Домашняя работа по дискретной математике №14

Михайлов Никита Маратович, БПМИ-167

12 января 2017 г.

1. Доказательство. Пусть было продано N билетов, тогда сумма на выплату выигрышей равна $40N$. Для каждого билета есть случайная величина α равная сумме выигрыша ($\alpha \geq 0$). Вероятность вытащить конкретный билет равна $\frac{1}{N}$.

$$E[\alpha] = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \frac{1}{N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \alpha_i = \frac{1}{N} 40N = 40.$$

По неравенству Маркова получаем:

$$Pr[\alpha \geq 5000] \leq \frac{E[\alpha]}{5000} \Leftrightarrow Pr[\alpha \geq 5000] \leq \frac{40}{5000} = 0,8\% < 1\%.$$

2. Решение. Пусть N – кол-во человек всего, $\frac{N}{2}$ – кол-во человек, проживших не более 8 лет, α – средняя продолжительность жизни. Тогда

$$E[\alpha] = \sum_{i=1}^{N/2} \alpha_i p_i + \sum_{(i=N/2+1)}^{N} \alpha_i p_i \Leftrightarrow 26 = \frac{1}{N} \cdot (\sum_{i=1}^{N/2} \alpha_i + \sum_{(i=N/2+1)}^{N} \alpha_i)$$

Умножим обе части на 2:

$$52 = \frac{1}{\frac{N}{2}} \cdot (\sum_{i=1}^{N/2} \alpha_i + \sum_{i=N/2+1}^{N} \alpha_i) \Leftrightarrow 52 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{N/2} \alpha_i}{\frac{N}{2}} + \frac{\sum\limits_{i=N/2+1}^{N} \alpha_i}{\frac{N}{2}} \Leftrightarrow 52 = E[\alpha \leq 8] + E[\alpha > 8]$$

Заметим, что 1) Если $E[\alpha \leq 8] = 8$, то нет людей проживших меньше 8 лет $\Rightarrow E[\alpha \geq 8] = 26$ – минимальное значение;

2)$E[\alpha \geq 8] \leq E[\alpha > 8] = 52 - E[\alpha \leq 8]$. Так, как каждый прожил хотя бы 1 год (иначе смысла его учитывать в статистике нет), то

$$E[\alpha \leq 8] \geq 1 \Rightarrow E[\alpha \geq 8] \leq 51$$

Таким образом, с учетом п.1 и п.2 можно сказать, что

$$26 \leq E[\alpha \geq 8] \leq 51$$

3. Решение а). $E_1 = \frac{1}{36} \cdot (1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + ... + 1 \cdot 6 + ... + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + 6 \cdot 1 + ... + 6 \cdot 6) = \frac{1}{36} \cdot (1 + 2 ... + 6)^2 = \frac{21^2}{36} = \frac{441}{36}$
$E_2 = \frac{1}{6} \cdot (1^2 + 2^2 + ... + 6^2) = \frac{91}{6}$. Таким образом, $E_2 > E_1$

Решение б). Пусть p_i – вероятность выпадения i-ой грани, тогда 1) $E_2 = \sum\limits_{i=1}^{6} p_i i^2$;

2) $E_1 = \sum\limits_{i=1}^{6} \sum\limits_{j=1}^{6} p_i i \cdot p_j j$. Рассмотрим разность $E_2 - E_1$:

$$\sum_{i=1}^{6} p_i i^2 - \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} p_i i \cdot p_j j = \sum_{i=1}^{6} (p_i i^2 - p_i i \cdot \sum_{j=1}^{6} p_j j) = \sum_{i=1}^{6} p_i i (i - \sum_{j=1}^{6} p_j j) =$$

$$= \sum_{i=1}^{6} p_i i (i - p_i i - \sum_{j=1, j \neq i}^{6} p_j j) = \sum_{i=1}^{6} p_i i (i(1 - p_i) - \sum_{j=1, j \neq i}^{6} p_j j)$$

. Заметим, что $1 - p_i$ – сумма всех вероятностей бей i-ой. Подставляя, получим:

$$\sum_{i=1}^{6} p_i i (i \cdot \sum_{j=1, j \neq i}^{6} p_j - \sum_{j=1, j \neq i}^{6} p_j j) = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1, j \neq i}^{6} p_i i (i p_j - p_j j) = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1, j \neq i}^{6} i p_i p_j (i - j)$$

Рассмотрим все значения, которые принимают переменные i и j. Можем составить матрицу значений 6×6 с пустой главной диагональю, т.к. $j \neq i$. Заметим, что можно рассмотреть верхнюю часть т.ч. $j > i$ и прибавить недостающий элемент, когда i и j меняются местами (например, $i = 1, j = 3$, тогда недостающий элемент суммы это когда $i = 3, j = 1$). Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{6} \sum_{j>i}^{6} (i p_i p_j (i-j) + j p_j p_i (j-i)) = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j>i}^{6} p_i p_j (i-j)(i-j) = \sum_{i=1}^{6} \sum_{j>i}^{6} p_i p_j (i-j)^2 > 0$$

Ответ. $E_2 > E_1$

4. Решение. Всего слов 2^{20}, в-ть выбрать конкретное слово равна $\frac{1}{2^{20}}$. Пусть α – случайная величина, означающая число вхождений подслова ab в данном слове.

$$E[\alpha] = \sum_{i=1}^{2^{20}} \frac{1}{2^{20}} \alpha_i = \frac{1}{2^{20}} \sum_{i=1}^{2^{20}} \alpha_i$$

. Таким образом, нам достаточно найти общее число вхождений подслов ab во всех словах. Будем считать, что ab стоит на i-ом месте, если индекс а равен i. Тогда $1 \leq i \leq 19$. Для скольки слов ab стоит на i-ой позиции? Для $2^{20-2} = 2^{18}$. Таким образом общее кол-во вхождений $19 \cdot 2^{18}$, а $E[\alpha] = \frac{19 \cdot 2^{18}}{2^{20}} = \frac{19}{4}$.
Ответ. $\frac{19}{4}$.

5. Решение. Всего последовательностей из завтраков 10^{15}, тогда вероятность конкретной последовательности равна $\frac{1}{10^{15}}$. α - случайная величина, означающая кол-во различных завтраков для данной последовательности.

$$E[\alpha] = \sum_{i=1}^{10^{15}} \frac{1}{10^{15}} \alpha_i = \frac{1}{10^{15}} \sum_{i=1}^{10^{15}} \alpha_i$$

Достаточно посчитать кол-во всех различных завтраков для каждой из последовательностей. Обозначим за M_i – кол-во последовательностей, в которых ровно i различных завтраков. Всего различных завтраков $\sum\limits_{i=1}^{10} i \cdot M_i$. Пусть в последовательности i различных завтраков. Нам нужно разбить 15 элементов на i классов эквивалентности. Воспользуемся числом Стирлинга второго порядка, т.е. $S(15, i)$ – число таких способов. Разбили 15 элементов на i групп, но каждой из групп соответствует один из 10 завтраков. Число способов поставить такое соответствие $A_{10}^i = \frac{10!}{(10-i)!}$. Итого получили, что $M_i = S(15, i) \cdot A_{10}^i$. Разделим на общее кол-во последовательностей и вычислим мат. ожидание:

$$E[\alpha] = \frac{\sum\limits_{i=1}^{10} i \cdot S(15, i) \cdot A_{10}^i}{10^{15}}$$

6. Решение. Заметим, что сумма инверсий перестановок $I(a) + I(b) = \frac{n(n-1)}{2}$, где b – это развернутая перестановка a и $n > 1$. Почему? Рассмотрим два произвольных числа x и y. Если x и y в перестановке a образуют инверсию, то в b они инверсию не образуют. Поэтому для a и b сумма инверсий равна кол-ву всех возможных пар.
Всего перестановок $n!$. Вероятность выбрать конкретную равна $\frac{1}{n!}$. Пройдемся

по каждой перестановке и вычислим мат. ожидание кол-ва инверсий:

$$E[I[\pi]] = \sum_{i=1}^{n!} p_i \cdot I[\pi_i] = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{i=1}^{n!} I[\pi_i]$$

Так как $n!$ – четное число, для $n > 1$, то можно для каждой перестановки найти ее развернутую, а по замечанию выше сумма их инверсий равна $\frac{n(n-1)}{2}$. Таким образом, получаем:

$$E[I[\pi]] = \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$$

Для случая $n = 1$ формула работает.
Ответ. $\frac{n(n-1)}{2}$.
7. Доказательство.

$$Pr[X \geq 6] \Leftrightarrow Pr[2^X \geq 2^6] \leq \frac{E[2^X]}{2^6} = \frac{5}{64} < \frac{1}{10}$$

8. Решение. Пусть уже собрали k вкладышей и E_k – это среднее кол-во жвачек, которое нужно купить, чтобы собрать $k+1$ вкладышей. Тогда для следующей жвачки 2 варианта:
1) жвачка новая с вероятностью $\frac{n-k}{n}$, и тогда мы вытащили 1 жвачку, чтобы получить новый вкладыш.
2) жвачка старая с вероятностью $\frac{k}{n}$, и тогда мы находимся в той же ситуации и надо купить E_k жвачек, но одну мы уже купили. Если отсчитывать из исходной ситуации, то надо купить для этого случая $E_k + 1$. Таким образом,

$$E_k = \frac{n-k}{n} \cdot 1 + \frac{k}{n} \cdot (E_k + 1) \Leftrightarrow E_k = \frac{n}{n-k}.$$

Заметим, что $E = \sum\limits_{i=0}^{n-1} E_i = n(1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/n)$
Ответ. $n(1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1/n)$

9. Решение.