Домашнее задание по алгебре №6.

Михайлов Никита Маратович, ПМИ-167.

Задание 1.

Найдите наибольший общий делитель многочленов

$$f(x) = 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 7x - 2 \text{ и } g(x) = 6x^3 + 4x^2 - 5x + 1,$$

а так же его линейное выражение через $f(x)$ и $g(x)$.

Решение. Применим расширенный алгоритм Евклида (опустим школьные вычисления столбиком).

1. $f(x) = g(x)(\frac{1}{3}x - \frac{8}{9}) + (\frac{20}{9}x^2 + \frac{20}{9}x - \frac{10}{9})$
2. $g(x) = (\frac{20}{9}x^2 + \frac{20}{9}x - \frac{10}{9})(\frac{27}{10}x - \frac{9}{10}) + 0$

Следовательно, НОД$\big(f(x), g(x)\big) = \frac{20}{9}x^2 + \frac{20}{9}x - \frac{10}{9}$. А его линейное выражение легко выразить из шага №1:

$$\text{НОД}\big(f(x), g(x)\big) = 1 \cdot f(x) + (-\frac{1}{3}x + \frac{8}{9}) \cdot g(x)$$

Задание 2.

Разложите многочлен $x^6 + x^3 - 12$ в произведение неприводимых в кольце $\mathbb{C}[x]$ и в кольце $\mathbb{R}[x]$.

Решение. Известно, что в кольце $\mathbb{C}[x]$ неприводимыми являются многочлены степени 1. По основной теореме алгебры данный многочлен $f(x) = x^6 + x^3 - 12$ раскладывается в произведение многочленов типа: $x - x_0$, где x_0 – корень уравнения $f(x) = 0$. Решим это уравнение.

Составим $x^6 + x^3 - 12 = 0$. Обозначим $x^3 = t$, тогда $t^2 + t - 12 = 0 \Rightarrow t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 48}}{2} = \frac{-1 \pm 7}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t_1 = -4 \\ t_2 = 3 \end{array} \right.$ Перейдем к x: $\left[\begin{array}{ll} x = \sqrt[3]{-4} & (1) \\ x = \sqrt[3]{3} & (2) \end{array} \right.$ (1) Сразу можно выделить $x_1 = -\sqrt[3]{4}$. Осталось найти еще 2 корня. Так как в системе координат они образуют правильный многоугольник, а в нашем случае треугольник, то можно однозначно найти 2 точки, соответствующие нашим корням. В тригонометрической форму они имеют вид: $\sqrt[3]{4}\big(\cos(\pm\frac{\pi}{3}) + i\sin(\pm\frac{\pi}{3})\big)$. И соответственно в алгебраической: $\left[\begin{array}{l} x_2 = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} - \sqrt[3]{4}\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_3 = \frac{\sqrt[3]{4}}{2} + \sqrt[3]{4}\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{array} \right.$ (2) Сразу выделим $x_4 = \sqrt[3]{3}$. Осталось найти еще 2. Аналогично можно найти 2 точки на единичной окружности(только в этом случае треугольник будет развернут в другую сторону, так как действительная часть положительна).

Итого в тригонометрической форме корни имеют вид: $\sqrt[3]{3}\big(\cos(\pm\dfrac{2\pi}{3}) + i\sin(\pm\dfrac{2\pi}{3})\big)$. А в алгебраической форме соответственно: $\left[\begin{array}{l} x_5 = -\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2} - \sqrt[3]{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \\ x_6 = -\dfrac{\sqrt[3]{3}}{2} + \sqrt[3]{3}\dfrac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right.$

Таким образом, $f(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)(x-x_6)$ – в кольце $\mathbb{C}[x]$. Причем x_2x_3, x_5, x_6 – сопряженные. Зная, что в кольце $\mathbb{R}[x]$ неприводимыми являются линейные многочлены и многочлены, корни которых сопряженные комплексные числа($D<0$), то легко получим разложение $f(x)$ в кольце $\mathbb{R}[x]$: $f(x) = (x-x_1)(x-x_4)(x^2-2^{2/3}x+2^{4/3})(x^2+3^{1/3}x+3^{2/3})$

Задание 3.

Выясните, является ли число $5+\sqrt{-5}$ простым элементом кольца $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

Решение. Число $5+\sqrt{-5}$ является простым $\Leftrightarrow$ оно представило в виде произведения. Имеем $5+\sqrt{-5} = xy = (a+b\sqrt{-5})(c+d\sqrt{-5})$. Рассмотрим модуль комплексного числа. Пусть $N(z)$ – квадрат модуля комплексного числа(не путать с нормой). Имеем $N(5+\sqrt{-5}) = N(xy) = N(x)N(y) \Leftrightarrow 30 = (a^2+5b^2)(c+5d^2) = 1\cdot 30 = 2\cdot 15 = 3\cdot 10 = 5\cdot 6$. Заметим, что $N(x)=2$ можно получить только при $a=\pm\sqrt{2}, b=0$, но тогда a,b – не целые. Аналогично и с $N(x)=3$. Остается один вариант: $\begin{cases} N(x)=5 \\ N(y)=6 \end{cases}$. Рассмотрим $N(x)=5 \Leftrightarrow a^2+5b^2=5$. Одна из переменных очевидно 0. Пусть $b=0$, тогда c и d – не целые. Следовательно, $a=0$, тогда $b=\pm1$. Положим $b=1$, тогда $5+\sqrt{-5} = \sqrt{-5}(c+d\sqrt{-5})$. Легко можно подобрать такие целые c и d, что равенство становится верным. Например $c=1, d=-1$: $5+\sqrt{-5} = \sqrt{-5}(-\sqrt{-5}+1)$. Теперь покажем, что получили разложение на произведение необратимых.

1. Пусть $\sqrt{-5}$ обратим, тогда $\sqrt{-5}(a+b\sqrt{-5}) = 1 \Leftrightarrow a\sqrt{-5}-5b = 1 \Rightarrow b = -\dfrac{1}{5}$, но $b\in\mathbb{Z}$.
2. Пусть $-\sqrt{-5}+1$ обратим, тогда $(-\sqrt{-5}+1)(a+b\sqrt{-5}) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a+5b=1 \\ b-a=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=\dfrac{1}{6}$, но $a,b\in\mathbb{Z}$.

Данное число не является простым.

Задание 4.

Пусть R – евклидово кольцо с нормой N. Докажите, что N принимает бесконечное число значений.

Решение. Пусть N принимает конечное число значений. Следовательно, существует и максимальное значение Отсюда $\exists a\in R : N(a) = N_{max}$. Так как R – не поле, то существует необратимый b. Так как N – норма, то выполнено следующее свойство:

$$N(x) = N(xy) \Leftrightarrow \exists y^{-1}$$

Но для элемента a не может быть равенства $N(a) = N(ab)$, так как b необратим. Следовательно, по определению нормы: $N(ab) > N(a) \Leftrightarrow N(ab) > N_{max}$ – противоречие.