Образец

Лабораторная работа 2

Нахождение решения системы линейных уравнений методом Гаусса.

Студент гр Б22-544 Иванов П.Р.

1. Задание

Для случайных систем размерности 8, 16 (или 10, 20) с единичным решением найти это решение методом Гаусса с процедурой выбора ведущего элемента. Найти определитель матрицы, ее ранг и число перестановок при реализации метода. Посмотреть, что будет, если в процедуре выбора ведущего элемента отключить перестановку строк (набрать статистику, проведя 5 или 10 прогонов для обоих значений размерности системы). Сделать выводы.

2. Теория

В методе Гаусса исходная система $Ax = b$, начиная с левого столбца, путем $(n-1)$-го последовательного преобразования приводится к системе с верхней треугольной матрицей, Решение последней находится элементарно.

Приведем формулы, по которым выполняется k-ое преобразование. К данному моменту текущая расширенная матрица исходной системы (к исходной матрице добавлен столбец, состоящий из компонентов вектора b) имеет следующей вид

$$A^{(k-1)} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_{11} & - & A_{1k} & - & A_{1j} & - & A_{1n+1} \\ 0 & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & A_{kk} & - & A_{kj} & - & A_{k\,n+1} \\ 0 & 0 & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & A_{ik} & - & A_{ij} & - & A_{i\,n+1} \\ 0 & 0 & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & A_{nk} & - & - & - & A_{n\,n+1} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \ldots.k \\ \\ \ldots.i \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \qquad (1)$$

При k-ом преобразовании в матрице $A^{(k-1)}$ необходимо обнулить все компоненты k–го нижнего подстолбца, начиная с компонента A_{k+1k}.

Последнее осуществляется вычитанием из i-ой строки компонентов k-ой строки, умноженной на отношение $\frac{A_{ik}}{A_{kk}}$

$$A_{ij} = A_{ij} - A_{ik} \frac{A_{kj}}{A_{kk}}, \quad i = (k+1)..n, \;\; j = k..(n+1)$$

Алгоритм этой операции представлен ниже

$$\begin{array}{l}
for\ i = (k+1), n \\
\{ \\
\quad buf = \dfrac{A_{ik}}{A_{kk}} \\
\quad for\ \ j = k, (n+1) \\
\quad \{ \\
\quad\quad A_{ij} = A_{ij} - buf * A_{kj} \\
\quad \} \\
\}
\end{array} \qquad (2)$$

Поскольку нулевая нижняя подматрица в дальнейших операциях не используется, то нет необходимости ее явно обнулять. Исходя из этого, в алгоритме (2) внутренний цикл можно начинать со значения $k+1$.

Поместив последовательность операций (2) внутрь цикла по полному числу преобразований

$$for\ k = 1, (n-1)\ \{\ алгоритм\ (2.22)\ \}, \qquad (3)$$

получим алгоритм, приводящий исходную систему уравнений к эквивалентной системе с верхней треугольной матрицей.

Для уменьшения влияния ошибок округления и повышения устойчивости работы алгоритма (3) в нем перед началом очередного преобразования необходимо выполнять процедуру «выбора ведущего элемента».

Задачи этой процедуры:

- из оставшихся нижних строк поставить на место k-ой строки строку с максимальным по модулю элементом в k-ом нижнем подстолбце;

- проверить, что найденный максимальный элемент не равен нулю (матрица невырожденная);

- осуществить подсчет определителя исходной матрицы

Алгоритм процедуры выбора ведущего элемента приведен далее. Здесь nul - переменная для хранения машинного нуля, используемого для проверки действительных чисел на нуль (обычно $nul \le 10^{-10}$ и может корректироваться пользователем для фильтрации уровня ошибок округления, возникающих в процессе вычисления).

$\det = 1$ (*начальная инициализация перед запуском цикла* (3))

$--$ *процедура* $--$

$k\max = k$

$A\max = |A_{kk}|$

for $i = (k+1), n$

{

  $A\,\mathrm{mod} = |A_{ik}|$

  if $A\,\mathrm{mod} > A\max$ *then*

  {

    $A\max = A\,\mathrm{mod}$

    $k\max = i$

  }

}

if $A\max < nul\ (\approx 0)$ *then*

{

  $\det = 0$ (*матрица вырожденная*)

  выход из процедуры

}

if $k\max \neq k$ *then*

{

  for $j = k, (n+1)$ (*переставляем строки*)

  {

    $buf = A_{kj}$

    $A_{kj} = A_{(k\max)\,j}$

    $A_{(k\max)\,j} = buf$

  }

  $\det = -\det$

}

$\det = \det * A_{kk}$ (*вычисление определителя*)

3. Программа

```
/* Лабораторная работа 2 */
/* Метод Гаусса */
kill(all);
/* находим максимальный элемент в подстолбце матрицы, */
/* переставляем строки и вычисляем определитель */
maxElem(A,k):=block
(
   [buf,Amax,i,j,n],
   n:length(A),
   Amax:abs(A[k,k]),kmax:k,
   if fl=0 then(     /* ? - включина ли перестановка строк */
     for i:k+1 thru n do
     (
       buf:abs(A[i,k]),
       if buf>Amax then (Amax:buf,kmax:i)
     )
   ),
   if Amax<1.e-10 then return(det:0),
   if kmax#k then
   (
     for j:k thru n+1 do
     (
       buf:A[k,j],A[k,j]:A[kmax,j],A[kmax,j]:buf
     ),
```

```
     det:-det, m:m+1  /* подсчитываем число перестановок */
   ),
   det:det*A[k,k]
);
/* приводим матрицу к треугольному виду */
conv_Matr(A):=block
(
   [i,j,n,buf],
   n:length(A),
   rang:0,det:1,m:0, /* ранг, определитель, число перестановок */
   for k thru n-1 do
   (
      maxElem(A,k),
      if abs(det)=0 then return(det),
      rang:rang+1,
      for i:k+1 thru n do
      (
         buf:A[i,k]/A[k,k],
         for j:k thru n+1 do A[i,j]:A[i,j]-buf*A[k,j]
      )
   ),
   if abs(A[n,n])<1.e-10 then det:0 else (det:det*A[n,n],rang:rang+1)
);
/* находим решение */
```

```
fine_X(A,x):=block
(
   [i,j,n],
   n:length(A),
   x[n,1]:A[n,n+1]/A[n,n],
   for i:n-1 thru 1 step -1 do
   (
      x[i,1]:A[i,n+1],
      for j:i+1 thru n do x[i,1]:x[i,1]-A[i,j]*x[j,1],
      x[i,1]:x[i,1]/A[i,i]
   )
);
/* главная программа */
numer:true;
fpprintprec:5;
n:8;
fl:0;  /* использовать перестановку строк */
/* задаем систему случайным образом */
A:zeromatrix(n,n); b:zeromatrix(n,1);
x:zeromatrix(n,1);
for i thru n do for j thru n do A[i,j]:0.5-random(1.0);
for i thru n do for j thru n do b[i,1]:b[i,1]+A[i,j]; /*для единичного решения*/
A:addcol(A,b); /* строим расширенную матрицу */
B:copy(A);
```

```
print("Исходная расширенная матрица = ",A);
conv_Matr(A);
print("Определитель матрицы = ",det);
print("Ранг матрицы = ",rang);
print("Число перестановок строк = ",m);
print("Приведенная расширенная матрица = ",A);
fine_X(A,x);
print("Решение системы = ",x);
/* отключаем ПВВЭ */
x1:copy(x);


print("Отключили перестановку строк");
A:copy(B); fl:1;
conv_Matr(A);
print("Определитель матрицы = ",det);
print("Ранг матрицы = ",rang);
print("Число перестановок строк = ",m);
print("Приведенная расширенная матрица = ",A);
fine_X(A,x);
print("Решение системы = ",x);
dx:zeromatrix(n,1);
for i thru n do dx[i,1]:x1[i,1]-x[i,1];
print("Разность решений ",dx);
```

4. Результаты

Для n=8

$$
(A) \quad \begin{bmatrix}
0.49791 & 0.12059 & 0.030313 & -0.41565 & 0.42101 & 0.47123 & -0.12963 & 0.12365 & 1.1194 \\
-0.097794 & -0.44562 & 0.31104 & -0.39761 & -0.28423 & 0.11833 & 0.2463 & 0.49662 & -0.052964 \\
0.19148 & -0.15372 & 0.44936 & 0.42554 & 0.40196 & -0.19989 & -0.13663 & -0.018205 & 0.9599 \\
-0.22292 & -0.46708 & 0.289 & -0.49033 & -0.12486 & 0.13284 & -0.045589 & -0.050978 & -0.97992 \\
-0.11314 & -0.38195 & -0.45421 & -0.35294 & -0.33678 & -0.33842 & -0.44373 & -0.41624 & -2.8374 \\
-0.47526 & -0.34775 & -0.32006 & -0.23539 & -0.4717 & -0.49944 & 0.16121 & 0.46567 & -1.7227 \\
-0.15965 & -0.15501 & -0.37137 & -0.26112 & 0.28905 & 0.41292 & -0.045015 & 0.14106 & -0.14914 \\
-0.35862 & 0.22872 & -0.45733 & -0.0082415 & 0.49905 & 0.43701 & -0.26723 & -0.11525 & -0.041884
\end{bmatrix}
$$

Исходная расширенная матрица =

$$
\begin{bmatrix}
0.49791 & 0.12059 & 0.030313 & -0.41565 & 0.42101 & 0.47123 & -0.12963 & 0.12365 & 1.1 \\
-0.097794 & -0.44562 & 0.31104 & -0.39761 & -0.28423 & 0.11833 & 0.2463 & 0.49662 & -0.0 \\
0.19148 & -0.15372 & 0.44936 & 0.42554 & 0.40196 & -0.19989 & -0.13663 & -0.018205 & 0.9 \\
-0.22292 & -0.46708 & 0.289 & -0.49033 & -0.12486 & 0.13284 & -0.045589 & -0.050978 & -0.9 \\
-0.11314 & -0.38195 & -0.45421 & -0.35294 & -0.33678 & -0.33842 & -0.44373 & -0.41624 & -2. \\
-0.47526 & -0.34775 & -0.32006 & -0.23539 & -0.4717 & -0.49944 & 0.16121 & 0.46567 & -1. \\
-0.15965 & -0.15501 & -0.37137 & -0.26112 & 0.28905 & 0.41292 & -0.045015 & 0.14106 & -0.1 \\
-0.35862 & 0.22872 & -0.45733 & -0.0082415 & 0.49905 & 0.43701 & -0.26723 & -0.11525 & -0.0
\end{bmatrix}
$$

Определитель матрицы = −0.00

Ранг матрицы = 8

Число перестановок строк = 3

Приведенная расширенная матрица =

$$\begin{bmatrix} 0.49791 & 0.12059 & 0.030313 & -0.41565 & 0.42101 & 0.47123 & -0.12963 & 0.12365 & 1.1194 \\ 0.0 & -0.42193 & 0.31699 & -0.47925 & -0.20154 & 0.21088 & 0.22084 & 0.52091 & 0.1669 \\ 0.0 & 0.0 & -0.71369 & -0.044671 & -0.071756 & -0.40855 & -0.65876 & -0.82585 & -2.723 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.79468 & 0.30673 & -0.64562 & -0.45676 & -0.64533 & -0.646 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.92378 & 0.51668 & -0.38798 & 0.062203 & 1.1147 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.29682 & 0.24301 & 0.54582 & 0.49201 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 2.7756\,10^{-17} & 0.578 & 0.74564 & 1.3236 \\ 0.0 & 0.0 & -2.7756\,10^{-17} & 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 & -0.48588 & -0.4858 \end{bmatrix}$$

$$\textit{Решение системы} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

Отключили перестановку строк

(A)

0.49791	0.12059	0.030313	−0.41565	0.42101	0.47123	−0.12963	0.12365
−0.097794	−0.44562	0.31104	−0.39761	−0.28423	0.11833	0.2463	0.49662
0.19148	−0.15372	0.44936	0.42554	0.40196	−0.19989	−0.13663	−0.018205
−0.22292	−0.46708	0.289	−0.49033	−0.12486	0.13284	−0.045589	−0.050978
−0.11314	−0.38195	−0.45421	−0.35294	−0.33678	−0.33842	−0.44373	−0.41624
−0.47526	−0.34775	−0.32006	−0.23539	−0.4717	−0.49944	0.16121	0.46567
−0.15965	−0.15501	−0.37137	−0.26112	0.28905	0.41292	−0.045015	0.14106
−0.35862	0.22872	−0.45733	−0.0082415	0.49905	0.43701	−0.26723	−0.11525

Определитель матрицы = −0.00

Ранг матрицы = 8

Число перестановок строк = 0

Приведенная расширенная матрица =

0.49791	0.12059	0.030313	−0.41565	0.42101	0.47123	−0.12963	0.12
0.0	−0.42193	0.31699	−0.47925	−0.20154	0.21088	0.22084	0.52
0.0	0.0	0.28737	0.81267	0.33563	−0.48112	−0.19151	−0.3
0.0	0.0	0.0	−0.18521	0.27004	0.12433	−0.32503	−0.5
0.0	0.0	0.0	0.0	3.6393	−0.27855	−4.5978	−7.0
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	−0.15765	0.4276	0.9
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	2.5907	5.4
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.55

$$\text{Решение системы} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

Разность решений $\begin{bmatrix} -3.6637 \cdot 10^{-15} \\ 8.4377 \cdot 10^{-15} \\ 6.4393 \cdot 10^{-15} \\ -1.1102 \cdot 10^{-15} \\ -4.885 \cdot 10^{-15} \\ 1.1102 \cdot 10^{-16} \\ -1.088 \cdot 10^{-14} \\ 4.3299 \cdot 10^{-15} \end{bmatrix}$

Для n=16

Привести только результаты.

5. Выводы

Что изменилось?..........

Литература

1. Козин Р.Г. Алгоритмы численных методов линейной алгебры и их программная реализация. М.: НИЯУ МИФИ, 2019. – 252 с.

2. …….