Глава 1. Нормы вектора и матриц, мера обусловленности матрицы

Введем понятия норм вектора и матрицы, которые используются при «интегральной» оценке результатов операций, выполняемых над этими распределенными объектами.

1.1. Норма вектора

Норма вектора $\|x\|$ – положительная скалярная величина, вычисляемая через его компоненты $x_i, i = 1 \div n$ и явно или косвенно характеризующая его длину. Как и длина вектора, она должна удовлетворять следующим соотношениям:

$$\|x\| \geq 0, \quad \|cx\| = |c|\|x\|, \quad \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad (1.1)$$

Приведем три способа определения нормы вектора.

1. Кубическая норма

$$\|x\|_{куб} = \max_{i} |x_i| \qquad (1.2)$$

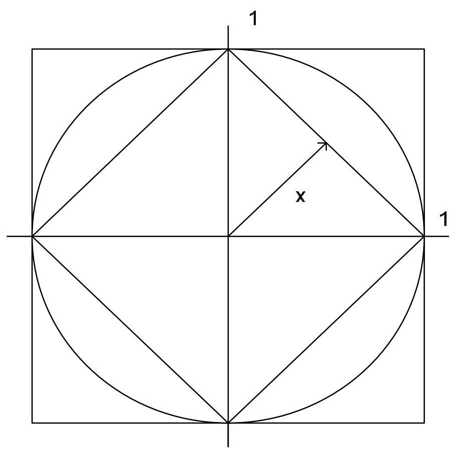
2. Октаэдрическая норма

$$\|x\|_{окт} = \sum_{i} |x_i| \qquad (1.3)$$

3. Сферическая норма

$$\|x\|_{сф} = \sqrt{\sum_{i} |x_i|^2} = \sqrt{(x, x)} \qquad (1.4)$$

Концы множества векторов, нормы которых удовлетворяют равенствам $\|x\|_{куб} = 1$, $\|x\|_{окт} = 1$ и $\|x\|_{сф} = 1$, нарисуют в n-мерном пространстве, соответственно, поверхности n- мерного куба, n-мерного октаэдра и n-мерной сферы. Это обстоятельство и объясняет их название.



Легко проверить, что все указанные нормы удовлетворяют трем соотношения (1.1).

Из рисунка (на котором для двумерного случая построены куб, октаэдр и сфера, соответствующие уравнениям: $\|x\|_{куб} = 1$, $\|x\|_{окт} = 1$ и $\|x\|_{сф} = 1$) видно, что для любого вектора x между этими нормами выполняются следующие соотношения

$$\|x\|_{окт} \geq \|x\|_{сф} \geq \|x\|_{куб}$$

Справедливость соотношения легко подтверждается на примере конкретного вектора $x = [1, 2, 3]$, для которого соответствующие нормы равны $\|x\|_{куб} = 3$, $\|x\|_{окт} = 6$ и $\|x\|_{сф} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14} \approx 3{,}74$.

Замечание. Из равенства норм двух векторов не следует равенство самих векторов, в то время как равные вектора всегда имеют равные нормы.

Приведем алгоритмы вычисления двух норм $\|x\|_{\text{куб}}$ и $\|x\|_{окт}$ (поскольку они одновременно демонстрируют, как можно найти максимальное значение и сумму любой последовательности чисел)

1.

$$
\begin{aligned}
& norm = 0 \\
& for\ i = 1, n \\
& \{ \\
& \quad buf = |x_i| \\
& \quad if\ buf > norm\ then\ norm = buf \\
& \}
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
& norm = 0 \\
& for\ i = 1, n \\
& \{ \\
& \quad norm = norm + |x_i| \\
& \}
\end{aligned}
$$

1.2. Норма матрицы

Норма матрицы $\|A\|$ – положительная скалярная величина, которая устанавливает соответствие между нормами исходного вектора $\|x\|$ и вектора, являющегосся результатом воздействия на исходный вектор матрицы $\|Ax\|$. При этом в зависимости от критерия, используемого для нахождения нормы матрицы

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\|$$

$$\|A\| = \sup_x \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

определяются два вида норм: согласованная и подчиненная (наименьшая из всех согласованных).

Выведем нормы матрицы подчиненные, соответственно, кубической, октаэдрической и сферической нормам вектора.

1.

$$\|Ax\|_{куб} = \max_i \left| \sum_j A_{ij} x_j \right| \leq \max_i \sum_j |A_{ij}| |x_j| \leq \max_j |x_j| \max_i \sum_j |A_{ij}| = \|x\|_{куб} \max_i \sum_j |A_{ij}|$$

Отсюда

$$\|A\|_{куб} = \max_i \sum_j |A_{ij}| \qquad (1.5)$$

2.

$$\|Ax\|_{окт} = \sum_i \left|\sum_j A_{ij} x_j\right| \le \sum_i \sum_j |A_{ij}||x_j| = \sum_j |x_j| \sum_i |A_{ij}| \le \max_j \sum_i |A_{ij}| \sum_j |x_j| =$$

$$= \|x\|_{окт} \max_j \sum_i |A_{ij}|$$

Отсюда

$$\|A\|_{окт} = \max_j \sum_i |A_{ij}| \qquad (1.6)$$

Замечание. Для любой симметричной матрицы $\|A\|_{\text{куб}} = \|A\|_{\text{окт}}$

3. $\|Ax\|^2_{сф} = (Ax, Ax) = (x, A^T Ax) = \ldots$

Матрица $A^T A$ симметричная и положительно определенная (т.к. $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$ и $(A^T Ax, x) = (Ax, Ax) > 0$). Поэтому она имеет полную линейно-независимую систему собственных векторов x^i, $i = 1 \div n$, а ее собственные числа действительные и положительные: $\Lambda_1 \ge \Lambda_2 \ge \ldots \ge \Lambda_n > 0$. Представим произвольный вектор x в виде разложения по этим векторам $x = \sum_i c_i x^i$ и подставим его в верхнее скалярное произведение

=(

$$\sum_i c_i x^i, \sum_i c_i A^T A x^i) = (\sum_i c_i x^i, \sum_i c_i \Lambda_i x^i) \le \Lambda_1 (\sum_i c_i x^i, \sum_i c_i x^i) = \Lambda_1 (x, x) = \Lambda_1 \|x\|^2_{сф}$$

Отсюда

$$\|A\|_{сф} = \sqrt{\Lambda_1} \qquad (1.7)$$

Замечание. Поскольку для симметричной матрицы $A^T A = A^2$, то $\Lambda_1 = \lambda_1^2$ и $\|A\|_{сф} = |\lambda_1|$.

Лабораторная работа

Реализовать следующие программы в математическом пакете Maxima.
На следующем занятии продемонстрировать их работу

1.

```
/* решение Ax=b методом Крамера */
kill(all);
numer:true;
fpprintprec:5;
  n:7;
/* задаем систему случайным образом */
```

```
A:zeromatrix(n,n); b:zeromatrix(n,1); x:zeromatrix(n,1);
for i thru n do for j thru n do A[i,j]:0.5-random(1.0);
/* находим b[i,1] для единичного решения */
for i thru n do for j thru n do b[i,1]:b[i,1]+A[i,j];
B:copy(A);
d:determinant(A);
for j thru n do(
  A:copy(B),
  for i thru n do A[i,j]:b[i,1],
  dm:determinant(A),x[j,1]:dm/d
);
print("Решение: ",x);
dx:zeromatrix(n,1);
A:copy(B);
for i thru n do(
  dx[i,1]:b[i,1],
  for j thru n do dx[i,1]:dx[i,1]-A[i,j]*x[j,1]
);
print("Невязка: " ,dx);
```

2.

```
/* нормы и прочее */
kill(all);
numer:true;
fpprintprec:5;
n:5;
nEvc(C):=block
(
   [i,j,n],
   n:length(C),
   nn:0,
   for i thru n do
     for j thru n do nn:nn+C[i,j]*C[i,j],
   return(sqrt(nn))
);

/* подпрограмма умножает транспонированную матрицу на исходную
  результат возвращает в матрице C2 */
Ct_C(C):=block
(
  [i,j,k,n,Ct],  /* локальные переменные подпрограммы */
  n:length(C),   /* определям размерность матрицы */
  C2:zeromatrix(n,n),   /* формируем нулевую матрицу, размерности n */
  Ct:transpose(C),        /* трансформируем матрицу */
  for i thru n do        /* три=1+2 вложенных цикла */
    for j thru n do for k thru n do C2[i,j]:C2[i,j]+Ct[i,k]*C[k,j]
);
/* задаем систему случайным образом */
A:zeromatrix(n,n); b:zeromatrix(n,1); x:zeromatrix(n,1);
for i thru n do for j thru n do A[i,j]:0.5-random(1.0);
print("Матрица A ", A);
```

```
/* функции вычисляют нормы матрицы: кубическая, октаэдрическая и евклидова  */
nrm1(A):=lmax(create_list(sum(abs(A[i,j]),j,1,length(A)),i,1,length(A)));
nrm2(A):=lmax(create_list(sum(abs(A[i,j]),i,1,length(A)),j,1,length(A)));
nrm4(A):=sqrt(sum(sum(A[i,j]^2,j,1,length(A)),i,1,length(A)));

Ct_C(A);
print("Матрица C2 ",C2);
print("Нормы симметричной матрицы C2: ",nrm1(C2),nrm2(C2),nrm4(C2));
print("Евкслидова нормы матрицы C2: ",nEvc(C2));
matrix([1,2,3],[2,3,4],[3,4,5]);
```