Домашняя работа по дискретной математике №15

Михайлов Никита Маратович, БПМИ-167

Теорема 1.Если множество A бесконечно, то существует счетное множество $B \subseteq A$.
Теорема 2. Если множество A счетно и $B \subseteq A$, то B конечно или счетно.
Теорема 3. Если множество A счетно, то при любом целом положительном n множество A^n конечных последовательностей длины n счетно (а множество A^0 конечно).
Теорема 4. Если множества A и B конечны или счетны, причем хотя бы одно из них бесконечно, то множество $A \cup B$ счетно.
Теорема 5.Пусть множества A и B конечны, причем $|A| = n$ и $|B| = m$. Тогда множество $A \times B$ конечно, причем $|A \times B| = nm$.
1. Решение. По Т.1 $\exists A' \subseteq A \setminus B : A' \sim \mathbb{N}$. Обозначим $A \cap B = C$ - конечно или счетно, тогда(воспользовавшись Т.4)

$$A \setminus B = A \setminus B \setminus A' \cup A' = A \setminus C \setminus A' \cup A' \sim A \setminus C \setminus A' \cup A' \cup C.$$

Так как $A' \cap C = \varnothing$, то $A \setminus C \setminus A' = A \setminus A' \setminus C$. Подставим в формулу выше:

$$A \setminus B \sim A \setminus A' \setminus C \cup A' \cup C = A.$$

Таким образом, $A \setminus B \sim A$ - верно.
2. Решение. Не верно. Возьмем $A = B = \mathbb{N}$, тогда $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B) = = \mathbb{N} \setminus \mathbb{N} = \varnothing \nsim \mathbb{N}$.

3. Решение. Верно. Это частный случай задания 1, когда $A \cap B = C$ - конечно.

4. Решение. Известно, что 1) $\mathbb{Q}$ - счетно; 2) между двумя любыми числами существует некоторое рациональное число.
Для каждого интервала поставим ему в соответствие одно из рациональных чисел, принадлежащих данному интервалу. Очевидно, что получившееся множество является подмножеством $\mathbb{Q} \Rightarrow$ конечно или счетно.

5. Решение. Пусть A - бесконечное множество, тогда по Т.1 $\exists A' \subseteq A : A' \sim \mathbb{N}$. $\Rightarrow A' = \{a_1, a_2, ...\}$. Составим новые множества $A'_1 = \{a_1, a_3, ...\}$ и $A'_2 = \{a_2, a_4, ...\}$. Таким образом, каждое бесконечное множество содержит минимум 2 счетных непересекающихся множества. А они свою очередь содержат еще по 2 счетных. Это никогда не закончится, так как на каждой итерации есть хотя бы 2 счетных множества $\Rightarrow$ исходное множество А содержит в себе бесконечное число счетных непересекающихся множеств.

6. Решение. Чтобы задать периодическую функцию достаточно взять Т последовательных чисел и сопоставить каждому его значение. Каждое из значений Т содержится в $\mathbb{Z}$ - счетное. Для каждого фиксированного Т множество значений содержится в множестве $\mathbb{Z}^T$ - счетное по Т.5. Следовательно, кол-во всех периодических функций счетно, т.к. получаем счетное объединение счетных множеств(для каждого Т свое множество значений).

7. Решение. Пусть $\mathbb{A}$ – мн-во конечных строго возрастающих последовательностей, а $\mathbb{B}$ – мн-во всех конечных последовательностей.
Рассмотрим строго возрастающую последовательность длины $n : x_n = (a_1, a_2, ..., a_n)$.
Рассмотрим следующую функцию f, возвращающую последовательность:

$$f(x_n) = \begin{cases} (a_1, a_2 - a_1 - 1, a_3 - a_2 - 1, ..., a_n - a_{n-1} - 1), \text{ если } x_n \neq \varnothing \\ \varnothing, \text{ если } x_n = \varnothing \end{cases}$$

*<u>*Замечание*</u>: На первое место ставим первый элемент исходной последовательности, а на i-е место ставим разность между i-ым и (i-1)-ым $\forall i \in [2; n]$. Но почему -1? Чтобы представить 0, т.к. в нашем курсе $0 \in \mathbb{N}$ и $a_i - a_{i-1} \geq 1$.

Заметим, что это инъекция $f : \mathbb{A} \to \mathbb{B}$. $\forall x_n \neq x'_n \Rightarrow f(x_n) \neq f(x'_n)$. Зная первый элемент новой последовательности и все разности, мы однозначно можем задать исходную последовательность $\Rightarrow$ f^{-1} - инъекция. Таким образом:

$$\begin{cases} f\text{– инъекция} \\ f^{-1}\text{– инъекция} \end{cases} \Rightarrow f\text{– биекция:} \mathbb{A} \leftrightarrow \mathbb{B}$$