

## Домашнее задание по алгебре №6.

Михайлов Никита Маратович, ПМИ-167.

### Задание 1.

Найдите наибольший общий делитель многочленов

$$f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 7x - 2 \text{ и } g(x) = 6x^3 + 4x^2 - 5x + 1,$$

а так же его линейное выражение через  $f(x)$  и  $g(x)$ .

**Решение.** Применим расширенный алгоритм Евклида (опустим школьные вычисления столбиком).

$$1. f(x) = g(x)\left(\frac{1}{3}x - \frac{8}{9}\right) + \left(\frac{20}{9}x^2 + \frac{20}{9}x - \frac{10}{9}\right)$$

$$2. g(x) = \left(\frac{20}{9}x^2 + \frac{20}{9}x - \frac{10}{9}\right)\left(\frac{27}{10}x - \frac{9}{10}\right) + 0$$

Следовательно,  $\text{НОД}(f(x), g(x)) = \frac{20}{9}x^2 + \frac{20}{9}x - \frac{10}{9}$ . А его линейное выражение легко выразить из шага №1:

$$\text{НОД}(f(x), g(x)) = 1 \cdot f(x) + \left(-\frac{1}{3}x + \frac{8}{9}\right) \cdot g(x)$$

### Задание 2.

Разложите многочлен  $x^6 + x^3 - 12$  в произведение неприводимых в кольце  $\mathbb{C}[x]$  и в кольце  $\mathbb{R}[x]$ .

**Решение.** Известно, что в кольце  $\mathbb{C}[x]$  неприводимыми являются многочлены степени 1. По основной теореме алгебры данный многочлен  $f(x) = x^6 + x^3 - 12$  раскладывается в произведение многочленов типа:  $x - x_0$ , где  $x_0$  — корень уравнения  $f(x) = 0$ . Решим это уравнение.

Составим  $x^6 + x^3 - 12 = 0$ . Обозначим  $x^3 = t$ , тогда  $t^2 + t - 12 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Rightarrow \begin{cases} t_1 = -4 \\ t_2 = 3 \end{cases}$  | Перейдем к  $x$ :  $\begin{cases} x = \sqrt[3]{-4} & (1) \\ x = \sqrt[3]{3} & (2) \end{cases}$  | (1) Сразу можно выделить  $x_1 = -\sqrt[3]{4}$ .

Осталось найти еще 2 корня. Так как в системе координат они образуют правильный многоугольник, а в нашем случае треугольник, то можно однозначно найти 2 точки, соответствующие нашим корням. В тригонометрической форму они имеют вид:  $\sqrt[3]{4}\left(\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right)$ . И со-

ответственно в алгебраической:  $\begin{cases} x_2 = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} - \sqrt[3]{4}\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_3 = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} + \sqrt[3]{4}\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$  | (2) Сразу выделим  $x_4 = \sqrt[3]{3}$ . Осталось

найти еще 2. Аналогично можно найти 2 точки на единичной окружности (только в этом случае треугольник будет развернут в другую сторону, так как действительная часть положительна).

Итого в тригонометрической форме корни имеют вид:  $\sqrt[3]{3}(\cos(\pm\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\pm\frac{2\pi}{3}))$ . А в алгебраической форме соответственно:

$$\begin{cases} x_5 = -\frac{\sqrt[3]{3}}{2} - \sqrt[3]{3}\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_6 = -\frac{\sqrt[3]{3}}{2} + \sqrt[3]{3}\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{cases}$$

Таким образом,  $f(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x - x_5)(x - x_6)$  – в кольце  $\mathbb{C}[x]$ . Причем  $x_2, x_3, x_5, x_6$  – сопряженные. Зная, что в кольце  $\mathbb{R}[x]$  неприводимыми являются линейные многочлены и многочлены, корни которых сопряженные комплексные числа ( $D < 0$ ), то легко получим разложение  $f(x)$  в кольце  $\mathbb{R}[x]$ :  $f(x) = (x - x_1)(x - x_4)(x^2 - 2^{2/3}x + 2^{4/3})(x^2 + 3^{1/3}x + 3^{2/3})$

### Задание 3.

*Выясните, является ли число  $5 + \sqrt{-5}$  простым элементом кольца  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ .*

**Решение.** Число  $5 + \sqrt{-5}$  является простым  $\Leftrightarrow$  оно представимо в виде произведения. Имеем  $5 + \sqrt{-5} = xy = (a + b\sqrt{-5})(c + d\sqrt{-5})$ . Рассмотрим модуль комплексного числа. Пусть  $N(z)$  – квадрат модуля комплексного числа (не путать с нормой). Имеем  $N(5 + \sqrt{-5}) = N(xy) = N(x)N(y) \Leftrightarrow 30 = (a^2 + 5b^2)(c^2 + 5d^2) = 1 \cdot 30 = 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 = 5 \cdot 6$ . Заметим, что  $N(x) = 2$  можно получить только при  $a = \pm\sqrt{2}, b = 0$ , но тогда  $a, b$  – не целые. Аналогично и с  $N(x) = 3$ .

Остается один вариант:  $\begin{cases} N(x) = 5 \\ N(y) = 6 \end{cases}$ . Рассмотрим  $N(x) = 5 \Leftrightarrow a^2 + 5b^2 = 5$ . Одна из переменных очевидно 0. Пусть  $b = 0$ , тогда  $c$  и  $d$  – не целые. Следовательно,  $a = 0$ , тогда  $b = \pm 1$ . Положим  $b = 1$ , тогда  $5 + \sqrt{-5} = \sqrt{-5}(c + d\sqrt{-5})$ . Легко можно подобрать такие целые  $c$  и  $d$ , что равенство становится верным. Например  $c = 1, d = -1$ :  $5 + \sqrt{-5} = \sqrt{-5}(-\sqrt{-5} + 1)$ . Данное число не является простым.

### Задание 4.

*Пусть  $R$  – евклидово кольцо с нормой  $N$ . Докажите, что  $N$  принимает бесконечное число значений.*

**Решение.** Пусть  $N$  принимает конечное число значений. Следовательно, существует и максимальное значение. Отсюда  $\exists a \in R : N(a) = N_{\max}$ . Так как  $R$  – не поле, то существует необратимый  $b$ . Так как  $N$  – норма, то выполнено следующее свойство:

$$N(x) = N(xy) \Leftrightarrow \exists y^{-1}$$

Но для элемента  $a$  не может быть равенства  $N(a) = N(ab)$ , так как  $b$  необратим. Следовательно, по определению нормы:  $N(ab) > N(a) \Leftrightarrow N(ab) > N_{\max}$  – противоречие.