Домашняя работа по дискретной математике №16

Михайлов Никита Маратович, БПМИ-167

1. Решение. Известно, что окружность на координатной плоскости однозначно задается по координатам ее центра($\mathbb{R}^2$) и радиусу($\mathbb{R}$). Таким образом множество всех окружностей $\mathbb{R}^3 \sim \mathbb{R}$.
2. Решение. Нет. Возьмем произвольную точку. Тогда для нее существует континуум окружностей с различным радиусом. Но точка одна, из чего следует, что множество центров таких окружностей состоит из одного элемента, что противоречит условию задачи.
3. Решение. Пусть $A_i = \{(i; x) \mid \forall x \in [0;\ 1]\},\ i \in [0;\ 1]$, тогда $\forall i\ A_i \sim \mathbb{R}$. А самих i континуум, причем $\forall i, j : i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$ ($i, j \in [0;\ 1]$). Неформально это квадрат на координатной плоскости с углами в (0; 0), ..., (1, 1), а A_i - отрезок с началом в (0, i) и концом в (1, i). Очевидно, что это континуальное семейство континуальных подмножеств $\mathbb{R}^2$. Но нам нужны подмножества $\mathbb{R}$. Так как $\mathbb{R}^2 \sim \mathbb{R}$, то между ними существует биекция, а значит каждому элементу из A_i сопоставлен элемент из $\mathbb{R}$, следовательно, для каждого A_i есть некоторое подмножество $\mathbb{R}$, причем они не пересекаются(иначе это уже не биекция). Так как самих A_i континуум, то и континуальных подмножеств из $\mathbb{R}$ тоже континуум. Да, существует.
4. Решение. Рассмотрим любую произвольную последовательность $(x_1, x_2, ...)$. Вставим после каждого элемента 0. Тогда не будет трех подряд идущих единиц. Построили инъекцию. Построим обратную инъекцию, вырезав нули на четных индексах. Так как получилась биекция, то эти множества равномощны, причем мощность – континуум.
5. Решение. Воспользуемся теоремой Кантора-Бернштейна. Покажем, что множество биективных функций $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ не более континуума. Для этого построим инъекцию в $2^{\mathbb{N}}$. Каждому натуральному числу соответствует натуральное число. Если поставить натуральные числа в порядке возрастания, а под ними записать результат функции, то, имея только результат, можно восстановить функцию(это подстановка, только элементов у нас не конечно). Поставим

в соответствие некоторой функции f следующую последовательность:

$$(f(0) \text{ единиц}, 0, f(1) \text{ единиц}, 0, f(2) \text{ единиц}, 0, ...)$$

Двум одинаковым функциям не могут соответствовать одинаковые двоичные последовательности. Получили инъекцию. Теперь покажем, что множество всех биекций не менее континуума. Дана некоторая двоичная последовательность. Если на i-ом месте 1, то запишем в результирующую последовательность числа $2i - 2, 2i - 1$, если 0, то $2i - 1, 2i - 2$. Например:

$$1 \to 01$$

$$0 \to 10$$

$$101 \to 013245$$

$$010 \to 102354$$

Таким образом, получили инъекцию. Следовательно, множество биекций $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ имеет мощность в точности континуум.

6. Решение. Так как единицы равные, то пусть между отрезками угол равный $\alpha \leq \pi$. Возьмем одну единицу. Проведем из её угла биссектрису, которая будет нашей числовой прямой. Пусть вершина единицы соответствует числу 0 на прямой. Тогда для каждой точки на этой прямой поставим единички так, что их вершины совпадали с этими точками, а стороны были параллельны сторонам "стартовой"единицы. Получится "ёлочка". Если таким способом располагать единички, то каждой единице можно поставить точку на числовой прямой. А значит единиц столько же, сколько и чисел на числовой прямой - континуум.

7. Решение. Заметим, что каждой восьмерке можно сопоставить пару рациональных координат. Одна координата в первом круге, вторая во втором. Почему можем найти внутри любого круга рациональную координату? Берем круг. Вписываем квадрат(геометрия). Рисуем два отрезка внутри него. Один параллелен оси абсцисс, другой оси ординат. На отрезках выбираем по рациональной координате. Причем двум окружностям нельзя сопоставить две одинаковые пары рациональных, так как они бы пересекались. Таким образом построили инъекцию. Следовательно, мощность всех таких восьмерок не более чем счетно, так как $\mathbb{Q}^2$ – счетно $\nsim$ континуум.