Индивидуальное домашнее задание №5.

Михайлов Никита Маратович, ПМИ-167.
Вариант 14.

Задание 1.

Для квадратичной формы

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2(-3b+20) + x_2^2(9-b) + 5x_3^2 + 2x_1x_2(12-2b) + 2x_1x_3(16-3b) + 2x_2x_3(3-b)$$

выясните, при каких значениях параметра b она является положительно определенной, а при каких – отрицательно определенной.

Решение. Составим матрицу матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} -3b+20 & 12-2b & 16-3b \\ 12-2b & 9-b & 3-b \\ 16-3b & 3-b & 5 \end{pmatrix}$$

Воспользовавшись критерием Сильвестра рассмотрим случаи:

1. Все угловые миноры строго положительны. Составим систему, посчитав все угловые миноры:

$$\begin{cases} -3b+20 > 0; \\ (-3b+20)(9-b) - (12-2b)^2 > 0; \\ (-3b+20)(9-b)5 + (12-2b)(3-b)(16-3b) + (16-3b)(12-2b)(3-b) - \\ \qquad -(16-3b)^2(9-b) - (3-b)^2(-3b+20) - 5(12-2b)^2 > 0; \end{cases}$$

   Преобразовав получим следующую систему:

$$\begin{cases} 3b - 20 < 0; & (1) \\ b^2 - b - 36 < 0; & (2) \\ b^2 - 10b + 24 < 0; & (3) \end{cases}$$

   Из (3): $b \in (4; 6)$, тогда (1) сразу становится верным. Разберемся с (2):
   $b^2 - 10b + 24 + 9b - 60 < 0 \Rightarrow 9b - 60 < 0$ – снова верно в силу (3).
   Таким образом получили, что $Q(x_1, x_2, x_3)$ положительно определена тогда и только тогда, когда $b \in (4; 6)$.

2. Знаки всех миноров чередуются, причем минор порядка 1 со знаком минус. Тогда система из

(1)–(3) перепишется:

$$\begin{cases} 3b - 20 > 0; & (4) \\ b^2 - b - 36 < 0; & (5) \\ b^2 - 10b + 24 > 0; & (6) \end{cases}$$

Тогда из (4): $b > \frac{20}{3}$, тогда (6) сразу выполнено $\Big((-\infty; 4) \cup (6; \infty)\Big)$, а (5) автоматически невыполнено, так как точка $\frac{20}{3}$ лежит правее вершины параболы и значение многочлена из (5) больше нуля(значит многочлен монотонно растет для бо́льших аргументов).
Таким образом получили, что $b \in \varnothing$.

Ответ:

1. $Q > 0 \Leftrightarrow b \in (4; 6)$
2. $Q < 0 \Leftrightarrow b \in \varnothing$

Задание 2.

Подпространство U евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ задано уравнением $-4x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$

(а) Постройте в U ортонормированный базис

(б) Для вектора $v = (2, 0, 1, 0)$ найдите его проекцию на U, его ортоганальную составляющую относительно U и расстояние от него до U.

Решение а). Так как пространство задано уравнением, то чтобы найти базис в U, достаточно найти ФСР для данного уравнения. Взяв за свободные последние три переменные получим три вектора:

$$e_1 = (-1, 0, 0, 4), \qquad e_2 = (1, 0, 4, 0), \qquad e_3 = (1, 2, 0, 0)$$

Теперь можно начать процесс ортогонализации. Пусть e_1, e_2, e_3 – начальный, e'_1, e'_2, e'_3 – ортогональный, а f_1, f_2, f_3 – ортонормированный базисы в U

1. Положим $e'_1 = e_1$.
2. Тогда $e'_2 = e'_1 + \lambda e_2$. Составим $(e'_1, e'_2) = 0 \Leftrightarrow -1(-1 + \lambda) + 16 = 0 \Rightarrow \lambda = 17$. Таким образом, $e'_2 = (16, 0, 68, 4)$. Можно вынести 4 и ничего не изменится. Тогда $e'_2 = (4, 0, 17, 1)$.
3. Составим $e'_3 = \lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + e_3$. Нам нужно:
$\begin{cases} (e'_3, e'_2) = 0 \\ (e'_3, e'_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-\lambda_1 + 4\lambda_2 + 1)4 + 289\lambda_2 + 4\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -(-\lambda_1 + 4\lambda_2 + 1) + 4(4\lambda_1 + \lambda_2) = 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{17} \\ \lambda_2 = -\frac{2}{153} \end{cases}$ Избавимся от знаменателя, домножив на 153:
Итого: $e'_3 = (136, 306, -34, 34)$

Разделив на длины получим:
$f_1 = \dfrac{e'_1}{|e'_1|} = \left(-\dfrac{1}{\sqrt{17}}, 0, 0, \dfrac{4}{\sqrt{17}}\right)$
$f_2 = \dfrac{e'_2}{|e'_2|} = \left(\dfrac{4}{\sqrt{306}}, 0, \dfrac{17}{\sqrt{306}}, \dfrac{1}{\sqrt{306}}\right)$

$$f_3 = \frac{e_3'}{|e_3'|} = \left(\frac{136}{\sqrt{114444}}, \frac{306}{\sqrt{114444}}, -\frac{34}{\sqrt{114444}}, \frac{34}{\sqrt{114444}}\right)$$

Решение б). Дополним e_1, e_2, e_3 до базиса в $\mathbb{R}^4$ вектором $e_4 = (-4, 2, 1, -1)$. Этот вектор ортогонален векторам e_1, e_2, e_3. Поэтому проекция на U вектора v параллельно e_4 будет ортогональной. Составим СЛУ:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -17 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -17 & 8 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -17 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -22 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{88} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{29}{88} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{22} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{22} \end{array}\right)$$

Таким образом, вектор $v' = -\frac{7}{88}e_1 + \frac{29}{88}e_2 + \frac{7}{22}e_3 = \frac{1}{88}(-7e_1 + 29e_2 + 28e_3) = \frac{1}{88} \cdot (64, 56, 116, -28) = \left(\frac{8}{11}, \frac{7}{11}, \frac{29}{22}, -\frac{7}{22}\right)$ – ортогональная проекция, а вектор $v^{\perp} = -\frac{7}{22} \cdot e_4 = \left(\frac{14}{11}, -\frac{7}{11}, -\frac{7}{22}, \frac{7}{22}\right)$ – ортогональное составляющая относительно U, а расстояние $\rho(v, U) = |v^{\perp}| = \frac{7}{22}\sqrt{4^2 + 2^2 + 1 + 1} = \frac{7}{\sqrt{22}}$.

Задание 3.

Составьте уравнения прямой в $\mathbb{R}^3$, параллельной плоскости $2x + 3y - 2z = 0$, проходящей через точку $(-2, 3, 1)$ и пересекающей прямую $x = -3t + 1, y = -4t + 3, z = 3t + 2$.

Решение. Наша прямая проходит через данную точку. Следовательно, координаты прямой удовлетворяют следующему уравнению: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$. Так как эта прямая параллельна плоскости, то она ортогональна ее направляющему вектору, т.е. $2x_0 + 3y_0 - 2z_0 = 0$. Так как прямые пересекаются по условию, то $\begin{cases} \lambda \neq 0 \\ t \neq 0 \end{cases}$ и у прямых есть общая точка. Составим получившуюся систему уравнений:

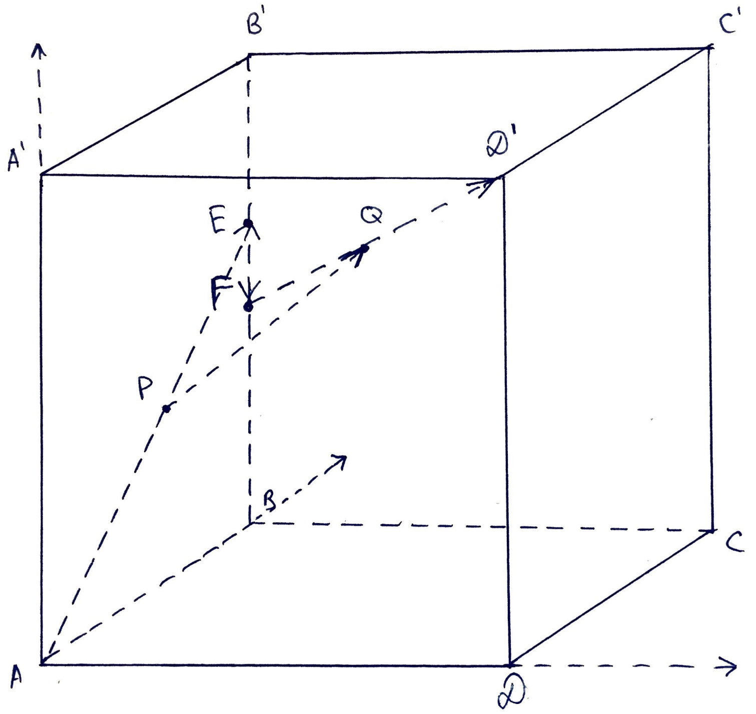
$$\begin{cases} -3t + 1 = -2 + \lambda x_0 \\ -4t + 3 = 3 + \lambda y_0 \\ 3t + 2 = 1 + \lambda z_0 \\ 2x_0 + 3y_0 - 2z_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{3-3t}{\lambda} \\ y_0 = \frac{-4t}{\lambda} \\ z_0 = \frac{3t-1}{\lambda} \\ 2x_0 + 3y_0 - 2z_0 = 0 \Rightarrow 6 - 6t - 12t - 6t + 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Тогда $\lambda \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{4}{3} \\ 0 \end{pmatrix}$ Получили зависимость, при которой прямые пересекаются. Положим $\lambda = \frac{1}{3}$, тогда $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$. Итак, прямая задается следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Задание 4.

Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ со стороной 4. Точка F – середина ребра BB', а точка E лежит на ребре BB', причем $BE : EB' = 6 : 3$. Найдите угол и расстояние между прямыми AE и $D'F$.



Дано:
$AB...C'D'$ – куб со стороной 4;
$B'F = FB$;
$BE : EB' = 2 : 1$;

Найти: $\angle(AE, D'F)$;
$\rho(AE, D'F)$.

Решение. Обозначим $\angle(AE, D'F) = \varphi$. Введем координатную ось с т.A в начале координат, тогда $A(0,0,0), A'(0,0,4), B(0,4,0)$,
$B'(0,4,4), D(4,0,0), D'(4,0,4), F(0,4,2), E(0,4,\frac{8}{3})$. Отложим вектора: $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FD'}, \overrightarrow{PQ}$, где PQ – общий перпендикуляр к прямым AE и FD'(а его длина и есть искомое расстояние). Для начала найдем угол. Для этого найдем координаты соответствующих векторов: $\overrightarrow{AE}(0,4,\frac{8}{3}), \overrightarrow{FD'}(4,-4,2)$. Теперь по определению косинуса:

$$cos\varphi = |cos(\angle(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{FD'})| = \frac{|(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{FD'})|}{|\overrightarrow{AE}| \cdot |\overrightarrow{FD'}|} = \frac{\frac{32}{3}}{\frac{4\sqrt{13}}{3} \cdot 6} = \frac{4}{3\sqrt{13}}.$$

Теперь найдем длину. Заметим, что $\overrightarrow{PQ} = x \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + y \cdot \overrightarrow{FD'}$, где x, y – неизвестные скаляры. Но мы знаем про $\overrightarrow{PQ}$, что он ортогонален и $\overrightarrow{AE}$, и $\overrightarrow{FD'}$. Следовательно, составим:

$$\begin{cases} (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{AE}) = 0 \\ (\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{FD'}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \cdot |\overrightarrow{AE}|^2 + (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{AE}) + y \cdot (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{FD'}) = 0 \\ y \cdot |\overrightarrow{FD'}|^2 + (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FD}) + x \cdot (\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{FD'}) = 0 \end{cases}$$

Заметим, что $\overrightarrow{EF}(0,0,-\frac{2}{3})$. Подставим в нашу систему и найдем x, y:

$$\begin{cases} \frac{208}{9}x - \frac{16}{9} - \frac{32}{3}y = 0 \\ 6y - \frac{4}{3} - \frac{32}{3}x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Таким образом, $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EF} + 2\overrightarrow{FD'}$ и $\overrightarrow{PQ}(8,-4,4)$. Следовательно, $\rho(AE, D'F) = |\overrightarrow{PQ}| = 4\sqrt{6}$