Домашнее задание по алгебре №7.

Михайлов Никита Маратович, ПМИ-167.

Задание 1.

Пусть α – комплексный корень многочлена $x^3 - 3x + 1$. Представьте элемент

$$\frac{\alpha^4 - \alpha^3 + 4\alpha + 3}{\alpha^4 + \alpha^3 - 2\alpha^2 + 1} \in \mathbb{Q}(\alpha)$$

в виде $f(\alpha)$, где $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ и $deg\, f(x) \leq 2$.

Решение. Так как α – корень данного многочлена, то $A(\alpha) = \alpha^3 - 3\alpha + 1 = 0$. Поэтому разделим числитель и знаменатель на $A(\alpha)$. Тогда исходная дробь будет равна дроби, числитель и знаменатель которой есть остатки от деления на $A(\alpha)$ соответственно.

Заметим, что 1) $\alpha^4 - \alpha^3 + 4\alpha + 3 = (\alpha - 1)A(\alpha) + 3\alpha^2 + 4$; 2) $\alpha^4 + \alpha^3 - 2\alpha^2 + 1 = (\alpha + 1)A(\alpha) + \alpha^2 + 2\alpha$. Следовательно, исходная дробь ранва дроби $\dfrac{3\alpha^2 + 4}{\alpha^2 + 2\alpha}$. Пусть $g(\alpha) = \alpha^2 + 2\alpha$, тогда $f(\alpha) = (3\alpha^2 + 4) \cdot g^{-1}(\alpha)$. Найдем $g^{-1}(\alpha)$.

Примечание. НОД$(a, b) = 1 \Rightarrow \exists x, y : ax + by = 1$, где a, b, x, y – многочлены. Но если α – корень a, то $ax = 0$. Получим $by = 1$, откуда следует, что $y = b^{-1}$

Теперь заметим, что НОД$(A(\alpha), g(\alpha)) = -1$ (дальше все равно будет видно, что действительно -1). Применим расширенный алгоритм Евклида:

1. $\alpha^3 - 3\alpha + 1 = (\alpha^2 + 2\alpha)(\alpha - 2) + (\alpha + 1) \Leftrightarrow (\alpha + 1) = \alpha^3 - 3\alpha + 1 - (\alpha^2 + 2\alpha)(\alpha - 2) = A(\alpha) - (\alpha - 2)g(\alpha)$

2. $\alpha^2 + 2\alpha = (\alpha + 1)(\alpha + 1) - 1 \Leftrightarrow 1 = (\alpha + 1)^2 - (\alpha^2 + 2\alpha) = (A(\alpha) - (\alpha - 2)g(\alpha))(\alpha + 1) - g(\alpha)$. Применим тот факт, что $A(\alpha) = 0$, тогда $1 = (2 - \alpha)g(\alpha)(\alpha + 1) - g(\alpha) = g(\alpha)((2 - \alpha)(\alpha + 1) - 1) = g(\alpha)(-\alpha^2 + \alpha + 1) = 1$.

Подставим полученный многочлен вместо дроби: $(3\alpha^2 + 4)(-\alpha^2 + \alpha + 1) = -3\alpha^4 + 3\alpha^3 - \alpha^2 + 4\alpha + 4$. Возьмем остаток от делания на $A(\alpha)$. Получим:$-10\alpha^2 + 16\alpha + 1$ – искомый элемент.

Задание 2.

Найдите минимальный многочлен для числа $\sqrt{3} - \sqrt{5}$ над $\mathbb{Q}$

Решение. Пусть $x = \sqrt{3} - \sqrt{5}$, тогда $x^2 = 8 - 2\sqrt{15} \Leftrightarrow 2\sqrt{15} = 8 - x^2$. Составим $60 = (x^2 - 8)^2 \Leftrightarrow x^4 - 16x^2 + 4 = 0$. Покажем, что это минимальный многочлен, убедившись, что он неприводим над полем $\mathbb{Q}$. Решим уравнение $x^4 - 16x^2 + 4 = 0$. Обозначим $x^2 = t \geq 0$, тогда $t^2 - 16t + 4 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \dfrac{8 \pm \sqrt{64 - 4}}{1} = 8 \pm 2\sqrt{15} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = 8 - 2\sqrt{15} \\ t_2 = 8 + 2\sqrt{15} \end{array}\right.$ Перейдем к x:

$\left[\begin{array}{l} x^2 = 8 - 2\sqrt{15} \\ x^2 = 8 + 2\sqrt{15} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = \sqrt{3} - \sqrt{5} \\ x_2 = \sqrt{5} - \sqrt{3} \\ x_3 = \sqrt{3} + \sqrt{5} \\ x_4 = -\sqrt{3} - \sqrt{5} \end{array}\right.$ Корни получились иррациональными, а, следовательно, многочлен $x^4 - 16x^2 + 4$ неприводим и минимален над $\mathbb{Q}$.

Задание 3.

Пусть F – подполе в $\mathbb{C}$, полученное присоединением к $\mathbb{Q}$ всех комплексных корней многочлена x^4+x^2+1 (то есть F – наименьшее подполе в $\mathbb{C}$, содержащее $\mathbb{Q}$ и все корни этого многочлена). Найдите степень расширения $[F:\mathbb{Q}]$.

Решение. Заметим, что $x^6-1=(x^2-1)(x^4+x^2+1)$ – разность кубов. Поэтому корнями данного многочлена будут все комплексные корни из 1 кроме ± 1. Все корни можно получить возведением числа $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ в натуральную степень (так как возведение в степень комплексного числа по модулю равного единицу – это есть умножение его угла на степень). Самое маленькое подполе в $\mathbb{C}$, содержащее корни данного многочлена совпадает с $\mathbb{Q}(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i)$. Если рассматривать это поле как векторное пространство, то его размерность – 2.

Задание 4.

Пусть $F=\mathbb{C}(x)$ – поле рациональных дробей и $K=\mathbb{C}(y)$, где $y=x+1/x$. Найдите степень расширения $[F:K]$.

Решение. Заметим, что x – корень уравнения $x^2-xy+1=0$ над полем $\mathbb{C}(y)$. Действительно, если подставить вместо y число $x+1/x$, то получим $x^2-x(x+1/x)+1=x^2-x^2-1+1=0$ – верно. Тогда если x не является элементом $\mathbb{C}(y)$, то степень расширения равна двум(так как через базис $\mathbb{C}(y)$ нельзя будет выразить x). Пусть $x\in\mathbb{C}(y)$, тогда $\exists P(y),Q(y)$ такие, что $x=\frac{P(y)}{Q(y)}$. Тогда рассмотрим предел левой и правой частей при $x\to\pm i$. Тогда $\lim\limits_{x\to\pm i} x+\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\pm i}\frac{x^2+1}{x}=0$. Тогда предел отношения P к Q будет стремиться либо к 0, либо к бесконечности, либо к отношению свободных членов. Левая часть не стремится ни к нулю, ни к бесконечности. Тогда правая часть тоже не должна к ним стремиться. Тогда очевидно, что если правая часть стремится к отношению свободных членов, то она стремится к такому же число и при замене $x\to -i$. Но левая часть меняет при этом знак. Получили противоречие. Следовательно, степень расширения равна 2.