Домашнее задание по алгебре №3.

Михайлов Никита Маратович, ПМИ-167.

Задание 1.

Пусть G – группа всех диагональных матриц в $GL_3(\mathbb{R})$ и $X = \mathbb{R}^3$. Опишите все орбиты и все стабилизаторы для действия группы G на множестве X, заданного формулой $(g, x) \mapsto g \cdot x$.

Решение. Пусть $x \in X$, тогда орбита элемента x – это $\{gx \mid g \in G\}$. Рассмотрим произвольный элемент $g \in G$:

$$g = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

где $g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Посмотрим их произведение:

$$gx = \begin{pmatrix} g_1x_1 \\ g_2x_2 \\ g_3x_3 \end{pmatrix}$$

Заметим, что если $x_i = 0$, то на i-й координате вектора x будет стоять 0, независимо от g_i. Тогда орбиты легко выписать, перебрав все возможные места для нулей:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

где $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Теперь опишем стабилизаторы. Пусть g – стабилизатор точки x, тогда:

$$gx = x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} g_1x_1 \\ g_2x_2 \\ g_3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим уравнение:$g_ix_i = x_i \Rightarrow \begin{cases} g_i = 1, \text{ если } x_i \neq 0 \\ g_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ если } x_i = 0 \end{cases}$ Множество, составленное из удовлетворяющих уравнению g_i будет стабилизатором точки x.

$\boxed{\text{Задание 2.}}$

Пусть G – группа всех верхнетреугольных матриц в $SL_2(\mathbb{R})$. Опишите все классы сопряженности в группе G.

Решение. Пусть $g \in G, x \in X = G$, тогда $g = \begin{pmatrix} g_1 & g_2 \\ 0 & \frac{1}{g_1} \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ 0 & \frac{1}{x_1} \end{pmatrix}, g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{g_1} & -g_2 \\ 0 & g_1 \end{pmatrix}$.
Подействуем сопряжением:

$$gxg^{-1} = \begin{pmatrix} g_1x_1 & g_1x_2 + \frac{g_2}{x_1} \\ 0 & \frac{1}{g_1x_1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{g_1} & -g_2 \\ 0 & g_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & -g_1g_2x_1 + g_1^2x_2 + \frac{g_1g_2}{x_1} \\ 0 & \frac{1}{x_1} \end{pmatrix}$$

Заметим, что 1) $det(gxg^{-1}) = 1$ (определитель произведения – произведение определителей);
2) $g_1 \neq 0, x_1 \neq 0$ – по условию. Рассмотрим случаи:

1. g, x – недиагональные $\Leftrightarrow \begin{cases} g_2 \neq 0 \\ x_2 \neq 0 \end{cases}$. Ничего интересного с gxg^{-1} не происходит: она может быть как диагональной, так и недиагональной.
2. g – диагональная, x – нет $\Leftrightarrow \begin{cases} g_2 = 0 \\ x_2 \neq 0 \end{cases}$, тогда gxg^{-1} – недиагональная, так как $g_1^2x_2 \neq 0$
3. x – диагональная, g – нет $\Leftrightarrow \begin{cases} g_2 \neq 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$, тогда рассмотрим выражение:
   $\dfrac{g_1g_2}{x_1} - g_1g_2x_1 = g_1g_2(\dfrac{1}{x_1} - x_1)$. Приравняем его к нулю: $g_1g_2(\dfrac{1}{x_1} - x_1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = \pm 1$. Получили, что ghg^{-1} – диагональная$\Leftrightarrow x_1 = \pm 1$
4. g, x – диагональные $\Leftrightarrow g_2 = x_2 = 0$, тогда и gxg^{-1} – диагональная.

Задание 3.

Для действия группы S_4 на себе сопряжениями найдите стабилизатор подстановки (1 2 3 4).

Решение. Пусть $(1\ 2\ 3\ 4) = \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Стабилизаторы элемента σ – те элементы S_4, к-рые не изменяют σ при сопряжении:$\{\delta \in S_4 \mid \delta\sigma\delta^{-1} = \sigma\}$. Заметим, что $\delta\sigma = \sigma\delta$, а следовательно, $\delta(\sigma(i)) = \sigma(\delta(i))$. Переберем все i:

$i = 4$: $\delta(1) = \sigma(\delta(4))$

$i = 1$: $\delta(2) = \sigma(\delta(1))$

$i = 2$: $\delta(3) = \sigma(\delta(2))$

$i = 3$: $\delta(4) = \sigma(\delta(3))$

Теперь переберем все возможные образы для $\delta(4)$:

1. $\delta(4) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \delta(1) = \sigma(1) = 2 \\ \delta(2) = \sigma(2) = 3 \\ \delta(3) = \sigma(3) = 4 \\ \delta(4) = \sigma(4) = 1 \end{cases} \Rightarrow \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\delta(4) = 2 \Rightarrow \begin{cases} \delta(1) = \sigma(2) = 3 \\ \delta(2) = \sigma(3) = 4 \\ \delta(3) = \sigma(4) = 1 \\ \delta(4) = \sigma(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\delta(4) = 3 \Rightarrow \begin{cases} \delta(1) = \sigma(3) = 4 \\ \delta(2) = \sigma(4) = 1 \\ \delta(3) = \sigma(1) = 2 \\ \delta(4) = \sigma(2) = 3 \end{cases} \Rightarrow \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

4. $\delta(4) = 4 \Rightarrow \begin{cases} \delta(1) = \sigma(4) = 1 \\ \delta(2) = \sigma(1) = 2 \\ \delta(3) = \sigma(2) = 3 \\ \delta(4) = \sigma(3) = 4 \end{cases} \Rightarrow \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Все возможные стабилизаторы найдены.

Задание 4.

Пусть $k, l \in \mathbb{N}$ и $n = kl$. Реализуем группу $\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_l$ как подгруппу в S_n, использую доказательство теоремы Кэли. Найдите необходимое и достаточное условие на числа k, l, при котором эта подгруппа содержится в A_n.

Решение. По теореме Кэли группа $G = \mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_l \simeq \mathbb{K} \subseteq S_n$. Построим таблицу, отображающая все элементы группы G, в которой элемент (i, j) – находится в строке $i+1$ и столбце $j+1$:

	1	2	$\cdots$	l
1	$(0,0)$	$(0,1)$	$\cdots$	$(0,l-1)$
2	$(1,0)$	$(1,1)$	$\cdots$	$(1,l-1)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
k	$(k-1,0)$	$(k-1,1)$	$\cdots$	$(k-1,l-1)$

Теперь зададим биекцию между элементами таблицы и натуральными числами (верхней строкой подстановок): $\varphi : G \mapsto [1, n]$ такую, что $\varphi((i, j)) \mapsto il + (j + 1)$, где $(i, j) \in G$. Если интуитивно, то это записать всю таблицу в одну строчку, причем сначала первую строку, потом вторую и т.д.

Биекция между G и K определяется следующим образом: 1) есть элемент (i, j); 2) есть группа G; 3) ставим элементы группы по возрастанию с помощью биекции φ; 4) умножаем каждый элемент на (i, j); 5) снова с помощью биекции узнаем номера. Это и будет искомая перестановка.

Рассмотрим знак перестановки, полученной из элемента $(0, 1)$. Все строки сдвинутся циклически на 1. Перестановка разобьется на k блоков, в каждом из которых $l - 1$ инверсия. Знак $k(l - 1)$.

А теперь для элемента $(1, 0)$: все столбцы сдвинутся на 1. Если восстановить номера, то получится сначала 2я строка, потом 3я, ..., далее 1я. Между строками инверсий нет. Инверсии образуют все первые $k-1$ блоков с последним. Посчитаем между первым блоком и последним: первый элемент образует с последним l инверсий, второй тоже l. Элементов всего в блоке l. То есть инверсий l^2. Домножим на кол-во блоков. Итого инверсий: $l^2(k - 1)$.

Чтобы сделать домножение на (i, j), надо домножить i раз на $(1, 0)$ и j раз на $(0; 1)$. Если они будут четными, то все хорошо и все подстановки тоже будут четными. Составим $\begin{cases} k(l-1) \vdots 2 \\ l^2(k-1) \vdots 2 \end{cases}$

Перебрав варианты получили: l, k – одинаковой четности.