

Занятие 23. Машины Тьюринга

1. Постройте МТ, которая вычисляет постоянную функцию $f: w \mapsto \lambda$, где λ — пустое слово.

2. Постройте МТ, которая вычитает 1 из натурального числа x , если

(а) x представлено в унарной системе (вход имеет вид $1^x = \overbrace{111 \dots 11}^{x \text{ раз}}$), результат также представляет $x + 1$ в унарной системе;

(б) вход и результат представлены в двоичной системе.

Если $x = 0$, МТ не останавливается.

3. Докажите, что существует МТ, которые преобразуют унарное представление натурального числа в двоичное и обратно.

4. Докажите существование МТ, которая удваивает вход (то есть, на входе w результатом должно быть слово ww).

5. (Вставка пустого символа.) Докажите, что существует МТ с состоянием q_i , для которой верно следующее: работа машины на любой конфигурации вида uq_iv (u и v не содержат пустого символа) заканчивается в конфигурации $u\Lambda qfv$ (здесь Λ — пустой символ).

6. Докажите существование машины Тьюринга, вычисляющей

а) сумму;

б) произведение

чисел, записанных в унарной системе.

7. Докажите, что существует МТ, которая находит n -й символ в двоичном слове. Формально это означает, что на входе $n\#w$ результатом работы должно быть w_n . Здесь n представлено в двоичной записи, а $\#$ — символ-разделитель (не 0 и не 1).

8. Докажите, что не существует МТ с таким «волшебным состоянием» q_m , что любую конфигурацию, содержащую q_m , машина переводит в пустую конфигурацию q_f , где q_f — финальное состояние.

9. Постройте (многоленточные) МТ, которые выполняют следующие действия.

а) «Переход к указателю»: машина двигает головку до тех пор, пока головка не оказывается над заданным символом (указателем) $\#$. В терминах конфигураций это означает, что конфигурацию $\dots q_0x\#\dots$ машина должна переводить в конфигурацию $\dots xq_1\#\dots$. Здесь q_0, q_1 — состояния МТ, а x — слово, которое не содержит указателя.

б) «Копирование»: машина копирует содержимое области одной ленты на другую ленту. В терминах конфигураций это означает, что машина переводит конфигурацию

$$(\dots q_0 \triangleleft u \triangleright \dots, \dots q_0 \#)$$

в конфигурацию

$$(\dots q_1 \triangleleft u \triangleright \dots, \dots q_1 \# u).$$

Здесь q_0, q_1 — состояния МТ, символы-ограничители $\triangleleft, \triangleright$ задают область, которую нужно скопировать, $\#$ — указатель, а слово u не содержит ни указателя, ни ограничителей.

(Конфигурация двухленточной машины — это пара слов.)

в) «Сравнение слов»: машина сравнивает две области на двух лентах. В терминах конфигураций это означает, что машина переводит конфигурацию

$$(\dots q_0 \triangleleft u \triangleright \dots, \dots q_0 \triangleleft v \triangleright \dots)$$

в конфигурацию

$$(\dots q' \triangleleft u \triangleright \dots, \dots q' \triangleleft v \triangleright \dots),$$

где $q' = q_1$ если $u = v$, а в противном случае $q' = q_2$. Здесь q_0, q_1, q_2 — состояния МТ, символы-ограничители $\triangleleft, \triangleright$ задают сравниваемые области, а слова u, v не содержат ограничителей.

Домашнее задание 23

Если в задаче сказано «постройте МТ», нужно привести таблицу переходов МТ и доказать корректность. Если в задаче сказано «докажите существование МТ», то таблицу переходов строить необязательно (и даже нежелательно). Учтите, что сама по себе таблица переходов не является доказательством чего бы то ни было! (Это вообще не утверждение.)

При решении задач этого задания разрешается использовать по выбору одноленточные или многоленточные машины.

1. Постройте МТ, которая вычисляет нигде не определенную функцию.
2. Постройте МТ, которая инвертирует входное двоичное слово: на входе w , где $w = w_1 \dots w_n$, $w_i \in \{0, 1\}$, результатом работы должно быть слово $\bar{w} = \bar{w}_1 \dots \bar{w}_n$.
3. Постройте МТ, проверяющую, входит ли в слово в алфавите $\{a, b, c\}$ подслово aba . В конце работы машины на ленте должно остаться 1, если такое подслово есть и 0, если его нет.
4. Докажите существование МТ, которая сортирует символы входного двоичного слова: на входе w , где двоичное слово w содержит a нулей и b единиц, результатом работы должно быть слово $0^a 1^b$.
5. Докажите существование МТ, которая проверяет, что вход является палиндромом. (Слово $a_1 a_2 \dots a_n$ называется палиндромом, если $a_1 a_2 \dots a_n = a_n a_{n-1} \dots a_1$.) Если вход является палиндромом, результат работы должен быть 1, а если нет, то результат 0.
6. Существует ли машина Тьюринга, при начале работы на пустой ленте, оставляющая на ней 2017 единиц и имеющая не более 100 состояний?
7. Докажите существование машины Тьюринга, вычисляющей какую-либо биекцию между $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ и \mathbb{N} . Т.е. в начале работы на ленте $1^a \# 1^b$, а в конце $1^{f(a,b)}$, где f — выбранная Вами биекция f .