Домашняя работа по дискретной математике №20

Михайлов Никита Маратович, БПМИ-167

1. Решение. а) Да, такое множество перечислимо. Можем составить алгоритм перечисления данного множества, например, на языке программирования C++:

```cpp
void Func(std::vector<int> pi) {
    size_t i = 4;
    while(true) {
        for (int j = 4; j >= 0; --j) {
            std::cout << pi[i - j];
        }
        std::cout << std::endl;
        ++i;
    }
}
```

Данная функция будет печатать все пятерки подряд идущих цифр в числе π. *Примечание.* В нашей функции размер массива не имеет границ, так как число π – иррациональное.

б) Заметим, что 1) данное множество – подмножество всех различных пятерок цифр; 2) множество всех различных пятерок цифр – конечно $\Rightarrow$ все его подмножества конечны, а значит разрешимы.

2. Решение. Да. Перечислимо. Если множество $\mathbb{X}$ перечислимо $\Rightarrow$ есть алгоритм, перечисляющий все элементы множества $\mathbb{X}$. По мере перечисления, будем вычислять за конечное число шагов сумму цифр у данного числа. Если сумма ранва 10, то выпишем число, иначе перейдем к следующему. Почему мы выпишем все? Потому, что $\mathbb{Y} \subseteq \mathbb{X}$ и мы затронем точно все элементы множества $\mathbb{Y}$.

3. Решение. Пронумеруем все элементы множества $\mathbb{A}$ и множества $\mathbb{B}$ начиная с 0. Тогда для всех натуральных k будем выписывать пары элементов $(A_k, B_0), (A_k, B_1), ..., (A_k, B_k), (A_1, B_k), (A_2, B_k), ..., (A_k, B_k)$, проверяя при каждом выписывании не выписали ли мы эту пару раньше. Если же нет элемента с таким индексом, то просто "проглатываем"эту итерацию и переходим к следующей, ничего не делая.

4. Решение. Пусть мн-во значений равно $\mathbb{X} \subseteq \mathbb{N}$. Из условия следует, что если $a > b \Leftrightarrow f(a) > f(b)$. Отсортируем в поряде возрастания мн-во $\mathbb{X}$, тогда $f(0) = \mathbb{X}_0, f(1) = \mathbb{X}_1, ..., f(1000) = \mathbb{X}_{1000}, ...$

5. Решение. Известно, что существует неразрешимое подмножество натуральных чисел(приводился пример на семинаре). Пусть такое мн-во равно $\mathbb{Y}$, а $\mathbb{X} = \mathbb{N}$. Тогда $\mathbb{X} \cup \mathbb{Y} = \mathbb{N}$ – разрешимо, при неразрешимом $\mathbb{Y}$.

6. Решение. Так как S разрешимо, то S перечсислимо, следовательно, есть алгоритм, перечисляющий все его элементы. Переберем все прослые делители каждого элемента S. Выпишем простой делитель, если его не выписывали до этого. Заметим, что так мы выпешем в точности все простые делители.

7. Решение. Нам нужно вычислить $f^{-1}(x)$. Так как f и f^{-1} – биекции, то существует(единственный) такой y, что $f(y) = x$. Поэтому будем перебирать все натуральные числа, пока не встретим такой y, что $f(y) = x$. Этот y и будет значением функции $f^{-1}(x)$.