МИНОБРНАУКИ РОССИИ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ЭЛЕКТРОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ЛЭТИ» ИМ. В.И. УЛЬЯНОВА (ЛЕНИНА)
Кафедра МОЭВМ

ОТЧЕТ

по лабораторной работе №1
по дисциплине «Построение и анализ алгоритмов»
Тема: Перебор с возвратом

Студент гр. 9382 _____ Субботин М. О.

Преподаватель _____ Фирсов М. А.

Санкт-Петербург
2021

Цель работы.

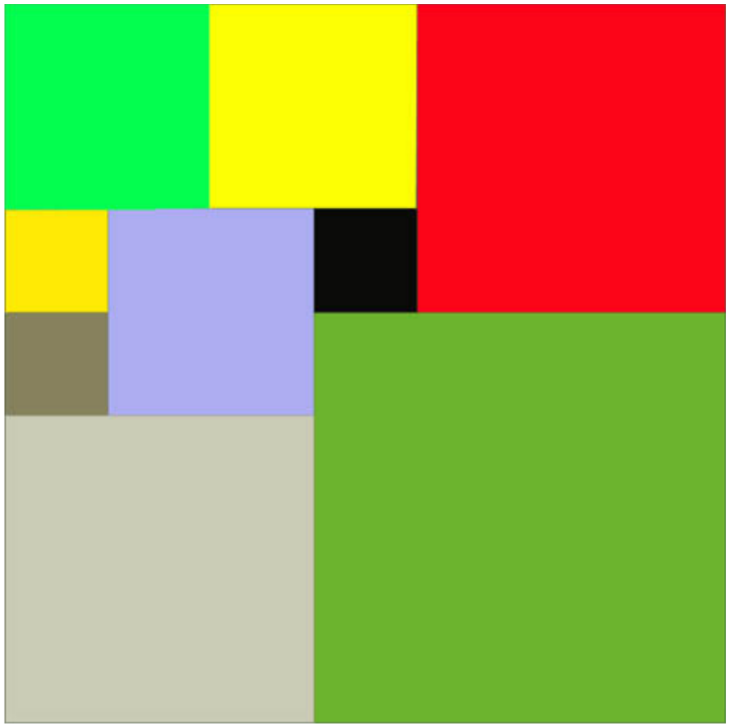
Познакомиться с одним из часто используемых на практике алгоритмом, поиске с возвратом. Получить навыки решения задач на этот алгоритм.

Задание.

Вар. 1и. Итеративный бэктрекинг. Выполнение на Stepik двух заданий в разделе 2.

У Вовы много квадратных обрезков доски. Их стороны (размер) изменяются от 1 до N - 1, и у него есть неограниченное число обрезков любого размера. Но ему очень хочется получить большую столешницу - квадрат размера N x N. Он может получить ее, собрав из уже имеющихся обрезков(квадратов).

Например, столешница размера 7 x 7 может быть построена из 9 обрезков.



Внутри столешницы не должно быть пустот, обрезки не должны выходить за пределы столешницы и не должны перекрываться. Кроме того, Вова хочет использовать минимально возможное число обрезков.

Входные данные

Размер столешницы - одно целое число N ($2 \le N \le 20$).

Выходные данные

Одно число K, задающее минимальное количество обрезков(квадратов), из которых можно построить
столешницу(квадрат) заданного размера N. Далее должны идти K строк, каждая из которых должна содержать три целых числа x, y и w, задающие координаты левого верхнего угла ($1 \le x,y \le N$) и длину стороны соответствующего обрезка(квадрата).

Пример входных данных
7
Соответствующие выходные данные
9
1 1 2
1 3 2
3 1 1
4 1 1
3 2 2
5 1 3
4 4 4
1 5 3
3 4 1

Описание алгоритма.

Осуществляется проход по квадрату и ищется свободное место для вставки квадратика. Если такое место найдено, то ищется наибольший квадрат, который подойдет в это место. Если такого места не найдено, т.е. квадрат полностью заполнен, проверяется не является ли это разбиение минимальным, затем в обратном порядке вставления квадратиков стираются единичные квадратики (удаляются из стека) и следуемый за ними не единичный квадратик. Затем находится длина стороны последнего удаленного квадрата, наибольшая, но меньше предыдущей длины и в то же самое место вставляется квадрат снова. С помощью такого поиска, вставки и удаления и происходит проход по квадрату. Алгоритм закончит работу, как только сотрется один из “основных” квадратов.

Оптимизации алгоритма.

1. Квадрат с четной стороной очевидным образом можно разбить на 4 квадратика.
2. Если у квадрата составная длина стороны, то ее можно уменьшить и рассматривать квадрат меньшего размера. К примеру, квадрат с стороной 9 можно уменьшить до квадрата со стороной 3, а потом результаты просто до множить на 3.
3. В квадрат, у которого длина стороны – это простое число можно с самого начала точно вставить 3 “основных” квадрата. Один квадрат в углу размера

$\frac{N+1}{2}$, а два других по бокам от этого квадрата со сторонами $N - \frac{N+1}{2}$. Причем эти квадраты точно будут входить в решение. Поэтому и алгоритм можно заканчивать, как только удалим один из них.

4. Нет смысла дальше рассматривать случай, если уже количество квадратиков превышают наилучший результат.

Сложность алгоритма.

Поскольку хранится двумерный массив, иллюстрирующий информацию о положениях квадратиков, то сложность по памяти будет $O(N^2)$. В программе также присутствуют два вектора, но по памяти вместе они не будут превышать $2N^2$, т.к. в квадрат максимум можно вставить N^2 единичных квадратиков. Также программа итеративная, поэтому нет никаких фреймов занимающие дополнительную память, как это происходит в рекурсивных алгоритмах.

Достаточно проблематично определить точную оценку скорости алгоритма, учитывая оптимизацию, поэтому оценка будет относительно грубая. Всего в квадрате N^2 единичных квадратиков, и каждый из этих квадратиков по самым грубым подсчетам можно использовать как точку для $(N-1)$ разных квадратов. Т.е. в итоге оценка получится $O\left(N^{2*(N-1)}\right)$. Можно, конечно, сказать, что раз есть три первых квадрата, то оценка будет явно лучше, да, она будет лучше, но формула будет в крайне нечитаемом виде.

Описание функций и структур данных.

```
struct Square
{
	int size;
	int x;
	int y;
}
```

- структура квадратика, size – длина стороны, x и y – координаты в основном квадрате

```
struct States
{
   int bigSquare[40][40];
   std::vector<Square> squareStack;
   std::vector<Square> resultStack;
};
```

- структура, в которой хранятся отслеживаемые данные.

int bigSquare[40][40]; - двумерный массив, который заполняется квадратиками

vector<Square> squareStack; - вектор, служащий стеком, и отвечающий за текущее состояние перебора (кол-во квадратиков и сами квадратики)

vector<Square> resultStack; - вектор, в котором находится наилучшее состояние (с наименьшим количеством квадратиков)

inline void insertSquare(Square mainSquare, States &states) – функция для вставки квадрата, когда известно что в это место квадрат точно вставится.

Аргументы:

Square mainSquare – квадрат для вставки

States &states – структура, которая хранит данные

Нет возвращаемого значения.

inline Square insertSquare(int bigSquareSize, Square square, States &states) – функция выбирает наибольший размер для вставки квадрата на место и вставляет его.

Аргументы:

int bigSquareSize – размер стороны замощаемого квадрата.

Square square – квадратик для вставки

States &states - структура, которая хранит данные

Возвращаемое значение: вставившийся квадрат.

inline Square emptyCell(int bigSquareSize, States &states) – функция ищет место, в которое можно вставить квадрат, если не находит это место, то возвращает квадрат с стороной -1.

Аргументы:

int bigSquareSize – размер стороны замощаемого квадрата.

States &states - структура, которая хранит данные

Возвращаемое значение: пустой квадратик.

inline void initialization(Square &square, int size, States &states) – функция заполняет основной квадрат тремя начальными квадратами.

Аргументы:

Square &square – структура квадратика, через который происходит вставка остальных

int size – размер стороны большого квадрата
States &states - структура, которая хранит данные
Возвращаемого значения нет.

inline Square BackWard(States &states) – функция удаляет из стека последний квадратик и также стирает его с двумерного массива.
Аргументы:
States &states - структура, которая хранит данные
Возвращаемое значение: удаленный квадратик.

void doBackTracking(int size, States &states) – главная функция, реализует сам поиск.
Аргументы:
int size – размер большого квадрата
States &states - структура, которая хранит данные
Возвращаемого значения нет.

Тестирование.

№	Входные данные	Выходные данные	Результат
1	3	6 1 1 2 1 3 1 3 1 1 3 2 1 2 3 1 3 3 1	Правильно
2	5	8 1 1 3 1 4 2 4 1 2 4 3 2 3 4 1	Правильно

		3 5 1 4 5 1 5 5 1	
3	9	6 1 1 6 1 7 3 7 1 3 7 4 3 4 7 3 7 7 3	Правильно
4	13	11 1 1 7 1 8 6 8 1 6 8 7 2 10 7 4 7 8 1 7 9 3 10 11 1 11 11 3 7 12 2 9 12 2	Правильно
5	11	11 1 1 6 1 7 5 7 1 5 7 6 3 10 6 2 6 7 1	Правильно

		6 8 1 10 8 1 11 8 1 6 9 3 9 9 3	
6	29	14 1 1 15 1 16 14 16 1 14 16 15 2 18 15 5 23 15 7 15 16 1 15 17 3 15 20 3 18 20 3 21 20 2 21 22 1 22 22 8 15 23 7	Правильно
7	25	8 1 1 15 1 16 10 16 1 10 16 11 10 11 16 5 11 21 5 16 21 5 21 21 5	Правильно

8	23	13 1 1 12 1 13 11 13 1 11 13 12 2 15 12 5 20 12 4 12 13 1 12 14 3 20 16 1 21 16 3 12 17 7 19 17 2 19 19 5	Правильно

Выводы.

Был исследован часто используемый на практике алгоритм - поиск с возвратом. Также были получены навыки решения задач на этот алгоритм.

ПРИЛОЖЕНИЕ А
ИСХОДНЫЙ КОД ПРОГРАММЫ

```
#include <iostream>
#include <vector>


//структура для квадратиков
struct Square
{
    int size;
    int x;
    int y;
};

struct States
{
    int bigSquare[40][40];
    std::vector<Square> squareStack;
    std::vector<Square> resultStack;
    States(int size) {
        for(int i = 0; i < size; i++){
            for(int j = 0; j < size; j++){
                bigSquare[i][j] = 0;
            }
        }
    }
};

//функция для вывода квадрата
void printSquare(int size, States& states){
    for(int i = 0; i < size; i++){
        for(int j = 0; j < size; j++){
            std::cout.width(3);
            std::cout << states.bigSquare[i][j] << " ";
        }
        std::cout << std::endl;
    }
}

//функция для вывода стека
```

```
void printStack(const std::vector<Square>& st){
    for(auto &square : st){
        std::cout << "{" << square.x << ", " << square.y << ", " << square.size
<< "}, ";
    }
    std::cout << std::endl;
}


//функция для вставки основных квадратов
inline void insertSquare(Square mainSquare, States &states)
{
    for (int i = 0; i < mainSquare.size; ++i)
        for (int j = 0; j < mainSquare.size; ++j)
            states.bigSquare[mainSquare.y    +    i][mainSquare.x    +    j]    =
states.squareStack.size()+1;
}

// функция для вставки квадратов, про которые мы точно не знаем какой их размер
подойдет
inline Square insertSquare(int bigSquareSize, Square square, States &states)
{
    square.size--;

    // находим максимальный размер, который подойдет квадрату
    int biggestSize = 1;
    while ( biggestSize < square.size &&
           (square.x + biggestSize) < bigSquareSize &&
           (square.y + biggestSize) < bigSquareSize &&
           !states.bigSquare[square.y][square.x + biggestSize] )
        biggestSize++;
    square.size = biggestSize;

    // вставляем квадрат
    for (int i = 0; i < square.size; ++i)
        for (int j = 0; j < square.size; ++j)
            states.bigSquare[square.y     +     i][square.x     +     j]     =
states.squareStack.size()+1;

    return square;
}
```

```
// функция по нахождению места под новый квадрат
inline Square emptyCell(int bigSquareSize, States &states)
{
    for (int i = 0; i < bigSquareSize; ++i)
        for (int j = 0; j < bigSquareSize; ++j)
            //существует не занятое место квадратом
            if (states.bigSquare[i][j] == 0)
                return {0, j, i};

    // квадрат заполнен
    return {-1, -1, -1};
}

//функция по добавлению основных квадратов
inline void initialization(Square &square, int size, States &states)
{
    square = {(size + 1) / 2, 0, 0};
    insertSquare(square, states);
    states.squareStack.push_back(square);

    square = {size - (size + 1) / 2, 0, (size + 1) / 2};
    insertSquare(square, states);
    states.squareStack.push_back(square);

    square = {size - (size + 1) / 2, (size + 1) / 2, 0};
    insertSquare(square, states);
    states.squareStack.push_back(square);

    square = emptyCell(size, states);
    square.size = size - 1;
}

//функция по удалению квадрата из стека и массива
inline Square BackWard(States &states)
{
    // вытаскиваем удаляемый квадрат из стека
    Square lastSquare = states.squareStack.back();
    states.squareStack.pop_back();

    // очищаем квадрат
    for (int i = 0; i < lastSquare.size; i++)
        for (int j = 0; j < lastSquare.size; j++)
```

```
            states.bigSquare[lastSquare.y + i][lastSquare.x + j] = 0;

    return lastSquare;
}

// основная функция бектрекинга
void doBackTracking(int size, States &states)
{
    Square tempSquare;
    initialization(tempSquare, size, states);

    std::cout << "Запускаем поиск: " << std::endl;
    while (true)
    {
        // если удалим один из трех основных квадратов то можно заканчивать перебор
        if (states.squareStack.size() == 2){
            std::cout << "Элементов в текущем стеке два, значит один из основных
квадратов пришлось удалить," <<
                      "заканчиваем поиск." << std::endl;
            break;
        }
        std::cout << "В текущем стеке " << states.squareStack.size() << "
элементов" << std::endl;


        bool full = false;

        //loop до тех пор, пока не заполнится квадрат
        while (!full)
        {
            // вставляем квадрат
            states.squareStack.push_back(insertSquare(size, tempSquare,
states));
            std::cout << "Вставили квадрат размера " <<
states.squareStack.back().size << " на x: " << states.squareStack.back().x << "
y: " << states.squareStack.back().y << std::endl;
            printSquare(size, states);

            // если в текущем стеке уже столько же элементов, сколько и в
результирующем, то дальше смысла двигаться нет
            if (!states.resultStack.empty() && states.squareStack.size() >=
states.resultStack.size())
```

```
            {
                std::cout << "В текущем стеке элементов больше чем в лучшем,
дальше идти смысла нет" << std::endl;
                break;
            }

            // ищем место под следующий квадрат
            tempSquare = emptyCell(size, states);
            if(tempSquare.size > -1) {
                std::cout << "Нашли свободное место x:" << tempSquare.x << " y:"
<< tempSquare.y << " под следующий квадрат"
                     << std::endl;
            }
            else {
                std::cout << "Квадрат полностью заполнен." << std::endl;
            }
            full = tempSquare.size == -1;
            tempSquare.size = size - (size + 1) / 2;
        }

        std::cout << "Минимальное количество квадратов: ";
        (states.resultStack.empty() ? std::cout << "еще нет" : std::cout <<
states.resultStack.size()) << std::endl;
        std::cout << "Текущее количество квадратов: " << states.squareStack.size()
<< std::endl;
        // если квадрат заполнен и текущих элементов меньше лучших, изменим это
        if (full && states.squareStack.size() < states.resultStack.size() ||
states.resultStack.empty())
        {
            std::cout << "Текущее количество квадратов оказалось меньше, получаем
новый минимум равный: " << states.squareStack.size() << std::endl;
            states.resultStack = states.squareStack;
        }


        /*
         * здесь мы оказываемся в двух случаях:
         * 1)когда заканчивается место в большом квадрате
         * 2)когда путь длиннее чем текущий лучший результат
         * в обоих случаях надо удалить последний квадрат
         * т.к. единичные квадраты в конце расставляются едиственным  способом,
поэтому
```

```
         * можно удалить их, и следующий за ними квадрат
         */
        std::cout << "Удалим поставленные последними единичные квадраты -- т.к.
их можно поставить единственным способом" << std::endl;
        std::cout << "Также в независимости есть ли ед.квадратики удалим следующий
за ними не единичный квадрат" << std::endl;
        std::cout << "Стек{x,y,size} до удаления: " << std::endl;
        printStack(states.squareStack);
        do
        {
            tempSquare = BackWard(states);
        } while (states.squareStack.size() > 2 && tempSquare.size == 1);
        std::cout << "Стек после удаления: " << std::endl;
        printStack(states.squareStack);
    }
}



int main()
{
    int size;
    std::cout << "Введите сторону квадрата: " << std::endl;
    std::cin >> size;


    //квадраты с четными сторонами всегда можно разделить на 4 равных
    if (size % 2 == 0)
    {
        std::cout << 4 << std::endl;
        std::cout << 1 << " " << 1 << " " << size / 2 << std::endl;
        std::cout << size / 2 + 1 << " " << 1 << " " << size / 2 << std::endl;
        std::cout << 1 << " " << size / 2 + 1 << " " << size / 2 << std::endl;
        std::cout << size / 2 + 1 << " " << size / 2 + 1 << " " << size / 2;
        return 0;
    }

    // находим, если есть делитель стороны квадрата
    // т.к. в квадрат с простыми сторонами точно можем вписать три квадрата
    int divider = 0;
    for (int i = 2; i <= size; i++)
    {
```

```
        if (size % i == 0)
        {
            divider = size / i;
            size = i;
            break;
        }
    }

    States states(size);

    doBackTracking(size, states);

    std::cout << std::endl << states.resultStack.size() << std::endl;
    for (auto &square : states.resultStack)
        std::cout << square.x * divider + 1 << " " << square.y * divider + 1 <<
" " << square.size * divider << std::endl;
    return 0;
}
```