## Лекция 8: ленивость

Функциональное программирование на Haskell

Алексей Романов 4 апреля 2018

ТЕИМ

 Как вычисляется выражение вида f(g(x, y), h(z)) в привычных языках?

- Как вычисляется выражение вида f(g(x, y), h(z)) в привычных языках?
- Сначала вычисляются аргументы g(x, y) и h(z) (гарантированно в этом порядке или нет), потом их значения передаются в f.
- Это называется передачей аргументов по значению.
- Для вычисления выражения нужно вычислить все подвыражения.
- Исключения в С-подобных языках?

- Как вычисляется выражение вида f(g(x, y), h(z)) в привычных языках?
- Сначала вычисляются аргументы g(x, y) и h(z) (гарантированно в этом порядке или нет), потом их значения передаются в f.
- Это называется передачей аргументов по значению.
- Для вычисления выражения нужно вычислить все подвыражения.
- Исключения в С-подобных языках?
- &&, ||, ? :.

- Как вычисляется выражение вида f(g(x, y), h(z)) в привычных языках?
- Сначала вычисляются аргументы g(x, y) и h(z) (гарантированно в этом порядке или нет), потом их значения передаются в f.
- Это называется передачей аргументов по значению.
- Для вычисления выражения нужно вычислить все подвыражения.
- Исключения в С-подобных языках?
- &&, ||, ? :.
- В них вычисляется первый операнд, а второй (и третий для?:) только если необходимо.

• Как можно сделать по-другому?

- Как можно сделать по-другому?
- Макросы в С каждое использование аргумента заменяется на переданное выражение (а не на его значение).
- И это рекурсивно: макросы в этом определении тоже будут заменены на своё определение.
- Это передача по имени (почти).

- Как можно сделать по-другому?
- Макросы в С каждое использование аргумента заменяется на переданное выражение (а не на его значение).
- И это рекурсивно: макросы в этом определении тоже будут заменены на своё определение.
- Это передача по имени (почти).
- У настоящей передачи по имени нет таких проблем со скобками, как в макросах С.

- Как можно сделать по-другому?
- Макросы в С каждое использование аргумента заменяется на переданное выражение (а не на его значение).
- И это рекурсивно: макросы в этом определении тоже будут заменены на своё определение.
- Это передача по имени (почти).
- У настоящей передачи по имени нет таких проблем со скобками, как в макросах С.
- Аналогичное поведение переменных в командной строке и скриптах Windows и Linux.

• Если рассмотреть

$$x = 2 + 2$$

$$y = x + x$$

то при передаче по значению будет вычислено

• Если рассмотреть

$$x = 2 + 2$$

$$y = x + x$$

то при передаче по значению будет вычислено

$$x = 4$$

$$y = 4 + 4$$

а при передаче по имени —

• Если рассмотреть

$$x = 2 + 2$$

$$y = x + x$$

то при передаче по значению будет вычислено

$$x = 4$$

$$y = 4 + 4$$

а при передаче по имени —

$$x = 2 + 2$$

$$y = (2 + 2) + (2 + 2)$$

if1(x, y, z) = if x then y else z
 if1(true, 1, 1 / 0)
 Что случится при передаче по значению? А по имени?

По значению: ошибка.

if1(x, y, z) = if x then y else z
 if1(true, 1, 1 / 0)
 Что случится при передаче по значению? А по имени?

if1(x, y, z) = if x then y else z
 if1(true, 1, 1 / 0)
 Что случится при передаче по значению? А по имени?

- По значению: ошибка.
- По имени: 1.

• Плюсы передачи по имени:

- Плюсы передачи по имени:
  - Можно избежать ошибок.
  - Можно избежать лишних вычислений

- Плюсы передачи по имени:
  - Можно избежать ошибок.
  - Можно избежать лишних вычислений (представьте, что в предыдущем примере вместо 1 / 0 вызов сложной функции).

- Плюсы передачи по имени:
  - Можно избежать ошибок.
  - Можно избежать лишних вычислений (представьте, что в предыдущем примере вместо 1 / 0 вызов сложной функции).
- Главный минус:

- Плюсы передачи по имени:
  - Можно избежать ошибок.
  - Можно избежать лишних вычислений (представьте, что в предыдущем примере вместо 1 / 0 вызов сложной функции).
- Главный минус:
  - Можно сделать очень много лишних вычислений.

- Плюсы передачи по имени:
  - Можно избежать ошибок.
  - Можно избежать лишних вычислений (представьте, что в предыдущем примере вместо 1 / 0 вызов сложной функции).
- Главный минус:
  - Можно сделать очень много лишних вычислений.
  - Как только мы используем какую-то переменную более одного раза

- Плюсы передачи по имени:
  - Можно избежать ошибок.
  - Можно избежать лишних вычислений (представьте, что в предыдущем примере вместо 1 / 0 вызов сложной функции).
- Главный минус:
  - Можно сделать очень много лишних вычислений.
  - Как только мы используем какую-то переменную более одного раза (если переменные в её определении не изменились).

- В Haskell используется передача по необходимости:
- Как передача по имени, но значение каждой переменной вычисляется только один раз.

- В Haskell используется передача по необходимости:
- Как передача по имени, но значение каждой переменной вычисляется только один раз.
- Это имеет смысл потому, что все переменные неизменяемы.

- В Haskell используется передача по необходимости:
- Как передача по имени, но значение каждой переменной вычисляется только один раз.
- Это имеет смысл потому, что все переменные неизменяемы.
- При этом значения тоже не обязательно вычислять «до конца»: мы хотим, чтобы length [1/0, 1/0, 1/0]
   возвращало 3.

- В Haskell используется передача по необходимости:
- Как передача по имени, но значение каждой переменной вычисляется только один раз.
- Это имеет смысл потому, что все переменные неизменяемы.
- При этом значения тоже не обязательно вычислять «до конца»: мы хотим, чтобы length [1/0, 1/0, 1/0] возвращало 3.
- Ленивость в том или ином виде есть во многих языках (пример: System.Lazy<T> в .NET).
- Но в Haskell она встроена очень глубоко.

## Нормальная форма

- Выражение находится в нормальной форме, если там нет ничего, что можно вычислить (редуцировать).
- Примеры:

## Нормальная форма

- Выражение находится в нормальной форме, если там нет ничего, что можно вычислить (редуцировать).
- Примеры:

```
42
(2, "hello")
\x -> (x + 1)
```

• Примеры выражений не в нормальной форме:

## Нормальная форма

- Выражение находится в нормальной форме, если там нет ничего, что можно вычислить (редуцировать).
- Примеры:

```
42
(2, "hello")
\x -> (x + 1)
```

• Примеры выражений не в нормальной форме:

```
1 + 2
(\x -> x + 1) 2
"he" ++ "llo"
(1 + 1, 2 + 2)
let x = 1 in x
```

# **Теоремы о нормальных формах в лямбда- исчислении**

- В лямбда-исчислении можно доказать:
- Два порядка вычисления одного выражения не могут привести к разным значениям (нормальным формам).
- Но может случиться, что один из них даёт значение, а другой — нет.
- Если какой-то порядок приводит к значению, то передача по имени и по необходимости тоже к нему приведут.

## Слабая заголовочная нормальная форма

- Выражение находится в слабой заголовочной нормальной форме (WHNF), если это:
  - Лямбда.
  - Литерал.
  - Конструктор данных, возможно с аргументами.
  - Функция от n аргументов с m < n аргументами.

Аргументы здесь — любые выражения

## Слабая заголовочная нормальная форма

- Выражение находится в слабой заголовочной нормальной форме (WHNF), если это:
  - Лямбда.
  - Литерал.
  - Конструктор данных, возможно с аргументами.
  - Функция от n аргументов с m < n аргументами.

Аргументы здесь — любые выражения (а для НФ они тоже должны быть в НФ).

• Примеры:

## Слабая заголовочная нормальная форма

- Выражение находится в слабой заголовочной нормальной форме (WHNF), если это:
  - Лямбда.
  - Литерал.
  - Конструктор данных, возможно с аргументами.
  - Функция от n аргументов с m < n аргументами.

Аргументы здесь — любые выражения (а для НФ они тоже должны быть в НФ).

• Примеры:

```
(1 + 1, 2 + 2) -- (,) (1 + 1) (2 + 2) x \rightarrow 2 + 2 + x (1/0) : take 4 [1..] (+) 1
```

#### Отложенные вычисления

- В Haskell во время исполнения переменная может указывать не только на значение, а на невычисленное выражение (thunk).
- Если мы напишем

```
x = (length [1,3], 1/0)
```

то х вначале указывает именно на thunk.

• После этого

требует вычислить внешний конструктор x (привести k WHNF), и в памяти будет

#### Отложенные вычисления

- В Haskell во время исполнения переменная может указывать не только на значение, а на невычисленное выражение (thunk).
- Если мы напишем

```
x = (length [1,3], 1/0)
```

то х вначале указывает именно на thunk.

После этого

```
case x of
   (y, z) \rightarrow ...
```

z: \*thunk2\*

требует вычислить внешний конструктор х (привести к WHNF), и в памяти будет

```
x: (*thunk1*, *thunk2*) *thunk1*: length [1,3]
y: *thunk1*
                          *thunk2*: 1/0
                                                11/21
```

#### Отложенные вычисления

• Если это

```
case x of
  (y, z) -> print y
```

то у тоже потребуется вычислить, и получим

#### Отложенные вычисления

Если это

```
case x of
(y, z) -> print y
```

то у тоже потребуется вычислить, и получим

z: \*thunk2\*

## :print

x = (2, )

• Мы можем увидеть частично вычисленные выражения в GHCi с помощью команд :print и :sprint: Prelude> x = (length [1,3], 1/0 :: Double)Prelude> :sprint x X = Prelude case x of  $(v, z) \rightarrow 0$ 0 Prelude> :sprint x X = ( , )Prelude > case x of (y, z) -> y2 Prelude> :sprint x

## :print

 Мы можем увидеть частично вычисленные выражения в GHCi с помощью команд :print и :sprint:

```
Prelude> x = (length [1,3], 1/0 :: Double)
Prelude> :sprint x
x =
Prelude case x of (v, z) \rightarrow 0
0
Prelude> :sprint x
x = ( , )
Prelude > case x of (y, z) -> y
2
Prelude> :sprint x
x = (2, )
```

• Также посмотрите (для старых GHC).

• Ещё примеры:

- Ещё примеры:
- square x = x\*x square (square (1+1))
- length (take 2 (filter even [1..]))

- Ещё примеры:
- square x = x\*x square (square (1+1))
- length (take 2 (filter even [1..]))
- (&&) :: Bool -> Bool -> Bool True && x = x False && x = False

ведёт себя как в С автоматически.

- Ещё примеры:
- square x = x\*x square (square (1+1))
- length (take 2 (filter even [1..]))
- (&&) :: Bool -> Bool -> Bool True && x = x False && x = False

ведёт себя как в С автоматически.

 Как определить вариант, который начинает вычисление с правого операнда?

- Вроде бы можно гарантировать, что ленивые вычисления всегда делают не больше шагов, чем энергичные.
- Но каждый шаг занимает больше времени.
- Thunks могут занимать больше памяти, чем результат их вычисления (а могут и меньше).
- Классический пример:

```
sum [] acc = acc
sum (x:xs) acc = sum xs (x + acc)
sum [1..100] 0
```

- Вроде бы можно гарантировать, что ленивые вычисления всегда делают не больше шагов, чем энергичные.
- Но каждый шаг занимает больше времени.
- Thunks могут занимать больше памяти, чем результат их вычисления (а могут и меньше).
- Классический пример:

```
sum [] acc = acc

sum (x:xs) acc = sum xs (x + acc)

sum [1..100] 0 \rightsquigarrow  sum 1:[2..100] 0
```

- Вроде бы можно гарантировать, что ленивые вычисления всегда делают не больше шагов, чем энергичные.
- Но каждый шаг занимает больше времени.
- Thunks могут занимать больше памяти, чем результат их вычисления (а могут и меньше).
- Классический пример:

```
sum [] acc = acc

sum (x:xs) acc = sum xs (x + acc)

sum [1..100] 0 \rightsquigarrow  sum 1:[2..100] 0 \rightsquigarrow 

sum [2..100] (1 + 0)
```

- Вроде бы можно гарантировать, что ленивые вычисления всегда делают не больше шагов, чем энергичные.
- Но каждый шаг занимает больше времени.
- Thunks могут занимать больше памяти, чем результат их вычисления (а могут и меньше).
- Классический пример:

```
sum [] acc = acc

sum (x:xs) acc = sum xs (x + acc)

sum [1..100] 0 \rightsquigarrow sum 1:[2..100] 0 \rightsquigarrow

sum [2..100] (1 + 0) \rightsquigarrow sum 2:[3..100] (1 + 0)
```

- Вроде бы можно гарантировать, что ленивые вычисления всегда делают не больше шагов, чем энергичные.
- Но каждый шаг занимает больше времени.

sum (x:xs) acc = sum xs (x + acc)

- Thunks могут занимать больше памяти, чем результат их вычисления (а могут и меньше).
- Классический пример:

sum [] acc = acc

```
sum [1..100] 0 \rightsquigarrow \text{sum } 1:[2..100] \ 0 \rightsquigarrow 

sum [2..100] (1+0) \rightsquigarrow \text{sum } 2:[3..100] \ (1+0) \rightsquigarrow 

sum [3..100] (2+(1+0))
```

- Вроде бы можно гарантировать, что ленивые вычисления всегда делают не больше шагов, чем энергичные.
- Но каждый шаг занимает больше времени.
- Thunks могут занимать больше памяти, чем результат их вычисления (а могут и меньше).
- Классический пример:

sum [] acc = acc

```
sum (x:xs) acc = sum xs (x + acc)

sum [1..100] 0 \rightsquigarrow \text{sum 1:} [2..100] 0 \rightsquigarrow 

sum [2..100] (1 + 0) \rightsquigarrow \text{sum 2:} [3..100] (1 + 0) \rightsquigarrow 

sum [3..100] (2 + (1 + 0)) \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow 

(100 + \dots + (1 + 0))
```

- Вроде бы можно гарантировать, что ленивые вычисления всегда делают не больше шагов, чем энергичные.
- Но каждый шаг занимает больше времени.
- Thunks могут занимать больше памяти, чем результат их вычисления (а могут и меньше).
- Классический пример:

sum [] acc = acc

```
sum (x:xs) acc = sum xs (x + acc)

sum [1..100] 0 \rightsquigarrow \text{sum 1:} [2..100] 0 \rightsquigarrow 

sum [2..100] (1 + 0) \rightsquigarrow \text{sum 2:} [3..100] (1 + 0) \rightsquigarrow 

sum [3..100] (2 + (1 + 0)) \rightsquigarrow \dots \rightsquigarrow 

(100 + \dots + (1 + 0)) \rightsquigarrow 4950
```

 Из-за этого foldl — ловушка, практически всегда нужно либо foldr, либо foldl' (будет позже).

- Из-за этого foldl ловушка, практически всегда нужно либо foldr, либо foldl' (будет позже).
- С другой стороны, заметьте, что в этом примере список [1..100] никогда не появился целиком в памяти!

- Из-за этого foldl ловушка, практически всегда нужно либо foldr, либо foldl' (будет позже).
- С другой стороны, заметьте, что в этом примере список [1..100] никогда не появился целиком в памяти!
- Ещё один интересный пример: length (take 2 (filter (< 1) [1..])).</li>

- Из-за этого foldl ловушка, практически всегда нужно либо foldr, либо foldl' (будет позже).
- С другой стороны, заметьте, что в этом примере список [1..100] никогда не появился целиком в памяти!
- Ещё один интересный пример: length (take 2 (filter (< 1) [1..])).</li>
- Что же можно сделать?

- Из-за этого foldl ловушка, практически всегда нужно либо foldr, либо foldl' (будет позже).
- С другой стороны, заметьте, что в этом примере список [1..100] никогда не появился целиком в памяти!
- Ещё один интересный пример: length (take 2 (filter (< 1) [1..])).</li>
- Что же можно сделать?
- Часто компилятор может оптимизировать ленивые вычисления (если знает, что это не изменит результата).
- Или...

## Строгие вычисления в Haskell: seq

- Мы можем управлять ленивостью явно.
- Базовый инструмент для этого: «волшебная» (её нельзя реализовать на самом Haskell) функция seq :: a -> b -> b.

## Строгие вычисления в Haskell: seq

- Мы можем управлять ленивостью явно.
- Базовый инструмент для этого: «волшебная» (её нельзя реализовать на самом Haskell) функция seq :: a -> b -> b.
- seq  $e_1$   $e_2$  сначала приводит  $e_1$  к WHNF, а после этого возвращает  $e_2$ .

## Строгие вычисления в Haskell: seq

- Мы можем управлять ленивостью явно.
- Базовый инструмент для этого: «волшебная» (её нельзя реализовать на самом Haskell) функция seq :: a -> b -> b.
- seq  $e_1$   $e_2$  сначала приводит  $e_1$  к WHNF, а после этого возвращает  $e_2$ .
- На практике всегда  $e_1$  переменная в  $e_2$ .
- Пример использования:

$$f \$! x = seq x (f x)$$

• Это аналог \$, только вычисляющий аргумент до WHNF перед вызовом функции.

• Теперь можем определить sum так:

• Теперь можем определить sum так:

```
sum [] acc = acc
sum (x:xs) acc = sum xs $! x + acc
```

• Или так:

• Теперь можем определить sum так:

```
sum [] acc = acc
sum (x:xs) acc = sum xs $! x + acc
```

Или так:

```
\text{sum } \texttt{[1..100]} \texttt{ 0} \rightsquigarrow \text{sum } \texttt{1:[2..100]} \texttt{ 0}
```

• Теперь можем определить sum так:

```
sum [] acc = acc
sum (x:xs) acc = sum xs $! x + acc
```

Или так:

```
sum [1..100] 0 \leadsto sum 1:[2..100] 0 \leadsto let a1 = 1 + 0 in a1 `seq` sum [2..100] a1
```

• Теперь можем определить sum так:

```
sum [] acc = acc
sum (x:xs) acc = sum xs $! x + acc
```

Или так:

```
sum [1..100] 0 \leadsto sum 1:[2..100] 0 \leadsto let a1 = 1 + 0 in a1 `seq` sum [2..100] a1 \leadsto sum [2..100] 1 \leadsto sum 2:[3..100] 3
```

• Теперь можем определить sum так:

```
sum [] acc = acc
sum (x:xs) acc = sum xs $! x + acc
```

Или так:

```
sum [1..100] 0 \leadsto sum 1:[2..100] 0 \leadsto let a1 = 1 + 0 in a1 `seq` sum [2..100] a1 \leadsto sum [2..100] 1 \leadsto sum 2:[3..100] 3 \leadsto let a1 = 2 + 1 in a1 `seq` sum [3..100] a1
```

• Теперь можем определить sum так:

```
sum [] acc = acc
sum (x:xs) acc = sum xs $! x + acc
```

Или так:

```
sum [1..100] 0 \leadsto sum 1:[2..100] 0 \leadsto let a1 = 1 + 0 in a1 `seq` sum [2..100] a1 \leadsto sum [2..100] 1 \leadsto sum 2:[3..100] 3 \leadsto let a1 = 2 + 1 in a1 `seq` sum [3..100] a1 \leadsto ... \leadsto 4950
```

#### foldl'

- Мы знаем, что сумма списка частный случай свёртки.
- Для функций product, minimum, maximum имеем ровно те же проблемы!
- Можем определить вариант foldl (более общая версия в Data. Foldable):

#### foldl'

- Мы знаем, что сумма списка частный случай свёртки.
- Для функций product, minimum, maximum имеем ровно те же проблемы!
- Можем определить вариант foldl (более общая версия в Data. Foldable):

19/21

## Строгие переменные в образцах

 B foldl' параметр асс вычисляется только до WHNF. Если мы вычисляем среднее так

то в s и l снова накапливаются вычисления!

## Строгие переменные в образцах

• B foldl' параметр асс вычисляется только до WHNF. Если мы вычисляем среднее так

то в s и l снова накапливаются вычисления!

• Включив BangPatterns, сделаем их строгими:

```
step (!s, !l) a = (s + a, l + 1)
```

• Это превращается в

• Правила перевода довольно сложные.

#### Строгие поля в типах данных

• Другой способ решить ту же проблему:

#### Строгие поля в типах данных

Другой способ решить ту же проблему:
 data SPair a b = SPair !a !b

- Восклицательный знак означает, что любое вычисление значения с этим конструктором вычислит и эти поля (до WHNF).
- То есть конструктор работает как SPair a b = a `seq` b `seq` SPair' a b где SPair' конструктор, который получится без строгих полей.