

# Домашнее задание по алгебре

## №2

Михайлов Никита Маратович, ПМИ-167.

### Задание 1.

Найдите все левые смежные классы и все правые смежные классы группы  $A_4$  по подгруппе  $H = \langle \sigma \rangle$ , где  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ . Является ли подгруппа  $H$  нормальной в группе  $A_4$ ?

**Решение.**  $\sigma = \tau_{12} \cdot \tau_{34} \in A_4$ . Заметим, что  $\langle \sigma \rangle = \{id, \sigma\}$ , т.к.  $\begin{cases} \sigma^{2k} = id \\ \sigma^{2k+1} = \sigma \end{cases}$ .

Для начала найдем все элементы группы  $A_4$  (их  $\frac{4!}{2} = 12$ ):

$$\begin{aligned} a_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}, a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \\ a_5 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, a_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, a_7 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, a_8 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \\ a_9 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, a_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, a_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, a_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

$|H| = 2 \Rightarrow |L_i| = |R_i| = 2$  для всех  $i = \{1, \dots, 12\}$ , где  $L_i$  – левый, а  $R_i$  – правый смежные классы  $i$ -ого элемента  $A_4$ .

1.  $L_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}; R_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}$
2.  $L_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\}; R_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \right\};$
3.  $L_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}; R_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\};$

4.  $L_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}; R_4 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\};$
5.  $L_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\}; R_5 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right\};$
6.  $L_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \right\}; R_6 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\};$
7.  $L_7 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \right\}; R_7 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\};$
8.  $L_8 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}; R_8 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right\};$
9.  $L_9 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right\}; R_9 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} \right\};$
10.  $L_{10} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}; R_{10} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \right\};$
11.  $L_{11} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right\}; R_{11} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\};$
12.  $L_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \right\}; R_{12} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \right\};$

Заметим, что существуют такие  $a_i$  для которых  $a_i H \neq H a_i \Rightarrow$  подгруппа  $H$  – ненормальна.

Задание 2.

Пусть  $SL_2$  – группа всех целочисленных  $(2 \times 2)$ -матриц с определителем 1. Докажите, что множество

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z}) \mid a \equiv d \equiv 1 \pmod{3}; b \equiv c \equiv 0 \pmod{3} \right\}$$

является нормальной группой в  $SL_2(\mathbb{Z})$ .

**Решение.** Обозначим нашу группу за  $G$ . Рассмотрим произвольную матрицу из  $G$ :  $g = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ . Так как  $G$  – группа, то там лежит и обратная матрица:

$g^{-1} = \begin{pmatrix} x_4 & -x_2 \\ -x_3 & x_1 \end{pmatrix}$ . По определению нашей группы определители обеих матриц равны 1:  $x_1x_4 - x_2x_3 = 1$ . Покажем, что  $gHg^{-1} \subseteq H$ , где  $H$  – подгруппа из условия. Рассмотрим произвольный элемент из  $H$ :  $h = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  Таким образом:

$$ghg^{-1} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_4 & -x_2 \\ -x_3 & x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1a + x_2c & x_1b + x_2d \\ x_3a + x_4c & x_3b + x_4d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_4 & -x_2 \\ -x_3 & x_1 \end{pmatrix}$$

Используя определения нашей группы и ее подгруппы:

1.  $(x_1a + x_2c)x_4 - (x_1b + x_2d)x_3 = x_1x_4a + x_2x_4c - x_1x_3b - x_2x_3d \equiv x_1x_4a - x_2x_3d \equiv (1 + x_2x_3)a - x_2x_3d \equiv a + x_2x_3(a - d) \equiv a \equiv 1 \pmod{3}$
2.  $-(x_1a + x_2c)x_2 + (x_1b + x_2d)x_1 = -x_1x_2a - x_2x_2c + x_1x_1b + x_2x_1d \equiv x_1^2b - x_2^2c \equiv 0 \pmod{3}$
3. Нижняя строка получившейся матрицы тоже удовлетворяет свойствам выше. Проверяется аналогично двум случаям выше заменой соответствующих индексов.

Получили, что подгруппа  $H$  нормальна по одной из формулировок нормальности (их несколько).

Задание 3.

*Найдите все гомоморфизмы из группы  $\mathbb{Z}_{12}$  в группу  $\mathbb{Z}_{16}$ .*

**Решение.** Заметим, что если мы будем знать  $\varphi(1)$ , то мы сможем вычислить  $\varphi(x) = x\varphi(1)$ . Довольно очевидно, что 0 перейдет в 0. Но в  $\mathbb{Z}_{12}$   $12 = 0 \Rightarrow \varphi(0) = \varphi(12) = 12\varphi(1) = 0 \pmod{16}$ . Различных  $\varphi(1)$  по модулю 16 немного, а именно:  $\{0; 4; 8; 12\}$ . В силу первого предложения можно сказать, что мы нашли все гомоморфизмы.