Домашнее задание по алгебре №2

Михайлов Никита Маратович, ПМИ-167.

Задание 1.

Найдите все левые смежные классы и все правые смежные классы группы A_4 по подгруппе $H = \langle\sigma\rangle$, где $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$. Является ли подгруппа H нормальной в группе A_4?

Решение. $\sigma = \tau_{12} \cdot \tau_{34} \in A_4$. Заметим, что $\langle\sigma\rangle = \{id, \sigma\}$, т.к. $\begin{cases} \sigma^{2k} = id \\ \sigma^{2k+1} = \sigma \end{cases}$.

Для начала найдем все элементы группы A_4(их $\frac{4!}{2} = 12$):

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$
$$a_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, a_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, a_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, a_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$
$$a_9 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, a_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, a_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, a_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$|H| = 2 \Rightarrow |L_i| = |R_i| = 2$ для всех $i = \{1, ..., 12\}$, где L_i – левый, а R_i – правый смежные классы i-ого элемента A_4.

1. $L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}; R_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}$

2. $L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}; R_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\};$

3. $L_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}; R_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\};$

4. $L_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}; R_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\};$

5. $L_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}; R_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right\};$

6. $L_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \right\}; R_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\};$

7. $L_7 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \right\}; R_7 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\};$

8. $L_8 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}; R_8 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right\};$

9. $L_9 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right\}; R_9 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\};$

10. $L_{10} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}; R_{10} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \right\};$

11. $L_{11} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right\}; R_{11} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\};$

12. $L_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}; R_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right\};$

Заметим, что существуют такие a_i для которых $a_iH \neq Ha_i \Rightarrow$ подгруппа H – ненормальна.

Задание 2.

Пусть SL_2 – группа всех целочисленных (2×2)-матриц с определителем 1. Докажите, что множество

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid a \equiv d \equiv 1 \ (mod\, 3);\ b \equiv c \equiv 0 \ (mod\, 3) \right\}$$

является нормальной группой в $SL_2(\mathbb{Z})$.

Решение. Обозначим нашу группу за G. Рассмотрим произвольную матрицу из $G : g = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$. Так как G – группа, то там лежит и обратная матрица:

$g^{-1} = \begin{pmatrix} x_4 & -x_2 \\ -x_3 & x_1 \end{pmatrix}$. По определению нашей группы определители обоих матриц равны 1: $x_1x_4 - x_2x_3 = 1$. Покажем, что $gHg^{-1} \subseteq H$, где H – подгруппа из условия. Рассмотрим произвольный элемент из H: $h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Таким образом:

$$ghg^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_4 & -x_2 \\ -x_3 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1a + x_2c & x_1b + x_2d \\ x_3a + x_4c & x_3b + x_4d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_4 & -x_2 \\ -x_3 & x_1 \end{pmatrix}$$

Используя определения нашей группы и ее подгруппы:

1. $(x_1a + x_2c)x_4 - (x_1b + x_2d)x_3 = x_1x_4a + x_2x_4c - x_1x_3b - x_2x_3d \equiv x_1x_4a - x_2x_3d \equiv (1 + x_2x_3)a - x_2x_3d \equiv a + x_2x_3(a - d) \equiv a \equiv 1 \ (mod\ 3)$

2. $-(x_1a+x_2c)x_2+(x_1b+x_2d)x_1 = -x_1x_2a-x_2x_2c+x_1x_1b+x_2x_1d \equiv x_1^2b-x_2^2c \equiv 0 \ (mod\ 3)$

3. Нижняя строка получившейся матрицы тоже удовлетворяет свойствам выше. Проверяется аналогично двум случаям выше заменой соответствующих индексов.

Получили, что подгруппа H нормальна по одной из формулировок нормальности(их несколько).

Задание 3.

Найдите все гомоморфизмы из группы $\mathbb{Z}_{12}$ в группу $\mathbb{Z}_{16}$.

Решение. Заметим, что если мы будем знать $\varphi(1)$, то мы сможем вычислить $\varphi(x) = x\varphi(1)$. Довольно очевидно, что 0 перейдет в 0. Но в $\mathbb{Z}_{12}$ $12 = 0 \Rightarrow \varphi(0) = \varphi(12) = 12\varphi(1) = 0 \ (mod\ 16)$. Различных $\varphi(1)$ по модулю 16 немного, а именно: $\{0; 4; 8; 12\}$. В силу первого предложения можно сказать, что мы нашли все гомоморфизмы.

Задание 4.

Перечислите все с точностью до изоморфизма группы, каждая из которых изоморфна любой своей неедининой подгруппе.

Решение. Заметим, что группа – не конечна(разные мощности – нет биекции). Пусть наша группа G. Тогда рассмотрим ее подгруппу, порожденную элементом g: $H = \langle g \rangle$. H циклична и бесконечна. Но по условию $G \simeq H$. Следовательно, G тоже циклична и бесконечна. Как мы знаем все бесконечные циклические группы изоморфны $\mathbb{Z}(k\mathbb{Z})$.