Домашнее задание по алгебре №3.

Михайлов Никита Маратович, ПМИ-167.

Задание 1.

Пусть G – группа всех диагональных матриц в $GL_3(\mathbb{R})$ и $X = \mathbb{R}^3$. Опишите все орбиты и все стабилизаторы для действия группы G на множестве X, заданного формулой $(g, x) \mapsto g \cdot x$.

Решение. Пусть $x \in X$, тогда орбита элемента x – это $\{gx \mid g \in G\}$. Рассмотрим произвольный элемент $g \in G$:

$$g = \begin{pmatrix} g_1 & 0 & 0 \\ 0 & g_2 & 0 \\ 0 & 0 & g_3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

где $g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$. Посмотрим их произведение:

$$gx = \begin{pmatrix} g_1x_1 \\ g_2x_2 \\ g_3x_3 \end{pmatrix}$$

Заметим, что если $x_i = 0$, то на i-й координате вектора x будет стоять 0, независимо от g_i. Тогда орбиты легко выписать, перебрав все возможные места для нулей:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ b \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

где $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Теперь опишем стабилизаторы. Пусть g – стабилизатор точки x, тогда:

$$gx = x \Leftrightarrow \begin{pmatrix} g_1x_1 \\ g_2x_2 \\ g_3x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим уравнение:$g_ix_i = x_i \Rightarrow \begin{cases} g_i = 1, \text{ если } x_i \neq 0 \\ g_i \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \text{ если } x_i = 0 \end{cases}$ Множество из g, составленных из удовлетворяющих уравнению g_i будет стабилизатором точки x.

Задание 2.

Пусть G – группа всех верхнетреугольных матриц в $SL_2(\mathbb{R})$. Опишите все классы сопряженности в группе G.

Решение.

Задание 3.

Для действия группы S_4 на себе сопряжениями найдите стабилизатор подстановки (1 2 3 4).

Решение. Пусть $(1\ 2\ 3\ 4) = \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$. Стабилизаторы элемента σ – те элементы S_4, к-рые не изменяют σ при сопряжении:$\{\delta \in S_4 \mid \delta\sigma\delta^{-1} = \sigma\}$. Заметим, что $\delta\sigma = \sigma\delta$, а следовательно, $\delta(\sigma(i)) = \sigma(\delta(i))$. Переберем все i:

$i = 4$: $\delta(1) = \sigma(\delta(4))$

$i = 1$: $\delta(2) = \sigma(\delta(1))$

$i = 2$: $\delta(3) = \sigma(\delta(2))$

$i = 3$: $\delta(4) = \sigma(\delta(3))$

Теперь переберем все возможные образы для $\delta(4)$:

1. $\delta(4) = 1 \Rightarrow \begin{cases} \delta(1) = \sigma(1) = 2 \\ \delta(2) = \sigma(2) = 3 \\ \delta(3) = \sigma(3) = 4 \\ \delta(4) = \sigma(4) = 1 \end{cases} \Rightarrow \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$

2. $\delta(4) = 2 \Rightarrow \begin{cases} \delta(1) = \sigma(2) = 3 \\ \delta(2) = \sigma(3) = 4 \\ \delta(3) = \sigma(4) = 1 \\ \delta(4) = \sigma(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

3. $\delta(4) = 3 \Rightarrow \begin{cases} \delta(1) = \sigma(3) = 4 \\ \delta(2) = \sigma(4) = 1 \\ \delta(3) = \sigma(1) = 2 \\ \delta(4) = \sigma(2) = 3 \end{cases} \Rightarrow \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

4. $\delta(4) = 4 \Rightarrow \begin{cases} \delta(1) = \sigma(4) = 1 \\ \delta(2) = \sigma(1) = 2 \\ \delta(3) = \sigma(2) = 3 \\ \delta(4) = \sigma(3) = 4 \end{cases} \Rightarrow \delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Все возможные стабилизаторы найдены.

$\boxed{\text{Задание 4.}}$

Пусть $k, l \in \mathbb{N}$ и $n = kl$. Реализуем группу $\mathbb{Z}_k \times \mathbb{Z}_l$ как подгруппу в SL_n, использую доказательство теоремы Кэли. Найдите необходимое и достаточное условие на числа k, l, при котором эта подгруппа содержится в A_n.

Решение.