

Домашнее задание по алгебре

№2

Михайлов Никита Маратович, ПМИ-167.

Задание 1.

Найдите все левые смежные классы и все правые смежные классы группы A_4 по подгруппе $H = \langle \sigma \rangle$, где $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Является ли подгруппа H нормальной в группе A_4 ?

Решение. $\sigma = \tau_{12} \cdot \tau_{34} \in A_4$. Заметим, что $\langle \sigma \rangle = \{id, \sigma\}$, т.к. $\begin{cases} \sigma^{2k} = id \\ \sigma^{2k+1} = \sigma \end{cases}$.

Для элемента id левый смежный класс группы A_4 по id совпадает с правым и совпадает с A_4 . Осталось рассмотреть левый и правый смежные классы группы A_4 по σ . Для начала найдем все элементы группы A_4 (их $\frac{4!}{2} = 12$):

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$