Домашняя работа по дискретной математике №21

Михайлов Никита Маратович, ПМИ-167.

Задание 1.

Решение. Возьмем набор константных функций $\{f_i(x) = i\}\ \forall i \in \mathbb{N}$. Так как U – УВФ, то найдется такое p_i, что $U(p_i, x) = f_i(x) = i$. Пусть $x = p_i$, тогда $U(p_i, p_i) = i\ \forall i \in \mathbb{N}$. Мы получили, что $\{U(p,p) : p \in \mathbb{N}\}$ содержит по крайней мере $\mathbb{N}$. Но в курсе мы рассматриваем функции, возвращающие значения только из $\mathbb{N}$. Множество из условия совпадает с $\mathbb{N}$.

Задание 2.

Решение.
а) Заметим, что $U(x, x^2)$ имеет те же значения для натуральных x, что и $U(\sqrt{x}, x)$ для всех полных квадратов натуральных чисел.
Пусть мн-во разрешимо. Следовательно, существует функция:

$$h(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } U(\sqrt{x}, x) - \text{ определено и } x \text{ – квадрат} \\ 0, \text{ иначе} \end{cases}$$

На на основе этой функции построим следующую функцию(если x – не полный квадрат, то возвращает -1):

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } U(\sqrt{x}, x) = 0 \\ 0, \text{ если } U(\sqrt{x}, x) \neq 0 \text{ и } U(\sqrt{x}, x) - \text{ определено} \\ -1, \text{ иначе} \end{cases}$$

Так как U – у.в.ф., то $\exists p : U(p, x) = f(x)$. Очевидно, что $f(x)$ – всюду определена. Ну значит она определена и для $p : f(p^2) = U(p, p^2)$. Рассмотрим случай из построения функции f те, для которых $U(x, x^2)$ – определено:

$$f(p^2) = 1 \Rightarrow U(p, p^2) = 0, \text{ но } U(p, p^2) = f(p^2) \text{ – противоречие}$$

Следовательно, f – невычислима $\Rightarrow$ множество неразрешимо.
б) Пусть $V(p, x)$ – некоторая универсальная функция, отличная от U. Используя V построим новую у.в.ф. U следующим образом:

$$U(p, x) = \begin{cases} \int\limits_0^x e^{-\frac{1}{t^2}} dt, \text{ если } p \text{ – квадрат} \\ V(ind(p), x), \text{ иначе} \end{cases}$$

Замечание. *Определенный интеграл всегда есть. Но на самом деле нам неважно значение, а важно, что для p – квадрата определена функция.*
Здесь $ind(x)$ возвращает номер числа x в списке НЕквадратов $(2_1, 3_2, 5_3, 6_4, 7_5, ...)$. $U(p, x)$ – универсальная, так как в ее сечениях содержатся все функции, если подобрать грамотно p так, чтобы $U(p, x) = V(ind(p), x)$. Множество из условия в таком случае совпадает с $\mathbb{N}$ – разрешимо.

Задание 3.

Решение. Пусть $\mathbb{A} \subseteq \mathbb{N}$ – бесконечное разрешимое множество. Тогда по его разрешимости:

$$h_a = \begin{cases} 1, \text{если } x \in A \\ 0, \text{если } x \notin A \end{cases}$$

Так же рассмотрим диагональную функцию $d(x) = U(x, x)$. Пусть $\mathbb{F}$ есть область определения функции $d(x)$.
Рассмотрим функцию:

$$h_f(x) = \begin{cases} d(x), \text{если } x \in \mathbb{F} \\ 0, \text{если } x \notin \mathbb{F} \end{cases}$$

Заметим, что h_f – невычислима. А также отметим тот факт, что функция $h_a \cdot h_f$ является характеристической функцией некоторого подмножества $\mathbb{A}$, но она невычислима. Следовательно, наше подмножество неразрешимо, а перечислить мы его можем, потому что наше подмножество $\mathbb{A} \cap \mathbb{F}$ – пересечение разрешимого и перечислимого.

Задание 4.

Решение. Пусть бесконечное подмножество $\mathbb{N}$ разрешимо. Будем перебирать все натуральные числа в порядке возрастания и выводить их, если они лежат в нашем подмножестве. Тогда данный алгоритм вычисляет некоторую возрастающую функцию $f(n)$, возвращающую n-ый выведенный элемент. f всюду определенная возрастающая вычислимая функция.

В другую сторону. Пусть f – нужная функция. Тогда построим характеристическую функцию. На вход получаем число x. Будем перебирать все значения $f(0), f(1), ...$, пока не встретим пару чисел p и q, таких, что $p \leq x < q$. Тогда если $p = x$, тогда x в нашем множестве, иначе нет.

Задание 5.

Решение. Пусть $\mathbb{A}$ – бесконечное перечислимое множество. Запустим алгоритм перечисления элементов из $\mathbb{A}$. Образуем мн-во $\mathbb{B} \subseteq \mathbb{A}$ как возрастающую последовательность элементов из перечисления. Иными словами: каждый следующий элемент в $\mathbb{B}$ будет больше чем все предыдущие. Таким образом, множество $\mathbb{B}$ перечислимо и еще возрастает. Из предыдущей задачи можно заключить, что $\mathbb{B}$ разрешимо.

Задание 6.

Решение. Пусть F – область определения у.в.ф. U. Тогда F – перечислимо по определению. Составим новое множество на основе F следующим образом:

$$X = \{x \mid \exists y : (x, y) \in F\}$$