Домашнее задание по теории вероятностей №3.

Михайлов Никита Маратович, БПМИ-161.

1 Задача №1.

Множество из k шаров случайно раскладывают по m ящикам. Случайная величина ξ равна количеству пустых ящиков при таком случайном размещении. Найдите $E\xi$ и $D\xi$, если (a) шары неразличимы, (b) шары различимы.

1.1 Решение (a).

Найдем $P(\xi = i)$. Найдем число всех способов разложить k шаров по m ящиков. Введем переменные x_i – число шаров в i-ом ящике. Тогда искомое число способов равно числу способов решить в целых неотрицательных числах уравнение $x_1 + ... + x_m = k$. Как мы знаем, это задача Муавра, и число решений равно $\binom{k+m-1}{k}$. Теперь найдем кол-во способов решить это уравнение так, что i переменных равны нулю (i ящиков пусты). Сначала выберем эти ящики: $\binom{m}{i}$. Теперь составим уравнение: $x_1 + ... + x_{m-i} = k$, но каждая переменная хотя бы 1, иначе у нас будет больше, чем i нулевых переменных. Итого нужно найти число способов решить уравнение $y_1 + ... + y_{m-i} = k - (m - i)$. Снова задача Муавра, и ответ на нее есть $\binom{k-m+i+m-i-1}{k-m+i} = \binom{k-1}{k-m+i} = \binom{k-1}{m-i-1}$. Таким образом, $P(\xi = i) = \binom{m}{i} \cdot \frac{\binom{k-1}{m-i-1}}{\binom{k+m-1}{k}}$. По свойству математического ожидания получим:

$$E[\xi] = \sum_{i\in\xi(\Omega)} i \cdot P(\xi = i) = \sum_{i=0}^{m} i \cdot \binom{m}{i} \cdot \frac{\binom{k-1}{m-i-1}}{\binom{k+m-1}{k}}$$

Найдем дисперсию:

$$D\xi = E[\xi^2] - E^2[\xi] = \sum_{i\in\xi(\Omega)} i^2 \cdot P(\xi = i) - \Big(\sum_{i\in\xi(\Omega)} i \cdot P(\xi = i)\Big)^2 =$$

$$= \sum_{i=0}^{m} i^2 \cdot \binom{m}{i} \cdot \frac{\binom{k-1}{m-i-1}}{\binom{k+m-1}{k}} - \Big(\sum_{i=0}^{m} i \cdot \binom{m}{i} \cdot \frac{\binom{k-1}{m-i-1}}{\binom{k+m-1}{k}}\Big)^2$$

1.2 Решение (b).

Пусть мы как-то разложили шары, тогда перемешав шары, сохранив кол-во шаров в каждом из ящиков, мы можем получить $k!$ вариантов, но внутри каждого ящика порядок не важен. Пусть $(x_1, ..., x_m)$ – некоторый способ разложения шаров(неразличимых). Из него получим $\dfrac{k!}{x_1! \cdot ... \cdot x_m!}$ решений(для различимых). Пусть $X = \{x = (x_1, ..., x_m) \mid x_1 + ... + x_m = k\}$ – множество решений для неразличимых шаров. Итак, посчитаем $P(\xi = i)$. Для этого вычислим количество всех исходов: $\sum\limits_{x\in X}\dfrac{k!}{x_1!\cdot ...\cdot x_m!}$. Теперь выберем i пустых ящиков $\binom{m}{i}$ способами. Как и в аналогичной задаче, в остальных ящиках как минимум 1 шар есть. Составим задачу Муавра и пусть $Y = \{y = (y_1, ..., y_{m-i}) | y_1 + ... + y_{m-1} = k - m + i\}$ – все ее решения для неразличимых шаров. Таким образом, $\binom{m}{i}\sum\limits_{y\in Y}\dfrac{k!}{y_1!\cdot ...\cdot y_{m-i}!}$. Итого $P(\xi = i) = \dfrac{\binom{m}{i}\sum\limits_{y\in Y}\dfrac{k!}{y_1!\cdot ...\cdot y_{m-i}!}}{\sum\limits_{x\in X}\dfrac{k!}{x_1!\cdot ...\cdot x_m!}}$, а математическое ожидание величины ξ соответственно:

$$E[\xi] = \sum_{i=0}^{m} i\cdot\frac{\binom{m}{i}\sum\limits_{y\in Y}\dfrac{k!}{y_1!\cdot ...\cdot y_{m-i}!}}{\sum\limits_{x\in X}\dfrac{k!}{x_1!\cdot ...\cdot x_m!}} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{m} i\cdot\binom{m}{i}\sum\limits_{y\in Y}\dfrac{k!}{y_1!\cdot ...\cdot y_{m-i}!}}{\sum\limits_{x\in X}\dfrac{k!}{x_1!\cdot ...\cdot x_m!}}$$

Посчитаем дисперсию:

$$D\xi = E[\xi^2] - E^2[\xi] = \sum_{i\in\xi(\Omega)} i^2\cdot P(\xi = i) - \Big(\sum_{i\in\xi(\Omega)} i\cdot P(\xi = i)\Big)^2 =$$

$$= \frac{\sum\limits_{i=0}^{m} i^2\cdot\binom{m}{i}\sum\limits_{y\in Y}\dfrac{k!}{y_1!\cdot ...\cdot y_{m-i}!}}{\sum\limits_{x\in X}\dfrac{k!}{x_1!\cdot ...\cdot x_m!}} - \left(\frac{\sum\limits_{i=0}^{m} i\cdot\binom{m}{i}\sum\limits_{y\in Y}\dfrac{k!}{y_1!\cdot ...\cdot y_{m-i}!}}{\sum\limits_{x\in X}\dfrac{k!}{x_1!\cdot ...\cdot x_m!}}\right)^2$$

2 Задача №2.

В ящик положили n различимых шаров, среди которых есть k белых, а остальные — черные. Шары вынимаются случайно и последовательно без возвращения. Пусть последний белый шар вынимается на шаге ξ. Вычислите а) $E\xi$, б) $D\xi$.

2.1 Решение а)

Так как в условии написано, что шары различимы, то будем считать, что они все пронумерованы и имеют цвет. Найдем вероятность $P(\xi = i)$. Понятно, что всех вариантов у нас $n!$. Раз последний белый шар вынут на i-ом шаге, то нужно выбрать из первых $i-1$ мест $k-1$ мест для белых шаров(ведь на i-м месте стоит один из k белых шаров), а остальные $n-k$ мест распределить среди черных: $k\cdot A_{i-1}^{k-1}(n-k)!$. Таким образом $P(\xi = i) = \dfrac{k\cdot A_{i-1}^{k-1}(n-k)!}{n!} = \dfrac{k\cdot A_{i-1}^{k-1}}{A_n^k} = \dfrac{\binom{i-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}$
, а математическое ожидание соответственно

$$E[\xi] = \sum_{i=k}^{n} i\cdot\frac{\binom{i-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{\sum\limits_{i=k}^{n} i\cdot\binom{i-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}$$

2.2 Решение б)

По формуле связи дисперсии с математическим ожиданием получим:

$$D\xi = E[\xi^2] - E^2[\xi] = \frac{\sum\limits_{i=k}^{n} i^2 \cdot \binom{i-1}{k-1}}{\binom{n}{k}} - \frac{(\sum\limits_{i=k}^{n} i \cdot \binom{i-1}{k-1})^2}{\binom{n}{k}^2}$$