Домашнее задание по алгебре №3.

Михайлов Никита Маратович, ПМИ-167.

Задание 1.

Сколько элементов порядков 2, 3, 4 и 6 в группе $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$?

Решение. Заметим, что элемент группы $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_6$ имеет порядок n тогда и только тогда, когда НОК$(ord(a), ord(b), ord(c)) = n$, где $a \in \mathbb{Z}_3, b \in \mathbb{Z}_4, c \in \mathbb{Z}_6$.

Порядка 2. Перечислим все элементы групп, которые в степени 2 дают 0:

$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_6$
0	$0, 2$	$0, 3$

Теперь на первое место можем поставить 1 элемент, на второе 2, на третье 2. И вычтем 1, так как элемент (0, 0, 0) – единственный(пока) случай, когда НОК < 2.
Итого: $1 \cdot 2 \cdot 2 - 1 = 3$

Порядка 3. Аналогично перечислим:

$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_6$
$0, 1, 2$	0	$0, 2, 4$

Итого: $3 \cdot 1 \cdot 3 - 1 = 8$

Порядка 4. Снова перечислим:

$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_6$
0	$0, 1, 2, 3$	$0, 3$

Итого: $1 \cdot 4 \cdot 2 - 1 = 7$. Но еще нужно вычесть все элементы порядка, делящих 4, а именно порядка 2, ведь такие элементы в степени 4 тоже дают 0. Получили: $7 - 3 = 4$.

Порядка 6. Перечислим:

$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_4$	$\mathbb{Z}_6$
$0, 1, 2$	$0, 2$	$0, 1, 2, 3, 4, 5$

Итого: $3 \cdot 2 \cdot 6 - 1 - 8 - 3 = 24$.

Задание 2.

Сколько подгрупп порядков 3 и 15 в нециклической абелевой группе порядка 45?

Решение. *Основополагающая теорема о структуре конечной абелевой группы утверждает, что любая конечная абелева группа может быть разложена в прямую сумму своих циклических подгрупп, порядки которых являются степенями простых чисел.*
Следовательно, G изоморфна одной из $\mathbb{Z}_{45}, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5, \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{15}$.
Заметим, что 1) $\mathbb{Z}_{45} \simeq \mathbb{Z}_9 \times \mathbb{Z}_5$; 2) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{15}$, причем $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_{15}$ – ациклическая, так как НОД$(3, 15) \neq 1$
Таким образом $G \simeq \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$.

Порядка 3. Аналогично №1 найдем кол-во элементов порядка 3. $3 \times 3 \times 1 - 1 = 8$. Но так же отметим, что подгруппа порядка 3 порождается любым своим неединичным элементом, так как 3 – простое(следствие т. Лагранжа). Тогда получается, что мы посчитали все подгруппы дважды. Итого: $\frac{8}{2} = 4$.

Порядка 15. Любая абелева группа порядка 15 изоморфна либо $\mathbb{Z}_{15}$, либо $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5$, но они изоморфны. Следовательно, каждая подгруппа в точности изоморфна $\mathbb{Z}_{15}$. А у $\mathbb{Z}_{15}$ ровно $\varphi(15) = 8$ порождающих элементов. Теперь найдем кол-во элементов порядка 15 исходной группы аналогично №1: $3 \cdot 3 \cdot 5 - 8 - 4 - 1 = 32$. И разделим на 4, так как мы посчитаем каждую подгруппу четырежды. Итого:$\frac{32}{8} = 4$

Задание 3.

Найдите в группе $G = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ подгруппу H, для которой $G/H \simeq \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15}$.

Решение. Заметим, что $\mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15} \simeq \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \simeq \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{60}$.
Известно, что $\begin{cases} G' = \mathbb{Z} \\ H' = n\mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow G'/H' \simeq \mathbb{Z}_n$. Пусть $H = H_1 \times H_2$. Тогда возьмем $\begin{cases} H_1 = \mathbb{Z}_{30} \\ H_2 = \mathbb{Z}_{60} \end{cases}$, причем H_1 и H_2 нормальны в $\mathbb{Z}$, тогда $H = \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{60}$. По т. о факторизации:

$$G/H \simeq \mathbb{Z}/H_1 \times \mathbb{Z}/H_2 \simeq \mathbb{Z}_{30} \times \mathbb{Z}_{60} \simeq \mathbb{Z}_{10} \times \mathbb{Z}_{12} \times \mathbb{Z}_{15}$$

Задание 4.

Пусть порядок конечной абелевой группы A делится на m. Докажите, что в A есть подгруппа порядка m.

Решение. Для $m = 1$ все очевидно. Пусть $m \neq 1$.
Применим метод математической индукции. База: если G – циклическая абелева группа порядка N, порожденная элементом g, тогда $\forall n : N \vdots n \Rightarrow ord(g^{\frac{N}{n}}) = n$. Пусть верно для всех порядков меньших N. Если G – циклическая, то все хорошо. G – ациклическая. Следовательно, по структурной теореме она изоморфна прямому произведению некоторых абелевых групп <u>меньших</u> порядков: $G = G_1 \times G_2$, где $\begin{cases} |G_1| = x \\ |G_2| = y \end{cases}$. Имеем: $\begin{cases} N = xy \\ N \vdots m \end{cases}$. Из курса дискретной математики $\exists x', y' : m = x'y'$, причем $x \vdots x'$ и $y \vdots y'$, тогда существуют такие $H_1 \subseteq G_1, H_2 \subseteq G_2$, что $|H_1| = x'$ и $|H_2| = y'$, тогда $H_1 \times H_2 \subseteq G$, а $|H_1 \times H_2| = x'y' = m$. Что и требовалось доказать.