Домашнее задание по алгебре №1

Михайлов Никита Маратович, ПМИ-167.

Задание 1.

Докажите, что формула $m \circ n = mn - m - n + 2$ задает бинарную операцию на множестве $\mathbb{Q} \setminus \{1\}$ и что $(\mathbb{Q} \setminus \{1\}, \circ)$ является группой.

Решение. Очевидно, что $m \circ n \in \mathbb{Q}$. Проверим "плохое"равенство:
$m \circ n = 1 \Leftrightarrow mn - m - n + 2 = 1 \Leftrightarrow mn - m - n + 1 = 0 \Leftrightarrow m(n-1) - (n-1) = 0 \Leftrightarrow (n-1)(m-1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 1 \\ m = 1 \end{array} \right.$, чего быть не может, т.к. $1 \notin \mathbb{Q} \setminus \{1\}$.
Следовательно, операция $\circ$ задана на множестве $\mathbb{Q} \setminus \{1\}$.
Стоит отметить, что $m \circ n = (m-1)(n-1) + 1$.
Теперь докажем, что $(\mathbb{Q} \setminus \{1\}, \circ)$ – группа, проверив соответствующие ей свойства:

1. Выделим очень важное свойство: $m \circ n = n \circ m$ – достаточно очевидно.

2. $a \circ (b \circ c) = (a-1)(b \circ c - 1) + 1 = (a-1)((b-1)(c-1) + 1 - 1) + 1 = (b-1)(c-1)(a-1) + 1$
   $(a \circ b) \circ c = ((a-1)(b-1)+1) \circ c = (((a-1)(b-1)+1) - 1)(c-1) + 1 = (a-1)(b-1)(c-1) + 1$
   Ассоциативность выполнена.

3. Проверим наличие нейтрального элемента. Обозначим его за e, тогда выполняется $\forall a \in \mathbb{Q} \setminus \{1\}$: $a \circ e = a \Leftrightarrow ae - a - e + 2 = a \Leftrightarrow$
   $ae - 2a - e + 2 = 0 \Leftrightarrow e(a-1) = 2(a-1) \Rightarrow \begin{cases} e = 2 \\ a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow e = \frac{1}{2}$

4. Проверим наличие обратного элемента. Обозначим его a^{-1}, тогда выполняется $\forall a \in \mathbb{Q} \setminus \{1\} : a \circ a^{-1} = e \Leftrightarrow aa^{-1} - a - a^{-1} + 2 = e \Leftrightarrow$
   $a^{-1}(a-1) = e + a - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^{-1} = \frac{e+a-2}{a-1} \\ a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow a^{-1} = \frac{a}{a-1}$

Таким образом, получили, что $(\mathbb{Q} \setminus \{1\}, \circ)$ действительно группа.

Задание 2.

Найдите порядки всех элементов группы $(\mathbb{Z}_{12}, +)$.
Решение. Составим $ik_i \equiv 0 \ (mod\ 12) \forall i \in \mathbb{Z}_{12}$, где k_i – порядок i-ого элемента.Заметим, что $ik_i =$НОК$(i, 12)$. Таким образом, $k_0 = 1, k_1 = 12, k_2 = 6, k_3 = 4, k_4 = 3, k_5 = 12, k_6 = 2, k_7 = 12, k_8 = 3, k_9 = 4, k_{10} = 6, k_{11} = 12$.

Задание 3.

Опишите все подгруппы в группе $(\mathbb{Z}_{12}, +)$.
Решение. Пусть H_i – i-я подгруппа в группе $(\mathbb{Z}_{12}, +)$, а M_i – множество, на которой задана H_i. Заметим, что все подгруппы имеют порядок, делящий 12. Таким образом, $|H_i| \in \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$.

1. $M_1 = \{0\}$.
2. $M_6 = \{0, 6\}$.
3. $M_5 = \{0, 4, 8\}$.
4. $M_4 = \{0, 3, 6, 9\}$.
5. $M_3 = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$.
6. $M_2 = \{0, 1, 2, ..., 10, 11\}$.

Почему нет других?
Предложение. *Существует единственная подгруппа порядка k группы* $(\mathbb{Z}_{12}, +)$.
Доказательство. Известно, что любая подгруппа циклической группы является циклической. Пусть существует другая группа порядка k. Тогда выберем 2 элемента a и b, пораждающих данные группы. $a^k = b^k = e$. Для данной бинарной операции абстрактное возведение в степень эквивалентно умножению на эту степень:

$$a^k = \underbrace{a + ... + a}_{k \text{ раз}} = ak$$

Следовательно, составим $ak \equiv bk \equiv 0 (mod\ 12)$. Но $12 \vdots k$, следовательно, $a \equiv b \equiv 0(mod\ \frac{12}{k}) \Leftrightarrow \begin{cases} a = a'\frac{12}{k} \\ b = b'\frac{12}{k} \end{cases}$, где $a', b' \in \mathbb{Z}$. Пусть $x =$ НОД(a', b'), тогда $\begin{cases} a = a''x\frac{12}{k} \\ b = b''x\frac{12}{k} \end{cases}$. Теперь рассмотрим подгруппу, порожденную элементом $x\frac{12}{k}$, а именно $\langle x\frac{12}{k} \rangle$. Заметим, что $x\frac{12}{k} \cdot k \equiv 0(mod\ 12)$, что означает в абстрактном

возведении в степень: $(x^{\frac{12}{k}})^k = e$. Следовательно, $|\langle x^{\frac{12}{k}}\rangle| = |\langle a\rangle| = |\langle b\rangle| = k$. Но $\{a, b\} \subseteq \langle x^{\frac{12}{k}}\rangle$, т.к. $\begin{cases}(x^{\frac{12}{k}})^{a''} = a\\ (x^{\frac{12}{k}})^{b''} = b\end{cases}$. Таким образом, получили, что если a и b различны, а группы, порожденные ими, имеют одинаковый порядок, то эти группы совпадают.
В задании мы нашли группы всех возможных порядков, поэтому других нет.

$\boxed{\text{Задание 4.}}$

Докажите, что всякая бесконечная группа содержит бесконечное число подгрупп.
Доказательство. Если группа имеет только конечные подгруппы, то очевидно, что их бесконечно, иначе группа была бы конечной. Рассмотрим случай, когда существует хотя бы одна бесконечная подгруппа. Пусть эту подгруппу пораждает элемент g. Тогда элементы g^i тоже будут пораждать некоторые подгруппы, где $i \in \mathbb{N}$. Таких групп счетно много, а следовательно, бесконечно.