Домашнее задание по теории вероятностей №1.

Михайлов Никита Маратович, БПМИ-161.

1 Задача №1.

Известный польский математик Стефан Банах имел привычку носить в каждом из двух карманов пальто по коробку спичек. Всякий раз, когда ему хотелось закурить трубку, он выбирал наугад один из коробков и доставал из него спичку. Первоначально в каждом коробке было по n спичек. Но когда-то наступает момент, когда выбранный наугад коробок оказывается пустым. Найдите вероятность того, что в этот момент времени во втором коробке осталось ровно $k = 0, ..., n$ спичек.

1.1 Решение.

Так как в условии написано "выбранный наугад коробок оказывается пустым то будем считать, что после того, как математик выбрал последнюю спичку, ему нужно еще раз выбрать пустой коробок, и только после этого будем считать вероятность.
Раз во втором коробке осталось k спичек, значит математик успел достать $2n - k$ спичек, а затем выбрал пустой коробок. Следовательно, вариантов закончить «игру» ровно $\binom{2n-k}{n-k}$, то есть выбрать $n - k$ мест для спичек из второй коробки. У одного такого варианта вероятность равна $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{1}{2^{2n-k}}$. Так же в самом конце он должен выбрать пустой коробок с вероятностью 0.5. Таким образом, нужное событие имеет вероятность $\frac{\binom{2n-k}{n-k}}{2^{2n-k+1}}$.

---

2 Задача №2.

На шахматной доске размера n × n случайно размещают n ладей. Найдите вероятности следующих событий:

(a) $A = \{$ладьи не бьют друг друга$\}$.

(b) $B = \{$ладьи не бьют друг друга, и на главной диагонали нет никаких фигур$\}$.

(c) $C = \{$ладьи не бьют друг друга, и на главной диагонали находится ровно $t < n$ фигур$\}$.

2.1 Решение (a).

У первой ладьи вариантов n^2, у второй уже $(n-1)^2$, у i-й. Итого нужных вариантов $n!^2$ – для пронумерованных ладей, поэтому еще разделим на $n!$. Таким образом, $n!$ вариантов. Всего мы можем выбрать $\binom{n^2}{n}$. Следовательно, вероятность равна $\frac{n!}{\binom{n^2}{n}}$.

2.2 Решение (b).

2.3 Решение (c).