Домашнее задание по алгебре №5.

Михайлов Никита Маратович, ПМИ-167.

Задание 1.

Найдите все обратимые элементы, все делители нуля и все нильпотентные элементы в кольце $R = \{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} | a, b, c \in \mathbb{R}\}$ *с обычными операциями сложения и умножения.*

Решение. Пусть $r = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \in R$.

1. Найдем все обратимые элементы. Заметим, что матрица обратима тогда и только тогда, когда она невырождена. Так же стоит отметить, что $\forall r \in R$ матрица r нижнетреугольная, следовательно, $det(r) = ac$. Составим $det(r) \neq 0 \Leftrightarrow ac \neq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ c = 0 \end{array} \right.$ Покажем, что обратная матрица будет лежать в кольце. Для этого достаточно посчитать алгебраическое дополнение элемента $r_{2,1} : A_{2,1} = 0$, откуда следует, что в обнатной матрице в первой строке, втором столбце будет стоять 0, а следовательно лежать в кольце.

2. Что такое нуль? Очевидно, что элемент $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, так как $0 + r = r + 0 = r$ Найдем все делители нуля. Для этого $x = \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} \in R$ и $r \neq 0$. Заметим, что делители нуля – необратимы, поэтому $ac = 0$.

   (a) Левые делители нуля. Составим $rx = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} = 0$, откуда получим:

$$\begin{cases} ax_1 = 0 \\ bx_1 + cx_2 = 0 \\ cx_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ b \in \mathbb{R} \\ c \neq 0 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = -\dfrac{b}{c} \\ x_3 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \in \mathbb{R} \\ b \in \mathbb{R} \\ c = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

   Рассмотрены все случаи для a, b, c. Таким образом, делители нуля имеют вид: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$, где $a, b \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(b) Правые делители нуля. Составим $xr = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 & 0 \\ x_2 & x_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} = 0$, откуда получим:

$$\begin{cases} ax_1 = 0 \\ ax_2 + bx_3 = 0 \\ cx_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 0 \\ b \in \mathbb{R} \\ c \in \mathbb{R} \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq 0 \\ b \in \mathbb{R} \\ c = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_3 = 1 \end{cases} \end{array} \right.$$

Рассмотрены все случаи для a, b, c. Таким образом, делители нуля имеют вид: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & c \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}$, где $b, c \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. Найдей нильпотентные элементы. Пусть r – нильпотент, тогда $\exists n : r^n = 0 \Rightarrow a^n = c^n = 0 \Leftrightarrow a = c = 0$. Получается все нильпотенты лежат в множестве матриц вида: $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x & 0 \end{pmatrix}$, где $x \in \mathbb{R}\{0\}$. Проверим все ли такие матрицы – нильпотенты: $X^2 = 0$. Да, все. Следовательно, все нильпотенты имеют такой вид.

Задание 2.

Приведите пример идеала в кольце $\mathbb{Z}[x]$, не являющегося главным.
Решение. Возьмем идеал I, состоящий из многочленов, у которых все свободные члены четные. Это идеал, так как 1) I – образует подгруппу(обратные тоже с четным свободным членом и сумма четных четна, 0 – четный); 2) пусть $r \in R, a \in I$, тогда $ar = ra \in I$, так как произведение любого на четное – четно. Пусть I – главный идеал, тогда $\exists a : I = (a)$. Следовательно, $\exists r : 2 = ar$. Заметим, что $a \neq \pm 1$, так как тогда $I = R$. Но тогда $a = \pm 2$. Следовательно, можно "породить"многочлен равный $x \in I$. Составим $\exists m : x = 2 \cdot m$, но такого m не существует. Получили противоречие. I – идеал, не являющийся главным.

Задание 3.

Найдите размерность $\mathbb{R}$-алгебры $\mathbb{R}[x]/\{x^3 - x^2 + 2\}$
Решение. Заметим, что $\mathbb{R}[x]/(x^3 - x^2 + 2)$ – факторкольцо по идеалу $I = (A) = (x^3 - x^2 + 2)$. Рассмотрим гомоморфизм φ – взятие остатка многочлена из $\mathbb{R}[x]$ от деления на A. Тогда φ. Тогда I в точности является $Ker\varphi$. По ТГК: $\mathbb{R}[x]/\{x^3 - x^2 + 2\} \simeq R[x]_A$(остатки от деления на A). Степень остатка строго меньше 3 и имеют вид квадратного многочлена с вещественными коэффициентами. Рассмотрим данное фактор кольцо как векторное пространство. Возьмем в нем базис: $x^2, x, 1$. Очевидно, что они линейно независимы и их кол-во максимально. То есть размерность этого векторного пространства 3, следовательно и данной алгебры тоже 3.

Задание 4.

Пусть F – поле, R – кольцо и $\varphi : F \to R$ – гомоморфизм колец. Докажите, что либо $\varphi(x) = 0$ при всех $x \in F$, либо $Im\varphi \simeq F$.
Решение. Из курса лекций: $Ker(\varphi)$ – несобственный идеал в F, так как F – поле. Заметим, что $Im\varphi \simeq F/Ker\varphi$. Из несобственности $Ker\varphi$:

1. $Ker\varphi = 0$, тогда $Im\varphi \simeq F/Ker\varphi \simeq F$
2. $Ker\varphi = F$, тогда $Im\varphi \simeq F/Ker\varphi \simeq F/ \simeq \{0\}$. Следовательно, в $Im\varphi$ есть только 1 элемент, но $\varphi(0) = 0$ – всегда. Следовательно, $Im\varphi = \{0\} \Rightarrow \forall x \in F\ \varphi(x) = 0$.