородное уравнение сводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Линейным уравнением первого порядка называется уравнение, имеющее вид

$$y' + p(x)y = q(x).$$

Для его решения применяется подстановка $y = uv$ ($y' = u'v + uv'$), где $u = u(x)$, $v = v(x)$ — новые неизвестные функции.

Для решения технических задач с применением теории дифференциальных уравнений предлагается следующая *последовательность действий*:

1) подробный разбор условий задачи, введение обозначений и составление расчетной схемы, поясняющей ее суть;

2) составление дифференциального уравнения рассматриваемого процесса;

3) интегрирование составленного уравнения и определение общего решения этого уравнения;

4) определение частного решения задачи на основании данных начальных условий;

5) в случае необходимости определение вспомогательных параметров (например, коэффициента пропорциональности и др.) с использованием для этой цели дополнительных условий;

6) вывод общего закона рассматриваемого процесса и числовое определение искомых величин;

7) анализ ответа и проверка исходного положения задачи.

В зависимости от условия задачи некоторые из этих этапов решения могут отсутствовать.

§ 4.1. Геометрические задачи

В задачах геометрии, в которых требуется найти уравнение кривой по заданному свойству ее касательной, нормали или площади криволинейной трапеции, используются геометрическое истолкование производной и интеграла с переменным пределом (площадь криволинейной трапеции с подвижной ограничивающей ординатой).

Геометрический смысл производной. Если $y = f(x)$ изображена своим графиком — кривой в декартовых координатах (рис. 4.1), то $y'(x) = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол между осью Ox и касательной к кривой в ее точке $M_0(x_0, y_0)$, отсчитываемый от положительного направления оси Ox против часовой стрелки.

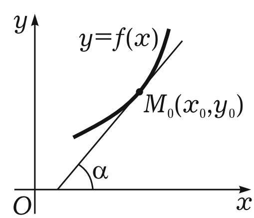


Рис. 4.1

Пример 4.1. У какой кривой отрезок любой касательной, заключенной между точкой касания и осью абсцисс, делится осью ординат пополам?

► Уравнение касательной в любой точке (x, y) искомой кривой будет $Y - y = y'(X - x)$, где X, Y — координаты любой точки на касательной. Полагая $Y = 0$, найдем абсциссу X_0 точки пересечения касательной с осью Ox: $X_0 = x - y/y'$. Согласно условию задачи $X_0 + x = 0$, т.е.

$$2x - \frac{y}{y'} = 0.$$

Разделяя переменные в данном дифференциальном уравнении, получим:

$$\frac{2dy}{y} = \frac{dx}{x}, \quad 2\ln|y| = \ln|x| + \ln C, \quad y^2 = Cx.$$

Следовательно, искомая кривая есть парабола с вершиной в начале координат, симметричная относительно координатной оси Ox. ◄

Пример 4.2. Найти уравнение линии, проходящей через точку $M_0(2; 0)$, если угловой коэффициент касательной в произвольной точке этой кривой пропорционален квадрату абсциссы точки касания с коэффициентом пропорциональности $k = 3$.

► Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной $y'(x)$ функции $y(x)$ в точке x_0 равно угловому коэффициенту касательной к графику этой функции в точке $M_0(x_0, y_0)$. Из условия задачи имеем $y' = kx^2$ или $y' = 3x^2$. Интегрируя обе части дифференциального уравнения, получим его общее решение:

$$y = \int 3x^2\,dx = x^3 + C.$$

Известно, что линия проходит через точку $M_0(2; 0)$, т.е. начальное условие имеет вид $y(2) = 0$. Подставляя значения $x = 2$ и $y = 0$ в общее решение, найдем C: $0 = 2^3 + C$, откуда $C = -8$. Запишем уравнение искомой кривой:

$$y = x^3 - 8.$$ ◄

Пример 4.3. Найти уравнение линии, проходящей через точку $M_0(1; 4)$, если угловой коэффициент касательной в произвольной точке этой кривой обратно пропорционален ординате точки касания с коэффициентом пропорциональности $k = 2$.

► Исходя из условия задачи

$$y' = \frac{2}{y} \quad \text{или} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2}{y}.$$

Разделяя переменные и интегрируя уравнение, получим:

$$y\,dy = 2\,dx, \quad \int y\,dy = 2\int dx + C_1,$$

$$\frac{y^2}{2} = 2x + C_1, \quad y^2 = 4x + C.$$

Используя координаты точки, через которую проходит кривая, запишем начальное условие $y(1) = 4$ и найдем C: $16 = 4 + C$, откуда $C = 12$. Уравнение кривой имеет вид

$$y^2 = 4x + 12 \quad \text{или} \quad y^2 = 4(x+3).$$

Кривая является параболой с вершиной в точке $A(-3; 0)$, осью симметрии Ox и ветвями, направленными вправо. ◄

Пример 4.4. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M_0(1; 0)$, если длина отрезка оси абсцисс, отсекаемого ее нормалью, на 2 больше абсциссы точки касания.

► Обозначим произвольную точку кривой $M(x, y)$. В прямоугольном треугольнике MON угол MON обозначим через α (рис. 4.2). Учитывая, что этот угол является углом между касательной к кривой и осью Ox, имеем $\operatorname{tg}\alpha = y'$. Для прямоугольного треугольника MPN запишем равенство $\operatorname{tg}\angle MNP = |MP|/|PN|$.

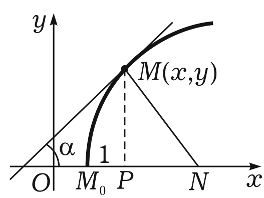


Рис. 4.2

Найдем угол MNP из треугольника MON: $\angle MNP = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \alpha$. Далее получаем $|MP| = y$, $|PN| = |ON| - |OP| = x + 2 - x = 2$. Таким образом,

$$\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) = \frac{y}{2}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{y}{2}, \quad \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{y}{2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{y}, \quad y' = \frac{2}{y}.$$

Разделяя переменные и интегрируя дифференциальное уравнение, запишем его общее решение: $y^2 = 4x+C$. Точка $M_0(1;0)$ принадлежит искомой кривой, т.е. $y(1) = 0$, тогда $0 = 4 + C$, откуда $C = -4$. Уравнение кривой принимает вид

$$y^2 = 4(x-1).$$

Найденная кривая — парабола с вершиной в точке $M_0(1;0)$, осью симметрии Ox и ветвями, направленными вправо. ◄

Пример 4.5. Найти линию, проходящую через точку $M_0(1;3)$ и обладающую свойством, что в любой ее точке M касательный вектор $\overrightarrow{MN}$ с концом на оси Oy имеет проекцию на ось Oy, равную -2.

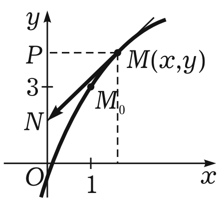


Рис. 4.3

► Пусть $M(x, y)$ — произвольная точка кривой, $M^*(X, Y)$ — произвольная точка касательной. Тогда уравнение касательной к кривой в точке $M(x, y)$ имеет вид

$$Y - y = y'(x)(X - x).$$

Точка $N(0; Y_N)$ принадлежит касательной (рис. 4.3), подставляя ее координаты в уравнение касательной, находим $Y_N - y = y'(x)(0 - x)$, откуда $Y_N = y - xy'$. С другой стороны, $PN = y_N - y_P = Y_N - y$ и по условию $PN = -2$, тогда $Y_N - y = -2$ или $Y_N = y - 2$. Приравнивая выражения для Y_N, получим дифференциальное уравнение

$$y - xy' = y - 2 \quad \text{или} \quad y' = \frac{2}{x}.$$

Интегрируя это уравнение, находим:

$$y = 2\int \frac{dx}{x} + \ln C, \quad y = 2\ln x + \ln C.$$

Из общего решения найдем линию, проходящую через точку $M_0(1;3)$: $3 = 2\ln 1 + \ln C$, откуда $\ln C = 3$. Окончательно уравнение искомой кривой имеет вид

$$y = 2\ln x + 3.$$ ◄

§ 4.2. Физические задачи

При изучении явлений природы, решении многих задач физики и техники, химии и биологии, других наук не всегда удается непосредственно установить прямую зависимость между величинами, описывающими тот или иной эволюционный процесс. Однако в большинстве случаев можно установить связь между величинами (функциями) и скоростями их изменения относительно других (независимых) переменных величин, т.е. найти уравнения, в которых неизвестные функции входят под знак производной. Эти уравнения называются *дифференциальными*.

1. Дифференциальные уравнения теплообмена тела с окружающей средой

Предположим, что $T(t)$ — температура тела в момент времени t, а $T_{\text{ср}}$ — температура окружающей среды. Требуется найти закон изменения температуры тела от времени t.

По известному закону Ньютона бесконечно малое количество теплоты dQ, отданное телом в течение бесконечно малого промежутка времени dt, пропорционально разности температур тела и окружающей среды, следовательно,

$$dQ = -k(T - T_{\text{ср}})\,dt, \quad T > T_0.$$

Здесь k — коэффициент пропорциональности; знак «–» поставлен потому, что потеря тепла dQ — величина отрицательная. Но, с другой стороны, $Q = mc(T - T_0)$, где m — масса тела; c — теплоемкость тела. Допуская, что теплоемкость — величина, не зависящая от температуры, находим $dQ = mc\,dT$. Следовательно,

$$mc\,dT = -k(T - T_{\text{ср}})\,dt$$

или, разделив правую и левую части равенства на mc, получим дифференциальное уравнение остывающего тела в виде

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{k}{mc}(T - T_{\text{ср}}).$$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dT}{T - T_{\text{ср}}} = -\frac{k}{mc}\,dt.$$

Интегрируя уравнение, после достаточно простых преобразований запишем решение:

$$T = T_{\text{ср}} + C_1 e^{-\frac{k}{mc}t},$$

где C_1 — постоянная интегрирования.

Пусть в начальный момент времени $t = 0$ температура тела $T(0) = T_0$. Тогда, используя начальные условия, находим $C_1 = T_0 - T_{\text{ср}}$ и закон изменения температуры остывающего тела имеет вид

$$T(t) = T_{\text{ср}} + (T_0 - T_{\text{ср}})e^{-\frac{k}{mc}t}.$$

Следует заметить, что дифференциальное уравнение температуры нагревающегося тела ($T_{\text{ср}} > T$) будет иметь тот же вид, а следовательно, и аналогичное решение:

$$T(t) = T_{\text{ср}} + (T_0 - T_{\text{ср}})e^{-k_1 t},$$

где $k_1 = k/(mc)$ определяют экспериментально.

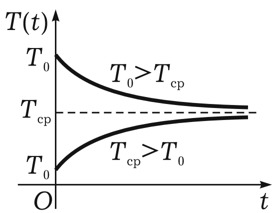


Рис. 4.4

Анализ полученных зависимостей показывает, что в обоих случаях (остывания и нагревания тела) с течением времени при $t \to \infty$ температура тела стремится к температуре окружающей среды (рис. 4.4).

Пример 4.6. В электронагревательную печь температурой $T_{\text{ср}} = 1000^\circ$ поместили заготовку температурой $T_0 = 200^\circ$. Через два часа температура заготовки повысилась до $T_1 = 500^\circ$. Найти температуру заготовки через 5 ч, если известно, что скорость изменения температуры заготовки пропорциональна разности температуры среды и температуры заготовки.

► Пусть $T(t)$ — температура заготовки, тогда dT/dt — скорость изменения температуры заготовки. Запишем дифференциальное уравнение нагревающегося тела:

$$\frac{dT}{dt} = k(T_{\text{ср}} - T) \quad \text{или} \quad \frac{dT}{dt} = k(1000 - T).$$

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dT}{1000 - T} = k\,dt.$$

Проинтегрировав обе части равенства, запишем общее решение:

$$\int \frac{dT}{1000-T} = k\int dt + C_1, \quad -\ln(1000-T) = kt + C_1,$$
$$\ln(1000-T) = -kt - C_1, \quad 1000 - T = Ce^{-kt},$$
$$T = 1000 - Ce^{-kt}.$$

Из условия известно, что $T(0) = 200$, $T(2) = 500$. Подставим эти данные в общее решение дифференциального уравнения:

$$T(0) = 1000 - Ce^0 = 1000 - C = 200,$$

отсюда $C = 800$ и $T = 1000 - 800e^{-kt}$;

$$T(2) = 1000 - 800e^{-2k} = 500,$$

отсюда $800e^{-2k} = 500$, $e^{-2k} = 5/8$, $e^{-k} = (5/8)^{1/2}$ и

$$T(t) = 1000 - 800 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{t/2}.$$

Вычислим температуру заготовки через 5 ч:

$$T(5) = 1000 - 800 \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^{5/2} \approx 752{,}95°.$$

◄

Пример 4.7. Тело, имеющее в начальный момент температуру $T(0) = T_0$, поместили в среду, температура которой поддерживается неизменной и равна T_1. Как будет изменяться с течением времени температура тела?

► Обозначим через $T(t)$ температуру тела в момент времени t. Экспериментально установлено, что при определенных упрощениях скорость изменения температуры тела пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Это означает, что

$$\frac{dT(t)}{dt} = -\gamma(T(t) - T_1),$$

где $\gamma > 0$ — коэффициент пропорциональности. Знак минус в правой части уравнения соответствует экспериментальным данным: если $T(t) - T_1 > 0$, то температура тела убывает и поэтому скорость ее изменения отрицательна, если же $T(t) - T_1 < 0$, то температура тела возрастает и, следовательно, скорость ее изменения отрицательна.

Итак, процесс нагревания (или охлаждения) тела в среде с неизменной температурой моделируется вышеприведенным уравнением. Однако из решений этого уравнения очевидно, что $T(t) = T_1$ при $t \to \infty$. Поэтому все решения этого уравнения выражаются формулой

$$T(t) = T_1 + Ce^{-\gamma t}.$$

Учитывая условие $T(0) = T_0$, находим искомую зависимость температуры тела от времени:

$$T(t) = T_1 + (T_0 - T_1)e^{-\gamma t}.$$

Функция возрастает, если $T_0 - T_1 < 0$ (тело нагревается), и убывает, если $T_0 - T_1 > 0$ (тело охлаждается). В обоих случаях с возрастанием t ее значение стремится к T_1. ◄

Пример 4.8. Температура тела в течение 20 мин снижается от 100 до 60 °C. Температура воздуха равна 20 °C. Определить время, за которое температура тела понизится до 25 °C, если скорость охлаждения тела пропорциональна разности температур тела и воздуха.

► Дифференциальное уравнение, описывающее процесс охлаждения тела, имеет вид

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_{\text{в}}),$$

где $T_{\text{в}}$ — температура воздуха. По условию $T_{\text{в}} = 20$, подставим это значение в уравнение:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - 20).$$

Разделяем переменные и интегрируем уравнение:

$$\frac{dT}{T-20} = -k\,dt, \quad \int \frac{dT}{T-20} = -k\int dt + C_1,$$

$$\ln(T - 20) = -kt + C_1, \quad T = 20 + Ce^{-kt}.$$

Неизвестные коэффициенты C и k определим из начальных условий: $T(0) = 100$, $T(20) = 60$. Тогда

$$T(0) = 20 + Ce^0 = 100 \quad \Rightarrow \quad C = 80 \text{ и } T = 20 + 80e^{-kt},$$

$$T(20) = 20 + 80e^{-20t} = 60 \quad \Rightarrow \quad e^{-20t} = 0{,}5, \quad e^{-k} = 0{,}5^{\frac{1}{20}},$$

тогда

$$T(t) = 20 + 80 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{20}}.$$

Вычислим время, за которое температура тела понизится до 25 °C, для этого решим уравнение $T(t) = 25$:

$$20 + 80 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{20}} = 25, \quad 80 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{20}} = 5, \quad 0{,}5^{\frac{t}{20}} = \frac{1}{16},$$

$$0{,}5^{\frac{t}{20}} = 0{,}5^4, \quad \frac{t}{20} = 4, \quad t = 80.$$

Таким образом, тело охладится до 25 °C через 80 мин или 1 ч 20 мин. ◀

2. Дифференциальные уравнения движения твердого тела под действием заданных сил

Пусть тело массой m движется поступательно под действием силы тяги $F_{\text{т}}$ и силы сопротивления движению $F_{\text{сопр}}$. Найти скорость тела как функцию времени t, если в начальный момент времени $t = 0$ имеем $v(0) = 0$. Здесь v — искомая скорость движения, $F_{\text{т}} = f(v)$, $F_{\text{сопр}} = g(v)$.

Составим дифференциальное уравнение движения тела. Согласно второму закону Ньютона сила, под действием которой движется материальная точка, равна произведению массы точки на ее ускорение:

$$m\frac{dv}{dt} = F,$$

где dv/dt — ускорение движения точки, F — сила, действующая в направлении движения. В нашем случае $F = F_{\text{т}} - F_{\text{сопр}}$ и уравнение движения запишется в виде

$$m\frac{dv}{dt} = F_{\text{т}} - F_{\text{сопр}}.$$

Решение этого уравнения и подстановка начальных условий полностью описывают характер движения тела.

Пусть нам требуется найти скорость v как функцию пройденного точкой пути. Обозначим путь через $S(t)$, тогда получим

$$\frac{dS}{dt} = v(t), \quad \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = v\frac{dv}{dS}$$

и уравнение движения примет вид

$$mv\frac{dv}{dS} = F_{\text{т}} - F_{\text{сопр}}.$$

Пример 4.9. Тело движется прямолинейно с ускорением, пропорциональным произведению скорости v на время t. Найти зависимость между скоростью и временем, если в начальный момент времени скорость тела была 50 км/ч, а через 20 мин после начала движения — 60 км/ч.

► Исходя из условия запишем

$$a = kvt \quad \text{или} \quad \frac{dv}{dt} = kvt$$

(уравнение с разделяющимися переменными) и начальные условия $v(0) = 50$, $v(1/3) = 60$ (20 мин составляют $1/3$ часть часа). После разделения переменных в дифференциальном уравнении и интегрирования получим

$$\frac{dv}{v} = kt\,dt, \quad \int \frac{dv}{v} = k \int t\,dt + C_1,$$

$$\ln v = \frac{kt^2}{2} + C_1, \quad v(t) = Ce^{\frac{kt^2}{2}}.$$

Подставим в общее решение начальные условия:

$$v(0) = Ce^0 = C = 50 \quad \Rightarrow \quad C = 50 \text{ и } v(t) = 50e^{\frac{kt^2}{2}};$$

$$v\left(\frac{1}{3}\right) = 50e^{\frac{k}{18}} = 60 \quad \Rightarrow \quad e^{\frac{k}{2}} = 1{,}2^9.$$

Тогда зависимость между скоростью и временем движения тела принимает вид

$$v(t) = 50 \cdot 1{,}2^{9t^2}.$$ ◄

Пример 4.10. Тело массы m падает вертикально вниз с некоторой высоты. Сила вязкого трения, действующая на тело, пропорциональна величине скорости: $F_{\text{тр}} = -\alpha v$, где $\alpha > 0$ — коэффициент трения. Определить зависимость скорости от времени.

► Пусть $v(t)$ — скорость тела в момент времени t. На тело действуют две противоположно направленные силы: сила тяжести $F_{\text{тяж}} = mg$ и сила вязкого трения $F_{\text{тр}} = -\alpha v$. В данном случае дифференциальное уравнение можно составить, используя второй закон Ньютона:

$$ma = F_{\text{тяж}} + F_{\text{тр}} \quad \text{или} \quad m\frac{dv}{dt} = mg - \alpha v.$$

Разделив обе части уравнения на m, получим дифференциальное уравнение:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\alpha}{m}v + g.$$

Находим его решение:

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha} + Ce^{-\frac{\alpha}{m}t}.$$

Если тело начинает движение с нулевой скоростью, т.е. $v(0) = 0$, то $C = -mg/\alpha$ и

$$v(t) = \frac{mg}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right).$$

При свободном падении без трения ($dv/dt = g$) величина скорости возрастает линейно: $v(t) = gt$. При наличии же вязкого трения скорость, возрастая, тем не менее стремится к постоянной величине $v = mg/\alpha$. ◀

Пример 4.11. Катер движется в стоячей воде со скоростью $v_0 = 25$ км/ч. На полном ходу ее двигатель выключается и через $t_1 = 30$ с после этого скорость катера становится равной $v_1 = 10$ км/ч. Считая, что сопротивление воды пропорционально скорости катера (вязкое трение), определить скорость катера через 1 мин после остановки двигателя.

▶ Основываясь на законе Ньютона, запишем дифференциальное уравнение движения катера:

$$m\frac{dv}{dt} = -kv.$$

Найдем его общее решение:

$$\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}\,dt, \quad \int\frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}\int dt + C_1, \quad v(t) = C_1e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Подставляя в общее решение начальное условие $v(0) = v_0$, найдем $C_1 = v_0$, тогда

$$v(t) = v_0e^{-\frac{k}{m}t}.$$

Полученное решение содержит один неизвестный параметр k/m, который можно определить из заданного условия $v(t_1) = v_1$:

$$v_1 = v_0e^{-\frac{k}{m}t_1}, \quad k/m = \frac{1}{t_1}\ln(v_0/v_1).$$

Тогда для зависимости скорости катера от времени окончательно получим
$$v = v_0 \left(\frac{v_0}{v_1}\right)^{-t/t_1}.$$
Подставляя сюда численные значения, найдем искомую скорость катера через 1 мин после остановки двигателя: $v_2 \approx 15{,}8$ км/ч. ◀

Пример 4.12. Локомотив движется под действием силы тяги, зависящей от скорости самого локомотива $v(t)$ по следующему закону: $F(t) = b - kv(t)$, где b и k — постоянные величины. Определить зависимость силы тяги локомотива от времени t, если его начальная скорость равна v_0.

► Согласно второму закона Ньютона имеем уравнение
$$m\frac{dv}{dt} = b - kv.$$
Его общее решение может быть получено методом разделения переменных:
$$v(t) = \frac{b}{k} + Ce^{-\frac{k}{m}t}.$$
Начальная скорость локомотива $v(0) = v_0$, поэтому
$$v(0) = v_0 = \frac{b}{k} + C, \quad C = v_0 - \frac{b}{k}.$$
Таким образом,
$$v(t) = \frac{b}{k} + \left(v_0 - \frac{b}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t}.$$
Тогда зависимость силы тяги локомотива от времени определяется равенством
$$F(t) = b - kv(t) = (b - kv_0)e^{-\frac{k}{m}t}.$$ ◀

Пример 4.13. Пуля массы m выстреливается вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Определить высоту H подъема пули, если величина силы сопротивления воздуха определяется формулой $F_{\text{сопр}} = \beta v^2$, где $\beta > 0$ — аэродинамический коэффициент.

► Поместим начало координат на земле и направим ось z вверх. Обозначим: $z(t)$ — координата пули в текущий момент времени t, $v(t)$ — скорость пули; тогда dv/dt — ее ускорение. В случае движения пули вверх согласно второму закону Ньютона получим следующее дифференциальное уравнение для скорости как функции времени:

$$m\frac{dv}{dt} = -(mg + \beta v^2),$$

где знак минус указывает, что силы тяжести и сопротивления воздуха направлены против оси z. Учитывая, что

$$\frac{dz}{dt} = v(t) \quad \text{и} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dt} = v\frac{dv}{dz},$$

перепишем уравнение в виде

$$mv\frac{dv}{dz} = -(mg + \beta v^2).$$

Так как при $z = 0$ скорость пули равна v_0, то начальное условие запишем в виде $v(0) = v_0$. Найдем частное решение дифференциального уравнения движения пули, удовлетворяющее данному условию. Разделяя переменные, найдем

$$\frac{mv\,dv}{mg + \beta v^2} = -dz.$$

Проинтегрируем обе части данного соотношения:

$$\int \frac{mv\,dv}{mg + \beta v^2} = -z + C_1, \qquad \frac{m}{2\beta}\ln(mg + \beta v^2) = -z + C_1.$$

Произвольную постоянную C_1 найдем из заданного условия $v(0) = v_0$:

$$C_1 = \frac{m}{2\beta}\ln(mg + \beta v_0^2).$$

Таким образом, при движении скорость пули и его координата z связаны соотношением

$$z = \frac{m}{2\beta}\ln\left(\frac{mg + \beta v_0^2}{mg + \beta v^2}\right).$$

Поскольку $v = 0$ в наивысшей точке траектории при $z = H$, то отсюда для искомой наибольшей высоты подъема пули получим

$$H = \frac{m}{2\beta}\ln\left(1 + \frac{\beta v_0^2}{mg}\right).$$

◀

Пример 4.14. Машина массой m приводится в движение силой F ($F = \text{const}$), которая замедляется силами трения в опорах. Сила трения пропорциональна скорости, но так как происходит нагревание смазки в опорах, то коэффициент пропорциональности меняется со временем, и его принимают равным $\alpha/(t+\beta)$ (α и β определяют экспериментально). Найти уравнение движения машины, предполагая, что в момент времени $t=0$ скорость $v(0)=0$.

► Обозначим скорость машины $v(t)$, dv/dt — ускорение машины, тогда уравнение движения машины имеет вид

$$m\frac{dv}{dt}=F-\frac{\alpha}{t+\beta}v \quad \text{или} \quad v'+\frac{\alpha v}{m(t+\beta)}=\frac{F}{m}.$$

Полученное уравнение является линейным дифференциальным уравнением, для его решения сделаем замену $v=$ $=yz$ ($y=y(t)$, $z=z(t)$). Имеем

$$y'z+yz'+\frac{\alpha yz}{m(t+\beta)}=\frac{F}{m}, \quad y'z+y\left(z'+\frac{\alpha z}{m(t+\beta)}\right)=\frac{F}{m},$$

$$\begin{cases} z'+\dfrac{\alpha z}{m(t+\beta)}=0, & (1)\\ y'z=\dfrac{F}{m}; & (2)\end{cases}$$

(1): $$\frac{dz}{dt}=-\frac{\alpha z}{m(t+\beta)}, \quad \frac{dz}{z}=-\frac{\alpha}{m(t+\beta)}dt,$$

$$\ln z=-\frac{\alpha}{m}\ln(t+\beta), \quad z=(t+\beta)^{-\frac{\alpha}{m}};$$

(2): $$y'(t+\beta)^{-\frac{\alpha}{m}}=\frac{F}{m}, \quad y'=\frac{F}{m}(t+\beta)^{\frac{\alpha}{m}},$$

$$y=\frac{F}{m}\int(t+\beta)^{\frac{\alpha}{m}}dt+C,$$

$$y=\frac{F}{m}\frac{(t+\beta)^{\frac{\alpha}{m}+1}}{\dfrac{\alpha}{m}+1}+C=\frac{F}{\alpha+m}(t+\beta)^{\frac{\alpha}{m}+1}+C;$$

$$v(t)=(t+\beta)^{-\frac{\alpha}{m}}\left(\frac{F}{\alpha+m}(t+\beta)^{\frac{\alpha}{m}+1}+C\right)=$$

$$=\frac{F(t+\beta)}{\alpha+m}+C(t+\beta)^{-\frac{\alpha}{m}}.$$

Подставляя в общее решение уравнения начальное условие $v(0) = 0$, найдем C:

$$v(0) = \frac{F\beta}{\alpha + m} + C\beta^{-\frac{\alpha}{m}} = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\frac{F\beta^{\frac{\alpha}{m}+1}}{\alpha + m}$$

и запишем закон движения машины:

$$v(t) = \frac{F(t+\beta)}{\alpha + m} - \frac{F\beta^{\frac{\alpha}{m}+1}(t+\beta)^{-\frac{\alpha}{m}}}{\alpha + m} =$$

$$= \frac{F}{\alpha + m}\left(t + \beta - \frac{\beta^{\frac{\alpha}{m}+1}}{(t+\beta)^{\frac{\alpha}{m}}}\right).$$

◄

§ 4.3. Переходные процессы в электрических цепях

Неустановившиеся процессы в электрических цепях со сосредоточенными параметрами описываются линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Рассмотрим некоторые частные случаи расчета простых электрических цепей.

1. Цепь с индуктивностью и активным сопротивлением

Пусть активное сопротивление R и индуктивность L последовательно подключены к источнику тока с электродвижущей силой $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$, где $\mathcal{E}_0$ и ω — постоянные. Требуется определить силу тока в цепи в момент t, зная, что в момент $t = 0$ она равна нулю: $I(0) = 0$.

Известно, что падение напряжения на активном сопротивлении равно IR, а на индуктивности $L\,dI/dt$. Тогда на основе 2-го закона Кирхгофа запишем дифференциальное уравнение цепи в виде

$$L\frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}_0 \sin \omega t. \qquad (*)$$

Найдем сначала общее решение соответствующего однородного уравнения

$$L\frac{dI_0}{dt} + I_0 R = 0.$$

Применяя метод разделения переменных, нетрудно получить его общее решение

$$I_0 = Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

В некоторых случаях линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами с правой частью специального вида можно подобрать решение. Следуя известным правилам, частное решение данного неоднородного уравнения будем искать в виде функции:

$$I_1 = A\sin\omega t + B\cos\omega t.$$

Подставляя ее в исходное уравнение, получим:

$$(L\omega A + RB)\cos\omega t + (RA - L\omega B)\sin\omega t = \mathcal{E}_0\sin\omega t.$$

Сопоставляя правые и левые части данного соотношения относительно неопределенных A и B, получим систему:

$$\begin{cases} L\omega A + RB = 0, \\ RA - L\omega B = \mathcal{E}_0. \end{cases}$$

Общее решение дифференциального уравнения цепи получим как сумму общего решения соответствущего однородного уравнения и найденного частного решения неоднородного уравнения, т.е. $I = I_0 + I_1$:

$$I = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\mathcal{E}_0}{R^2 + \omega^2 L^2}(R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t).$$

Используя начальное условие (при $t = 0$ $I(0) = 0$), найдем постоянную C:

$$C = \frac{\mathcal{E}_0 L\omega}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Тогда

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R^2 + \omega^2 L^2}\left(R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t + L\omega e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Представим искомое решение в более удобном для вычисления виде. Полагая $L\omega/R = \operatorname{tg}\varphi$ (угол φ называют смещением фазы), получим:

$$R\sin\omega t - L\omega\cos\omega t = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}\,\sin(\omega t - \varphi),$$

что дает

$$I = \frac{\varepsilon_0 L\omega e^{-\frac{R}{L}t}}{R^2 + \omega^2 L^2} + \frac{\mathcal{E}_0\sin(\omega t - \varphi)}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

Как это видно из полученного решения, при временах $t \gg L/R$ первое слагаемое стремится к нулю и в цепи возникает установившийся режим переменного тока

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}\sin(\omega t - \varphi),$$

где $Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}$.

Пример 4.15. Электродвигатель с активным сопротивлением $R = 150$ Ом и индуктивностью $L = 30$ Гн подключен к источнику постоянного напряжения $\mathcal{E}_0 = 300$ В. Найти силу тока через 1 с после подключения.

▶ Воспользуемся дифференциальным уравнением для определения силы тока в цепи при $t > 0$:

$$IR + L\frac{dI}{dt} = \mathcal{E}_0.$$

Решение соответствующего однородного уравнения уже известно из предыдущего материала. Некоторое частное решение неоднородного уравнения следует искать в виде константы: $I_1 = A$. Подставляя в исходное уравнение, получим $A = \mathcal{E}_0/R$. Тогда искомое общее решение неоднородного уравнения получим в виде $I = I_0 + I_1$:

$$I = Ce^{-\frac{R}{L}t} + \frac{\mathcal{E}_0}{R}.$$

Ток в цепи в начальный момент равен нулю: $I(0) = 0$. Из этого условия следует $C = -\mathcal{E}_0/R$. Окончательно зависимость тока от времени при $t > 0$ выразится формулой

$$I = \frac{\mathcal{E}_0}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

Подставляя в нее конкретные значения из условия задачи, определим силу тока через 1 с после замыкания цепи:

$$I(1) = 2(1 - e^{-5}) \approx 1{,}98 \text{ А}.$$ ◀

Пример 4.16. Сила тока в цепи с сопротивлением R, индуктивностью L и электродвижущей силой $\mathcal{E}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L\frac{dI}{dt} + IR = \mathcal{E}.$$

Найти зависимость $I(t)$, считая R и L постоянными, если электродвижущая сила возрастает пропорционально времени ($\mathcal{E} = kt$) и сила тока равна нулю в начальный момент времени.

► Решение уравнения ищем в виде $I = v(t)u(t)$ (подстановка Бернулли). Тогда имеем

$$L(u'v + uv') + Ruv = kt,$$

$$Lv(ku' + Ru) + (Luv' - kt) = 0.$$

Найдем u из условия $ku' + Ru = 0$. Это дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Найдем его частное решение:

$$\frac{du}{u} = -\frac{R}{L}dt, \quad \ln|u| = -\frac{R}{L}t, \quad u = e^{-Rt/L}.$$ ◄

2. Цепь с емкостью и активным сопротивлением

Пример 4.17. К источнику тока, напряжение которого меняется по закону $\mathcal{E}_0 \sin \omega t$, последовательно подключены активное сопротивление R и конденсатор емкостью C. Найти силу тока в цепи при $t > 0$.

► Падение напряжения на активном сопротивлении равно IR, а на емкости Q/C, где Q — заряд на обкладках конденсатора. Следовательно,

$$RI + \frac{Q}{C} = \mathcal{E}_0 \sin \omega t.$$

Дифференцируя по t и учитывая, что $dQ/dt = I$, получим уравнение:

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = \mathcal{E}_0 \omega \cos \omega t.$$

Снова получили линейное дифференциальное уравнение первого порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0.$$

Общее решение данного уравнения легко может быть получено, в частности, методом разделения переменных:

$$I_0 = C_1 e^{-\frac{t}{RC}}.$$

Здесь произвольную постоянную C_1 обозначили индексом 1, чтобы отличить от емкости конденсатора C. Следуя общему правилу, найдем некоторое частное решение неоднородного уравнения. Исходя из вида правой части уравнения, решение ищем в виде

$$I_1 = A\cos\omega t + B\sin\omega t.$$

Подставляя данную функцию в неоднородное дифференциальное уравнение и приравнивая коэффициенты при подобных членах, получим систему двух уравнений, из которой можно найти неопределенные коэффициенты A и B. Результат для тока I_1 будет следующим:

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{R^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}\left(\frac{1}{\omega C}\cos\omega t + R\sin\omega t\right).$$

Полученное решение удобнее переписать в виде

$$I_1 = I_A \sin(\omega t + \varphi),$$

где

$$I_A = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \dfrac{1}{\omega^2 C^2}}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{R\omega C}.$$

Следовательно, общее решение дифференциального уравнения цепи $I = I_0 + I_1$ запишется в виде

$$I = C_1 e^{-\frac{t}{RC}} + I_A \sin(\omega t + \varphi).$$

Независимо от начального условия для тока первый член в этом выражении стремится к нулю при $t \to \infty$. Это означает, что при больших временах ток в цепи выходит на установившийся режим, тогда он будет периодическим с амплитудой I_A. ◀

3. Уравнение затухающих колебаний

Рассмотрим случай движения точки под действием силы, притягивающей точку к неподвижному центру, при наличии сопротивления среды, пропорционального скорости точки.

Пусть $x(t)$ — перемещение точки, тогда dx/dt — скорость. Обозначим коэффициент пропорциональности $2hm$ $(h > 0)$. Тогда, используя второй закон Ньютона, уравнение движения точки можно записать в виде

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2mx - 2hm\frac{dx}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2h\frac{dx}{dt} + k^2x = 0.$$

Это линейное однородное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его характеристическое уравнение $z^2 + 2hz + k^2 = 0$ дает корни

$$z_1 = -h + \sqrt{h^2 - k^2}\,, \quad z_2 = -h - \sqrt{h^2 - k^2}\,.$$

Прежде всего рассмотрим наиболее важный случай, когда корни характеристического уравнения комплексны, т.е. когда $h^2 - k^2 < 0$. Полагая, что $h^2 - k^2 = \omega^2$, будем иметь $z_1 = -h + \omega i$, $z_2 = -h - \omega i$ и тогда общее решение

$$x = e^{-ht}(C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t).$$

Учитывая, что в момент времени $t = 0$ начальное положение точки $x = x_0$, а начальная скорость $dx/dt = x_0'$, определим произвольные постоянные. В силу первого условия

$$x_0 = (C_1\cos(\omega\cdot 0) + C_2\sin(\omega\cdot 0))e^{-h\cdot 0} \quad \Rightarrow \quad C_1 = x_0.$$

Образуя производную

$$\frac{dx}{dt} = e^{-ht}(-C_1 h\cos\omega t - C_2 h\sin\omega t - \\ - C_1\omega\sin\omega t + C_2\omega\cos\omega t)$$

и подчиняя ее второму условию, получим:

$$C_2 = \frac{x_0' + x_0 h}{\omega}.$$

Таким образом,

$$x = e^{-ht}\left(x_0\cos\omega t + \frac{x_0' + x_0 t}{\omega}\sin\omega t\right).$$

Перепишем правую часть равенства в виде

$$x = \rho e^{-ht}\sin(\omega t + \varphi_0),$$

где

$$\rho = \frac{1}{\omega}\sqrt{x_0^2\omega^2 + (x_0' + x_0 h)^2}\,, \quad \varphi_0 = \operatorname{arctg}\frac{\omega x_0}{x_0' + x_0 h}.$$

Из равенства следует, что движение имеет колебательный характер. Период колебаний равен

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 - h^2}}.$$

Сравнивая его с периодом $T_0 = 2\pi/k$ свободных колебаний, видим, что $T > T_0$.

Пусть $x(0) = x_0$ и $x(0) = 0$. Тогда

$$\rho = x_0\sqrt{1 + \left(\frac{h}{\omega}\right)^2}\ e^{-ht}\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Придавая времени t значения

$$t_1 = 0, \quad t_2 = \frac{\pi}{\omega}, \quad t_3 = \frac{2\pi}{\omega}, \quad \ldots,$$

и учитывая полученное выше равенство, найдем:

$$x_1 = x_0, \quad x_2 = -x_0 e^{-\frac{h\pi}{\omega}},$$

$$x_3 = x_0 e^{-\frac{2h\pi}{\omega}}, \quad x_4 = -x_0 e^{-\frac{3h\pi}{\omega}}, \quad \ldots.$$

Отсюда видно, что абсолютные значения абсцисс, т.е. последовательные отклонения колеблющейся точки от неподвижного центра, образуют бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем, равным $e^{-h\pi/\omega}$. Это и есть случай так называемых *затухающих колебаний*. Закон изменения $x(t)$ в зависимости от времени представлен графически на рис. 4.5.

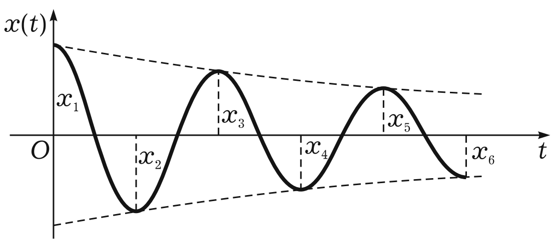


Рис. 4.5

Рассмотрим случай, когда $h^2 - k^2 > 0$. Корни z_1 и z_2 будут вещественными и отрицательными:

$$x = C_1 e^{z_1 t} + C_2 e^{z_2 t}.$$

Произвольные постоянные определим на основании начальных условий ($x = x_0$, $dx/dt = x_0'$ при $t = 0$). Используя начальные условия, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно C_1 и C_2:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = x_0, \\ z_1 C_1 + z_2 C_2 = x_0'. \end{cases}$$

Решая систему, получим:

$$C_1 = \frac{x_0' - x_0 z_2}{z_1 - z_2}, \quad C_2 = \frac{x_0 z_1 - x_0'}{z_1 - z_2}.$$

Окончательно искомое решение можно записать в виде

$$x(t) = \frac{x_0' - x_0 z_2}{z_1 - z_2} e^{z_1 t} + \frac{x_0 z_1 - x_0'}{z_1 - z_2} e^{z_2 t}.$$

Исследуем полученное решение, для этого x и dx/dt перепишем в виде

$$x(t) = \frac{x_0' - x_0 z_2}{z_1 - z_2} e^{z_1 t} \left[1 + \frac{x_0 z_1 - x_0'}{x_0' - x_0 z_2} e^{(z_2 - z_1)t} \right],$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x_0' - x_0 z_2}{z_1 - z_2} z_1 e^{z_1 t} \left[1 + \frac{x_0 z_1 - x_0'}{x_0' - x_0 z_2} \frac{z_2}{z_1} e^{(z_2 - z_1)t} \right].$$

Легко видеть, что если

$$\frac{x_0 z_1 - x_0'}{x_0' - x_0 z_2} > 0,$$

то ни $x(t)$, ни скорость dx/dt ни разу не обращаются в нуль. Это означает, что точка асимптотически приближается к притягивающему центру, находясь все время с одной стороны от него. Если

$$\frac{x_0 z_1 - x_0'}{x_0' - x_0 z_2} < 0,$$

то как $x(t)$, так и dx/dt могут обратиться в нуль по одному разу.

Рассмотрим последний случай, когда $h^2 - k^2 = 0$. Характеристическое уравнение имеет двукратный отрицательный корень $z_1 = z_2 = -h$. Общее решение будет иметь вид

$$x = (C_1 + C_2 t) e^{-ht}.$$

Произвольные постоянные определим из тех же начальных условий:

$$C_1 = x_0, \quad C_2 = x_0' + x_0 h.$$

В этом случае искомое решение запишем так:

$$x = [x_0 + (x_0' + x_0 h)t] e^{-ht}.$$

Анализируя полученное выражение, легко заметить, что по истечении достаточно продолжительного промежутка времени t точка будет сколь угодно близка от притягивающего центра.

Колебания магнитной стрелки гальванометра, колебательный разряд конденсатора, колебания некоторых регуляторов паровых машин могут служить примерами затухающих колебаний. Движение, соответствующее случаям $h^2 - k^2 > 0$ и $h^2 - k^2 = 0$, имеет место при большом сопротивлении среды (например, движение магнитной стрелки при сильном успокоителе).

4. Дифференциальные уравнения непрерывного роста (убывания)

Пусть известно, что скорость прироста (или убывания) некоторой величины P пропорциональна наличному количеству. Пусть в начальный момент $t = 0$ величина была равна P_0. Требуется найти зависимость между величиной P и временем t.

Так как скорость прироста выражается производной dP/dt, то согласно условию задачи запишем

$$\frac{dP}{dt} = \pm kP,$$

где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности; знак «+» в случае прироста, знак «–» в случае убывания. Полученное выражение является *дифференциальным уравнением непрерывного роста или убывания*.

Разделив переменные, найдем

$$\frac{dP}{P} = \pm k\,dt,$$

откуда, интегрируя, получим общее решение

$$P = Ce^{\pm kt},$$

где C — постоянная интегрирования. Подставляя начальное условие, при $t = 0$ имеем $C = P_0$ и $P = P_0e^{\pm kt}$. Окончательно, в случае непрерывного роста

$$P = P_0e^{kt},$$

а в случае убывания

$$P = P_0e^{-kt}.$$

Анализируя полученный результат, можно утверждать, что в рассмотренном случае прирост (или убывание) некоторой величины P происходит по экспоненциальному закону.

Пример 4.18. Скорость обесценивания оборудования вследствие его износа в каждый момент пропорциональна его фактической стоимости. Начальная стоимость — 20 млн руб. Чему будет равна стоимость оборудования через 9 лет, если через 3 года она стала 15 млн руб?

► Пусть $P(t)$ — стоимость оборудования. Тогда dP/dt — скорость его обесценивания. По условию задачи

$$\frac{dP}{dt} = -kP.$$

Знак минус указывает на уменьшение стоимости оборудования. Решая данное дифференциальное уравнение методом разделения переменных, получим:

$$\frac{dP}{P} = -k\,dt, \quad \int \frac{dP}{P} = -k \int dt,$$

$$\ln P = -kt + C_1, \quad P(t) = Ce^{-kt}.$$

Из начального условия $P(0) = P_0$ найдем константу интегрирования: $C = P_0$. Для определения константы k воспользуемся тем, что стоимость оборудования при $t = t_1$ известна и равна $P(t_1) = P_1$:

$$P(t_1) = P_0 e^{-kt_1}, \quad k = \frac{1}{t_1} \ln \frac{P_0}{P_1}.$$

В результате получаем зависимость стоимости оборудования от времени:

$$P(t) = P_0 e^{-\frac{t}{t_1} \ln \frac{P_1}{P_0}} = P_0 \left(\frac{P_1}{P_0} \right)^{t/t_1}.$$

Применим конкретные численные значения из условия задачи: $P_0 = 20$, $P_1 = 15$, $t_1 = 3$, $t = 9$. Стоимость оборудования через 9 лет будет равна

$$P(9) = 20 \left(\frac{3}{4} \right)^3 \approx 8{,}44 \text{ млн руб.}$$ ◄

Пример 4.19. Период полураспада изотопа плутония Pu-239 равен $T = 24400$ лет. Какая часть его массы распадется через 10 000 лет?

► Закон радиоактивного распада ядер вещества можно сформулировать следующим образом. Число распадов dN, происходящих за малый промежуток времени dt, пропорционально числу N радиоактивных ядер в образце:

$$\frac{dN}{dt} = -kN.$$

Это статистический закон и выполняется он в среднем для большого количества радиоактивных ядер. Решение данного дифференциального уравнения имеет вид

$$N(t) = N_0 e^{-kt},$$

где N_0 — число радиоактивных ядер при $t = 0$. Период полураспада T изотопа — это время, за которое распадется половина ядер:

$$\frac{N_0}{2} = N_0 e^{-kT}.$$

Из этого равенства выразим k через период полураспада: $k = \ln 2/T$. Тогда

$$N(t) = N_0 e^{-kt} = N_0 e^{-\frac{t}{T}\ln 2} = N_0 \left(e^{\ln 2}\right)^{-t/T} = N_0 2^{-t/T}.$$

Процент распавшихся ядер через время t будет равен

$$\eta = \frac{N_0 - N(t)}{N_0} \cdot 100\% = \left(1 - 2^{-t/T}\right) \cdot 100\%.$$

Подставляя конкретные данные из условия задачи, получим $\eta \approx 24{,}7\%$. ◄

§ 4.4. Системы дифференциальных уравнений в физических задачах

Пример 4.20. Некоторое вещество A разлагается на два вещества P и Q. Скорость образования каждого из этих веществ пропорциональна количеству неразложенного вещества. Пусть x и y — соответственно количество веществ P и Q, образовавшихся к моменту времени t. Определить законы их изменения, зная, что в начальный момент $x = 0$, $y = 0$, а через один час $x = 3C/8$, $y = C/8$, где C — первоначальное количество вещества A.

► В момент времени t скорости образования веществ P и Q описываются уравнениями

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = k_1(C - x - y), \\ \dfrac{dy}{dt} = k_2(C - x - y), \end{cases}$$

так как к этому моменту количество неразложившегося еще вещества равно $C-x-y$. Эти уравнения образуют систему двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Дифференцируя первое из них, получим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right).$$

Подставляя значение dy/dt из второго уравнения системы, будем иметь:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k_1\left(\frac{dx}{dt} + k_2(C - x - y)\right).$$

Заменяя y его значением из первого уравнения системы, находим:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (k_1 + k_2)\frac{dx}{dt} = 0.$$

Полученное уравнение является однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение имеет вид

$$x = C_1 + C_2e^{-(k_1+k_2)t}.$$

Для нахождения функции y дифференцируем найденное выражение для x и подставляем x и dx/dt в первое уравнение системы. В результате находим

$$y = C + \frac{k_2}{k_1}C_2e^{-(k_1+k_2)t} - C_1.$$

Таким образом, общее решение данной системы имеет вид

$$\begin{cases} x = C_1 + C_2e^{-(k_1+k_2)t}, \\ y = C + \dfrac{k_2}{k_1}C_2e^{-(k_1+k_2)t} - C_1. \end{cases}$$

Используя начальные условия $x = 0$, $y = 0$ при $t = 0$, найдем постоянные интегрирования:

$$C_1 = \frac{k_1 C}{k_1 + k_2}, \quad C_2 = \frac{-k_1 C}{k_1 + k_2}.$$

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в общее решение системы, получим закон изменения величин x и y в виде

$$\begin{cases} x = \dfrac{k_1 C}{k_1 + k_2}(1 - e^{-(k_1+k_2)t}), \\ y = \dfrac{k_2 C}{k_1 + k_2}(1 - e^{-(k_1+k_2)t}). \end{cases}$$

Используя дополнительные условия задачи $x = 3C/8$, $y = C/8$ при $t = 1$, найдем коэффициенты k_1 и k_2:

$$k_1 = \frac{3}{4}\ln 2, \quad k_2 = \frac{1}{4}\ln 2.$$

При этом

$$e^{k_1+k_2} = 2, \quad \frac{k_1}{k_1 + k_2} = \frac{3}{4}, \quad \frac{k_2}{k_1 + k_2} = \frac{1}{4}.$$

Подставляя эти значения в решение системы, окончательно находим

$$\begin{cases} x = \dfrac{3}{4}C(1 - 2^{-t}), \\ y = \dfrac{1}{4}C(1 - 2^{-t}). \end{cases}$$ ◀

Пример 4.21. Камень брошен под углом α к горизонту и движется в среде, сопротивление которой пропорционально скорости v (рис. 4.6). Определить траекторию движения камня.

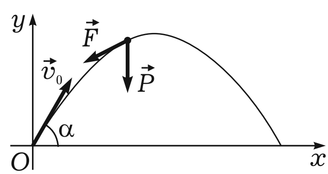


Рис. 4.6

► В любой точке $M(x, y)$ траектории движения камня на него действуют две силы: вес камня $\mathbf{P} = m\mathbf{g}$ и сопротивление среды $\mathbf{F} = -k\mathbf{v}$. Составляющие их равнодействующей по осям координат равны

$$\begin{cases} X = P\cos(P; x) + F\cos(F; x), \\ Y = P\cos(P; y) + F\cos(F; y). \end{cases}$$

Но $\cos(P;x) = 0$, $\cos(P;y) = -mg$, $\cos(F;x) = -dx/dS$ и $\cos(F;y) = -dy/dS$, следовательно,

$$\begin{cases} X = -kv\dfrac{dx}{dS}, \\ Y = -mg - kv\dfrac{dy}{dS}. \end{cases}$$

Как известно, $v = dS/dt$. Тогда система принимает окончательный вид

$$\begin{cases} X = -k\dfrac{dx}{dt}, \\ Y = -mg - k\dfrac{dy}{dt}. \end{cases}$$

Используя второй закон динамики, получим систему дифференциальных уравнений движения:

$$\begin{cases} m\dfrac{d^2x}{dt^2} = -k\dfrac{dx}{dt}, \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} = -mg - k\dfrac{dy}{dt} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{k}{m}\dfrac{dx}{dt} = 0, \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} + \dfrac{k}{m}\dfrac{dy}{dt} = -g. \end{cases}$$

Решая первое уравнение системы как линейное однородное, а второе как линейное неоднородное уравнения второго порядка, получим общее решение системы:

$$\begin{cases} x = C_1 + C_2 e^{-\frac{k}{m}t}, \\ y = C_2 + C_4 e^{-\frac{k}{m}t} - \dfrac{gm}{k}t. \end{cases}$$

Используя начальные условия

$$x = 0, \quad y = 0, \quad \frac{dx}{dt} = v_0\cos\alpha, \quad \frac{dy}{dt} = v_0\sin\alpha$$

при $t = 0$, найдем значения произвольных постоянных:

$$C_1 = \frac{mv_0}{k}\cos\alpha, \quad C_2 = -\frac{mv_0}{k}\cos\alpha,$$

$$C_3 = \frac{m}{k^2}(mg + kv_0\sin\alpha), \quad C_4 = -\frac{m}{k^2}(mg + kv_0\sin\alpha).$$

Подставляя найденные значения C_1, C_2, C_3, C_4 в общее решение системы, получим частное решение:

$$\begin{cases} x = a\left(1 - e^{-\frac{g}{c}t}\right), \\ y = b\left(1 - e^{-\frac{g}{c}t}\right) - ct, \end{cases}$$

где

$$a = \frac{mv_0}{k}\cos\alpha, \quad b = \frac{m}{k^2}(mg + kv_0 \sin\alpha), \quad c = \frac{mg}{k}.$$

Из выражения для x имеем $1 - e^{-\frac{g}{c}t} = x/a$. Подставляя вместо $1 - e^{-\frac{g}{c}t}$ его значение x/a в выражение для y, получим $y = (b/a)x - ct$, откуда

$$t = \frac{bx - ay}{ac}.$$

Полученное выражение для времени t подставляем в выражение для x:

$$x = a\left(1 - e^{-\frac{g}{ac^2}(bx-ay)}\right),$$

откуда

$$ay - bx = \frac{ac^2}{g}\ln\left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Это и есть уравнение траектории движения камня. ◄

Конечно, все многообразие природных процессов и явлений не сводится к уравнениям нескольких типов, с которыми мы познакомились. Мир дифференциальных уравнений богат почти настолько, насколько разнообразен реальный мир. Опыт показывает, что использование дифференциальных уравнений в качестве математических моделей очень плодотворно, если, конечно, при этом не забывать об ограниченной области применения любого рода моделей.

Задачи для самостоятельного решения

4.1. Найти кривые, у которых площадь треугольника, ограниченного касательной, осью абсцисс и отрезком от начала координат до точки касания, есть величина постоянная, равная a^2.

Ответ: $xy = a^2 + Cy^2$.

4.2. Найти уравнение линии, проходящей через точку $M_0(1;3)$, если угловой коэффициент касательной в произвольной точке этой кривой обратно пропорционален абсциссе точки касания с коэффициентом пропорциональности $k = 5$.

О т в е т : $y = 5\ln x + 3$.

4.3. Найти уравнение линии, проходящей через точку $M_0(0; 3)$, если угловой коэффициент касательной в произвольной точке этой кривой пропорционален произведению абсциссы и ординаты точки касания с коэффициентом пропорциональности $k = -2$.

О т в е т : $y = 3e^{-x^2}$.

4.4. Найти кривую, для которой отрезок, отсекаемый нормалью на оси ординат в какой-либо точке кривой, равен расстоянию от начала координат до этой точки.

О т в е т : $x^2 = C(2y + C)$.

4.5. Записать уравнение кривой, если известно, что точка пересечения любой касательной к кривой с осью абсцисс одинаково удалена от точки касания и от начала координат.

О т в е т : $y = C(x^2 + y^2)$.

4.6. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M_0(1; 0)$, если площадь трапеции, образованной касательной, осями координат и ординатой точки касания, постоянна и равна $3/2$.

О т в е т : $y = 1/x - x^2$.

4.7. Кривая $y = \varphi(x)$ проходит через точку $(1; 2)$. Каждая касательная к этой кривой пересекает прямую $y =$ $= 1$ в точке с абсциссой, равной удвоенной абсциссе точки касания. Найти кривую $y = \varphi(x)$.

О т в е т : $y = 1 + 1/x$.

4.8. Зеркало отражает все лучи, выходящие из заданной точки параллельно данному направлению. Определить форму зеркала.

О т в е т : $y^2 = 2Cx + C^2$.

4.9. Скорость размножения некоторых бактерий пропорциональна количеству бактерий, имеющихся в наличии в рассматриваемый момент времени t. Количество бактерий утроилось в течение 5 ч. Найти зависимость количества бактерий от времени.

Ответ: $x(t) = x_0 e^{0,2t \ln 3} \approx x_0 e^{0,22t}$.

4.10. В резервуар, содержащий 10 кг соли на 100 л смеси, каждую минуту поступает 30 л воды и вытекает 20 л смеси. Определить, какое количество соли останется в резервуаре через t мин, предполагая, что смесь мгновенно перемешивается.

Ответ: $x = 1000/(10+t)^2$.

4.11. Закон распада радия состоит в том, что скорость распада пропорциональна наличному количеству радия. Известно, что половина его первоначального запаса распадается по истечении 1600 лет. Определить количество нераспавшегося радия по истечении 100 лет, если первоначальное его количество равно 1 кг.

Ответ: 0,958.

4.12. Масса ракеты с полным запасом топлива равна M, без топлива m, скорость истечения продуктов горения из ракеты равна C, начальная скорость ракеты равна нулю. Найти скорость ракеты после сгорания топлива, пренебрегая силой тяжести и сопротивлением воздуха (формула Циолковского).

Ответ: $v(M-m) = C \ln(M/m)$.

4.13. Тело охладилось за 10 мин от 100 до 60 °C. Температура окружающего воздуха поддерживается равной 20 °C. Когда тело остынет до 25 °C?

Ответ: $x(40) = 25$.

4.14. В сосуд, содержащий 1 кг воды при температуре 20 °C, опущен алюминиевый предмет массой 0,5 кг, удельной теплоемкостью 0,2 и температурой 75 °C. Через минуту вода нагрелась на 2 °C. Когда температура воды и предмета будет отличаться одна от другой на 1 °С? Потерями тепла на нагревание сосуда пренебречь.

О т в е т : ≈ 8 мин.

4.15. Пуля входит в доску толщиной $h = 10$ см со скоростью $v_0 = 200$ м/с, а вылетает из нее со скоростью $v_1 = 80$ м/с. Считая, что сила сопротивления движению пули в доске пропорционально квадрату скорости, найти время прохождения пули через доску.

О т в е т : $-5\ln 10/\ln 0{,}8$ с.

4.16. Тело движется прямолинейно с ускорением, пропорциональным произведению скорости движения v на время t. Установить зависимость между скоростью и временем, если в начальный момент скорость была равна v_0.

О т в е т : $v = v_0 e^{kt^2/2}$.

4.17. Лодка замедляет свое движение под действием сопротивления воды, которое пропорционально скорости лодки. Начальная скорость лодки равна 2 м/с, а ее скорость через 4 с равна 1 м/с. Через сколько секунд скорость лодки будет равна 0,25 м/с? Какой путь может пройти лодка до остановки?

О т в е т : 12 с; 11,5 м.

4.18. Электрическая цепь состоит из последовательно включенных источника постоянного тока, дающего напряжение U, сопротивления R, самоиндукции L и выключателя, который включается при $t = 0$. Найти зависимость силы тока от времени (при $t > 0$).

О т в е т : $I = (U/R)(1 - e^{-(R/L)t})$.

4.19. Конденсатор емкостью C включается в цепь напряжением U и сопротивлением R. Определить заряд q конденсатора в момент времени t после включения.

О т в е т : $q = CU(1 - e^{-t/(CR)})$.

4.20. Скорость обесценивания оборудования вследствие его износа пропорциональна в каждый данный момент времени его фактической стоимости. Начальная стоимость равна A_0. Найти стоимость оборудования по истечении t лет.

О т в е т : $A(t) = A_0 e^{-kt}$.

4.21. В цилиндрическом сосуде объемом V_0 атмосферный воздух адиабатически (без обмена теплоты с окружающей средой) сжимается до объема V_1. Вычислить работу сжатия.

О т в е т : $A = \dfrac{p_0 V_0}{k-1}\left[\left(\dfrac{V_0}{V_1}\right)^{k-1} - 1\right]$.

4.22. Последовательно включены сопротивление R и конденсатор емкости C, заряд которого при $t = 0$ равен q. Цепь замыкается при $t = 0$. Найти силу тока в цепи при $t > 0$.

О т в е т : $I = q/(RC)e^{-t/(RC)}$.

Примерные кейс-задания по высшей математике

Пример 1. Обувная фабрика специализируется на выпуске изделий двух видов: сапог и ботинок. При этом используется сырье двух типов: S_1 и S_2. Нормы расхода каждого из них на одну пару обуви и объем расходов сырья на 1 день заданы таблицей:

Нормы расхода сырья на одну пару, усл. ед.	Вид сырья	
	S_1	S_2
Сапоги	5	2
Ботинки	4	1
Расход сырья на 1 день, усл. ед.	1050	300

1. Пусть ежедневный объем выпуска сапог и ботинок составляет x_1 и x_2 соответственно, тогда математическая модель для нахождения ежедневного выпуска каждого вида обуви может иметь вид...

а) $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 1050, \\ 2x_1 + x_2 = 300; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 300, \\ 2x_1 + x_2 = 1050; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1050, \\ 4x_1 + 5x_2 = 300; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 300, \\ 4x_1 + 5x_2 = 1050. \end{cases}$

2. Найти соответствие между видом изделия и ежедневным объемом его выпуска:

1) Ежедневный объем выпуска сапог;
2) Ежедневный объем выпуска ботинок.

☐ 50 ☐ 190 ☐ 300 ☐ 250 ☐ 200

3. Стоимость единицы сырья каждого типа задана матрицей-строкой $B = (25 \;\; 15)$. Стоимость сырья, затраченного на производство всех изделий A_1, составит ... единиц.

► 1. Для составления системы берем ограничения по сырью каждого вида, т.е.

$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 1050, \\ 2x_1 + x_2 = 300. \end{cases}$$

2. Для нахождения соответствия необходимо решить выбранную систему. Получим $x_1 = 50$, $x_2 = 200$.

3. Необходимо найти стоимость затрат на сапоги:

$$(5 \cdot 25 + 2 \cdot 15) \cdot 50 = 7750 \text{ ед.}$$ ◄

Пример 2. Предприятие выпускает три вида продукции, используя сырье трех видов. Необходимые характеристики производства указаны в таблице. Требуется определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

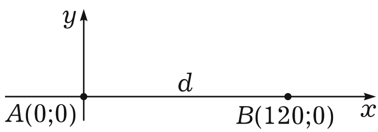
Вид сырья	Расход сырья, вес ед./изд.			Вид сырья вес. ед.
	1	2	3	
1	6	4	5	2400
2	4	3	1	1450
3	5	2	3	1550

► Обозначим неизвестные объемы выпуска продукции через x_1, x_2, x_3. Тогда при условии полного расхода запасов каждого вида сырья можно записать балансовые соотношения, которые образуют систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2400, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 1450, \\ 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1550. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений любым способом, находим, что при заданных запасах сырья объемы выпуска продукции составят по каждому виду соответственно (в условных единицах) $x_1 = 150$, $x_2 = 250$, $x_3 = 100$. ◄

Пример 3. В городском парке установлены две осветительные установки A и B, расположенные на расстоянии $d = 120$ м друг от друга. Устройство этих установок таково, что наилучшая освещенность на поверхности парка достигается в точках, отстоящих в два раза дальше от установки A, чем от установки B. Через все такие точки проложили пешеходную дорожку. Если ввести систему



координат так, чтобы начало координат совпадало с расположением установки A, а ось Ox была направлена в сторону установки B (см. рисунок), то:

1. Уравнение линии, на которой расположены все такие точки, может быть записано в виде...

а) $3x^2 - 4 \cdot 240x + 3y^2 + 4 \cdot 120^2 = 0$;
б) $(x - 160)^2 + y^2 = 80^2$;
в) $4x^2 - 4 \cdot 240x + 4y^2 + 4 \cdot 120^2 = 0$;
г) $(x - 150)^2 + y^2 = 90^2$.

2. Пусть L — длина пешеходной дорожки, которую проложили через все такие точки. Тогда значение выражения L/π равно...

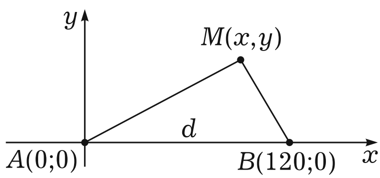


Рис. 1

► 1. Точка A имеет координаты $(0; 0)$, точка B — $(120; 0)$. Пусть $M(x, y)$ — точка, удовлетворяющая условию задачи (с наилучшей освещенностью) (рис. 1). Из заданного условия имеем $MA = 2MB$, $MA = \sqrt{x^2 + y^2}$, $MB = \sqrt{(x - 120)^2 + y^2}$. Тогда

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{(x - 120)^2 + y^2},$$

$$x^2 + y^2 = 4((x - 120)^2 + y^2),$$

$$3x^2 - 4 \cdot 240x + 3y^2 + 4 \cdot 120^2 = 0,$$

$$x^2 - 320x + y^2 + 19200 = 0,$$

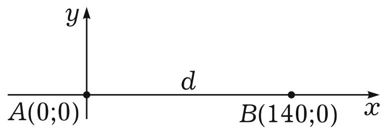
$$x^2 - 2 \cdot 160x + 160^2 - 160^2 + y^2 + 19200 = 0,$$

$$(x - 160)^2 + y^2 = 6400, \quad (x - 160)^2 + y^2 = 80^2.$$

Видно, что все точки с наилучшей освещенностью лежат на окружности.

2. Длина пешеходной дорожки равна длине окружности $(x - 160)^2 + y^2 = 80^2$, радиус которой равен $R = 80$.

Тогда $L = 2\pi R = 2\pi \cdot 80 = 160\pi$. Значение выражения L/π равно $160\pi/\pi = 160$. ◀



Пример 4. В городском парке установлены две осветительные установки A и B, расположенные на расстоянии $d = 140$ м друг от друга. Устройство установок таково, что наилучшая освещенность на поверхности парка достигается в точках, отстоящих в $2\sqrt{2}$ раза дальше от установки A, чем от установки B. Через все такие точки проложили пешеходную дорожку. Если ввести систему координат так, чтобы начало координат совпадало с расположением установки A, а ось Ox была направлена в сторону установки B (см. рисунок), то:

1. Уравнение линии, на которой расположены все такие точки, может быть записано в виде...

а) $7x^2 - 16 \cdot 140x + 7y^2 + 8 \cdot 140^2 = 0$;
б) $(x - 40)^2 + y^2 = (80\sqrt{2}\,)^2$;
в) $(x - 160)^2 + y^2 = (40\sqrt{2}\,)^2$;
г) $8x^2 - 16 \cdot 140x + 8y^2 + 8 \cdot 140^2 = 0$.

2. Пусть L — длина пешеходной дорожки, которую проложили через все такие точки. Тогда значение $\sqrt{2}\,L/\pi$ равно...

▶ 1. Пусть точка $M(x, y)$ принадлежит пешеходной дорожке. По условию $AM = 2\sqrt{2}\,BM$, тогда

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{2}\,\sqrt{(x - 140)^2 + y^2}\,,$$

$$x^2 + y^2 = 8(x - 140)^2 + 8y^2,$$

$$7x^2 - 16 \cdot 140x + 7y^2 + 8 \cdot 140^2 = 0.$$

2.

$$7x^2 - 16 \cdot 140x + 7y^2 + 8 \cdot 140^2 = 0,$$

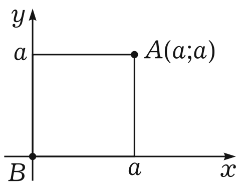
$$7(x^2 - 16 \cdot 20x + y^2) = -8 \cdot 140^2,$$

$$7(x^2 - 2 \cdot 160x + 160^2 + y^2) = -8 \cdot 140^2 + 160^2 \cdot 7,$$

$$(x - 160)^2 + y^2 = 3200, \quad (x - 160)^2 + y^2 = (40\sqrt{2}\,)^2.$$

Отсюда видно, что радиус окружности $R = 40\sqrt{2}$. Тогда

$$\frac{\sqrt{2}\,L}{\pi} = \frac{\sqrt{2}\cdot 2\pi\cdot 40\sqrt{2}}{\pi} = 4\cdot 40 = 160. \qquad ◀$$



Пример 5. Парк развлечений, имеющий форму квадрата со стороной a, освещают две осветительные установки A и B, расположенные в противолежащих вершинах квадрата. Устройство этих установок таково, что наилучшая освещенность на поверхности парка достигается в точках, отстоящих в $2\sqrt{2}$ раза дальше от A, чем от B. Через все такие точки проложили пешеходные дорожки. Если ввести систему координат (см. рисунок), то:

1. Уравнение линии, на которой расположены все такие точки, может быть записано в виде...

а) $\left(x+\dfrac{1}{8}a\right)^2 + \left(y+\dfrac{1}{8}a\right)^2 = \dfrac{16}{49}a^2$;

б) $\left(x-\dfrac{1}{7}a\right)^2 + \left(y-\dfrac{1}{7}a\right)^2 = \dfrac{16}{49}a^2$;

в) $\left(x-\dfrac{1}{8}a\right)^2 + \left(y-\dfrac{1}{8}a\right)^2 = \dfrac{16}{49}a^2$;

г) $\left(x+\dfrac{1}{7}a\right)^2 + \left(y+\dfrac{1}{7}a\right)^2 = \dfrac{16}{49}a^2$.

2. В местах пересечения этой дорожки со сторонами квадрата расположены входы в парк. Пусть сторона квадрата $a = 35(\sqrt{15}+1)$ м. Тогда расстояние от установки B до ближайшего такого входа равно ... м.

▶ Пусть точка $M(x,y)$ принадлежит искомой линии. Тогда по условию $AM = 2\sqrt{2}\,BM$, где $A(a;a)$, $B(0;0)$. Получаем

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = 8(x^2+y^2).$$

Приведем уравнение кривой второго порядка к каноническому виду:

$$\left(x+\frac{1}{7}a\right)^2 + \left(y+\frac{1}{7}a\right)^2 = \frac{16}{49}a^2.$$

Это окружность с центром в точке $C(-a/7, -a/7)$ и радиусом $R = 4a/7$. Найдем точки пересечения окружности с осями координат:

$$\text{при } x = 0: \quad \left(\frac{1}{7}a\right)^2 + \left(y + \frac{1}{7}a\right)^2 = \frac{16}{49}a^2;$$

$$\text{при } y = 0: \quad \left(x + \frac{1}{7}a\right)^2 + \left(\frac{1}{7}a\right)^2 = \frac{16}{49}a^2.$$

Тогда

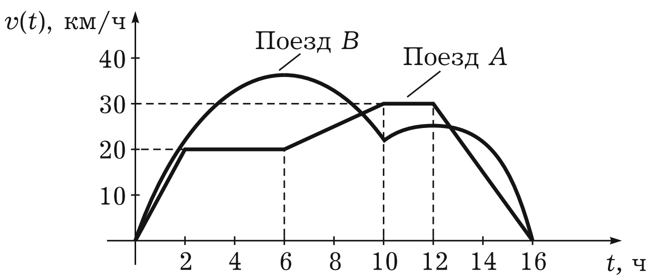
$$\left(x + \frac{1}{7}a\right)^2 + \frac{1}{49}a^2 = \frac{16}{49}a^2, \quad \left(x + \frac{1}{7}a\right)^2 = \frac{15}{49}a^2,$$

$$x + \frac{1}{7}a = \frac{a\sqrt{15}}{7} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{a(\sqrt{15}-1)}{7}.$$

Аналогично имеем $y = a(\sqrt{15}-1)/7$. Если сторона квадрата $a = 35(\sqrt{15}+1)$, то искомое расстояние

$$\rho = \frac{35(\sqrt{15}+1)(\sqrt{15}-1)}{7} = \frac{35 \cdot 14}{7} = 70. \qquad ◀$$

Пример 6. Три поезда A, B и C двигаются прямолинейно в течение 16 ч. На рисунке изображены графики скоростей поездов A и B (в км/ч). График скорости поезда A состоит из отрезков прямых, а график скорости поезда B — из участков парабол с вершинами в точках $t = 6$, $v = 36$ и $t = 12$, $v = 26\frac{2}{3}$. Скорость поезда C задана уравнением $v(t) = 8t - 0{,}25t^2$.



1. Сумма скоростей поездов A и B в момент времени $t = 8$ ч равна...

2. Если a_1 — ускорение поезда B, а a_2 — ускорение поезда C в момент времени $t = 14$ ч, то значение выражения $a_2 - 3a_1$ равно...

► 1. Из рисунка видно, что в момент времени $t = 8$ ч скорость поезда A изменяется по отрезку прямой, соединяющей точки $t = 6$, $v = 20$ и $t = 10$, $v = 30$. Так как $t = 8$ — середина этого отрезка, то

$$v_A(8) = \frac{v(6) + v(10)}{2} = \frac{20 + 30}{2} = 25.$$

Скорость поезда B в момент времени $t = 6$ ч изменяется по участку параболы $y = at^2 + bt + c$ с вершиной в точке $(6; 36)$ и пересекающей ось абсцисс в точке $t = 0$. Так как точки пересечения параболы с осью Ox симметричны относительно абсциссы вершины, то второе ее пересечение с осью Ox происходит в точке $t = 12$. Тогда уравнение параболы может быть записано в виде

$$y = a(t - t_1)(t - t_2) = at(t - 12).$$

Здесь t_1, t_2 — корни уравнения $at^2 + bt + c = 0$. Парабола проходит через точку $(6; 36)$, следовательно,

$$36 = 6a(6 - 12) = -36a \quad \Leftrightarrow \quad a = -1.$$

Тогда уравнение скорости поезда B на этом участке движения имеет вид

$$v_B(t) = -t(t - 12) = 12t - t^2.$$

Скорость поезда B в момент времени $t = 8$ ч равна

$$v_B(8) = -8(8 - 12) = 32.$$

Тогда сумма скоростей поездов A и B в момент времени $t = 6$ ч равна $25 + 32 = 57$ км/ч.

2. Из рисунка видно, что в момент времени $t = 14$ ч скорость поезда B изменяется по участку параболы $y = at^2 + bt + c$ с вершиной в точке $t = 12$, $v = 26\frac{2}{3}$ и пересекающей ось абсцисс в точке $t = 16$. Так как точки пересечения параболы с осью Ox симметричны относительно абсциссы вершины, то второе ее пересечение с осью Ox происходит в точке $t = 8$. Тогда уравнение параболы может быть записано в виде

$$y = a(t - t_1)(t - t_2) = a(t - 8)(t - 16).$$

Здесь t_1, t_2 — корни уравнения $at^2 + bt + c = 0$. Парабола проходит через точку $(12; 26\frac{2}{3})$, следовательно,

$$\frac{80}{3} = a(12-8)(12-16) = -16a \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{5}{3}.$$

Тогда уравнение скорости поезда B на этом участке движения имеет вид

$$v_B(t) = -\frac{5}{3}(t-8)(t-16) = -\frac{5}{3}t^2 + 40t - \frac{640}{3}.$$

Ускорение равно первой производной от скорости: $a(t) = v'(t)$. Следовательно,

$$a_B(t) = v'_B(t) = \left(-\frac{5}{3}t^2 + 40t - \frac{640}{3}\right)' = -\frac{10}{3}t + 40.$$

В момент времени $t = 14$ ч оно равно

$$a_B(14) = 40 - \frac{10}{3} \cdot 14 = -\frac{20}{3}.$$

Ускорение поезда C равно

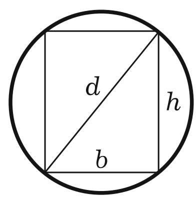
$$a_C(t) = v'(t) = (8t - 0{,}25t^2)' = 8 - 0{,}5t.$$

В момент времени $t = 14$ ч оно равно

$$a_C(14) = 8 - 0{,}5 \cdot 14 = 1.$$

Если a_1 — ускорение поезда B, а a_2 — ускорение поезда C в момент времени $t = 14$ ч, то значение выражение $a_2 - 3a_1$ равно $1 - 3 \cdot (-20/3) = 21$. ◄

Пример 7. Из круглого бревна диаметром d вытесывается балка с прямоугольным поперечным сечением, основание которого равно b и высота h. Прочность вытесенной балки пропорциональна величине bh^2.



1. Значение высоты балки, имеющей наибольшую возможную прочность при данном диаметре бревна d, равно...

а) $\dfrac{\sqrt{6}}{3}d$ б) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}d$ в) $\dfrac{d}{2}$ г) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}d$

2. Пусть P_0 — прочность балки в случае квадратного поперечного сечения ($b = h$), а $P_{\max}$ — наибольшая возможная прочность балки при данном диаметре бревна d. Тогда значение выражения $6\sqrt{6}\,P_{\max}/P_0$ равно...

► 1. Из рисунка видно, что $d^2 = h^2 + b^2$, $b^2 = d^2 - h^2$. По условию $P = Rbh^2$ — прочность вытесенной балки. Получаем $P = R\sqrt{d^2 - h^2}\, h^2$. Тогда

$$P'_h = \frac{-3Rh^3 + 2Rhd^2}{\sqrt{d^2 - h^2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad -3Rh^3 + 2Rhd^2 = 0,$$

$$Rh(-3h^2 + 2d^2) = 0, \quad h = 0 \quad \text{или} \quad h = \sqrt{\frac{2}{3}}\, d = \frac{\sqrt{6}}{3} d.$$

2. Значение максимальной прочности равно

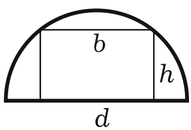
$$P_{\max} = Rbh^2 = R\sqrt{d^2 - \frac{6}{9}d^2} \cdot \frac{6}{9}d^2 = R\frac{\sqrt{3}}{3}d\frac{2}{3}d^2 = \frac{2\sqrt{3}}{9}Rd^3.$$

Для прочности квадратного сечения

$$P_0 = Rh^3 = \frac{2\sqrt{6}}{9}Rd^3.$$

Тогда

$$6\sqrt{6}\,\frac{P_{\max}}{P_0} = 6\sqrt{6}\,\frac{2\sqrt{3}\,Rd^3}{9}\frac{9}{2\sqrt{6}\,Rd^3} = 6\sqrt{3}\,.$$ ◄



Пример 8. Из половины круглого бревна диаметром $d = 18\sqrt{2}$ см вытесывают балку с прямоугольным поперечным сечением, основание которого равно b и высота h. Оставшаяся часть бревна поступает в отходы.

1. Значение высоты балки h, при котором количество отходов минимально, равно ... см.

2. Пусть S_0 — площадь балки в случае квадратного поперечного сечения ($h = b$), а $S_{\max}$ — наибольшая возможная площадь поперечного сечения балки. Тогда значение выражения $80S_{\max}/S_0$ равно...

► 1. По теореме Пифагора $R^2 = h^2 + (b/2)^2$, где $R = 9\sqrt{2}$ см. Отсюда $b = 2\sqrt{162 - h^2}$. Найдем производную и приравняем к нулю. Отсюда получаем, что $h = 9$ см.

2. Найдем $S_{\max}$:

$$S_{\max} = bh = 2\sqrt{162 - h^2}\, h = 2\sqrt{162 - 9^2} \cdot 9 = 162 \text{ см}^2.$$

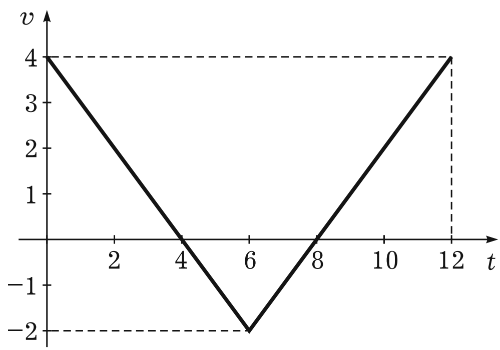
По условию S_0 — площадь балки в случае $b = h$. Имеем

$$R^2 = b^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{5b^2}{4} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{18\sqrt{10}}{5} \text{ см.}$$

Тогда

$$S_0 = b^2 = \left(\frac{18\sqrt{10}}{5}\right)^2 = \frac{3240}{25} \text{ см}^2. \qquad ◀$$

Пример 9. На рисунке изображен график скорости автомобиля $v(t)$ при его прямолинейном движении для $0 \leqslant t \leqslant 12$, где t — время с момента старта, который состоит из двух отрезков прямых.



1. Пусть $r(t)$ — расстояние, на которое удалился автомобиль за время t от точки старта. Тогда функция $r(t)$ возрастает при...

а) $t \in (6; 7)$ б) $t \in (1; 2)$ в) $t \in (5; 6)$ г) $t \in (10; 11)$

2. Пусть B — расстояние, на которое удалился автомобиль за время движения от точки старта. Тогда для значения B верными являются выражения...

а) $B = \int\limits_0^{12} v(t)\,dt;$

б) $B = \int\limits_0^{4} v(t)\,dt + \int\limits_4^{8} v(t)\,dt + \int\limits_8^{12} v(t)\,dt;$

в) $B = \int\limits_0^{4} v(t)\,dt - \int\limits_4^{8} v(t)\,dt + \int\limits_8^{12} v(t)\,dt;$

г) $B = \int\limits_0^4 |v(t)|\,dt + \int\limits_4^8 |v(t)|\,dt + \int\limits_8^{12} |v(t)|\,dt;$

д) $B = \int\limits_0^4 |v(t)|\,dt - \int\limits_4^8 |v(t)|\,dt + \int\limits_8^{12} |v(t)|\,dt.$

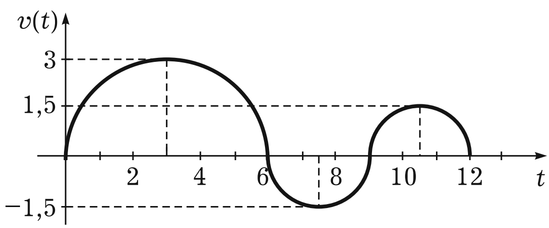
3. Если B — расстояние, на которое удалился автомобиль за время движения от точки старта, то значение B равно...

► 1. Так как скорость — это первая производная от расстояния, то для возрастания необходимо, чтобы график был выше оси Ox. Ответы б) и г).

2. Расстояние — это определенный интеграл от скорости на отрезке от 0 до 12. Используя свойства, получаем ответы а), б) и д).

3. Для нахождения расстояния надо найти определенный интеграл. Для упрощения расчетов используем геометрический смысл определенного интеграла (площадь фигуры). Находя площади треугольников, получим расстояние, равное 12. ◄

Пример 10. На рисунке изображен график скорости $v(t)$ автомобиля при его прямолинейном движении для $0 \leqslant t \leqslant 12$, где t — время с момента старта. График состоит из трех полуокружностей и имеет горизонтальные касательные в точках $t = 3$, $t = 7{,}5$ и $t = 10{,}5$.



1. Пусть A — сумма всех значений t из $0 \leqslant t \leqslant 12$, в которых ускорение автомобиля равно нулю. Тогда значение A равно...

2. Пусть B — расстояние, на которое удалился автомобиль за время движения от точки старта. Тогда значение B определяется равенствами...

3. Если B — расстояние, на которое удалился автомобиль за время движения от точки старта, то значение выражения $2B/\pi$ равно...

► 1. Ускорение автомобиля равно нулю при $v'(t) = 0$, т.е. в тех точках, где касательная параллельна оси Ox ($k = v'(t_0)$). Это происходит в трех точках: $t = 3$, $t = 7{,}5$ и $t = 10{,}5$. Поэтому $A = 3 + 7{,}5 + 10{,}5 = 21$.

2. Расстояние — это определенный интеграл от скорости на отрезке от 0 до 12. Используя свойства определенного интеграла, получаем следующие ответы:

$$\int\limits_0^6 v(t)\,dt + \int\limits_6^9 v(t)\,dt + \int\limits_9^{12} v(t)\,dt; \quad \int\limits_0^{12} v(t)\,dt;$$

$$\int\limits_0^6 |v(t)|\,dt - \int\limits_6^9 |v(t)|\,dt + \int\limits_9^{12} |v(t)|\,dt$$

(т.к. при $6 < t < 9$ функция скорости отрицательна, то $|v(t)| = -v(t)$).

3. Для нахождения расстояния надо найти определенный интеграл. Для упрощения расчетов используем геометрический смысл определенного интеграла (площадь фигуры). Находим площади полукругов и получим искомое расстояние:

$$B = S_1 - S_2 + S_3 = \frac{\pi \cdot 3^2}{2} - \frac{\pi \cdot 1{,}5^2}{2} + \frac{\pi \cdot 1{,}5^2}{2} = \frac{9\pi}{2}.$$

Тогда $2B/\pi = 9$. ◄

Пример 11. При доходе потребителя, равном $M = 6$ у.е., потребление некоторого блага составляет $X = 45$ ед. Известно, что скорость изменения спроса по доходу равна

$$\frac{dX}{dM} = \frac{42}{(M+1)^2}.$$

Объем спроса при $M = 5$ равна...

► Разделим переменные в дифференциальном уравнении и проинтегрируем:

$$dX = \frac{42}{(M+1)^2}\,dM, \quad \int dX = \int \frac{42}{(M+1)^2}\,dM + C,$$

$$X = -\frac{42}{M+1} + C.$$

Так как при $X = 45$ доход $M = 6$, то

$$45 = -\frac{42}{6+1} + C \quad \Rightarrow \quad C = 51.$$

Тогда потребление блага равно

$$X = -\frac{42}{M+1} + 51.$$

Объем спроса при $M = 5$ равен

$$X = -\frac{52}{5+1} + 51 = 44 \text{ ед.}$$ ◀

Пример 12. Для уборки снега на улицах города используются снегоуборочные машины. Они работают в течение суток с постоянной скоростью уборки снега 400 м^3/ч. Изменение объема снега, выпадающего на улицы города в течение суток, можно описать уравнением $dS/dt = 620 - 20t$, где $S(t)$ — объем снега (в м^3), выпавшего за время t (в часах), $0 \leqslant t \leqslant 24$. В момент времени $t = 0$ на улицах города лежит 1000 м^3 снега. Если $V(t)$ — объем снега, лежащего на улицах города в момент времени t, то...

1. Математическая модель для нахождения $V(t)$ может иметь вид...

2. Установите соответствие между временем t и объемом $V(t)$ снега, лежащего на улицах города:

а) Объем снега, лежащего на улицах города в момент времени $t = 6$ часов;

б) Объем снега, лежащего на улицах города в момент времени $t = 12$ часов.

☐ 1960 ☐ 2200 ☐ 1900 ☐ 2100 ☐ 2160

3. Если снегоуборочные машины прекратили свою работу в момент времени $t = 18$ и до конца суток не работали, то объем снега, лежащего на улицах города в конце дня ($t = 24$ ч), будет равен ... м^3.

▶ 1. Скорость изменения объема снега $V(t)$, лежащего на улицах города, равна

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dS}{dt} - 400 = 620 - 20t - 400 = 220 - 20t.$$

Учитывая, что в момент времени $t = 0$ на улицах города лежит 1000 м^3 снега, для $V(t)$ получим

$$V(t) = 1000 + \int_0^t (220 - 20t)\,dt = 1000 + 220t - 10t^2.$$

2. Так как $V(t) = 1000 + 220t - 10t^2$, то

$$V(6) = 1000 + 220 \cdot 6 - 10 \cdot 6^2 = 1960$$

и

$$V(12) = 1000 + 220 \cdot 12 - 10 \cdot 12^2 = 2200.$$

3. Так как $V(t) = 1000 + 220t - 10t^2$, то в момент выключения машин снега на улицах города было

$$V(18) = 1000 + 220 \cdot 18 - 10 \cdot 18^2 = 1720 \text{ м}^3.$$

С 18 до 24 часов снега выпало

$$\int_{18}^{24} (620 - 20t)\,dt = (620t - 10t^2)\Big|_{18}^{24} =$$

$$= (620 \cdot 24 - 10 \cdot 24^2) - (620 \cdot 18 - 10 \cdot 18^2) = 1200 \text{ м}^3.$$

Тогда общее количество снега равно

$$1720 + 1200 = 2920 \text{ м}^3.$$ ◄

Пример 13. Для контроля уровня снега на горном склоне используют снегоуборочные машины. Изменение объема снега, выпавшего на склон в течение суток, описывается уравнением $dS/dt = 54t - 3t^2$, где $S(t)$ — объем снега, выпавшего на склон за время t, $0 \leqslant t \leqslant 24$. Снегоуборочные машины работают в течение светового времени суток ($6 < t < 18$) с постоянной скоростью уборки 165 м^3/ч. В момент времени $t = 0$ на склоне лежит 380 м^3 снега. Пусть $V(t)$ — объем снега, лежащего на склоне в момент времени t, тогда...

1. Математическая модель для нахождения $V(t)$ имеет вид...

2. Установите соответствие между временем t и объемом $V(t)$ снега, лежащего на склоне:

а) $t = 4$ ч; б) $t = 16$ ч.

3. Пусть снегоуборочные машины не работали в обеденное время ($12 < t < 13$), тогда объем снега, лежащего на склоне в конце дня ($t = 24$ ч), будет равна ... м^3.

► 1. Скорость изменения объема снега $V(t)$, лежащего на склоне, равна

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dS}{dt} - 165 = 54t - 3t^2 - 165.$$

Учитывая, что в момент времени $t = 0$ на склоне лежит 380 м^3 снега, то для $V(t)$ получим

$$V(t) = 380 + \int\limits_0^t (54t - 3t^2)\,dt - 165\int\limits_0^t dt.$$

Итак,

$$V(t) = \begin{cases} 380 + \int\limits_0^t (54t - 3t^2)\,dt, \quad 0 < t \leqslant 6, \\ 380 + \int\limits_0^t (54t - 3t^2)\,dt - 165\int\limits_0^t dt, \quad 6 < t \leqslant 18, \\ 27t^2 - t^3 - 1600, \quad 18 < t \leqslant 24. \end{cases}$$

2. а) Так как при $t = 4$ ч

$$V(t) = 380 + \int\limits_0^t (54t - 3t^2)\,dt = 380 + 27t^2 - t^3,$$

то

$$V(4) = 380 + 27 \cdot 4^2 - 4^3 = 748 \text{ м}^3.$$

б) Так как при $t = 16$ ч

$$V(t) = 380 + 27t^2 - t^3 - 165t + 165 \cdot 6 =$$
$$= 1370 + 27t^2 - t^3 - 165t,$$

то

$$V(16) = 1370 + 27 \cdot 16^2 - 16^3 - 165 \cdot 16 = 1546 \text{ м}^3.$$

3. Во время обеденного перерыва $(12 < t < 13)$ выпало снега

$$165\int\limits_{12}^{13} dt = 165 \text{ м}^3.$$

Тогда

$$V(t) = 27t^2 - t^3 - 1600 + 165 = 27t^2 - t^3 - 1435.$$

Общее количество снега, лежащего на склоне в конце дня, равно
$$V(24) = 27 \cdot 24^2 - 24^3 - 1435 = 293 \text{ м}^3. \qquad \blacktriangleleft$$

Пример 14. Зависимость объема выпуска Y от количества используемых трудовых ресурсов L определяется функцией $Y = F(L)$ как
$$Y = F(L) = \begin{cases} 0, & L = 0, \\ a, & L = 1, \\ a + \dfrac{3}{7}F(L-1), & L > 1. \end{cases}$$
Объем выпуска при $L = n$ можно вычислить по формуле...

► Найдем значения функции $Y = F(L)$ при малых значениях L:
$$F(0) = 0, \quad F(1) = a, \quad F(2) = a + \frac{3}{7}F(1) = a + \frac{3}{7}a,$$
$$F(3) = a + \frac{3}{7}F(2) = a + \frac{3}{7}\left(a + \frac{3}{7}a\right) = a\left(1 + \frac{3}{7} + \left(\frac{3}{7}\right)^2\right),$$
$$F(n) = a\left(1 + \frac{3}{7} + \left(\frac{3}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^3 + \dots + \left(\frac{3}{7}\right)^n\right) =$$
$$= a\frac{1 - \left(\frac{3}{7}\right)^n}{1 - \frac{3}{7}} = \frac{7a}{4}\left(1 - \left(\frac{3}{7}\right)^n\right). \qquad \blacktriangleleft$$

Кейс-задания
для самостоятельного решения

Задание 1. Обувная фабрика специализируется на выпуске изделий двух видов: сапог и ботинок. При этом используется сырье двух типов: S_1 и S_2. Нормы расхода каждого из них на одну пару обуви и объем расходов сырья на 1 день заданы таблицей:

Нормы расхода сырья на одну пару, усл. ед.	Вид сырья	
	S_1	S_2
Сапоги	5	2
Ботинки	4	1
Расход сырья на 1 день, усл. ед.	1050	300

1. Пусть ежедневный объем выпуска сапог и ботинок составляет x_1 и x_2 соответственно, тогда математическая модель для нахождения ежедневного выпуска каждого вида обуви может иметь вид...

а) $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 1050, \\ 2x_1 + x_2 = 300; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 = 300, \\ 2x_1 + x_2 = 1050; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1050, \\ 4x_1 + 5x_2 = 300; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 300, \\ 4x_1 + 5x_2 = 1050. \end{cases}$

2. Установите соответствие между видом изделия и ежедневным объемом его выпуска:

1) Ежедневный объем выпуска сапог;
2) Ежедневный объем выпуска ботинок.

☐ 50 ☐ 200 ☐ 100 ☐ 150 ☐ 250

3. Стоимость единицы сырья каждого типа задана матрицей-строкой $B = (10 \;\; 15)$. Стоимость сырья, затраченного на производство сапог, составит … единиц.

Ответ: 1. а).
2. 1) $x_1 = 50$, 2) $x_2 = 200$.
3. 400.

Задание 2. Предприятие производит изделие трех видов A_1, A_2, A_3 и использует для этого сырье трех типов B_1, B_2, B_3. Нормы затраты сырья на единицу продукции каждого вида и объем расхода за 1 день заданы таблицей:

Нормы расхода сырья на единицу продукции, усл. ед.	Вид сырья		
	B_1	B_2	B_3
Изделие A_1	1	4	5
Изделие A_2	3	2	7
Изделие A_3	5	3	2
Расход сырья на 1 день, усл. ед.	2200	2200	2900

1. Пусть ежедневный объем выпуска изделий A_1, A_2, A_3 составляет x_1, x_2 и x_3 соответственно, тогда математическая модель для нахождения ежедневного выпуска каждого вида изделия может иметь вид...

а) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2900, \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 2200, \\ 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 2200; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2200, \\ 3x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 2200, \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2900; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2900, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2200, \\ 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 2200; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2200, \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2200, \\ 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 = 2900. \end{cases}$

2. Установите соответствие между видом изделия и ежедневным объемом его выпуска:

1) Ежедневный объем выпуска изделий A_1;
2) Ежедневный объем выпуска изделий A_2;
3) Ежедневный объем выпуска изделий A_3.

☐ 350 ☐ 300 ☐ 100 ☐ 150 ☐ 250 ☐ 200

3. Стоимость единицы сырья каждого типа задана матрицей-строкой $B = (20 \ \ 25 \ \ 15)$. Стоимость сырья, затраченного на производство всех изделий A_3, составит...

Ответ: 1. г).
2. 1) $x_1 = 250$, 2) $x_2 = 150$, 3) $x_3 = 300$.
3. 61500.

Задание 3. Предприятие, работающее на производстве верхней одежды, для производства пальто, плащей и курток использует сырье трех типов A_1, A_2, A_3. Нормы затраты сырья на единицу продукции каждого вида и объем расхода на 1 день заданы таблицей:

Нормы расхода сырья на единицу продукции, усл. ед.	Вид сырья		
	A_1	A_2	A_3
Пальто	6	3	4
Плащи	4	1	3
Куртки	5	3	2
Расход сырья на 1 день, усл. ед.	2800	1200	1700

1. Пусть ежедневный объем выпуска пальто, плащей и курток составляет x_1, x_2 и x_3 соответственно. Тогда математическая модель для нахождения ежедневного выпуска каждого вида изделия может иметь вид...

2. Установите соответствие между видом изделия и ежедневным объемом его выпуска:

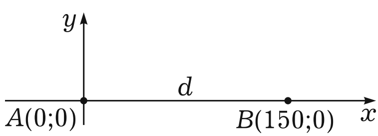
1) Ежедневный объем выпуска пальто;
2) Ежедневный объем выпуска плащей;
3) Ежедневный объем выпуска курток.

3. Стоимость единицы сырья каждого типа задана матрицей-строкой $B = (20 \quad 25 \quad 15)$. Стоимость сырья, затраченного на производство плащей, составит...

О т в е т : 1. $\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 2800, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 1200, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1700. \end{cases}$

2. 1) $x_1 = 100$, 2) $x_2 = 300$, 3) $x_3 = 200$.

3. 45000.



Задание 4. В городском парке установлены две осветительные установки A и B, расположенные на расстоянии $d = 150$ м друг от друга. Устройство этих установок таково, что наилучшая освещенность на поверхности парка достигается в таких точках M, для которых выполняется условие $MA^2 = 6MB^2$. Через все такие точки проложили пешеходную дорожку. Если ввести систему координат так, чтобы начало координат совпадало с расположением установки A, а ось Ox была направлена в сторону установки B (см. рисунок), то...

1. Уравнение линии, на которой расположены все такие точки, может быть записано в виде...

2. Пусть L — длина пешеходной дорожки, которую проложили через все такие точки. Тогда значение выражения $\sqrt{6}\,L/\pi$ равно...

Ответ: 1. Все точки наилучшей освещенности лежат на окружности $(x-180)^2+y^2=5400$.
2. 360.

Задание 5. Тело движется по закону $S=100t+18t^2-2t^3$. Найти наибольшую скорость движения тела.

Ответ: 154 м/с.

Задание 6. Скорость гоночного автомобиля, движущегося прямолинейно, изменяется по закону $v(t)=4t^3-2t$.

1. Ускорение гоночного автомобиля в момент времени $t=2$ равно...

а) 46; б) 28; в) 12; г) 45.

2. Скорость гоночного автомобиля на трассе контролируется четырьмя камерами через определенное время от начала движения. Установите соответствие между временем и скоростью передвижения гоночного автомобиля:

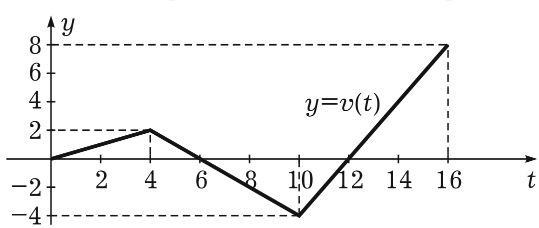
1) $t=1$; 2) $t=2$; 3) $t=3$; 4) $t=5$.

☐ 2 ☐ 28 ☐ 102 ☐ 490 ☐ 253

3. Время, при котором ускорение гоночного автомобиля $a=46$, равно...

Ответ: 1. а).
2. 1) $v=2$, 2) $v=28$, 3) $v=102$, 4) $v=490$.
3. $t=2$.

Задание 7. На рисунке изображен график скорости автомобиля $v(t)$ при его прямолинейном движении для $0\leqslant t\leqslant 16$, где t — время с момента старта, который со-

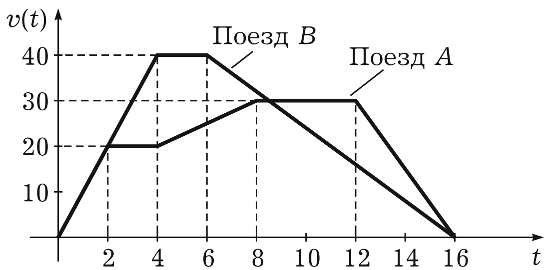


стоит из отрезков прямых. Пусть $r(t)$ — расстояние, на которое удалился автомобиль за время t от точки старта. Тогда функция $r(t)$ возрастает при...

☐ $t \in (10; 12)$ ☐ $t \in (0; 6)$ ☐ $t \in (6; 10)$ ☐ $t \in (12; 16)$

О т в е т : $(0; 6)$, $12; 16$.

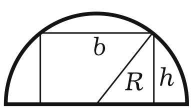
Задание 8. Три поезда A, B и C двигаются прямолинейно в течение 16 ч. Графики скоростей поездов A и B (в км/ч) изображены на рисунке и состоят из отрезков прямых. Скорость поезда C задана уравнением $v(t) = 8t - 0{,}25t^2$.



1. Сумма скоростей поездов A и C в момент времени $t = 6$ ч равна...

2. Сумма ускорений поездов B и C в момент времени $t = 12$ ч равна...

О т в е т : 1. 64 км/ч.
2. -2.

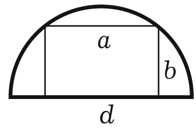


Задание 9. Из половины круглого бревна радиусом $R = 10\sqrt{2}$ см вытесывается балка с прямоугольным поперечным сечением, основание которого равно b и высота h (см. рисунок). Оставшаяся часть бревна поступает в отходы. Значение высоты балки h, при котором количество отходов минимально, равно...

а) 5; б) $5\sqrt{2}$; в) 10; г) $10\sqrt{3}/3$.

О т в е т : в).

Задание 10. Из половины круглого бревна диаметром $d = 22\sqrt{2}$ см вытесывается балка с прямоугольным поперечным сечением, основание которого равно a и высота b (см. рисунок). Оставшаяся часть бревна поступает в отходы.



1. Значение высоты балки b, при котором количество отходов минимально, равно...

а) $11\sqrt{2}/2$; б) $11\sqrt{3}/3$;
в) 11; г) $11\sqrt{2}$.

2. Пусть S_0 — площадь балки в случае квадратного поперечного сечения ($a = b$), а $S_{\max}$ — наибольшая возможная площадь поперечного сечения балки. Тогда значение выражения $100S_{\max}/S_0$ равно...

Ответ: 1. в); 2. 200.

Задание 11. Известно, что прочность бруса с прямоугольным поперечным сечением пропорциональна его ширине b и квадрату высоты h. Найти размеры бруса наибольшей прочности, который можно вырезать из бревна радиусом $R = 2\sqrt{3}$ дм. (Прочность бруса $N = kh^2b$, где k — коэффициент пропорциональности, $k > 0$.)

Ответ: $b = 4$ дм, $h = 4\sqrt{2}$ дм.

Задание 12. Во время паводка изменение объема поступающей в озеро воды в течение суток можно описать уравнением $dS/dt = 10 + 4t$, где $S(t)$ — объем поступившей в озеро воды (в м^3) за время t (в часах), $0 \leqslant t \leqslant 24$. Для того чтобы уровень воды в озере не превысил предельный уровень, оборудован сток воды из озера с постоянной скоростью 58 м^3/ч. В момент времени $t = 0$ объем воды в озере составил 30000 м^3. Если $V(t)$ — объем воды в озере в момент времени t, то...

1. Математическая модель для нахождения $V(t)$ имеет вид...

2. Установите соответствие между временем t и объемом $V(t)$ воды в озере:

1) Объем воды в озере в момент времени $t = 6$ ч;

2) Объем воды в озере в момент времени $t = 16$ ч.

☐ 29784 ☐ 29744 ☐ 29754 ☐ 29764 ☐ 29774

3. Если в момент времени $t = 18$ ч сток воды из озера был перекрыт и до конца суток вода из озера не вытекала, то объем воды в озере в конце дня ($t = 24$ ч) будет равен ... м^3.

Ответ: 1. $V(t) = 2t^2 - 48t + 30000$.
2. 1) $V(6) = 29784$; 2) $V(16) = 29744$.
3. 30348.

Задание 13. Во время паводка изменение объема поступающей в озеро воды в течение суток можно описать уравнением $dS/dt = 12 + 8t$, где $S(t)$ — объем поступившей в озеро воды (в м^3) за время t (в часах), $0 \leqslant t \leqslant 24$. Для того чтобы уровень воды в озере не превысил предельный уровень, оборудован сток воды из озера с постоянной скоростью 72 м^3/ч. В момент времени $t = 0$ объем воды в озере составил 48000 м^3. Если $V(t)$ — объем воды в озере в момент времени t, то...

1. Математическая модель для нахождения $V(t)$ имеет вид...

2. Установите соответствие между временем t и объемом $V(t)$ воды в озере:

1) Объем воды в озере в момент времени $t = 6$ ч;

2) Объем воды в озере в момент времени $t = 14$ ч.

3. Если в момент времени $t = 20$ ч сток воды из озера был перекрыт и до конца суток вода из озера не вытекала, то объем воды в озере в конце дня ($t = 24$ ч) будет равен ... м^3.

Ответ: 1. $V(t) = 4t^2 - 60t + 48000$.
2. 1) $V(6) = 47784$; 2) $V(14) = 47944$.
3. 49264.

Задание 14. Для уборки снега на улицах города используют снегоуборочные машины. Они работают в течение суток с постоянной скоростью уборки снега 300 м^3/ч. Изменение объема снега, выпадающего на улицы города в течение суток, можно описать уравнением

$$\frac{dS}{dt} = 480 - 12t,$$

где $S(t)$ — объем снега (в м^3), выпавшего за время t (в часах), $0 \leqslant t \leqslant 24$. В момент времени $t = 0$ на улицах города лежит 1600 м^3 снега. Если $V(t)$ — объем снега, лежащего на улицах города в момент времени t, то...

1. Математическая модель для нахождения $V(t)$ имеет вид...

2. Установите соответствие между временем t и объемом $V(t)$ снега, лежащего на улицах города:

1) $t = 6$ ч; 2) $t = 12$ ч.

3. Если снегоуборочные машины прекратили свою работу в $t = 19$ ч и до конца суток не работали, то объем снега, лежащего на улицах города в конце дня ($t = 24$ ч), будет равен ... м^3.

Ответ: 1. $V(t) = 1600 + 180t - 6t^2$.
2. 1) $V(6) = 2224$; 2) $V(12) = 2896$.
3. 10918.

Задание 15. Зависимость мощности X (в кВт) потребляемой предприятием электроэнергии от текущего времени суток t выражается формулой

$$X(t) = \begin{cases} 200, & 0 \leqslant t \leqslant 6, \\ 200 + 300\pi \sin \dfrac{\pi}{18}(t-6), & 6 < t \leqslant 24. \end{cases}$$

Тогда...

1. Объем потребляемой $S(t)$ электроэнергии при $t \in [0; 24]$ имеет вид...

2. Укажите соответствие между промежутком времени и объемом потребления электроэнергии:

1) $t \in [0; 2]$ ч 2) $t \in [0; 6]$ ч 3) $t \in [0; 12]$ ч

3. Среднечасовое потребление электроэнергии в течение суток равно ... кВт.

Ответ: 1. $S(t) = \begin{cases} 200t, & 0 \leqslant t \leqslant 6, \\ 200t + 5400\left(1 - \cos \dfrac{\pi}{18}(t-6)\right), & 6 < t \leqslant 24. \end{cases}$
2. 1) 400; 2) 1200; 3) 5100.
3. 312,5 кВт.

Заключение

В заключение стоит отметить, что в трудовой деятельности выпускнику при решении профессиональных задач не придется вручную вычислять интегралы или решать дифференциальные уравнения. В настоящее время в распоряжении экономистов, инженеров и других групп работников есть множество пакетов прикладных программ. Но изучение сути математических понятий как моделей реальных процессов позволяет лучше понять и суть тех физических, экономических, химических, биологических, социальных и других явлений, с которыми сталкивается специалист в профессиональной деятельности. Поэтому недопустимо пренебрежение к базовой математической подготовке профессионала. А применение метода кейсов позволяет включать в учебный процесс элементы профессиональней деятельности, обеспечивает переход от учебных ситуаций к профессиональным (дает возможность оптимально сочетать теорию и практику), где требуется использовать знания и соответствующие компетенции, формируемые при обучении математике:

— способность использовать основы экономических знаний в различных сферах деятельности;

— способность использовать законы и методы математики, естественных, гуманитарных и экономических наук при решении;

— способность решать стандартные задачи профессиональной деятельности на основе информационной и библиографической культуры с применением информационно-коммуникационных технологий и с учетом основных требований информационной безопасности;

— умение обеспечивать моделирование технических объектов и технологических процессов с использованием стандартных пакетов и средств автоматизированного проектирования, проводить эксперименты по заданным методикам с обработкой и анализом результатов;

— способность в составе коллектива исполнителей участвовать в техническом обеспечении исследований и реализации их результатов.

Список
рекомендуемой литературы

1. *Амелькин В. В.* Дифференциальные уравнения в приложениях / В. В. Амелькин. — М.: Наука, 1987. — 160 с.

2. *Апанасов П. Т.* Сборник математических задач с практическим содержанием: книга для учителя / П. Т. Апанасов, Н. П. Апанасов. — М.: Просвещение, 1987. — 110 с.

3. *Благовиская А. Н.* Практикум по решению задач линейной алгебры и аналитической геометрии с экономическим содержанием: метод. указания / А. Н. Благовиская, С. Т. Дусакаева, О. А. Тяпухина. — Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. — 63 с.

4. *Высшая* математика для экономистов: учебник для втузов / под ред. проф. Н. Ш. Кремера. — М.: ЮНИТИ, 2001. — 471 с.

5. *Данко П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для студентов вузов: в 2 т. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. — М.: Высш. шк., 1986. — Ч. 1. — 304 с.

6. *Данко П. Е.* Высшая математика в упражнениях и задачах: учеб. пособие для студентов вузов: в 2 т. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. — М.: Высш. шк., 1986. — Ч. 2. — 415 с.

7. *Индивидуальные* задания по высшей математике: учеб. пособие: в 4-х ч. — Ч. 1. Линейная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А. П. Рябушко [и др.]; под. общ. ред. А. П. Рябушко. — Минск: Выш. шк., 2007. — 304 с.

8. *Карасев А. И.* Руководство к решению задач с экономическим содержанием по курсу высшей математики: учеб. пособие / А. И. Карасев, Н. Ш. Кремер. — М.: ВЗФЭИ, 1989. — 100 с.

9. *Михайленко В. М.* Сборник прикладных задач по высшей математике: учеб. пособие / В. М. Михайленко, Р. А. Антонюк. — Киев: Выща шк., 1990. — 167 с.

10. *Пискунов Н. С.* Дифференциальное и интегральное исчисления для втузов: в 2 т. / Н. С. Пискунов. — М.: Наука, 1978. — Т. 1. — 456 с.; Т. 2. — 575 с.

11. *Письменный Д. Т.* Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. — 2-е изд. — М.: Айрис-пресс, 2004. — 608 с.

12. *Практикум* по высшей математике для экономистов: учебник для вузов / под ред. проф. Н. Ш. Кремера. — М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005. — 423 с.

13. *Прикладные* задачи математического анализа: метод. указания к самост. работе студентов техн. и эконом. специальностей всех форм обучения / сост. О. Г. Ровенская, Н. В. Белых. — Краматорск: ДГМА, 2011. — 152 с.

14. *Приложения* производных, интегралов и дифференциальных уравнений к решению прикладных задач: учеб. пособие / Т. В. Картузова, А. П. Тарасов, Н. Н. Тимофеева. — Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2004. — 92 с.

15. *Самойленко А. М.* Дифференциальные уравнения: примеры и задачи / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, Н. А. Перестюк. — М.: Высш. шк., 1989. — 383 с.

16. *Филиппов А. Ф.* Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А. Ф. Филиппов. — М.: Наука, 1985. — 127 с.

17. http://www.i-exam.ru.

Оглавление

Введение 3
Глава 1. Приложения линейной алгебры и аналитической геометрии к решению прикладных задач 4
§ 1.1. Прикладные задачи векторной алгебры 4
§ 1.2. Прикладные задачи аналитической геометрии 8
§ 1.3. Применение алгебры матриц в экономических задачах 12
Задачи для самостоятельного решения 21
Глава 2. Приложения производной к решению прикладных задач 27
§ 2.1. Геометрические приложения производной 27
§ 2.2. Приложения производной в задачах физики 30
§ 2.3. Задачи на экстремум 34
§ 2.4. Дифференциал длины дуги и кривизна плоской линии 47
Задачи для самостоятельного решения 50
Глава 3. Определенный интеграл в физических задачах 57
§ 3.1. Давление жидкости 57
§ 3.2. Работа переменной силы 63
§ 3.3. Задачи на движение 68
§ 3.4. Количество электричества 70
§ 3.5. Вычисление массы. Моменты. Центр масс 72
§ 3.6. Приложения определенного интеграла к решению экономических задач 76
Задачи для самостоятельного решения 84
Глава 4. Дифференциальные уравнения в геометрических и физических задачах 88
§ 4.1. Геометрические задачи 89
§ 4.2. Физические задачи 93
§ 4.3. Переходные процессы в электрических цепях 103
§ 4.4. Системы дифференциальных уравнений в физических задачах 113
Задачи для самостоятельного решения 117
Примерные кейс-задания по высшей математике 122
Кейс-задания для самостоятельного решения 138
Заключение 146
Список рекомендуемой литературы 147

Учебно-практическое издание

Картузова Татьяна Вячеславовна
Сабиров Анатолий Саматович
Селиверстова Людмила Вячеславовна

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ

Учебное пособие

Редактор А. Н. Антонова
Компьютерный набор, верстка и правка В. Г. Сытина

Согласно Закону № 436-ФЗ от 29 декабря 2010 года
данная продукция не подлежит маркировке

Подписано в печать 18.12.2017. Формат 60×84/16.
Бумага газетная. Гарнитура Журнальная. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 8,83. Уч.-изд. л. 9,5. Тираж 150 экз. Заказ № 1480.

Издательство Чувашского университета
Типография университета
428015 Чебоксары, Московский просп., 15