Индивидуальное домашнее задание №5.

Михайлов Никита Маратович, ПМИ-167.
Вариант 14.

Задание 1.

Для квадратичной формы

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2(-3b+20) + x_2^2(9-b) + 5x_3^2 + 2x_1x_2(12-2b) + 2x_1x_3(16-3b) + 2x_2x_3(3-b)$$

выясните, при каких значениях параметра b она является положительно определенной, а при каких – отрицательно определенной.
Решение. Составим матрицу матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} -3b+20 & 12-2b & 16-3b \\ 12-2b & 9-b & 3-b \\ 16-3b & 3-b & 5 \end{pmatrix}$$

Воспользовавшись критерием Сильвестра рассмотрим случаи:

1. Все угловые миноры строго положительны. Составим систему, посчитав все угловые миноры:

$$\begin{cases} -3b+20 > 0; \\ (-3b+20)(9-b) - (12-2b)^2 > 0; \\ (-3b+20)(9-b)5 + (12-2b)(3-b)(16-3b) + (16-3b)(12-2b)(3-b) - \\ \qquad -(16-3b)^2(9-b) - (3-b)^2(-3b+20) - 5(12-2b)^2 > 0; \end{cases}$$

   Преобразовав получим следующую систему:

$$\begin{cases} 3b-20 < 0; & (1) \\ b^2-b-36 < 0; & (2) \\ b^2-10b+24 < 0; & (3) \end{cases}$$

   Из (3): $b \in (4;6)$, тогда (1) сразу становится верным. Разберемся с (2):
   $b^2 - 10b + 24 + 9b - 60 < 0 \Rightarrow 9b - 60 < 0$ – снова верно в силу (3).
   Таким образом получили, что $Q(x_1, x_2, x_3)$ положительно определена тогда и только тогда, когда $b \in (4;6)$.

2. Знаки всех миноров чередуются, причем минор порядка 1 со знаком минус. Тогда система из

(1)–(3) перепишется:

$$\begin{cases} 3b-20>0; & (4)\\ b^2-b-36<0; & (5)\\ b^2-10b+24>0; & (6)\end{cases}$$

Тогда из (4): $b>\frac{20}{3}$, тогда (6) сразу выполнено $\Big((-\infty;4)\cup(6;\infty)\Big)$, а (5) автоматически невыполнено, так как точка $\frac{20}{3}$ лежит правее вершины параболы и значение многочлена из (5) больше нуля(значит многочлен монотонно растет для бóльших аргументов).
Таким образом получили, что $b\in\varnothing$.

Ответ:

1. $Q>0\Leftrightarrow b\in(4;6)$
2. $Q<0\Leftrightarrow b\in\varnothing$

$\boxed{\text{Задание 2.}}$

Подпространство U евклидова пространства $\mathbb{R}^4$ задано уравнением $-4x_1+2x_2+x_3-x_4=0$

(а) Постройте в U ортонормированный базис

(б) Для вектора $v=(2,0,1,0)$ найдите его проекцию на U, его ортоганальную составляющую относительно U и расстояние от него до U.

Решение а). Так как пространство задано уравнением, то чтобы найти базис в U, достаточно найти ФСР для данного уравнения. Взяв за свободные последние три переменные получим три вектора:

$$e_1=(-1,0,0,4),\qquad e_2=(1,0,4,0),\qquad e_3=(1,2,0,0)$$

Теперь можно начать процесс ортогонализации. Пусть e_1,e_2,e_3 – начальный, e_1',e_2',e_3' – ортогональный, а f_1,f_2,f_3 – ортонормированный базисы в U

1. Положим $e_1'=e_1$.
2. Тогда $e_2'=e_1'+\lambda e_2$. Составим $(e_1',e_2')=0\Leftrightarrow -1(-1+\lambda)+16=0\Rightarrow\lambda=17$. Таким образом, $e_2'=(16,0,68,4)$. Можно вынести 4 и ничего не изменится. Тогда $e_2'=(4,0,17,1)$.
3. Составим $e_3'=\lambda_1e_1'+\lambda_2e_2'+e_3$. Нам нужно:
$\begin{cases}(e_3',e_2')=0\\(e_3',e_1')=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-\lambda_1+4\lambda_2+1)4+289\lambda_2+4\lambda_1+\lambda_2=0\\-(-\lambda_1+4\lambda_2+1)+4(4\lambda_1+\lambda_2)=0\end{cases}$
$\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1=\frac{1}{17}\\\lambda_2=-\frac{2}{153}\end{cases}$ Избавимся от знаменателя, домножив на 153:
Итого: $e_3'=(136,306,-34,34)$

Разделив на длины получим:
$f_1=\dfrac{e_1'}{|e_1'|}=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{17}},0,0,\dfrac{4}{\sqrt{17}}\right)$
$f_2=\dfrac{e_2'}{|e_2'|}=\left(\dfrac{4}{\sqrt{306}},0,\dfrac{17}{\sqrt{306}},\dfrac{1}{\sqrt{306}}\right)$

$f_3 = \frac{e_3'}{|e_3'|} = \left(\frac{136}{\sqrt{114444}}, \frac{306}{\sqrt{114444}}, -\frac{34}{\sqrt{114444}}, \frac{34}{\sqrt{114444}}\right)$

Решение б). Дополним e_1, e_2, e_3 до базиса в $\mathbb{R}^4$ вектором $e_4 = (-4, 2, 1, -1)$. Этот вектор ортогонален векторам e_1, e_2, e_3. Поэтому проекция на U вектора v параллельно e_4 будет ортогональной. Составим СЛУ:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -17 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -17 & 8 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -17 & 8 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -22 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{88} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{29}{88} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{22} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{22} \end{array}\right)$$

Таким образом, вектор $v' = -\frac{7}{88}e_1 + \frac{29}{88}e_2 + \frac{7}{22}e_3 = \frac{1}{88}(-7e_1 + 29e_2 + 28e_3) = \frac{1}{88} \cdot (64, 56, 116, -28) = \left(\frac{8}{11}, \frac{7}{11}, \frac{29}{22}, -\frac{7}{22}\right)$ – ортогональная проекция, а вектор $v^{\perp} = -\frac{7}{22} \cdot e_4 = \left(\frac{14}{11}, -\frac{7}{11}, -\frac{7}{22}, \frac{7}{22}\right)$ – ортогональное составляющая относительно U, а расстояние $\rho(v, U) = |v^{\perp}| = \frac{7}{22}\sqrt{4^2 + 2^2 + 1 + 1} = \frac{7}{\sqrt{22}}$.

$\boxed{\text{Задание 3.}}$

Составьте уравнения прямой в $\mathbb{R}^3$, параллельной плоскости $2x + 3y - 2z = 0$, проходящей через точку $(-2, 3, 1)$ и пересекающей прямую $x = -3t + 1, y = -4t + 3, z = 3t + 2$.