Дифференциальные уравнения

1. Письменный Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: Полный курс. 2004. – 608с.
2. Сборник задач по математике для втузов. В 4-х частях. Ч.2: учебное пособие для втузов / Под общей ред. А.В. Ефимова и А.С. Поспелова., 2024. – 432с.
3. Дифференциальные уравнения. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы. Ряды: Учеб. пособие / Кол. авторов. Чебоксары: Изд-во Чуваш. Ун-та, 2024. – 138 с.
4. Картузова Т.В., Сабиров А.С., Селиверстова Л.В. Прикладные задачи по высшей математике: учеб. пособие. Чебоксары: Изд-во Чуваш. ун-та, 2024. 150 с.
5. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2: Учебное пособие для втузов / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова., 2015. – 416 с.

Лекционное занятие 1-2. Задачи, приводящие к понятию дифференциального уравнения (ДУ). Обыкновенные ДУ. Основные понятия: порядок уравнения, частное и общее решения, задача Коши. Формулировка теоремы существования и единственности задачи Коши для уравнения первого порядка. Геометрический смысл уравнения первого порядка и его решения. Поле направлений и изоклины. Понятие об особых точках и особых решениях ДУ. ДУ с разделенными и разделяющимися переменными. Однородные ДУ. Линейные ДУ первого порядка. ДУ в полных дифференциалах. Уравнение Бернулли.

Общие сведения о дифференциальных уравнениях

Решение различных физических, биологических и экономических задач часто приводят к уравнениям, которые связывают независимые переменные, характеризующие ту или иную задачу, с какой – либо функцией этих переменных и производными этой функции различных порядков.

Основные понятия

✦**Опр.** **Дифференциальным уравнением (ДУ)** называется уравнение, связывающее независимые переменные, их функции и производные (или дифференциалы) этой функции (Г. Лейбниц, 1676г.).

✦**Опр.** Если ДУ имеет одну независимую переменную, то оно называется **обыкновенным дифференциальным уравнением**, если же независимых переменных две или более, то такое ДУ называется **дифференциальным уравнением в частных производных.**

Обыкновенное дифференциальное уравнение *n*-го порядка в общем виде можно записать так:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

где x - независимая переменная; $y = y(x)$ - искомая функция переменной x; $y', y'', \ldots, y^{(n)}$ - ее производные; $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})$ - заданная функция своих аргументов.

✦**Опр.** Наивысший порядок производных, входящих в уравнение, называется **порядком дифференциального уравнения.**

Пример: $x^3 y' + 8y - x + 5 = 0$ - обыкновенное ДУ 1-го порядка.

В общем виде записывается $F(x, y, y') = 0$.

$x\dfrac{d^2 y}{dx^2} + xy\dfrac{dy}{dx} + x^2 = y$ - обыкновенное ДУ 2-го порядка.

В общем виде записывается $F(x, y, y', y'') = 0$

$y^2 \dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$ - ДУ в частных производных первого порядка.

Процесс отыскания решения ДУ называется его *интегрированием*, а график решения ДУ – *интегральной кривой*.

Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

В качестве примера можно рассмотреть простейший случай равноускоренного движения материальной точки.

Известно, что перемещение материальной точки при равноускоренном движении является функцией времени и выражается по формуле:

$$S = \upsilon_0 t + \frac{at^2}{2}$$

В свою очередь ускорение a является первой производной по времени t от скорости υ, которая также является второй производной по времени t от перемещения S. Т.е.

$$\upsilon = \frac{dS}{dt}; \qquad a = \frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d^2 S}{dt^2}$$

Тогда получаем: $S = f(t) = \upsilon_0 t + \dfrac{f''(t)\cdot t^2}{2}$ - уравнение связывает функцию $f(t)$ с независимой переменной t и производной второго порядка функции $f(t)$.

Пример: Пусть с некоторой высоты на землю сброшено тело массы m. Найти закон изменения скорости падения υ от времени t.

Решение: Т.е. нужно найти функцию $\upsilon = \upsilon(t)$.

$\vec{F} = m\vec{a}$ - II закон Ньютона (основной закон механики), где $a = \upsilon' = \dfrac{d\upsilon}{dt}$ - ускорение движущегося тела, а F - результирующая сила, действующая на тело в процессе движения.

В данном случае $F = mg - F_{сопр}$, где mg - сила тяжести, $F_{сопр}$ - сила сопротивления со стороны воздуха.

Известно, что при обтекаемой форме тела и не слишком больших скоростях: $F_{сопр} = \rho \cdot \upsilon$, $F_{сопр}$ пропорциональна скорости движущегося тела, где υ - скорость падения тела, ρ - коэффициент пропорциональности. Таким образом получаем: $m \cdot \dfrac{d\upsilon}{dt} = mg - \rho\upsilon$, $\dfrac{d\upsilon}{dt} = g - \dfrac{\rho}{m}\upsilon$, $\upsilon' + \dfrac{\rho}{m}\upsilon = g$ - это и есть закон изменения скорости падающего тела.

<u>Другие задачи</u>:

- Закон изменения массы радия в зависимости от времени «радиоактивный распад» описывается ДУ: $\dfrac{dm}{dt} = -km$, где $k > 0$ - коэффициент пропорциональности, $m(t)$ - масса радия в момент времени t.
- «Закон размножения бактерий» (зависимость массы от бактерий от времени): $\dfrac{dm}{dt} = km$, где $k > 0$.
- «Закон охлаждения тел», т.е. закон изменения температуры тела в зависимости от времени, описывается ДУ: $\dfrac{dT}{dt} = k(T - t_0)$, где $T(t)$ - температура тела в момент времени t, k - коэффициент пропорциональности, t_0 - температура воздуха (среды охлаждения).
- Закон изменения давления воздуха в зависимости от высоты над уровнем моря описывается ДУ: $\dfrac{dp}{dh} = -kp$, где $k > 0$ - коэффициент пропорциональности, $p(h)$ - атмосферное давление воздуха на высоте *h* и др.

Дифференциальные уравнения первого порядка

Основные понятия

✦Опр. **Дифференциальным уравнением первого порядка** называется соотношение, связывающее функцию, ее первую производную и независимую переменную, т.е. соотношение вида: $F(x,y,y')=0$.

Если такое соотношение преобразовать к виду $y'=f(x,y)$ то это ДУ первого порядка будет называться уравнением, **разрешенным относительно производной.**

Уравнение $y'=f(x,y)$ устанавливает связь (зависимость) между координатами точки (x,y) и угловым коэффициентом y' касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Следовательно, ДУ $y'=f(x,y)$ дает совокупность направлений (поле направлений) на плоскости Oxy.

✦Опр. Кривая, во всех точках которой направление поля одинаково называется **изоклиной.** Изоклинами можно пользоваться для приближенного построения интегральных кривых. Уравнение изоклин можно получить, если представить $y'=C$, т.е. $f(x,y)=C$.

Преобразуя уравнение $y'=f(x,y)$ далее, получим:

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y), \quad dy=f(x,y)dx, \quad f(x,y)dx-dy=0.$$

Функцию $f(x,y)$ представим в виде: $f(x,y)=-\dfrac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \quad Q(x,y)\neq 0;$

тогда при подстановке в полученное выше уравнение имеем: $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ - это так называемая **дифференциальная форма** уравнения первого порядка.

✦Опр. **Общим решением ДУ первого порядка** называется такая дифференцируемая функция $y=\varphi(x;C)$, содержащая одну произвольную постоянную и удовлетворяющая условиям:

1) функция $y=\varphi(x;C)$ является решением ДУ при каждом фиксированном значении C;

2) при каких-либо начальных условиях $x=x_0$, $y(x_0)=y_0$ существует такое значение $C=C_0$, при котором решением ДУ уравнения является функция $y=\varphi(x;C_0)$.

✦Опр. **Частным решением** ДУ первого порядка называется любая функция вида $y=\varphi(x;C_0)$, полученная из общего решения $y=\varphi(x;C)$ при конкретном значении постоянной $C=C_0$.

✦**Опр.** **Интегральной кривой** называется график $y=\varphi(x)$ решения дифференциального уравнения на плоскости Oxy.

С геометрической точки зрения $y=\varphi(x;C)$ есть семейство интегральных кривых на плоскости Oxy, а частное решение $y=\varphi(x;C_0)$ – одна кривая из этого семейства, проходящая через точку $(x_0;y_0)$.

Пример 1: Из семейства окружностей $x^2+y^2=C^2$ выделить ту, которая проходит через точку $A(3;4)$.

Решение. Чтобы выделить нужную окружность, надо найти соответствующее ей значение параметра $C=C_0$. Так как искомая функция проходит через точку $A(3;4)$, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=C_0^2$. Подставляя значения $x=3,\quad y=4$, получим $C_0^2=25$. Уравнение искомой окружности будет $x^2+y^2=25$.

✦**Опр.** **Задачей Коши** (Огюстен Луи Коши (1789-1857) - французский математик) называется нахождение любого частного решения ДУ вида $y=\varphi(x;C_0)$, удовлетворяющего начальным условиям $y(x_0)=y_0$.

Теорема Коши (теорема о существовании и единственности решения задачи Коши).

Если функция $f(x,y)$ непрерывна в некоторой области D в плоскости Oxy и имеет в этой области непрерывную частную производную $f_y'(x,y)$, то какова бы не была точка $(x_0;y_0)$ в области D, существует единственное решение $y=\varphi(x)$ уравнения $y'=f(x,y)$, удовлетворяющее условию $y=y_0$ при $x=x_0$, т.е. существует единственное решение дифференциального уравнения.

<u>Геометрический смысл теоремы</u>: при выполнении условий теоремы существует единственная интегральная кривая ДУ, проходящая через точку $(x_0;y_0)$.

Пример 2: Найти общее решение дифференциального уравнения $xy'+y=0$.

Решение. Общее решение ДУ ищется с помощью интегрирования левой и правой частей уравнения, которое предварительно преобразовано следующим образом: $x\dfrac{dy}{dx}+y=0$, $\quad xdy=-ydx$, $\quad \dfrac{dy}{y}=-\dfrac{dx}{x}$.

Теперь интегрируем: $\displaystyle\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{dx}{x}$, $\quad \ln|y|=-\ln|x|+C_0$, $\quad \ln|y|+\ln|x|=C_0$, $\quad \ln|xy|=C_0$,

$xy=e^{C_0}=C$. $\qquad y=\dfrac{C}{x}$ - это общее решение исходного ДУ.

Допустим, заданы некоторые начальные условия: $x_0 = 1; y_0 = 2$, тогда имеем $2 = \frac{C}{1}; \quad C = 2;$

При подстановке полученного значения постоянной в общее решение получаем частное решение при заданных начальных условиях (решение задачи Коши): $y = \frac{2}{x}$.

✦<u>**Опр.**</u> **Особым решением ДУ** называется такое решение, во всех точках которого условие единственности Коши не выполняется, т.е. в окрестности некоторой точки (x, y) существует не менее двух интегральных кривых.

Особые решения не зависят от постоянной C.

Особые решения нельзя получить из общего решения ни при каких значениях постоянной C. Если построить семейство интегральных кривых ДУ, то особое решение будет изображаться линией, которая в каждой своей точке касается по крайней мере одной интегральной кривой.

Отметим, что не каждое ДУ имеет особые решения.

Пример 3: Найти общее решение дифференциального уравнения: $y' + y = 0$. Найти особое решение, если оно существует.

Решение. $\frac{dy}{dx} = -y$, $\frac{dy}{y} = -dx$, $\int \frac{dy}{y} = -\int dx$, $\ln|y| = -x + C$, $y = e^{-x} \cdot e^{C}$, $\quad y = C_1 \cdot e^{-x}$

Данное ДУ имеет также особое решение $y = 0$. Это решение невозможно получить из общего, однако при подстановке в исходное уравнение получаем тождество. Мнение, что решение $y = 0$ можно получить из общего решения при $C_1 = 0$ ошибочно, ведь $C_1 = e^C \neq 0$.

Далее рассмотрим подробнее приемы и методы, которые используются при решении ДУ различных типов.

1.1. Уравнения с разделяющимися переменными

✦**Опр.** Дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называется **уравнением с разделяющимися переменными**, если его можно записать в виде

$$y' = f_1(x) f_2(y).$$

Пусть в уравнении: $y' = f(x; y)$ функция $f(x; y)$ может быть разложена на множители $f_1(x)$ и $f_2(y)$, т.е. $f(x; y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$. Тогда $y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$, т.е. $\frac{dy}{dx} = f_1(x) \cdot f_2(y)$.

Таким образом: $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx, \quad f_2(y) \neq 0$. Иногда такие ДУ называют уравнениями *с разделенными переменными*.

Интегрируя левую часть по y, а правую по x, приходим в каждом из них к общему интегралу исходного ДУ.

Пример 1: Решить уравнение: $y' = \frac{2x}{3y^2 + 1}$.

Решение: $\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{3y^2 + 1}$, разделяем переменные: $(3y^2 + 1)dy = 2xdx$.

Интегрируя обе части, получим: $\int (3y^2 + 1)dy = 3 \cdot \frac{y^3}{3} + y + C_1$, $\int 2xdx = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + C_2$, т.е. $y^3 + y + C_1 = x^2 + C_2$, $y^3 + y - x^2 = -C_1 + C_2$.

Пусть $-C_1 + C_2 = C$, тогда $y^3 + y - x^2 = C$ - общий интеграл ДУ.

<u>*Замечание*</u>: Если в уравнении с разделяющими переменными

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

функция $f_2(y)$ имеет действительный корень y_0, т.е. $f_2(y_0) = 0$, то функция $y(x) = y_0$ является решением данного уравнения. При делении обеих частей этого уравнения на $f_2(y)$ (при разделении переменных) решение $y(x) = y_0$ может быть потеряно. Поэтому, получив указанным выше методом разделения переменных общий интеграл уравнения, надо проверять, входят ли в его состав упомянутые частные решения.

Пример 2: Решите уравнение $\frac{dy}{dx} = y \cdot tgx$.

Решение: 1) Разделим переменные: $\frac{dy}{dx} = y \cdot tgx \quad | : y$

$$\frac{dy}{y} = tgxdx$$

2) Проинтегрировав обе части, получим: $\ln|y| = -\ln|\cos x| + C_1$, $\ln|y \cdot \cos x| = C_1$

Для удобства обозначим $C_1 = \ln C_2 \ (C_2 \neq 0)$. Таким образом, получим:

$$\ln|y \cdot \cos x| = \ln C_2, \ y \cdot \cos x = C_2.$$

Но при делении на y могло быть потеряно решение: $y = 0$, которое не входит в запись $y \cdot \cos x = C_2$.

Если вместо $C_2 \neq 0$ взять новую константу С (которая в отличие от C_2 может принимать и нулевое значение), то решение $y = 0$ войдет в состав общего решения уравнения:

$y \cdot \cos x = C$ - общий интеграл уравнения.

Пример 3: Решить уравнение $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0,\ y(0) = 1$.

Решение: 1) «Разделим» переменные: $(x^2 - 1)dy = 2xy^2 dx$ $|:\ (1 - x^2) \cdot y^2$

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{2xdx}{1 - x^2}$$

2) Интегрируя, получим: $-\frac{1}{y} = -\ln|1 - x^2| + C_1$, $\frac{1}{y} = \ln|1 - x^2| + C_2$, где $C_2 = -C_1$.

Таким образом: $y(\ln|1 - x^2| + C_2) = 1$ - общий интеграл уравнения

3) При делении на $(1 - x^2)y^2$ могли быть потеряны решения:

$$1 - x^2 = 0 \qquad y^2 = 0$$
$$x = \pm 1 \qquad y = 0$$

При $x = \pm 1$ уравнение $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$ примет вид $y = 0$.

Проверим $y = 0$: общий интеграл не включает в себя частное решение $y = 0$ (т.е. $0 \neq 1$), поэтому решение $y = 0$ считается потерянным решением и записывается отдельно. Таким образом, общее решение: $y(\ln|1 - x^2| + C) = 1, \quad y = 0$

4) Найдем частное решение при условии $y(0) = 1$.

$1 \cdot (\ln|1 - 0| + C) = 1, \quad C = 1 \Rightarrow y(\ln|1 - x^2| + 1) = 1$ - частное решение.

1.2. Однородные уравнения

✦**Опр.** Функция $f(x; y)$ называется **однородной n-го порядка (измерения)** относительно своих аргументов x и y, если для любого значения параметра t (кроме нуля) выполняется тождество:

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Пример 1: Является ли однородной функция $f(x, y) = x^3 + 3x^2 y$?

Решение. $f(tx, ty) = (tx)^3 + 3(tx)^2 ty = t^3 x^3 + 3t^3 x^2 y = t^3 (x^3 + 3x^2 y) = t^3 f(x, y)$

Таким образом, функция $f(x; y)$ является однородной 3- го порядка.

✦**Опр.** Дифференциальное уравнение вида $y' = f(x, y)$ называется **однородным**, если его правая часть $f(x; y)$ есть однородная функция нулевого измерения относительно своих аргументов.

Любое уравнение вида $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ является однородным, если функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – однородные функции одинакового измерения.

Решение любого однородного уравнения основано на приведении этого уравнения к уравнению с разделяющимися переменными.

Рассмотрим однородное уравнение $y' = f(x, y)$.

Т.к. функция $f(x; y)$ – однородная нулевого измерения, то можно записать: $f(tx, ty) = f(x, y)$.

Т.к. параметр *t* вообще говоря произвольный, предположим, что $t = \frac{1}{x}$. Получаем: $f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$

Правая часть полученного равенства зависит фактически только от одного аргумента $u = \frac{y}{x}$, т.е. $f(x, y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \varphi(u);$

Исходное дифференциальное уравнение таким образом можно записать в виде: $y' = \varphi(u)$

Далее заменяем $y = ux$, $y' = u'x + ux'$.

$u'x + ux' = \varphi(u);\quad u'x + u = \varphi(u);\quad u' = \frac{\varphi(u) - u}{x}$; таким образом, получили уравнение с разделяющимися переменными относительно неизвестной функции u.

$$\frac{du}{\varphi(u) - u} = \frac{dx}{x};\quad \int \frac{du}{\varphi(u) - u} = \int \frac{dx}{x} + C;$$

Далее, заменив вспомогательную функцию u на ее выражение через x и y и найдя интегралы, получим общее решение однородного ДУ.

✎**Пример 2:** Решить уравнение $y' = \frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x} + 1\right)$.

Решение. Введем вспомогательную функцию *u:*

$$u = \frac{y}{x};\quad y = ux;\quad y' = u'x + u.$$

Отметим, что введенная нами функция *u* всегда положительна, т.к. в противном случае теряет смысл исходное ДУ, содержащее $\ln u = \ln\frac{y}{x}$.

Подставляем в исходное уравнение:

$$u'x + u = u(\ln u + 1),\quad u'x + u = u\ln u + u,\quad u'x = u\ln u.$$

Разделяем переменные: $\frac{du}{u\ln u}=\frac{dx}{x}$, $\int\frac{du}{u\ln u}=\int\frac{dx}{x}$.

Интегрируя, получаем: $\ln|\ln u|=\ln|x|+C$; $\ln u=Cx$; $u=e^{Cx}$.

Переходя от вспомогательной функции обратно к функции y, получаем общее решение: $y=xe^{Cx}$.

1.3. Уравнения, приводящиеся к однородным

Кроме уравнений, описанных выше, существует класс уравнений, которые с помощью определенных подстановок могут приведены к однородным.

Это уравнения вида $y'=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$.

Если определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\neq 0,$ то переменные могут быть разделены подстановкой

$$x=u+\alpha; \qquad y=v+\beta;$$

где α и β - решения системы уравнений $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a_1x+b_1y+c_1=0 \end{cases}$

Пример 1: Решить уравнение $(x-2y+3)dy+(2x+y-1)dx=0.$

Решение: Получаем $(x-2y+3)\frac{dy}{dx}=-2x-y+1,$ $\frac{dy}{dx}=\frac{-2x-y+1}{x-2y+3}.$

Находим значение определителя $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=4+1=5\neq 0$.

Решаем систему уравнений $\begin{cases} -2x-y+1=0 \\ x-2y+3=0 \end{cases}$, $\begin{cases} y=1-2x \\ x-2+4x+3=0 \end{cases}$, $\begin{cases} x=-1/5 \\ y=7/5 \end{cases}$.

Применяем подстановку $x=u-1/5,$ $y=v+7/5$ в исходное уравнение:

$(u-1/5-2v-14/5+3)dv+(2u-2/5+v+7/5-1)du=0;$ $(u-2v)dv+(2u+v)du=0;$

$$\frac{dv}{du}=\frac{2u+v}{2v-u}=\frac{2+\frac{v}{u}}{2\frac{v}{u}-1}.$$

Заменяем переменную $\frac{v}{u}=t,$ $v=ut,$ $v'=t'u+t$ при подстановке в выражение, записанное выше, имеем: $t'u+t=\frac{2+t}{2t-1}$.

Разделяем переменные:

$$\frac{dt}{du}u = \frac{2+t}{2t-1} - t = \frac{2+t-2t^2+t}{2t-1} = \frac{2(1+t-t^2)}{2t-1}, \quad \frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1-2t}{1+t-t^2}dt,$$

$$\int\frac{du}{u} = -\frac{1}{2}\int\frac{(1-2t)dt}{1+t-t^2}, \qquad -\frac{1}{2}\ln\left|1+t-t^2\right| = \ln|u| + \ln C_1, \qquad \ln\left|1+t-t^2\right| = -2\ln|C_1u|,$$

$$\ln\left|1+t-t^2\right| = \ln\left|\frac{C_2}{u^2}\right|, \quad 1+t-t^2 = \frac{C_2}{u^2}.$$

Переходим теперь к первоначальной функции y и переменной x:

$$t = \frac{v}{u} = \frac{y-7/5}{x+1/5} = \frac{5y-7}{5x+1}; \qquad u = x+1/5;$$

$$1+\frac{5y-7}{5x+1} - \left(\frac{5y-7}{5x+1}\right)^2 = \frac{25C_2}{(5x+1)^2};$$

$$(5x+1)^2 + (5y-7)(5x+1) - (5y-7)^2 = 25C_2,$$

$$25x^2 + 10x + 1 + 25xy + 5y - 35x - 7 - 25y^2 + 70y - 49 = 25C_2,$$

$$25x^2 - 25x + 25xy + 75y - 25y^2 = 25C_2 + 49 - 1 + 7, \quad x^2 - x + xy + 3y - y^2 = C_2 + \frac{55}{25} = C.$$

Итого, выражение $x^2 - x + xy + 3y - y^2 = C$ является общим интегралом исходного дифференциального уравнения.

В случае если в исходном уравнении вида $y' = f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ определитель $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0,$ то переменные могут быть разделены подстановкой $ax + by = t.$

Пример 2: Решить уравнение $2(x+y)dy + (3x+3y-1)dx = 0.$

Решение: Получаем $2(x+y)\dfrac{dy}{dx} = -3x-3y+1;$ $\quad \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{-3x-3y+1}{2x+2y} = -\dfrac{3x+3y-1}{2x+2y};$

Находим значение определителя $\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6+6 = 0$.

Применяем подстановку $3x+3y = t$, получаем $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{t'}{3} - 1$.

Подставляем это выражение в исходное уравнение:

$$\frac{t'}{3} - 1 = -\frac{3(t-1)}{2t}; \quad 2t(t'-3) = -9t+9, \quad 2tt' = 6t - 9t + 9, \quad 2tt' = -3t + 9.$$

Разделяем переменные: $\dfrac{2t}{-3t+9}dt = dx, \qquad \dfrac{t}{t-3}dt = -\dfrac{3}{2}dx, \quad \displaystyle\int\left(1+\frac{3}{t-3}\right)dt = -\frac{3}{2}\int dx,$

$$t+3\ln|t-3|=-\frac{3}{2}x+C_1.$$

Далее возвращаемся к первоначальной функции y и переменной *x*.

$$2x+2y+2\ln|3(x+y-1)|=-x+C_2,\quad 3x+2y+2\ln 3+2\ln|x+y-1|=C_2,$$

$$3x+2y+2\ln|x+y-1|=C,$$

таким образом, мы получили общий интеграл исходного дифференциального уравнения.

1.4. Линейные уравнения

✦**Опр.** Дифференциальное уравнение называется **линейным** относительно неизвестной функции и ее производной, если оно может быть записано в виде: $y'+P(x)y=Q(x)$, при этом, если правая часть $Q(x)$ равна нулю, то такое уравнение называется **линейным однородным ДУ**, если правая часть $Q(x)$ не равна нулю, то такое уравнение называется **линейным неоднородным ДУ**.

$P(x)$ и $Q(x)$ - функции непрерывные на некотором промежутке a < x < b.

1.4.1. Линейные однородные дифференциальные уравнения

Рассмотрим методы нахождения общего решения линейного однородного ДУ первого порядка вида $y'+P(x)y=0$.

Для этого типа дифференциальных уравнений разделение переменных не представляет сложностей: $\frac{dy}{y}=-P(x)dx$, $\ln|y|=-\int P(x)dx+\ln|C|$, $\ln\left|\frac{y}{C}\right|=-\int P(x)dx$.

Общее решение: $y=Ce^{-\int P(x)dx}$.

1.4.2. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения

Для интегрирования линейных неоднородных уравнений ($Q(x)\neq 0$) применяются в основном два метода: метод Бернулли и метод Лагранжа.

Метод Бернулли.

(Якоб Бернулли (1654-1705) – швейцарский математик.)

Суть метода заключается в том, что искомая функция представляется в виде произведения двух функций $y=uv$, где $u=u(x), v=v(x)$.

При этом очевидно, что $y'=u\cdot\frac{dv}{dx}+v\cdot\frac{du}{dx}$ - дифференцирование по частям.

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$u\frac{dv}{dx}+v\frac{du}{dx}+P(x)uv=Q(x)\,,\quad u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}+P(x)u\right)=Q(x)$$

Далее следует важное замечание – т.к. первоначальная функция была представлена нами в виде произведения, то каждый из сомножителей, входящих в это произведение, может быть произвольным, выбранным по нашему усмотрению.

Например, функция $y=2x^2$ может быть представлена как $y=1\cdot 2x^2$, $y=2\cdot x^2$, $y=2x\cdot x$ и т.п.

Таким образом, можно одну из составляющих произведение функций выбрать так, что выражение $\frac{du}{dx}+P(x)u=0$.

Таким образом, возможно получить функцию u, проинтегрировав, полученное соотношение как однородное дифференциальное уравнение по описанной выше схеме: $\frac{du}{u}=-P(x)dx,$

$$\int\frac{du}{u}=-\int P(x)dx,\qquad \ln|u|=-\int P(x)dx,$$

$$\ln|C_1|+\ln|u|=-\int P(x)dx,\quad u=Ce^{-\int P(x)dx},\quad где\quad C=1/C_1.$$

Для нахождения второй неизвестной функции v подставим поученное выражение для функции u в исходное уравнение $u\frac{dv}{dx}+v\left(\frac{du}{dx}+P(x)u\right)=Q(x)$ с учетом того, что выражение, стоящее в скобках, равно нулю.

$$Ce^{-\int P(x)dx}\frac{dv}{dx}=Q(x);\qquad Cdv=Q(x)e^{\int P(x)dx}dx;$$

Интегрируя, можем найти функцию v: $Cv=\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_1$,

$$v=\frac{1}{C}\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_2\,.$$

Т.е. была получена вторая составляющая произведения $y=uv$, которое и определяет искомую функцию.

Подставляя полученные значения, получаем:

$$y=uv=Ce^{-\int P(x)dx}\cdot\frac{1}{C}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_2\right).$$

Окончательно получаем формулу: $y=e^{-\int P(x)dx}\cdot\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx+C_2\right)$, C_2 - произвольный коэффициент.

Это соотношение может считаться решением неоднородного линейного ДУ в общем виде по способу Бернулли.

Метод Лагранжа.

(Ларганж Жозеф Луи (1736-1813) - французский математик).

Метод Лагранжа решения неоднородных линейных дифференциальных уравнений еще называют методом **вариации произвольной постоянной**.

Вернемся к поставленной задаче: $y' + P(x)y = Q(x)$

Первый шаг данного метода состоит в отбрасывании правой части уравнения и замене ее нулем.

$$y' + P(x)y = 0$$

Далее находится решение получившегося однородного дифференциального уравнения: $y = C_1 e^{-\int P(x)dx}$.

Для того, чтобы найти соответствующее решение неоднородного ДУ, будем считать постоянную C_1 некоторой функцией от x.

Тогда по правилам дифференцирования произведения функций получаем:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} + C_1(x) e^{-\int P(x)dx} \cdot (-P(x));$$

Подставляем полученное соотношение в исходное уравнение

$$\frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} - C_1(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + P(x)C_1(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x), \quad \frac{dC_1(x)}{dx} e^{-\int P(x)dx} = Q(x);$$

Из этого уравнения определим переменную функцию $C_1(x)$: $dC_1(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx} dx;$

Интегрируя, получаем: $C_1 = \int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C$.

Подставляя это значение в исходное уравнение, получаем: $y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx} dx + C\right)$.

Таким образом, мы получили результат, полностью совпадающий с результатом расчета по методу Бернулли.

При выборе метода решения линейных ДУ следует руководствоваться простотой интегрирования функций, входящих в исходный интеграл.

Далее рассмотрим примеры решения различных ДУ различными методами и сравним результаты.

Пример 1: Решить уравнение $x^2 y' + y = ax^2 e^{\frac{1}{x}}$.

Решение: Сначала приведем данное уравнение к стандартному виду: $y' + \frac{1}{x^2} y = ae^{\frac{1}{x}}$.

Применим полученную выше формулу: $P = \frac{1}{x^2}$, $\quad Q = ae^{\frac{1}{x}}$,

$$y = e^{-\int \frac{1}{x^2}dx}\left(\int a e^{\frac{1}{x}} e^{\int \frac{1}{x^2}dx} dx + C\right),\ y = e^{\frac{1}{x}}\left(\int a e^{\frac{1}{x}} e^{-\frac{1}{x}} dx + C\right) = e^{\frac{1}{x}}\left(\int a dx + C\right),$$ т.е.

$$y = e^{\frac{1}{x}}(ax + C).$$

Пример 2: Найти решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям $y'\cos x = (y+1)\sin x, \quad y(0) = 0.$

Решение: Это уравнение с разделяющимися переменными.

$\frac{y'}{y+1} = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \frac{dy}{y+1} = tgxdx, \ \int \frac{dy}{y+1} = \int tgxdx, \quad \ln|y+1| = -\ln|\cos x| + \ln C, \ \ln|(y+1)\cos x| = \ln C,$ $(y+1)\cos x = C.$

Общее решение имеет вид: $y = \frac{C}{\cos x} - 1.$

Найдем частное решение при заданном начальном условии *y(0) = 0*: $0 = \frac{C}{1} - 1, \qquad C = 1.$

Окончательно получаем: $y = \frac{1}{\cos x} - 1.$

Пример 3: Решить предыдущий пример другим способом.

Решение: Действительно, уравнение $y'\cos x = (y+1)\sin x$ может быть рассмотрено как линейное неоднородное ДУ: $y'\cos x - y\sin x = \sin x.$

Решим соответствующее ему линейное однородное уравнение.

$$y'\cos x - y\sin x = 0, \quad y'\cos x = y\sin x, \quad \frac{dy}{y} = tgxdx,$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int tgxdx + \ln C, \qquad \ln|y| = -\ln|\cos x| + \ln C, \qquad y\cos x = C, \quad y = \frac{C}{\cos x}.$$

Решение неоднородного уравнения будет иметь вид: $y = \frac{C(x)}{\cos x}.$

Тогда $y' = \frac{C'(x)\cos x + C(x)\sin x}{\cos^2 x}.$

Подставляя в исходное уравнение, получаем:

$$\frac{\left[C'(x)\cos x + C(x)\sin x\right]\cdot\cos x}{\cos^2 x} - \frac{C(x)\sin x}{\cos x} = \sin x, \ \frac{C'(x)\cos x}{\cos x} = \sin x, \quad C'x) = \sin x,$$

$C(x) = \int \sin x dx = -\cos x + C.$ Итого $y = \frac{-\cos x + C}{\cos x}, \quad y = \frac{C}{\cos x} - 1.$

С учетом начального условия $y(0) = 0$ получаем $y = \frac{1}{\cos x} - 1.$

Как видно результаты, полученные при решении данного дифференциального уравнения различными способами, совпадают.

При решении дифференциальных уравнений бывает возможно выбирать метод решения, исходя из сложности преобразований.

Пример 4: Решить дифференциальное уравнение $y' + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} = 0$ с начальным условием $y(1) = 0$.

Решение:

Первый способ решения: В этом уравнении также удобно применить замену переменных. Пусть $e^{\frac{y}{x}} = u,\quad \frac{y}{x} = \ln u,\quad y = x\ln u,\quad y' = \ln u + \frac{xu'}{u}.$

Уравнение принимает вид: $\ln u + \frac{xu'}{u} + u - \ln u = 0;\quad xu' + u^2 = 0.$

$xu' = -u^2;\quad \frac{du}{u^2} = -\frac{dx}{x};\quad \int\frac{du}{u^2} = -\int\frac{dx}{x}.\quad \frac{1}{u} = \ln|x| + \ln C;\quad \frac{1}{u} = \ln Cx.$

Делаем обратную подстановку: $e^{-\frac{y}{x}} = \ln Cx;\quad -\frac{y}{x} = \ln(\ln Cx).$ Общее решение: $y = -x\ln(\ln Cx).$

С учетом начального условия $y(1) = 0$: $0 = -\ln(\ln C),\quad C = e.$

Частное решение: $y = -x\ln(\ln ex).$

Второй способ решения: $y' + e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} = 0$.

Замена переменной: $u = \frac{y}{x},\quad y = ux,\quad y' = u'x + u,\quad u'x + u + e^u - u = 0,\quad u'x + e^u = 0,$

$\frac{du}{dx}x = -e^u,\qquad -e^{-u}du = \frac{dx}{x},\qquad -\int e^{-u}du = \int\frac{dx}{x},\qquad e^{-u} = \ln|x| + \ln C,\qquad e^{-u} = \ln|Cx|,$

$-u = \ln(\ln|Cx|),\qquad u = -\ln(\ln|Cx|).$

Общее решение: $y = -x\ln(\ln Cx).$

1.5. Уравнение Бернулли

✦**Опр.** **Уравнением Бернулли** называется уравнение вида $y' + Py = Q\cdot y^n$, где P и Q – функции от *x* или постоянные числа, а *n* – постоянное число, не равное 1.

Для решения уравнения Бернулли применяют подстановку $z = \frac{1}{y^{n-1}}$, с помощью которой, уравнение Бернулли приводится к линейному.

Для этого разделим исходное уравнение на y^n: $\frac{y'}{y^n} + P\frac{1}{y^{n-1}} = Q.$

Применим подстановку, учтя, что $z' = -\frac{(n-1)y^{n-2}}{y^{2n-2}} \cdot y' = -\frac{(n-1)y'}{y^n}$, получаем $-\frac{z'}{n-1} + Pz = Q$, $z' - (n-1)Pz = -(n-1)Q$.

Т.е. получилось линейное уравнение относительно неизвестной функции z.

Решение этого уравнения будем искать в виде: $z = e^{-\int Pdx}\left(\int Q_1 e^{\int P_1 dx}dx + C\right)$, $Q_1 = -(n-1)Q;\; P_1 = -(n-1)P.$

Пример 1: Решить уравнение $xy' + y = xy^2 \ln x.$

Решение: Разделим уравнение на *xy*²: $\frac{y'}{y^2} + \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y} = \ln x.$

Полагаем $z = \frac{1}{y}$, $z' = -\frac{y'}{y^2}$: $-z' + \frac{1}{x}z = \ln x$, $z' - \frac{1}{x}z = -\ln x$.

Полагаем $P = -\frac{1}{x}$, $Q = -\ln x$: $z = e^{\int\frac{dx}{x}}\left(\int -\ln x e^{-\int\frac{dx}{x}}dx + C\right)$, $z = e^{\ln x}\left(\int -\ln x e^{-\ln x}dx + C\right)$,

$z = x\left(\int -\ln x\cdot\frac{dx}{x} + C\right)$, $z = x\left(-\int \ln x d(\ln x) + C\right)$, $z = x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C\right)$.

Произведя обратную подстановку, получаем: $\frac{1}{y} = x\left(-\frac{\ln^2 x}{2} + C\right)$.

Пример 2: Решить уравнение $xy' - 4y = x^2\sqrt{y}.$

Решение: Разделим обе части уравнения на $x\sqrt{y}$: $\frac{1}{\sqrt{y}}\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x}\sqrt{y} = x.$

Полагаем $z = \sqrt{y}$, $z' = \frac{1}{2\sqrt{y}}y'$, $y' = 2\sqrt{y}z'$, $\frac{1}{\sqrt{y}}2\sqrt{y}z' - \frac{4}{x}z = x$, $\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = \frac{x}{2}$.

Получили линейное неоднородное дифференциальное уравнение. Рассмотрим соответствующее ему линейное однородное уравнение:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2z}{x} = 0, \qquad \frac{dz}{dx} = \frac{2z}{x}, \qquad \frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x},$$

$$\int\frac{dz}{z} = 2\int\frac{dx}{x} + C_1, \quad \ln z = 2\ln x + \ln C, \quad z = Cx^2.$$

Полагаем C=C(x) и подставляем полученный результат в линейное неоднородное уравнение, с учетом того, что: $\frac{dz}{dx} = 2xC(x) + x^2\frac{dC(x)}{dx}$, $2xC(x) + x^2\frac{dC(x)}{dx} - \frac{2x^2C(x)}{x} = \frac{x}{2}$, $\frac{dC(x)}{dx} = \frac{1}{2x}$, $C(x) = \frac{1}{2}\ln x + C_2$.

Получаем: $z = x^2\left(C_2 + \frac{1}{2}\ln x\right)$.

Применяя обратную подстановку, получаем окончательный ответ: $y = x^4\left(C_2 + \frac{1}{2}\ln x\right)^2$.

1.6. Уравнения в полных дифференциалах (тотальные)

✦**Опр.** ДУ уравнение первого порядка вида $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ называется **уравнением в полных дифференциалах**, если левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции $u = F(x,y)$.

Интегрирование такого уравнения сводится к нахождению функции *u*, после чего решение легко находится в виде: $du = 0;\quad u = C$.

Таким образом, для решения надо определить:

1) в каком случае левая часть уравнения представляет собой полный дифференциал функции *u*;

2) как найти эту функцию.

Если дифференциальная форма $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ является полным дифференциалом некоторой функции *u*, то можно записать:

$$du = M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy.$$

Т.е. $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = M(x,y) \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) \end{cases}$.

Найдем смешанные производные второго порядка, продифференцировав первое уравнение по *y*, а второе – по *x*:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x} \end{cases}.$$

Приравнивая левые части уравнений, получаем **необходимое и достаточное условие** того, что левая часть дифференциального уравнения является полным дифференциалом. Это условие также называется **условием тотальности.**

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$$

Теперь рассмотрим вопрос о нахождении собственно функции *u.*

Проинтегрируем равенство $\frac{\partial u}{\partial x} = M(x,y):\quad u = \int M(x,y)dx + C(y).$

Вследствие интегрирования получаем не постоянную величину С, а некоторую функцию С(у), т.к. при интегрировании переменная *y* полагается постоянным параметром.

Определим функцию С(у).

Продифференцируем полученное равенство по *y*.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = N(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + C'(y).$$

Откуда получаем: $C'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx.$

Для нахождения функции С(у) необходимо проинтегрировать приведенное выше равенство. Однако, перед интегрированием надо доказать, что функция С(у) не зависит от *x*. Это условие будет выполнено, если производная этой функции по *x* равна нулю.

$$[C'(y)]'_x = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx = \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right) =$$

$$= \frac{\partial N(x,y)}{\partial x} - \frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = 0.$$

Теперь определяем функцию С(у): $C(y) = \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy + C$

Подставляя этот результат в выражение для функции *u*, получаем:

$$u = \int M(x,y)dx + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}M(x,y)dx\right]dy + C.$$

Тогда общий интеграл исходного дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$\int M(x,y)dx + \int\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}M(x,y)dx\right]dy = C.$$

Следует отметить, что при решении уравнений в полных дифференциалах не обязательно использовать полученную формулу. Решение может получиться более компактным, если просто следовать методу, которым формула была получена.

Пример: Решить уравнение $(3x^2 + 10xy)dx + (5x^2 - 1)dy = 0$.

Решение. Проверим условие тотальности: $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial(3x^2+10xy)}{\partial y} = 10x,$

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial(5x^2-1)}{\partial x} = 10x.$$

Условие тотальности выполняется, следовательно, исходное дифференциальное уравнение является уравнением в полных дифференциалах.

Определим функцию *u*.

$$u = \int M(x,y)dx + C(y) = \int(3x^2 + 10xy)dx + C(y) = x^3 + 5x^2y + C(y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=5x^2+C'(y)=N(x,y)=5x^2-1,\quad C'(y)=-1,\quad C(y)=\int(-1)dy=-y+C_1.$$

Итого, $u=x^3+5x^2y-y+C_1$.

Находим общий интеграл исходного дифференциального уравнения:

$$u=x^3+5x^2y-y+C_1=C_2;.\quad x^3+5x^2y-y=C.$$

1.7. Уравнения вида $y=f(y')$ и $x=f(y')$

Решение уравнений, не содержащих в одном случае аргумента *x*, а в другом – функции *y*, ищем в параметрической форме, принимая за параметр производную неизвестной функции:

$$y'=p.$$

Для уравнения первого типа получаем: $y=f(p),\qquad y'=f'(p)\dfrac{dp}{dx}$.

Делая замену, получаем: $p=f'(p)\dfrac{dp}{dx}$.

В результате этих преобразований имеем дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными: $dx=\dfrac{f'(p)}{p}dp,\qquad x=\displaystyle\int\frac{f'(p)}{p}dp+C$.

Общий интеграл в параметрической форме представляется системой уравнений:

$$\begin{cases}x=\displaystyle\int\frac{f'(p)}{p}dp+C\\ y=f(p)\end{cases}.$$

Исключив из этой системы параметр p, получим общий интеграл и не в параметрической форме.

Для дифференциального уравнения вида $x=f(y')$ с помощью той же самой подстановки и аналогичных рассуждений получаем результат: $\begin{cases}y=\displaystyle\int pf'(p)dp+C\\ x=f(p)\end{cases}$.

Пример: Проинтегрировать уравнение $x=y'\sin y'+\cos y'.$.

Решение. Положим $y'=p$. Тогда $x=p\sin p+\cos p$.

Продифференцируем это равенство: $dx=(\sin p+p\cos p-\sin p)dp=p\cos pdp$ и подставим это значение dx в равенство $dy=pdx$: $dy=p^2\cos pdp$, т.е. $y=\int p^2\cos pdp=(p^2-2)\sin p+2p\cos p+C$.

Таким образом, общее решение в параметрической форме имеет вид:

$$\begin{cases}x=p\sin p+\cos p,\\ y=(p^2-2)\sin p+2p\cos p+C.\end{cases}$$

1.8. Уравнения Лагранжа и Клеро.

(Алекси Клод Клеро (1713 – 1765) французский математик)

✦**Опр.** **Уравнением Лагранжа** называется дифференциальное уравнение, линейное относительно x и y, коэффициенты которого являются функциями от y': $P(y')x+Q(y')y+R(y')=0$.

Для нахождения общего решение применяется подстановка $p=y'$.

$$y=xf(p)+\varphi(p),\quad f(p)=-\frac{P(y')}{Q(y')},\quad \varphi(p)=-\frac{R(y')}{Q(y')}.$$

Дифференцируя это уравнение, с учетом того, что $dy=pdx$, получаем: $pdx=f(p)dx+xf'(p)dp+\varphi'(p)dp.$

Если решение этого (линейного относительно x) уравнения есть $x=F(p,C)$, то общее решение уравнения Лагранжа может быть записано в виде: $\begin{cases}x=F(p,C)\\ y=xf(p)+\varphi(p)=F(p,C)f(p)+\varphi(p)\end{cases}$.

Пример 1: Проинтегрировать уравнение $y=xy'^2+y'^2$..

Решение. Положим $y'=p$. Тогда $y=xp^2+p^2$.

Продифференцируем это равенство: $dy=p^2dx+2pxdp+2pdp$. Производя замену $dy=pdx$, переходим к уравнению $pdx=p^2dx+2pxdp+2pdp$. Отсюда, сокращая на p, получаем уравнение с разделяющимися переменными

$$(1-p)dx=2(x+1)dp,\ \frac{dx}{x+1}=\frac{2dp}{1-p}.$$

Интегрируя его, находим $\ln(x+1)=-2\ln|x+1|+\ln C,\ x+1=\dfrac{C}{(p-1)^2}$. Используя данное уравнение $y=p^2(x+1)$, получим $y=Cp^2/(1-p^2)$.

Произведенное сокращение на p могло привести к потере особого решения; полагая $p=0$, находим из данного уравнения $y=0$.

Таким образом, общее решение в параметрической форме имеет вид:

$\begin{cases}x+1=\dfrac{C}{(p-1)^2}\\ y=Cp^2/(1-p^2)\end{cases}$ - общее решение; $y=0$ - особое решение.

В общем решении параметр *p* можно исключить и привести его к виду

$$(\sqrt{y}+\sqrt{x+1})^2=C.$$

✦**Опр.** **Уравнением Клеро** называется уравнение первой степени (т.е. линейное) относительно функции и аргумента вида: $y=xy'+\varphi(y')$.

Вообще говоря, уравнение Клеро является частным случаем уравнения Лагранжа.

С учетом замены $y' = p$, уравнение принимает вид: $y = xp + \varphi(p)$.

$$y' = p + x\frac{dp}{dx} + \varphi'(p)\frac{dp}{dx}; \qquad p = p + x\frac{dp}{dx} + \varphi'(p)\frac{dp}{dx}; \quad [x + \varphi'(p)]\frac{dp}{dx} = 0;$$

Это уравнение имеет два возможных решения: $dp = 0$ или $x + \varphi'(p) = 0$.

В первом случае: $p = c; \quad y = cx + \varphi(c)$.

Видно, что общий интеграл уравнения Клеро представляет собой семейство прямых линий.

Во втором случае решение в параметрической форме выражается системой уравнений:

$$\begin{cases} y = xp + \varphi(p) \\ x + \varphi'(p) = 0 \end{cases}.$$

Исключая параметр p, получаем второе решение $F(x, y) = 0$. Это решение не содержит произвольной постоянной и не получено из общего решения, следовательно, не является частным решением.

Это решение будет являться особым интегралом.

Пример 2: Проинтегрировать уравнение $y = xy' - e^{y'}$..

Решение. Положим $y' = p$. Тогда $y = xp - e^p$.

Продифференцируем это равенство: $dy = pdx + xdp - e^p dp$. Производя замену $dy = pdx$, переходим к уравнению $xdp - e^p dp = 0$, или $xdp - e^p dp = 0$. Отсюда, либо $dp = 0$, либо $x = e^p$.

При $x = e^p$, то $y = pe^p - e^p = (p-1)e^p$, и приходим к особому решению исходного уравнения $\begin{cases} x = e^p \\ y = (p-1)e^p \end{cases}$.

Исключая параметр *p* (в данном случае $p = \ln x$), находим особое решение в явном виде: $y = x(\ln x - 1)$.