Домашнее задание по теории вероятностей №1.

Михайлов Никита Маратович, БПМИ-161.

1 Задача №1.

Известный польский математик Стефан Банах имел привычку носить в каждом из двух карманов пальто по коробку спичек. Всякий раз, когда ему хотелось закурить трубку, он выбирал наугад один из коробков и доставал из него спичку. Первоначально в каждом коробке было по n спичек. Но когда-то наступает момент, когда выбранный наугад коробок оказывается пустым. Найдите вероятность того, что в этот момент времени во втором коробке осталось ровно $k = 0, ..., n$ спичек.

1.1 Решение.

Так как в условии написано "выбранный наугад коробок оказывается пустым то будем считать, что после того, как математик выбрал последнюю спичку, ему нужно еще раз выбрать пустой коробок, и только после этого будем считать вероятность.
Раз во втором коробке осталось k спичек, значит математик успел достать $2n-k$ спичек, а затем выбрал пустой коробок. Следовательно, вариантов закончить «игру» ровно $\binom{2n-k}{n-k}$, то есть выбрать $n-k$ мест для спичек из второй коробки. У одного такого варианта вероятность равна $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{1}{2^{2n-k}}$. Так же в самом конце он должен выбрать пустой коробок с вероятностью 0.5. Таким образом, нужное событие имеет вероятность $\frac{\binom{2n-k}{n-k}}{2^{2n-k+1}}$.

---

2 Задача №2.

На шахматной доске размера $n \times n$ случайно размещают n ладей. Найдите вероятности следующих событий:

(a) $A = \{$ладьи не бьют друг друга$\}$.

(b) $B = \{$ладьи не бьют друг друга, и на главной диагонали нет никаких фигур$\}$.

(c) $C = \{$ладьи не бьют друг друга, и на главной диагонали находится ровно $t < n$ фигур$\}$.

2.1 Решение (a).

У первой ладьи вариантов n^2, у второй уже $(n-1)^2$, у i-й. Итого нужных вариантов $n!^2$ – для пронумерованных ладей, поэтому еще разделим на $n!$. Таким образом, $n!$ вариантов. Всего мы можем выбрать $\binom{n^2}{n}$. Следовательно, вероятность равна $\frac{n!}{\binom{n^2}{n}}$.

2.2 Решение (b).

Пусть $M_i = \{$кол-во расстановок, где на i-м месте на главной диагонали стоит ладья и ладьи не бьют друг друга$\}$, а так же обозначим $M = \{$кол-во расстановок, где хотя бы одна ладья стоит на главной диагонали и ладьи не бью друг друга$\}$

$$M = \bigcup_{i=1}^{n} M_i = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le n} (M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_k})$$

Следовательно, B есть $A - M$, где A, B – события из условия задачи, но в нашем контексте выступают как «кол-во способов».

1. Посчитаем M_i. Так как i-е место на диагонали занято, то остальным ладьям остается $(n-1)^2$ мест. Таких способов $\dfrac{(n-1)!^2}{(n-1)!} = (n-1)!$ (см. пункт (a)).

2. Посчитаем $M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_k}$. Так как k мест на диагонали занято, то другим остается $(n-k)^2$ мест. Вариантов расставить остальных $(n-k)!$.

3. Посчитаем M. $M = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum\limits_{1 \le i_1 \le \ldots \le i_k \le n} (M_{i_1} \cap \ldots \cap M_{i_k}) = \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \cdot \binom{n}{k} \cdot (n-k)!$

4. Посчитаем B. Составим $B = A - M = n! - \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k} \cdot \binom{n}{k} \cdot (n-k)! = n! + \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k} \cdot \binom{n}{k} \cdot (n-k)! =$ $= n! + \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k} \dfrac{n!}{k!(n-k)!} (n-k)! = n! + \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k} \dfrac{n!}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^{k} \dfrac{n!}{k!} = !n$ (субфакториал)

5. Посчитаем $P(B) = \dfrac{B}{\binom{n^2}{n}} = \dfrac{!n}{\binom{n^2}{n}}$

2.3 Решение (c).

Эта задача отличается от предыдущей тем, что некоторые t мест на диагонали заняты, но заметим, что мы можем «вырезать» полностью свободные строки, столбцы и получим предыдущую задачу(не о вероятности, а о кол-ве способов) только для доски $(n-1) \times (n-t)$. Выбрать t мест для главной диагонали можно $\binom{n}{t}$ способами. Кол-во способов расставить остальные фигурки равно $!(n-t)$. Итого $P(C) = \dbinom{n}{t} \dfrac{!(n-t)}{\binom{n^2}{n}}$.