Домашнее задание по алгебре №1

Михайлов Никита Маратович, ПМИ-167.

Задание 1.

Решение. Очевидно, что $m \circ n \in \mathbb{Q}$. Проверим "плохое"равенство: $m \circ n = 1 \Leftrightarrow mn - m - n + 2 = 1 \Leftrightarrow mn - m - n + 1 = 0 \Leftrightarrow m(n-1) - (n-1) = 0 \Leftrightarrow (n-1)(m-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 1 \\ m = 1 \end{array}\right.$, чего быть не может, т.к. $1 \notin \mathbb{Q} \setminus \{1\}$.
Следовательно, операция $\circ$ задана на множестве $\mathbb{Q} \setminus \{1\}$.
Стоит отметить, что $m \circ n = (m-1)(n-1) + 1$.
Теперь докажем, что $(\mathbb{Q} \setminus \{1\}, \circ)$ – группа, проверив соответствующие ей свойства:

1. Выделим очень важное свойство: $m \circ n = n \circ m$ – достаточно очевидно.

2. $a \circ (b \circ c) = (a-1)(b \circ c - 1) + 1 = (a-1)((b-1)(c-1) + 1 - 1) + 1 = (b-1)(c-1)(a-1) + 1$
   $(a \circ b) \circ c = ((a-1)(b-1)+1) \circ c = (((a-1)(b-1)+1)-1)(c-1)+1 = (a-1)(b-1)(c-1)+1$
   Ассоциативность выполнена.

3. Проверим наличие нейтрального элемента. Обозначим его за e, тогда выполняется $\forall a \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$: $a \circ e = a \Leftrightarrow ae - a - e + 2 = a \Leftrightarrow$
   $$ae - 2a - e + 2 = 0 \Leftrightarrow e(a-1) = 2(a-1) \Rightarrow \begin{cases} e = \frac{1}{2} \\ a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow e = \frac{1}{2}$$

4. Проверим наличие обратного элемента. Обозначим его a^{-1}, тогда выполняется $\forall a \in \mathbb{Q} \setminus \{1\} : a \circ a^{-1} = e \Leftrightarrow aa^{-1} - a - a^{-1} + 2 = e \Leftrightarrow$
   $$a^{-1}(a-1) = e + a - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^{-1} = \frac{e+a-2}{a-2} \\ a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow a^{-1} = \frac{2a-3}{2(a-2)}$$

Таким образом, получили, что $(\mathbb{Q} \setminus \{1\}, \circ)$ действительно группа.