Домашняя работа по дискретной математике №17

Михайлов Никита Маратович, БПМИ-167

1. Решение. Заметим, что 1) функция принимает значение 1, если в наборе x_1, x_2, x_3 присутствует нечетное кол-во единиц; 2) функция $MAJ(x_1, x_2, x_3)$ вернет 1, если единиц более двух.

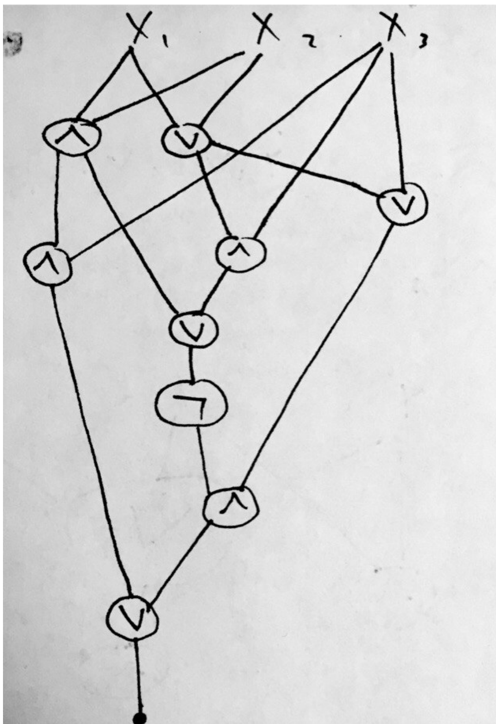
$$f = (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee \overline{MAJ(x_1, x_2, x_3)} \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$

Распишем $MAJ(x_1, x_2, x_3$ через конъюнкцию и дизъюнкцию:

$$MAJ(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2) \vee ((x_1 \vee x_2) \wedge x_3)$$

Таким образом,

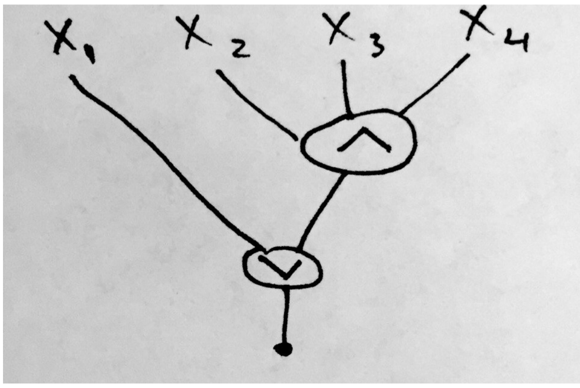
$$f = (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee \overline{(x_1 \wedge x_2) \vee ((x_1 \vee x_2) \wedge x_3)} \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$$



2. Решение. Заметим, что на первых 8-ми наборах переменная x_1 имеет значение 0, а на последних 8-ми 1.

$$f = x_1 \vee x_2 \wedge x_3 \wedge x_4$$

Следовательно, схема:



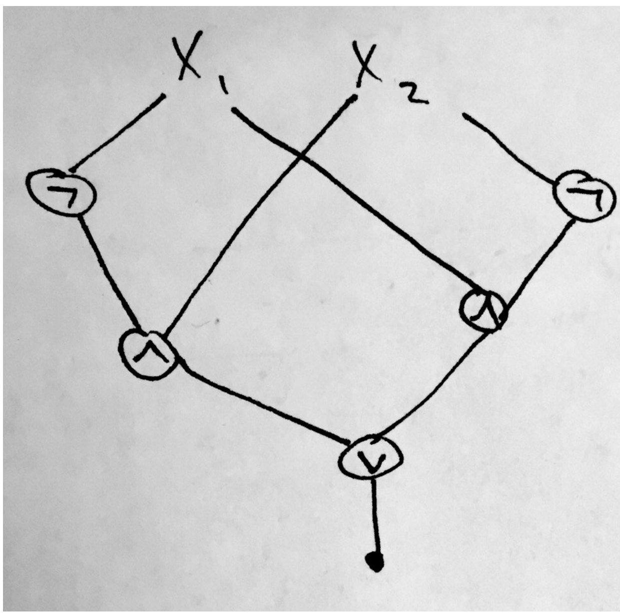
3. Построение. Пробежимся по всем подряд идущим тройкам.

$$f = \bigvee_{i=1}^{n-2} x_i \wedge \overline{x_{i+1}} \wedge x_{i+2}$$

Тогда схема:

$x_1, ..., x_n,$
$x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3, ..., x_{n-2} \wedge \overline{x_{n-1}} \wedge x_n,$
$\bigvee\limits_{i=1}^{n-2} x_i \wedge \overline{x_{i+1}} \wedge x_{i+2}$

А ее размер линейно зависит от n.
4. Решение. Запишем схему XOR:



Чтобы умножить число на 3, нужно сложить его 3 раза. Построим схему для складывания двух двоичных чисел $x = x_0x_1...x_{n-1}$ и $y = y_0y_1...y_{n-1}$:
Так как в сложении нам нужно хранить биты которые образуются 'в уме', то введем еще одну последовательность $z = z_1z_2...$, где

$$z_i = MAJ(x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}), \text{ а } z_1 = x_0 \wedge y_0$$

Схема функции MAJ мы представляли в номере 1. Таким образом, при складывании i-х битов нам нужно будет прибавить и z_i бит. Результат будем записывать в $r = r_0r_1r_2...r_n, r_i = x_i \oplus y_i \oplus z_i$)(Если нет значения для x_n или y_n, то оно равно 0). XOR и MAJ имеют в себе конечный и постоянный размер. Для каждого бита мы применим XOR не более 2-х раз и MAJ не более 1 раза. Следовательно, размер нашей схемы - линейный многочлен. Применив схему 3 раза многочлен останется линейным.

5. Решение. Пусть на вход поступило двоичное число $x = x_{n-1}x_{n-2}...x_2x_1x_0 = 2^0 \cdot x_0 + 2^1 \cdot x_1 + ... + 2^{n-1} \cdot x_{n-1}$. Заметим, что четные степени двоек дадут остаток 1 по модулю 3, а нечетные дадут 2, тогда

$$2^0 \cdot x_0 + 2^1 \cdot x_1 + ... + 2^{n-1} \cdot x_{n-1} \equiv$$

$$\equiv x_0 + 2x_1 + x_2 + 2x_3 + ...(n \; mod \; 2 \; + \; 1)x_n \equiv x_0 - x_1 + x_2 - x_3 ... (mod \; 3)$$

Следовательно, можно рассмотреть сумму всех x_i на делимость на 3. Будем $\forall k \in [1, n]$ записывать сумму $S_k = x_0 - x_1 + ... + (-1)^k$, а так же запишем в двоичное число $R_k = r_{k,1}r_{k,2} = (S_k \; mod \; 3)_2 = \{00, 01, 10\}$. Рассмотрим случаи:

1. k - четное. $R_{k-1} = \{00, 01, 10\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} x_k = 0 \\ R_k = \{00, 01, 10\} \end{cases} \\ \begin{cases} x_k = 1 \\ R_k = \{01, 10, 00\} \end{cases} \end{array} \right.$

   Запишем функцию для R_k(так же, как записываем ДНФ по таблице истинности):

$$\begin{cases} r_{k,1} = \overline{r_{k-1,1}} \wedge r_{k-1,2} \wedge x_k \vee r_{k-1,1} \wedge \overline{r_{k-1,2}} \wedge \overline{x_k} \\ r_{k,2} = \overline{r_{k-1,1}} \wedge \overline{r_{k-1,2}} \wedge x_k \vee \overline{x_{k-1,1}} \wedge r_{k-1,2} \wedge \overline{x_k} \end{cases}$$

2. k - нечетное. $R_{k-1} = \{00, 01, 10\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{cases} x_k = 0 \\ R_k = \{00, 01, 10\} \end{cases} \\ \begin{cases} x_k = 1 \\ R_k = \{10, 00, 01\} \end{cases} \end{array} \right.$ Составим схему:

$$\begin{cases} r_{k,1} = \overline{x_{k-1,1}} \wedge \overline{r_{k-1,2}} \wedge x_k \vee x_{k-1,1} \wedge \overline{r_{k-1,2}} \wedge \overline{x_k} \\ r_{k,2} = x_{k-1,1} \wedge \overline{r_{k-1,2}} \wedge x_k \vee \overline{x_{k-1,1}} \wedge r_{k-1,2} \wedge \overline{x_k} \end{cases}$$

Вычислим R_{n-1}, зная все предыдущие. ($S_0 = R_0 = x_0$). На выходе будет значение $\overline{r_{n-1,1}} \wedge \overline{r_{n-1,2}}$. Каждая из построенных подсхем имеет постоянный размер. Следовательно, размер общей схемы линейно зависит от n.