Образец

Лабораторная работа 2

Нахождение решения системы линейных уравнений методом верхней релаксации.

Студент гр Б22-544 **Иванов П.Р.**

1. Задание

Для случайных систем размерности 4, 8 с единичным решением найти это решение методом Гаусса с процедурой выбора ведущего элемента. Найти определитель матрицы, ее ранг и число перестановок при реализации метода

2. Теория

В методе Гаусса исходная система $Ax = b$, начиная с левого столбца, путем $(n-1)$-го последовательного преобразования приводится к системе с верхней треугольной матрицей, Решение последней находится элементарно.

Приведем формулы, по которым выполняется k-ое преобразование. К данному моменту текущая расширенная матрица исходной системы (к исходной матрице добавлен столбец, состоящий из компонентов вектора b) имеет следующей вид

$$A^{(k-1)} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} A_{11} & - & A_{1k} & - & A_{1j} & - & A_{1n+1} \\ 0 & - & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & A_{kk} & - & A_{kj} & - & A_{kn+1} \\ 0 & 0 & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & A_{ik} & - & A_{ij} & - & A_{in+1} \\ 0 & 0 & - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & A_{nk} & - & - & - & A_{nn+1} \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ ....k \\ \\ ....i \\ \\ \\ \end{array} \end{array} \qquad (1)$$

При k-ом преобразовании в матрице $A^{(k-1)}$ необходимо обнулить все компоненты k –го нижнего подстолбца, начиная с компонента A_{k+1k}.

Последнее осуществляется вычитанием из i-ой строки компонентов k-ой строки, умноженной на отношение $\frac{A_{ik}}{A_{kk}}$

$$A_{ij} = A_{ij} - A_{ik}\frac{A_{kj}}{A_{kk}}, \quad i = (k+1)..n, \;\; j = k..(n+1)$$

Алгоритм этой операции представлен ниже

$$\begin{array}{l}
for\ i = (k+1), n \\
\{ \\
\quad buf = \dfrac{A_{ik}}{A_{kk}} \\
\quad for\ \ j = k, (n+1) \\
\quad \{ \\
\quad\quad A_{ij} = A_{ij} - buf * A_{kj} \\
\quad \} \\
\}
\end{array} \qquad (2)$$

Поскольку нулевая нижняя подматрица в дальнейших операциях не используется, то нет необходимости ее явно обнулять. Исходя из этого, в алгоритме (2) внутренний цикл можно начинать со значения $k+1$.

Поместив последовательность операций (2) внутрь цикла по полному числу преобразований

$$for\ k = 1,(n-1)\ \{\ алгоритм\ (2.22)\ \}, \qquad (3)$$

получим алгоритм, приводящий исходную систему уравнений к эквивалентной системе с верхней треугольной матрицей.

Для уменьшения влияния ошибок округления и повышения устойчивости работы алгоритма (3) в нем перед началом очередного преобразования необходимо выполнять процедуру «выбора ведущего элемента».

Задачи этой процедуры:

- из оставшихся нижних строк поставить на место k-ой строки строку с максимальным по модулю элементом в k-ом нижнем подстолбце;

- проверить, что найденный максимальный элемент не равен нулю (матрица невырожденная);

- осуществить подсчет определителя исходной матрицы

Алгоритм процедуры выбора ведущего элемента приведен далее. Здесь nul - переменная для хранения машинного нуля, используемого для проверки действительных чисел на нуль (обычно $nul \le 10^{-10}$ и может корректироваться пользователем для фильтрации уровня ошибок округления, возникающих в процессе вычисления).

$\det = 1$ (*начальная инициализация перед запуском цикла* (3))

$--$ *процедура* $--$

$k\max = k$

$A\max = |A_{kk}|$

$for\ i = (k+1), n$

$\{$

$\quad A\mathrm{mod} = |A_{ik}|$

$\quad if\ \ A\mathrm{mod} > A\max\ then$

$\quad \{$

$\quad\quad A\max = A\mathrm{mod}$

$\quad\quad k\max = i$

$\quad \}$

$\}$

$if\ \ A\max < nul\ (\approx 0)\ then$

$\{$

$\quad \det = 0$ (*матрица вырожденная*)

$\quad$ *выход из процедуры*

$\}$

$if\ \ k\max \neq k\ then$

$\{$

$\quad for\ \ j = k, (n+1)$ (*переставляем строки*)

$\quad \{$

$\quad\quad buf = A_{kj}$

$\quad\quad A_{kj} = A_{(k\max)\, j}$

$\quad\quad A_{(k\max)\, j} = buf$

$\quad \}$

$\quad \det = -\det$

$\}$

$\det = \det{}^{*} A_{kk}$ (*вычисление определителя*)

3. Программа

```
/* Лабораторная работа 2 */
/* Метод Гаусса */
kill(all);
/* находим максимальный элемент в подстолбце матрицы, */
/* переставляем строки и вычисляем определитель */
maxElem(A,k):=block
(
   [buf,Amax,i,j,n],
   n:length(A),
   Amax:abs(A[k,k]),kmax:k,
   for i:k+1 thru n do
   (
     buf:abs(A[i,k]),
     if buf>Amax then (Amax:buf,kmax:i)
   ),
   if Amax<1.e-10 then return(det:0),
   if kmax#k then
   (
     for j:k thru n+1 do
     (
       buf:A[k,j],A[k,j]:A[kmax,j],A[kmax,j]:buf
     ),
     det:-det, m:m+1  /* подсчитываем число перестановок */
   ),
```

```
   det:det*A[k,k]
);
/* приводим матрицу к треугольному виду */
conv_Matr(A):=block
(
   [i,j,n,buf],
   n:length(A),
   rang:0,det:1,m:0, /* ранг, определитель, число перестановок */
   for k thru n-1 do
   (
      maxElem(A,k),
      if abs(det)=0 then return(det),
      rang:rang+1,
      for i:k+1 thru n do
      (
         buf:A[i,k]/A[k,k],
         for j:k thru n+1 do A[i,j]:A[i,j]-buf*A[k,j]
      )
   ),
   if abs(A[n,n])<1.e-10 then det:0 else (det:det*A[n,n],rang:rang+1)
);
/* находим решение */
fine_X(A,x):=block
(
```

```
   [i,j,n],
   n:length(A),
   x[n,1]:A[n,n+1]/A[n,n],
   for i:n-1 thru 1 step -1 do
   (
     x[i,1]:A[i,n+1],
     for j:i+1 thru n do x[i,1]:x[i,1]-A[i,j]*x[j,1],
     x[i,1]:x[i,1]/A[i,i]
   )
);
/* главная программа */
numer:true;
fpprintprec:5;
n:4;
/* задаем систему случайным образом */
A:zeromatrix(n,n); b:zeromatrix(n,1); x:zeromatrix(n,1);
for i thru n do for j thru n do A[i,j]:0.5-random(1.0);
for i thru n do for j thru n do b[i,1]:b[i,1]+A[i,j]; /*для единичного решения*/
A:addcol(A,b); /* строим расширенную матрицу */
print("Исходная расширенная матрица = ",A);
conv_Matr(A);
print("Определитель матрицы = ",det);
print("Ранг матрицы = ",rang);
print("Число перестановок строк = ",m);
```

```
print("Приведенная расширенная матрица = ",A);
fine_X(A,x);
print("Решение системы = ",x);
```

Результаты

Для n=4

$$(A)\quad \begin{bmatrix} -0.41381 & 0.30482 & 0.017609 & 0.14456 & 0.053175 \\ 0.24776 & 0.084437 & -0.11257 & -0.34181 & -0.12219 \\ -0.0055894 & -0.17846 & 0.46361 & -0.1253 & 0.15426 \\ -0.49373 & 0.45841 & -0.13263 & -0.093152 & -0.2611 \end{bmatrix}$$

$$\textit{Исходная расширенная матрица} = \begin{bmatrix} -0.41381 & 0.30482 & 0.017609 & 0.14456 & 0.053175 \\ 0.24776 & 0.084437 & -0.11257 & -0.34181 & -0.12219 \\ -0.0055894 & -0.17846 & 0.46361 & -0.1253 & 0.15426 \\ -0.49373 & 0.45841 & -0.13263 & -0.093152 & -0.2611 \end{bmatrix}$$

Определитель матрицы = 0.0115

Ранг матрицы = 4

Число перестановок строк = 1

$$\textit{Приведенная расширенная матрица} = \begin{bmatrix} -0.49373 & 0.45841 & -0.13263 & -0.093152 & -0.2611 \\ 2.7756\ 10^{-17} & 0.31447 & -0.17913 & -0.38856 & -0.2532 \\ 0.0 & 0.0 & 0.3605 & -0.35116 & 0.009339 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 0.20592 & 0.20592 \end{bmatrix}$$

$$\text{Решение системы} = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}$$

Для n=8

Привести только результаты. Что изменилось?