Домашняя работа по дискретной математике №19

Михайлов Никита Маратович, БПМИ-167

1. Решение. По условию нам дан граф $\Rightarrow$ мы знаем какие ребра выходят из каждой вершины. На вход функции поступает $\binom{n}{2}$ ребер. Применим конъюнкцию ко всем ребрам, идущим из общей вершины. Итого будет n выходов. На каждом выходе получим 1, если из вершины выходит хотя бы одно ребро, и 0, если вершина изолирована. Далее применим к каждому выходу отрицание. Затем ко всем выходам применим дизъюнкцию. Получим 1, если есть хотя бы 1 изолированная вершина, и 0 иначе.
Пронумеруем проивольно вершины. Обозначим за $x_{ij} \in \{0, 1\}$ - ребро между i-й и j-й вершиной. Тогда функция принимает вид:

$$f = \bigvee_{i=1}^{n} \overline{(\bigvee_{j=1, j \neq i}^{n} x_{ij})}$$

Данная схема имеет размер $O(n^2)$.

2. Решение. Пронумеруем вершины произвольно от 1 до n. Будем смотреть на каждую тройку. Применим дизъюнкцию к ребрам, которые их соединяют, тогда функция имеет вид:

$$f = \bigvee_{i=1}^{n} \bigvee_{(j=1, j \neq i)}^{n} \bigvee_{(k=1, k \neq j, k \neq i)}^{n} \overline{x_{ij} \wedge x_{jk} \wedge x_{ki}}$$

Схема имеет размер $O(n^3)$.

3. Решение. Проверка графа на связность осуществляется возведением матрицы смежности(ее мы можем составить по входным данным) в степень n. Если матрица такая, что $\forall i, j : i \neq j \ \Rightarrow a_{ij} = 1$. Возведение матрицы в степень имеет схему размера $n \cdot O(n^3) = O(n^4)$.

Эйлеров цикл существует тогда и только тогда, когда все степени вершин четные. Пронумеруем вершины от 1 до n. Убедившись в связности графа, пробежимся по всем вершинам и посчитаем четность выходящих ребер:

$$f = \bigwedge_{i=1}^{n} \overline{x_{i1} \oplus ... \oplus x_{in}}$$

Размер такой схемы $O(n^2)$, так как XOR имеет константный размер. Общий размер $O(n^4)$.

4. Решение. Пусть функция начинает принимать значение 1 при i единиц в наборе. Тогда данную функцию можно задать, пробежавшись по всем возможным наборам из i элементов.

$$f = \bigvee_{\sigma \in S_i} x_{\sigma(1)} \wedge ... \wedge x_{\sigma(i)},$$

где S_i – множество всех последовательностей от 1 до i, где порядок не важен(123 и 321 – одинаковые).$|S_i| = \binom{n}{i}$. Следовательно, размер схемы равен $O(i \cdot \binom{n}{i}) = O(n2^n)$

5. Решение. Рассмотрим "худший"многочлен Жегалкина из №6. Нам как минимум нужно будет вычислить 2^n сложений по модулю 2, что асимптотически больше, чем n^{100}. Как бы мы не преобразовывали полином, кол-во сложений не изменится.

6. Решение. Заметим, что данным базисом можно задать любой многочлен Жегалкина.

$$P(n) = a_0 \oplus a_1x_1 \oplus ... \oplus a_nx_n \oplus a_{12}x_1x_2 \oplus a_{13}x_1x_3 \oplus ... \oplus a_{1...n}x_1...x_n$$

Рассмотрим худший случай, когда в нашей сумме все константы a равны единице. Тогда всех слагаемых будет $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = (1+1)^n = 2^n$. В каждом из слагаемых добавится еще одна операция – конъюнкция переменных. Таким образом, размер схемы не более чем $2^n + 2^n = 2^{n+1}$ Очевидно, что в случаях, когда некоторые из a равны 0, размер схемы будет меньше.

7. Решение. Рассмотрим суперпозицию функций. f_i – линейная функция.

$$f(x_1, ..., x_n) = f(f_1(x_{11}, ..., x_{1n}), ..., f_n(x_{n1}, ..., x_{nn})) = a_0 \oplus a_1f_1 \oplus ... \oplus a_nf_n =$$
$$= a_0 \oplus a_1(b_{10} \oplus b_{11}x_{11} \oplus ... \oplus b_{1n}x_{1n}) \oplus ... \oplus a_n(b_{n0} \oplus b_{n1}x_{n1} \oplus ... \oplus b_{nn}x_{nn}) =$$
$$= a_0 \oplus a_1b_{10} \oplus a_1b_{11}x_{11} \oplus ... \oplus a_1b_{1n}x_{1n} \oplus ... \oplus a_nb_{n0} \oplus a_nb_{n1}x_{n1} \oplus ... \oplus a_nb_{nn}x_{nn}$$

Получили, что класс линейных функций замкнут, а значит если в функции использовать только линейные, то на выходе будет линейная функция.

8. Решение. Рассмотрим некоторую нелинейную функцию $f(x_1, ..., x_n)$. В ее записи полинома Жегалкина есть произведение двух переменных, так как функция нелинейна. Не ограничивая общности рассуждений, пусть это x_1 и x_2, тогда разобьем полином на 4 группы:

1. Содержат конъюнкцию x_1x_2;
2. Содержат x_1, но не содержат x_2;
3. Содержат x_2, но не содержат x_1;
4. Все остальные.

Перепишем нашу функцию с учетом разбиения:

$$f = x_1x_2p_1(x_3, ..., x_n) \oplus x_1p_2(x_3, ..., x_n) \oplus x_2p_3(x_3, ..., x_n) + p_4(x_3, ...x_n),$$

где p_i – некоторые функции. Первая группа всегда существует по нелинейности. Так как мы выражаем конъюнкцию $x_1 \wedge x_2$, то вместо $x_3, ..., x_n$ можем подставлять все, что угодно. Тогда в p_1 подставим такой набор, что $p_1 = 1$. Следовательно, остальные p_i станут константами. Перепишем функцию.

$$f = x_1x_2 \oplus x_1C_1 \oplus x_2C_2 \oplus C_3$$

Так как константы можно вычислить независимо, то передадим на вход f следующие аргументы: $a, b, x_3, ..., x_n$, где $\begin{cases} a = x_1 \oplus C_2 \\ b = x_2 \oplus C_1 \end{cases}$ Подставим их:

$$\begin{gathered} f = (x_1 \oplus C_2)(x_2 \oplus C_1) \oplus (x_1 \oplus C_2)C_1 \oplus (x_2 \oplus C_1)C_2 \oplus C_3 = \\ = x_1x_2 \oplus \cancel{x_1C_1} \oplus \cancel{x_2C_2} \oplus C_1C_2 \oplus \cancel{x_1C_1} \oplus \cancel{C_1C_2} \oplus \cancel{x_2C_2} \oplus \cancel{C_1C_2} \oplus C_3 = \\ = x_1x_2 \oplus C_1C_2 \oplus C_3 = \begin{cases} C_4 = C_1C_2 \oplus C_3 \\ x_1x_2 \oplus C_4 \end{cases} \end{gathered}$$

На выход подадим $\begin{cases} f, \text{ если } C_4 = 0 \\ \overline{f}, \text{ если } C_4 = 1 \end{cases}$ Конъюнкция $x_1 \wedge x_2$ получена.