

Индивидуальное домашнее задание №5.

Михайлов Никита Маратович, ПМИ-167.

Вариант 14.

Задание 1.

Для квадратичной формы

$$Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2(-3b + 20) + x_2^2(9 - b) + 5x_3^2 + 2x_1x_2(12 - 2b) + 2x_1x_3(16 - 3b) + 2x_2x_3(3 - b)$$

выясните, при каких значениях параметра b она является положительно определенной, а при каких – отрицательно определенной.

Решение. Составим матрицу матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} -3b + 20 & 12 - 2b & 16 - 3b \\ 12 - 2b & 9 - b & 3 - b \\ 16 - 3b & 3 - b & 5 \end{pmatrix}$$

Воспользовавшись критерием Сильвестра рассмотрим случаи:

1. Все угловые миноры строго положительны. Составим систему, посчитав все угловые миноры:

$$\begin{cases} -3b + 20 > 0; \\ (-3b + 20)(9 - b) - (12 - 2b)^2 > 0; \\ (-3b + 20)(9 - b)5 + (12 - 2b)(3 - b)(16 - 3b) + (16 - 3b)(12 - 2b)(3 - b) - \\ - (16 - 3b)^2(9 - b) - (3 - b)^2(-3b + 20) - 5(12 - 2b)^2 > 0; \end{cases}$$

Преобразовав получим следующую систему:

$$\begin{cases} 3b - 20 < 0; & (1) \\ b^2 - b - 36 < 0; & (2) \\ b^2 - 10b + 24 < 0; & (3) \end{cases}$$

Из (3): $b \in (4; 6)$, тогда (1) сразу становится верным. Разберемся с (2):

$b^2 - 10b + 24 + 9b - 60 < 0 \Rightarrow 9b - 60 < 0$ – снова верно в силу (3).

Таким образом получили, что $Q(x_1, x_2, x_3)$ положительно определена тогда и только тогда, когда $b \in (4; 6)$.

2. Знаки всех миноров чередуются, причем минор порядка 1 со знаком минус. Тогда система из

(1)–(3) перепишется:

$$\begin{cases} 3b - 20 > 0; \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} b^2 - b - 36 < 0; \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{cases} b^2 - 10b + 24 > 0; \end{cases} \quad (6)$$

Тогда из (4): $b > \frac{20}{3}$, тогда (6) сразу выполнено $\left((-\infty; 4) \cup (6; \infty) \right)$, а (5) автоматически невыполнено, так как точка $\frac{20}{3}$ лежит правее вершины параболы и значение многочлена из (5) больше нуля (значит многочлен монотонно растет для больших аргументов).

Таким образом получили, что $b \in \emptyset$.

Ответ:

$$1. Q > 0 \Leftrightarrow b \in (4; 6)$$

$$2. Q < 0 \Leftrightarrow b \in \emptyset$$

Задание 2.

Подпространство U евклидова пространства \mathbb{R}^4 задано уравнением $-4x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 0$

(а) Постройте в U ортонормированный базис

(б) Для вектора $v = (2, 0, 1, 0)$ найдите его проекцию на U , его ортогональную составляющую относительно U и расстояние от него до U .

Решение а). Так как пространство задано уравнением, то чтобы найти базис в U , достаточно найти ФСР для данного уравнения. Взяв за свободные последние три переменные получим три вектора:

$$e_1 = (-1, 0, 0, 4), \quad e_2 = (1, 0, 4, 0), \quad e_3 = (1, 2, 0, 0)$$

Теперь можно начать процесс ортогонализации. Пусть e_1, e_2, e_3 – начальный, e'_1, e'_2, e'_3 – ортогональный, а f_1, f_2, f_3 – ортонормированный базисы в U

1. Положим $e'_1 = e_1$.

2. Тогда $e'_2 = e'_1 + \lambda e_2$. Составим $(e'_1, e'_2) = 0 \Leftrightarrow -1(-1 + \lambda) + 16 = 0 \Rightarrow \lambda = 17$. Таким образом, $e'_2 = (16, 0, 68, 4)$. Можно вынести 4 и ничего не изменится. Тогда $e'_2 = (4, 0, 17, 1)$.

3. Составим $e'_3 = \lambda_1 e'_1 + \lambda_2 e'_2 + e_3$. Нам нужно:

$$\begin{cases} (e'_3, e'_2) = 0 \\ (e'_3, e'_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-\lambda_1 + 4\lambda_2 + 1)4 + 289\lambda_2 + 4\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -(-\lambda_1 + 4\lambda_2 + 1) + 4(4\lambda_1 + \lambda_2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{17} \\ \lambda_2 = -\frac{2}{153} \end{cases} \quad \text{Избавимся от знаменателя, домножив на 153:}$$

$$\text{Итого: } e'_3 = (136, 306, -34, 34)$$

Разделив на длины получим:

$$f_1 = \frac{e'_1}{|e'_1|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}, 0, 0, \frac{4}{\sqrt{17}} \right)$$

$$f_2 = \frac{e'_2}{|e'_2|} = \left(\frac{4}{\sqrt{306}}, 0, \frac{17}{\sqrt{306}}, \frac{1}{\sqrt{306}} \right)$$

$$f_3 = \frac{e'_3}{|e'_3|} = \left(\frac{136}{\sqrt{114444}}, \frac{306}{\sqrt{114444}}, -\frac{34}{\sqrt{114444}}, \frac{34}{\sqrt{114444}} \right)$$

Решение б). Дополним e_1, e_2, e_3 до базиса в \mathbb{R}^4 вектором $e_4 = (-4, 2, 1, -1)$. Этот вектор ортогонален векторам e_1, e_2, e_3 . Поэтому проекция на U вектора v параллельно e_4 будет ортогональной. Составим СЛУ:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -17 & 8 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -17 & 8 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -17 & 8 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -22 & 7 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{7}{88} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{29}{88} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{7}{22} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{7}{22} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Таким образом, вектор $v' = -\frac{7}{88}e_1 + \frac{29}{88}e_2 + \frac{7}{22}e_3 = \frac{1}{88}(-7e_1 + 29e_2 + 28e_3) = \frac{1}{88} \cdot ()$