МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МО ЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №1
по дисциплине «Построение и анализ алгоритмов»
ТЕМА: Поиск с возвратом

Студент гр. 9382 _____ Юрьев С.Ю.

Преподаватель _____ Фирсов М.А.

Санкт-Петербург
2021

Цель работы.

Применить на практике алгоритм поиска с возвратом для заполнения квадрата минимальным количеством меньших квадратов.

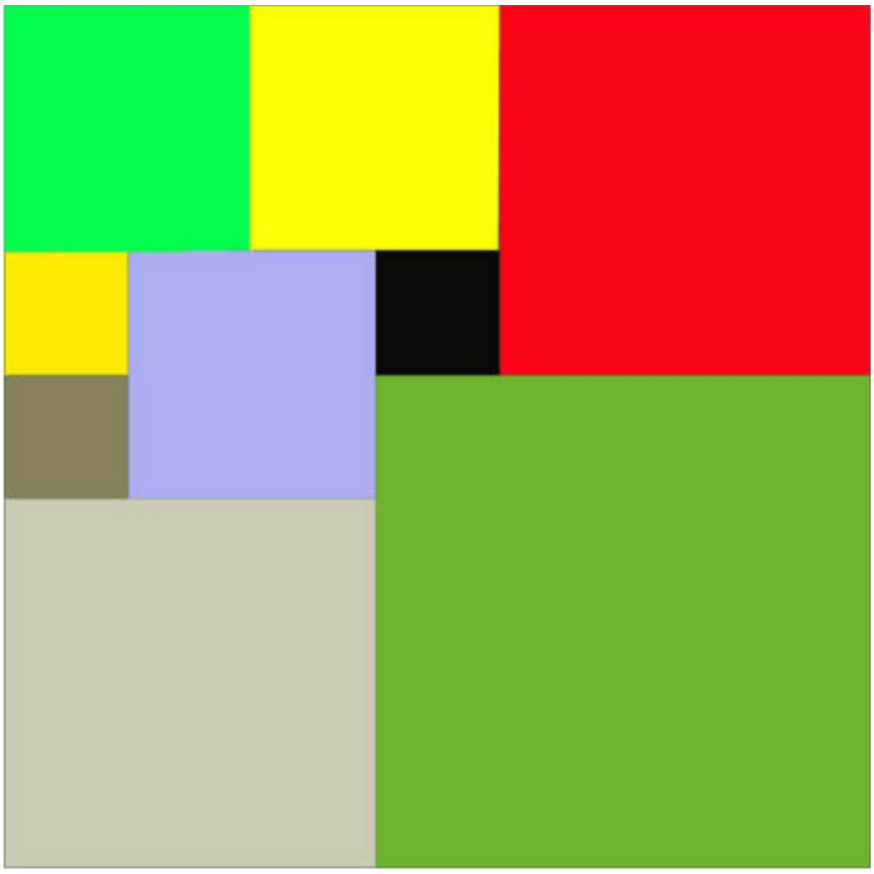
Вариант 3р.

Рекурсивный бэктрекинг. Исследование количества операций от размера квадрата.

Задание.

У Вовы много квадратных обрезков доски. Их стороны (размер) изменяются от 1 до N−1, и у него есть неограниченное число обрезков любого размера. Но ему очень хочется получить большую столешницу - квадрат размера N. Он может получить ее, собрав из уже имеющихся обрезков(квадратов).

Например, столешница размера 7 x 7 может быть построена из 9 обрезков.



Внутри столешницы не должно быть пустот, обрезки не должны выходить за пределы столешницы и не должны перекрываться. Кроме того, Вова хочет использовать минимально возможное число обрезков.

Входные данные

Размер столешницы - одно целое число N ($2 \le N \le 20$).

Выходные данные

Одно число K, задающее минимальное количество обрезков (квадратов), из которых можно построить столешницу (квадрат) заданного размера N. Далее должны идти K строк, каждая из которых должна содержать три целых числа x, y и w, задающие координаты левого верхнего угла ($1 \le x,y \le N$) и длину стороны соответствующего обрезка(квадрата).

Пример входных данных

7

Соответствующие выходные данные

9

1 1 2

1 3 2

3 1 1

4 1 1

3 2 2

5 1 3

4 4 4

1 5 3

3 4 1

Теоретические сведения.

Бэктрекинг (поиск с возвратом) – это общий метод нахождения решений задачи, в которой требуется полный перебор всех возможных вариантов в некотором множестве. Решение задачи методом поиска с возвратом сводится

к последовательному расширению частичного решения. Если на очередном шаге такое расширение провести не удается, то возвращаются к более короткому частичному решению и продолжают поиск дальше. Данный алгоритм позволяет найти все решения поставленной задачи, если они существуют. Для ускорения метода стараются вычисления организовать таким образом, чтобы как можно раньше выявлять заведомо неподходящие варианты. Зачастую это позволяет значительно уменьшить время нахождения решения.

Описание алгоритма.

Цель алгоритма — найти наименьшее количество квадратов, которыми можно заполнить исходный квадрат со стороной N.

Сам алгоритм заключается в следующем:

1) Создание структур для хранения промежуточной информации и информации о лучшей попытке заполнения начального квадрата.

2) Вставка 3 начальных квадратов, заполняющих 75% площади начального квадрата.

3) Рекурсивный перебор всех возможных заполнений свободного пространства:

При каждом вызове рекурсии происходит проверка на то, может ли текущее разбиение быть лучше уже найденного ранее минимального разбиения. Если не может — рекурсия прерывается, в противном случае — вычисления продолжаются.

Далее идет цикличный поиск незанятого пространства. При его нахождении происходит проверка на возможность вставить сюда обрезок указанного размера. Размер обрезка определяется с помощью перебора

вариантов, начиная с наибольших.

При нахождении подходящего обрезка он вставляется в начальный квадрат и в массив обрезков текущего разбиения.

При полном заполнении начального квадрата происходит сравнение текущего количества обрезков с найденным ранее минимальным.

При нахождении заполнения свободного пространства меньшим количеством обрезков следует сохранение результата, как наилучшего в специальный массив. При нахождении заполнения таким же количеством квадратов или большим сохранение не производится.

После этого происходит поочередное уничтожение вставленных обрезков с попытками вставить обрезки меньших размеров.

Частичные решения алгоритма хранятся сразу в двух видах: в виде частично заполненного начального квадрата и массива вставленных обрезков.

4) Вывод лучшего разбиения из специального массива.

Описание рекурсивной функции.

void findTaskAnswerWithRecursion(std::vector<std::vector<int>>& visSqr, int freeAreaOfMainSquare, int currentSizeOfAddedSquare, int currentCountOfAddedSquares, std::vector<Square>& currentArrOfAddedSquares, int spacesCount, int sideLenOfMainSquare, int& bestSquaresCount, std::vector<Square>& bestArrOfAddedSquares)

- это рекурсивная функция, принимающая следующие аргументы:

visSqr — ссылка на заполняемый квадрат; freeAreaOfMainSquare — свободная площадь начального квадрата; currentSizeOfAddedSquare — размер

вставляемого обрезка; currentCountOfAddedSquares — текущее количество уже вставленных обрезков; currentArrOfAddedSquares — ссылка на массив вставленных обрезков с текущей попытки; spacesCount — количество отступов для вывода промежуточной информации; sideLenOfMainSquare — длина стороны начального квадрата; bestSquaresCount — пока что лучшее количество обрезков, которыми можно покрыть начальный квадрат; bestArrOfAddedSquares — ссылка на массив обрезков пока что лучшего разложения.

Принцип работы функции:

В начале идет проверка-оптимизация, которая сравнивает текущее количество обрезков с лучшим, и если разница между ними равна единице при ненулевой свободной площади начального квадрата, то функция завершается.

После этого функция начинает рекурсивно себя вызывать для перебора всех возможных вариантов заполнения квадрата, после чего пробует вставить в пустое место начального квадрата обрезок размера currentSizeOfAddedSquare. При невозможности такой вставки функция завершается.

Если удалось вставить обрезок такого размера, то происходит проверка, возможно ли после вставки добиться наилучшего результата. Если нельзя — добавленный обрезок удаляется и функция завершается.

Далее идет проверка на то является ли текущее заполнение уже минимальным. Если является, то происходит сохранение результата, как наилучшего, последний квадрат удаляется и функция завершается.

После этого функция циклически вызывает себя же, чтобы попробовать вставить в начальный квадрат другие обрезки для достижения наилучшего результата.

После всего, в самом конце, функция удаляет добавленный обрезок и завершается.

Эта функция ничего не возвращает.

Иные оптимизации:

- Если N кратно 2, то минимальное разбиение всегда будет состоять из 4 равных частей.
- Если N кратно 3 или 5, то будет произведено сжатие квадрата для уменьшения количества вычислений.

Оценка сложности.

В алгоритме используется начальный квадрат размера N*N и другие переменные, зависимые от N, но они не дают весомого вклада в увеличение сложности по памяти. Поэтому сложность алгоритма по памяти = O(N^2), где N — размер исходного квадрата.

В исходном квадрате N*N свободных клеток, количество размеров квадратов которые будут перебираться N. Место для первого квадрата можно выбрать N^2 * N способами. Для второго (N^2-1) * N способами. Таким образом, сложность алгоритма по времени = O((N^2)! * N^N), где N - размер исходного квадрата.

Исследование.

Исследование количества операций от размера квадрата.

Одной операцией считается вызов любой из функций, использующихся логикой алгоритма: isPossibleToAddSquare, addToVisibleSquare, fillVisibleSquareWithZeros, delLastAddedSquare, makeTaskPreparations,

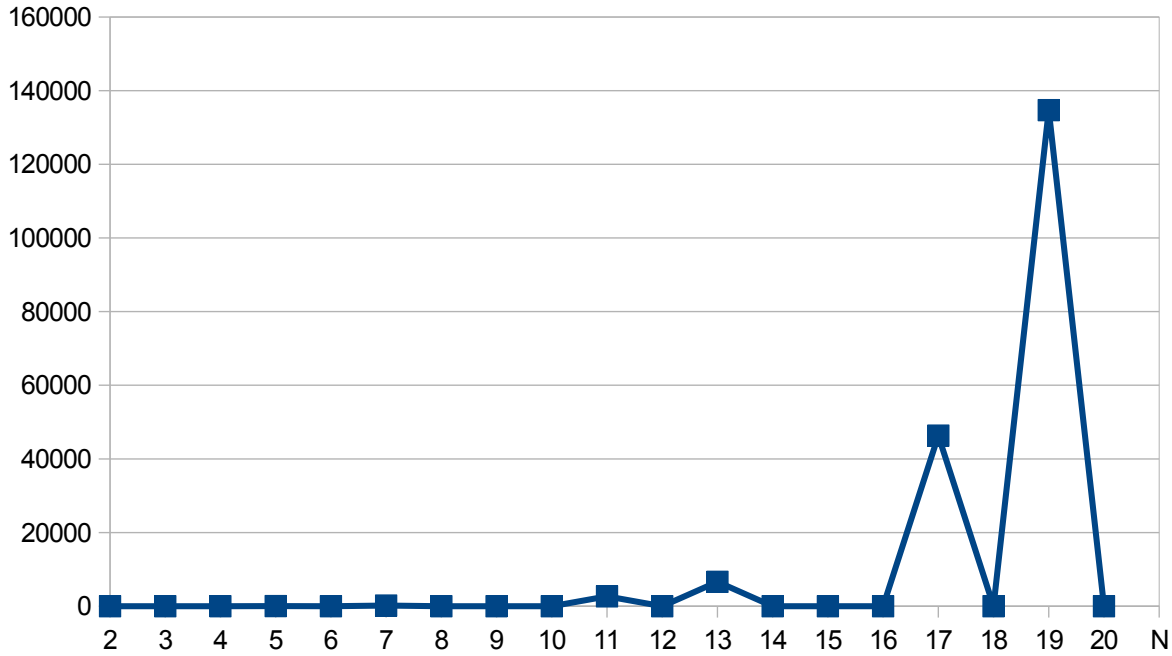
findTaskAnswerWithRecursion.

Результаты измерения количества операций в зависимости от размера квадрата представлены в таблице 1.

Таблица 1.

Сторона квадрата, N	Общее количество операций
2	9
3	17
4	9
5	61
6	9
7	202
8	9
9	17
10	9
11	2685
12	9
13	6620
14	9
15	17
16	9
17	46342
18	9
19	134705
20	9

График 1.



По графику 1 можно увидеть, что за исключением случаев, когда используются оптимизации, количество операций растет экспоненциально.

Тестирование.

Ввод	Вывод

2	4 1 1 1 1 2 1 2 1 1 2 2 1
3	6 1 1 2 1 3 1 3 1 1 3 2 1 2 3 1 3 3 1

7	9 1 1 4 1 5 3 5 1 3 5 4 2 7 4 1 4 5 1 7 5 1 4 6 2 6 6 2
9	6 1 1 6 1 7 3 7 1 3 7 4 3 4 7 3 7 7 3

20	4 1 1 10 1 11 10 11 1 10 11 11 10

Выводы.

В ходе выполнения данной лабораторной работы была написана программа, реализующая алгоритм поиска с возвратом рекурсивно.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

ИСХОДНЫЙ КОД ПРОГРАММЫ

```
#include <iostream>
#include <vector>
#include <ctime>

// строчку ниже можно комментировать/раскомментировать для вклю-
чения/отключения промежуточного вывода
//#define ADDINFO

// отвечает за подсчет и вывод количества выполненных операций
//#define COUNTINFO

#ifdef COUNTINFO
int operationsCount = 0;
#endif

class Square // класс НЕ "видимых" квадратов
{
public:
   int x;
   int y;
   int size; // длина стороны квадрата
};

bool isPossibleToAddSquare(std::vector<std::vector<int>>& visSqr, int x, int
y, int sizeOfSmallSqr)
{
   #ifdef COUNTINFO
   ++operationsCount;
   #endif

   // проверка на выход за пределы квадрата
   if ((x + sizeOfSmallSqr) > visSqr.size() || (y + sizeOfSmallSqr) >
visSqr.size())
   {
      return false;
   }

   // проверка пустоты выбранной области
   for (int i = y; i < y + sizeOfSmallSqr; i++)
   {
      for (int j = x; j < x + sizeOfSmallSqr; j++)
      {
         if (visSqr[i][j])
         {
            return false;
         }
      }
```

```
    }
    return true;
}

void addToVisibleSquare(std::vector<std::vector<int>>& visSqr, int x, int y,
int sizeOfSmallSqr) // не делает проверок, сразу "красит"
{
    #ifdef COUNTINFO
    ++operationsCount;
    #endif

    for (int i = y; i < y + sizeOfSmallSqr; i++)
    {
        for (int j = x; j < x + sizeOfSmallSqr; j++)
        {
            visSqr[i][j] = sizeOfSmallSqr;
        }
    }
}

void printVisibleSquare(std::vector <std::vector <int>>& visSqr, int
compression, int sideLenOfMainSquare)
{
    for (int i = 0; i < sideLenOfMainSquare * compression; i++)
    {
        for (int j = 0; j < sideLenOfMainSquare * compression; j++)
        {
            std::cout.width(3); // для красивого вывода
            std::cout << visSqr[i][j];
        }
        std::cout << std::endl;
    }
}

void fillVisibleSquareWithZeros(std::vector<std::vector<int>>& visSqr, int
sideLenOfMainSquare) // заполнен нулями == не поставлено ни одного
квадрата
{
    #ifdef COUNTINFO
    ++operationsCount;
    #endif

    visSqr.resize(sideLenOfMainSquare);
    for (int i = 0; i < sideLenOfMainSquare; i++)
    {
        visSqr[i].resize(sideLenOfMainSquare);

        for (int j = 0; j < sideLenOfMainSquare; j++)
        {
            visSqr[i][j] = 0;
        }
```

```
    }
}

void delLastAddedSquare(std::vector<std::vector<int>>& visSqr,
std::vector<Square>& currentArrOfAddedSquares, int spacesCount)
{
    #ifdef COUNTINFO
    ++operationsCount;
    #endif

    Square removableSquare = currentArrOfAddedSquares.back();
    currentArrOfAddedSquares.pop_back();

    // "обнуление" ранее занятых клеток в видимом квадрате
    for (int i = removableSquare.y; i < removableSquare.y +
removableSquare.size; i++)
    {
        for (int j = removableSquare.x; j < removableSquare.x +
removableSquare.size; j++)
        {
            visSqr[i][j] = 0;
        }
    }

    #ifdef ADDINFO
    for(int l = 0; l < spacesCount; l++)
    {
        std::cout << " ";
    }
    std::cout << "Удаление кв. со стороной " << removableSquare.size <<
" (x = " <<  removableSquare.x + 1 << ", y = " << removableSquare.y + 1
<< ')' << std::endl;
    #endif
}


void makeTaskPreparations(int &compression,
std::vector<std::vector<int>>& visSqr, std::vector<Square>&
currentArrOfAddedSquares, int& freeAreaOfMainSquare, int&
sideLenOfMainSquare, int& bestSquaresCount)
{
    #ifdef COUNTINFO
    ++operationsCount;
    #endif

    fillVisibleSquareWithZeros(visSqr, sideLenOfMainSquare); // инициализа-
ция пустого "видимого" квадрата

    // "сжатие" квадрата, чтобы облегчить дальнейшие расчеты
    if (sideLenOfMainSquare % 2 == 0)
    {
```

```
        compression = sideLenOfMainSquare / 2;
        sideLenOfMainSquare = 2;
    }
    else if (sideLenOfMainSquare % 3 == 0)
    {
        compression = sideLenOfMainSquare / 3;
        sideLenOfMainSquare = 3;
    }
    else if (sideLenOfMainSquare % 5 == 0)
    {
        compression = sideLenOfMainSquare / 5;
        sideLenOfMainSquare = 5;
    }
    // так можно продолжать для всех простых чисел


    bestSquaresCount = 2 * sideLenOfMainSquare + 1;

    // выставление первых трех квадратов
    currentArrOfAddedSquares.push_back({ 0, 0, (sideLenOfMainSquare + 1) /
2 });
    currentArrOfAddedSquares.push_back({ 0, (sideLenOfMainSquare + 1) / 2,
sideLenOfMainSquare / 2 });
    currentArrOfAddedSquares.push_back({ (sideLenOfMainSquare + 1) / 2, 0,
sideLenOfMainSquare / 2 });

    addToVisibleSquare(visSqr, 0, 0, (sideLenOfMainSquare + 1) / 2);
    addToVisibleSquare(visSqr, 0, (sideLenOfMainSquare + 1) / 2,
sideLenOfMainSquare / 2);
    addToVisibleSquare(visSqr, (sideLenOfMainSquare + 1) / 2, 0,
sideLenOfMainSquare / 2);

    #ifdef ADDINFO
    std::cout << "Вставка кв. со стороной " << (sideLenOfMainSquare + 1) /
2 << " (x = " <<  1 << ", y = " << 1 << ")" << std::endl;
    std::cout << "Вставка кв. со стороной " << sideLenOfMainSquare / 2 <<
" (x = " <<  1 << ", y = " << (sideLenOfMainSquare + 1) / 2 + 1 << ")" <<
std::endl;
    std::cout << "Вставка кв. со стороной " << sideLenOfMainSquare / 2 <<
" (x = " <<  (sideLenOfMainSquare + 1) / 2 + 1 << ", y = " << 1 << ")" <<
std::endl;
    #endif

    // обновление к-ва пустого пространства
    freeAreaOfMainSquare = sideLenOfMainSquare * sideLenOfMainSquare -
((sideLenOfMainSquare + 1) / 2) * ((sideLenOfMainSquare + 1) / 2) - 2 *
(sideLenOfMainSquare / 2) * (sideLenOfMainSquare / 2);
}

void findTaskAnswerWithRecursion(std::vector<std::vector<int>>& visSqr,
int freeAreaOfMainSquare, int currentSizeOfAddedSquare, int
```

```
currentCountOfAddedSquares, std::vector<Square>&
currentArrOfAddedSquares, int spacesCount, int sideLenOfMainSquare, int&
bestSquaresCount, std::vector<Square>& bestArrOfAddedSquares)
{
   #ifdef COUNTINFO
   ++operationsCount;
   #endif

   // даже если квадрат заполнит все пустоты - результат будет не луч-
ше нынешнего
   if ( (currentCountOfAddedSquares == (bestSquaresCount - 1)) &&
(freeAreaOfMainSquare) )
   {
      #ifdef ADDINFO
      for(int l = 0; l < spacesCount; l++)
      {
         std::cout << " ";
      }
      std::cout << "Разложение не минимально, выход из рекурсии" <<
std::endl;
      #endif

      return;
   }

   // первый добавленный квадрат (после начальных 3)
   if ( ((currentSizeOfAddedSquare + 1) <= (sideLenOfMainSquare / 2)) &&
(currentCountOfAddedSquares == 3) )
   {
      // рекурсивный вызов этой же функции
      findTaskAnswerWithRecursion(visSqr, freeAreaOfMainSquare,
(currentSizeOfAddedSquare+1), currentArrOfAddedSquares.size(),
currentArrOfAddedSquares, 0, sideLenOfMainSquare, bestSquaresCount,
bestArrOfAddedSquares);
   }


   bool possibleToAddSuchSquare = false;
   for (int y = 0; y < sideLenOfMainSquare; y++)
   {
      for (int x = 0; x < sideLenOfMainSquare; x++)
      {
         // для каждой пустой клетки происходит попытка вставить квад-
рат текущего размера
         if (visSqr[y][x] == 0)
         {
            if (isPossibleToAddSquare(visSqr, x, y, currentSizeOfAddedSquare))
            {
               possibleToAddSuchSquare = true;
               addToVisibleSquare(visSqr, x, y, currentSizeOfAddedSquare);
```

```
                freeAreaOfMainSquare -= currentSizeOfAddedSquare *
currentSizeOfAddedSquare;
                currentArrOfAddedSquares.push_back({ x, y,
currentSizeOfAddedSquare });

                #ifdef ADDINFO
                for(int l=0; l < spacesCount; l++)
                {
                   std::cout << " ";
                }
                std::cout << "Вставка кв. со стороной  " <<
currentSizeOfAddedSquare<< " (x = " <<  x + 1 << ", y = " << y + 1 <<
")" << std::endl;
                #endif

                break;
             }
             else
             {
                #ifdef ADDINFO
                for(int l=0; l < spacesCount; l++)
                {
                   std::cout << " ";
                }
                std::cout << "Нельзя поставить кв. со стороной " <<
currentSizeOfAddedSquare<< " (x = " <<  x + 1 << ", y = " << y + 1 <<
")" << std::endl;
                #endif

                return;
             }
          }
          else
          {
             x += (visSqr[y][x] - 1);
          }
       }

       // выход из цикла
       if(possibleToAddSuchSquare)
       {
          break;
       }
    }

    // нет смысла обновлять показатели лучшего результата при таком
же количестве обрезков
    if ( (currentCountOfAddedSquares + 1) == bestSquaresCount)
    {
       #ifdef ADDINFO
       for(int l = 0; l < spacesCount; l++)
```

```
        {
            std::cout << " ";
        }
        std::cout << "Разложение не минимально, выход из рекурсии" << '\
n';
        #endif

        delLastAddedSquare(visSqr, currentArrOfAddedSquares, spacesCount);
        return;
    }

    // минимальное заполнение
    if ( ((currentCountOfAddedSquares + 1) < bestSquaresCount) &&
(freeAreaOfMainSquare == 0))
    {
        bestSquaresCount = currentCountOfAddedSquares + 1;
        bestArrOfAddedSquares.assign(currentArrOfAddedSquares.begin(),
currentArrOfAddedSquares.end());

        #ifdef ADDINFO
        std::cout << "*Получено новое минимальное к-во кв.: " <<
bestSquaresCount << std::endl;
        #endif

        delLastAddedSquare(visSqr, currentArrOfAddedSquares, spacesCount);
        return;
    }

    // рекурсивный вызов этой же функции
    for (int i = sideLenOfMainSquare / 2; i > 0; i--)
    {
        if (i * i <= freeAreaOfMainSquare)
        {
            #ifdef ADDINFO
            for (int l=0; l < spacesCount+2; l++)
            {
                std::cout << " ";
            }
            std::cout << "Вызов рекурсии для кв. со стороной " << i << '\n';
            #endif

            findTaskAnswerWithRecursion(visSqr, freeAreaOfMainSquare, i,
currentCountOfAddedSquares + 1, currentArrOfAddedSquares,
spacesCount+2, sideLenOfMainSquare, bestSquaresCount,
bestArrOfAddedSquares);
        }
    }

    delLastAddedSquare(visSqr, currentArrOfAddedSquares, spacesCount);
}
```

```
int main()
{
    setlocale(LC_ALL, "Russian");

    std::vector <std::vector<int>> visibleSquare; // изображение квадрата и его занятой площади в виде цифр
    std::vector <Square> currentArrOfAddedSquares;
    std::vector <Square> bestArrOfAddedSquares; // для хранения лучшей попытки

    int compression = 1; // коэффициент сжатия квадрата
    int freeAreaOfMainSquare;
    int sideLenOfMainSquare;
    int bestSquaresCount; // минимальное к-во квадратов, которым можно покрыть основной

    #ifdef ADDINFO
    std::cout << "Введите размер стороны квадрата (от 2 до 20):" << std::endl;
    #endif
    std::cin >> sideLenOfMainSquare;


    makeTaskPreparations(compression, visibleSquare, currentArrOfAddedSquares, freeAreaOfMainSquare, sideLenOfMainSquare, bestSquaresCount);

    #ifdef ADDINFO
    clock_t start = clock();
    #endif

    // 1 - это начальный размер добавляемого квадрата,  0 - это глубина рекурсии для отладочных сообщений
    findTaskAnswerWithRecursion(visibleSquare, freeAreaOfMainSquare, 1, currentArrOfAddedSquares.size(), currentArrOfAddedSquares, 0, sideLenOfMainSquare, bestSquaresCount, bestArrOfAddedSquares);

    #ifdef ADDINFO
    clock_t end = clock();

    std::cout << "\nВремя выполнения: " << (double) (end - start) / CLOCKS_PER_SEC << "\n\n";
    #endif
    std::cout << bestSquaresCount << std::endl;


    #ifdef COUNTINFO
    std::cout << "\nКоличество операций = " << ::operationsCount << std::endl;
    #endif
```

```
    // вывод ответа и загрузка лучшего найденного разложения в
"видимый" квадрат
    for (int i = 0; i < bestArrOfAddedSquares.size(); i++)
    {
        std::cout << bestArrOfAddedSquares[i].x * compression + 1 << " " <<
bestArrOfAddedSquares[i].y * compression + 1 << " " <<
bestArrOfAddedSquares[i].size * compression << std::endl;

        #ifdef ADDINFO
        addToVisibleSquare(visibleSquare, bestArrOfAddedSquares[i].x *
compression, bestArrOfAddedSquares[i].y * compression,
bestArrOfAddedSquares[i].size * compression);
        #endif
    }

    #ifdef ADDINFO
    std::cout << std::endl;
    printVisibleSquare(visibleSquare, compression, sideLenOfMainSquare);
    #endif

    return 0;
}
```