

Образец

Лабораторная работа 1

Нахождение решения системы линейных уравнений методом верхней релаксации.

Студент гр Б22-544

Иванов П.Р.

1. Задание

Для случайных систем размерности 3, 5 с симметричной положительно определенной матрицей и единичным решением найти оптимальное значения параметра релаксации t . Построить графики зависимости числа итераций от значения параметра

2. Теория

Алгоритм метода верхней релаксации:

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \tau)x_i^{(k)} + \frac{\tau}{A_{ii}} [b_i - (\sum_{j=1}^{i-1} A_{ij}x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i+1}^n A_{ij}x_j^{(k)})], \quad i = 1, n$$

```

code = 0,   fl = 0,   norm_old = 0,   τ1 = 1 - τ
for i = 1, n   – нормировка уравнений, задание x0
{
    xi = bi
    if |Ai| < 10-30 (≈ 0) then { code = 1, exit sub}
    bi = τ bi / Ai
    for j = 1, n   { if i ≠ j then Aj = τ Aj / Ai }
}
for k = 1, K   – цикл по итерациям
{
    norm = 0
    for i = 1, n   – цикл по уравнениям
    {
        buf = τ1 xi + bi
        for j = 1, n { if i ≠ j then buf = buf - Aj xj }
        nt = |buf - xi|
        xi = buf
        if nt > norm then norm = nt
    }
    if norm ≤ ε then { K = k, ε = norm, exit sub}
    if norm > norm_old then fl = fl + 1 else fl = 0
    if fl > 5 then { code = 2, exit sub}
    norm_old = norm
}

```

Здесь Входные параметры процедуры: $A, b, n, x, \tau, K, \varepsilon$. Используются буферные переменные: τ_1, buf, nt .

3. Программа

```
/* !!! лабораторная работа 1 !!! */
```

```

kill(all);

/* п/п метода верхней релаксации */

metod.UR(A,n,t,eps,k_Max):=block
(
  [i,j,k,norm_old,nt,fl,t1,norm,buf],
  code:0,norm_old:0,fl:0,t1:1-t,k_Out:0,
  /* нормировка системы */
  for i thru n do
  (
    A[i,n+2]:A[i,n+1],
    if abs(A[i,i])<0.00000001 then return(code:1),
    A[i,n+1]:t*A[i,n+1]/A[i,i],
    for j thru n do if i#j then A[i,j]:t*A[i,j]/A[i,i]
  ),
  /* цикл по итерациям */
  for k thru k_Max do
  (
    norm:0,k_Out:k_Out+1,
    /* цикл по уравнениям */
    for i thru n do
    (
      buf:t1*A[i,n+2]+A[i,n+1],
      /* обработка текущего уравнения */
      for j thru n do if i#j then buf:buf-A[i,j]*A[j,n+2],
    )
  )
)

```

```

nt:abs(buf-A[i,n+2]), A[i,n+2]:buf,
if nt>norm then norm:nt
),
if norm<=eps then (eps_Out:norm, return(code:0)),
if norm>norm_old then fl:fl+1 else fl:0,
if fl>3 then (eps_Out:norm,return(code:2)),
norm_old:nom
)
);

/* главная программа */

numer:true;
fpprintprec:5;

n:3; /* размерность системы */
eps:0.00001; k_Max:5000; t:1;

A:zeromatrix(n,n); b:zeromatrix(n,1); x:zeromatrix(n,1);

/* формируем систему случайными числами */
for i thru n do for j thru n do A[i,j]:random(1.0)-0.5;

A:transpose(A).A;

/* for i thru n do b[i]:random(1.0)-0.5; */

for i thru n do for j thru n do b[i]:b[i]+A[i,j];

A:addcol(A,b,x); /* формируем расширенную матрицу */

/* сохраняем эту матрицу для дальнейшего использования */

A_old:copy(A);

metod_UR(A,n,t,eps,k_Max);

```

```

print("code, eps, k : ",code,eps_Out,k_Out);
eps; k_Max;
for i thru n do x[i,1]:A[i,n+2];
print("Единичное решение ",x); /* решение */
/* строим зависимость */
t:0.05; dt:0.05; Lt:[]; Lk:[]; topt:5;k_Min:k_Max;
for i thru 45 do
(
  A:copy(A_old), metod_UR(A,n,t,eps,k_Max),
  if code=0 then (Lt:append(Lt,[t]), Lk:append(Lk,[k_Out])),
  if (code=0 and k_Out<k_Min) then (topt:t, k_Min:k_Out),
  t:t+dt
);
print("Списки значений t и числа итераций",Lt,Lk);
print("Оптимальные значения параметра t и итераций",topt,k_Min);
plot2d([discrete,Lt,Lk],[gnuplot_preamble,"set grid:"],[xlabel,"параметр - t"],
[ylabel,"число использованных итераций - iter"]);

```

Результаты

Для n=3

$$(A) \begin{bmatrix} 0.27982 & -0.17575 & 0.072808 \\ -0.17575 & 0.11817 & 0.004815 \\ 0.072808 & 0.004815 & 0.34982 \end{bmatrix}$$

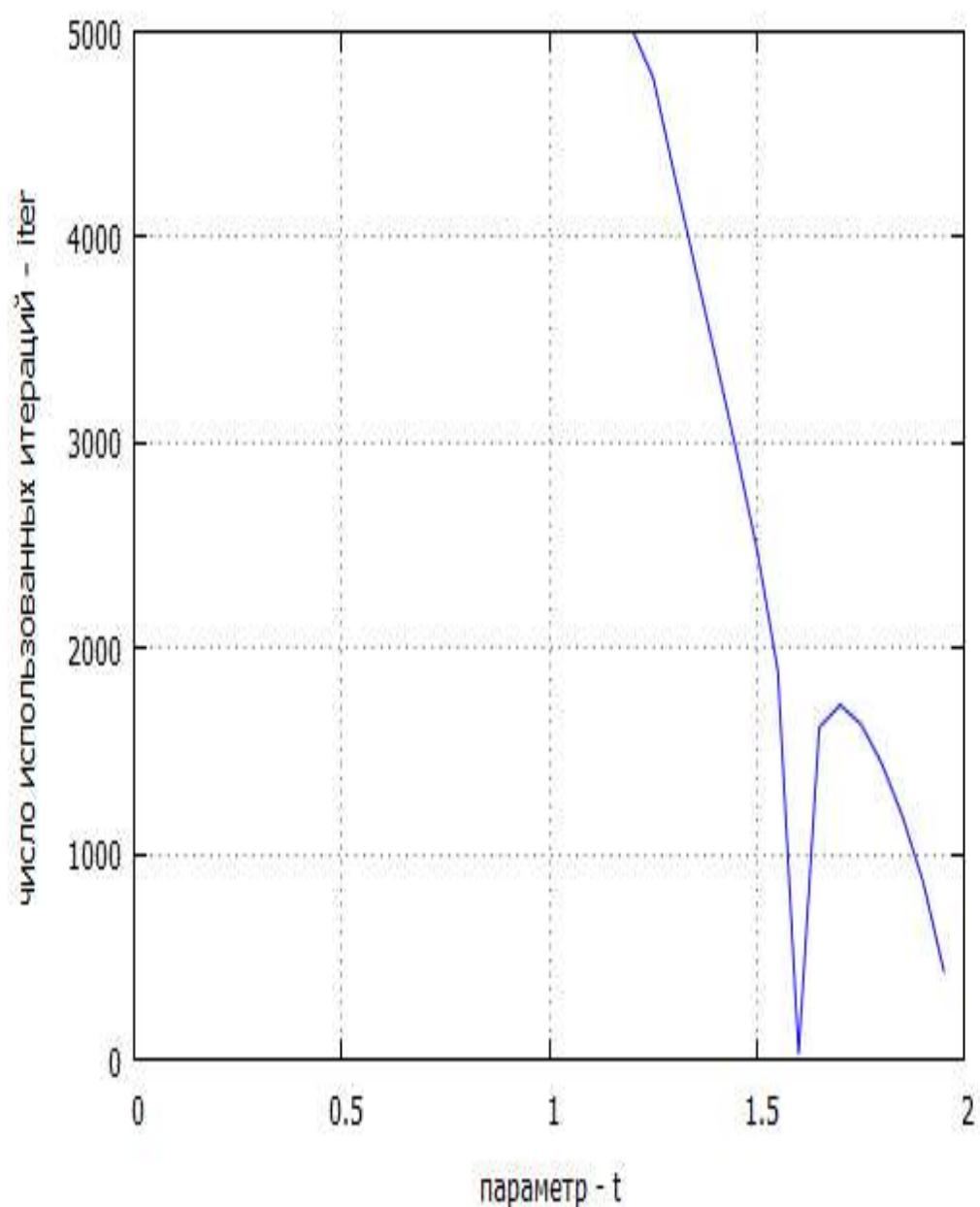
$$(A) \begin{bmatrix} 0.27982 & -0.17575 & 0.072808 & 0.176 \\ -0.17575 & 0.11817 & 0.004815 & -0.052 \\ 0.072808 & 0.004815 & 0.34982 & 0.427 \end{bmatrix}$$

расширенная

code, eps, k : 0 eps Out 500

<i>Единичное решение</i>	$\begin{bmatrix} 0.95554 \\ 0.93345 \\ 1.0102 \end{bmatrix}$
--------------------------	--

Списки значений t и числа итераций [0.05, 0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3, 0.35, 0.4, 0.45, 0.5, 0.55, 0.7, 0.75, 0.8, 0.85, 0.9, 0.95, 1.0, 1.05, 1.1, 1.15, 1.2, 1.25, 1.3, 1.35, 1.4, 1.45, 1.5, 1.55, 1.7, 1.75, 1.8, 1.85, 1.9, 1.95] [5000, 4776, 4313, 3861, 3414, 2961, 1894, 25, 1616, 1724, 1632, 1442, 1184, 864, 431]



Оптимальное значение параметра t и итераций 1.6

Для n=5

(A)
$$\begin{bmatrix} 0.42423 & -0.157 & -0.099742 & 0.08388 & -0.081347 & 0.17003 & 0 \\ -0.157 & 0.55367 & -0.30038 & 0.069296 & -0.15145 & 0.014146 & 0 \\ -0.099742 & -0.30038 & 0.47526 & -0.10416 & 0.23101 & 0.20199 & 0 \\ 0.08388 & 0.069296 & -0.10416 & 0.14077 & 0.062911 & 0.2527 & 0 \\ -0.081347 & -0.15145 & 0.23101 & 0.062911 & 0.35605 & 0.41718 & 0 \end{bmatrix}$$

code, eps, k : 0 $9.3643 \cdot 10^{-6}$

Единичное решение

$$\begin{bmatrix} 0.99999 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 0.99998 \end{bmatrix}$$

Оптимальные значения параметра t и итераций 1.25 :

Замечание !!!

Иногда при запуске программы для построенной системы приемлемые

значения параметра t могут располагаться в области $t>1$. Значит надо запустить программу еще раз, чтобы получить другую случайную систему.