

# Домашняя работа по дискретной математике №22

Михайлов Никита Маратович, ПМИ-167.

## Задание 1.

**Решение.** Докажем, что функций, в множестве значений которых есть 2017 бесконечно много. Рассмотрим функцию:

$$f_a(x) = \begin{cases} 2017, & \text{если } x = a \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

где  $a \in \mathbb{N}$ . Очевидно, что таких функций счетно много (так как  $a$  может быть любым). Следовательно,  $\forall a \in \mathbb{N} \exists p_a : U(p_a, x) = f_a(x)$ . Также стоит отметить тот факт, что все эти функции различны, поэтому  $i \neq j \Rightarrow p_i \neq p_j$ .

## Задание 2.

**Решение.** Пусть  $V(p, x) = px$ . Так  $U$  – г.у.в.ф., то  $\exists s : \forall p U(s(p), x) = V(p, x)$ . По теореме о неподвижной точке  $\exists n : s(n) = n$ . Тогда запишем равенство:  $U(n, x) = U(s(n), x) = V(n, x) = nx$ .

## Задание 3.

**Решение.** Так  $U$  – г.у.в.ф., то  $\exists s : \forall p U(s(p), x) = V(p, x)$ . По теореме о неподвижной точке  $\exists n : s(n) = n$ . Тогда запишем равенство:  $U(n, x) = U(s(n), x) = V(n, x)$ .

## Задание 4.

**Решение.** Если множество программ  $I$  совпадает с множеством четных сечений  $U$ , то  $I$  – разрешимо (так как проверка на четность проста). Однако свойство определенности – нетривиально, так как существуют функции неопределенные в нуле. Поэтому множество индексов таких функций – неразрешимо. Следовательно,  $I$  не может быть разрешимым, а значит и совпадать с четными сечениями  $U$ .

Задание 5.

**Решение.**

Задание 6.

**Решение.** Пусть  $\mathbb{K}$  разрешимо. Тогда рассмотрим некоторую не всюду определенную функцию  $f(x)$ . Тогда  $\exists n : U_n(x) = f(x)$ . Пусть  $\mathbb{K}' = \{k : U_k(x) \text{ -- продолжение } U_n\}$ . Данное свойство нетривиально, так как существуют функции не являющиеся продолжением  $U_n$ . По теореме Успенского-Райса  $\mathbb{K}'$  -- неразрешимо. По предположению  $\mathbb{K}$  -- разрешимо. Тогда Мы можем проверить является ли  $U_k$  продолжением  $U_n$  и составить множество  $\mathbb{K}'$ . Но оно неразрешимо. Получили противоречие.