Домашняя работа по дискретной математике №17

Михайлов Никита Маратович, БПМИ-167

1. Решение. Построим новую последовательность следующим образом:
1) на первое место ставим число из исходной последовательности
2) далее у нас два варианта: поставить либо бОльшее число, либо меньшее. Соответственно, если стоит меньшее, то записываем в последовательность 0, а если бОльшее, то 1.
Итого получили инъекцию из данного множества в наше (инъективность достигается за счет первого начального элемента). Наше получившееся множество $\mathbb{X} = \{0, 1, 2\} \times 2^{\mathbb{N}}$. Но так же заметим, что по любой такой последовательности мы можем однозначно восстановить данные. Получилась биекция.

$$\mathbb{X} \sim \{0, 1, 2\} \times 2^{\mathbb{N}} \sim 2^{\mathbb{N}} \sim \mathbb{R}$$

Мощность континуум.
2. Решение. На лекции было доказано, что множество всех бинарных отношений $\mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ имеет мощность континуум. А мн-во всех отношений эквивалентности является подмножеством множества всех бинарных отношений $\Leftrightarrow$ мн-во отн. экв. имеет мощность *не более чем континуум.* Рассмотрим все такие отношения эквивалентности, которые разбивают множества на 2 класса эквивалентности. Тогда для всех чисел 1, 2, 3, ... поставим в соответствие 0, если элемент лежит в первом классе, и 1, если во втором. Получили биекцию и мощность таких отношений эквивалентности - континуум, а множество всех отношений эквивалентности *не менее чем континуум.*. Искомая мощность - континуум.
3. Решение. На лекции было доказано, что множество всех бинарных отношений $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \sim 2^{\mathbb{R}}$. А мн-во всех отношений эквивалентности является подмножеством множества всех бинарных отношений $\Leftrightarrow$ мн-во отн. экв. имеет мощность *не более чем* $2^{\mathbb{R}}$. Рассмотрим все такие отношения эквивалентности, которые разбивают множества на 2 класса эквивалентности. Тогда для всех чисел $\in \mathbb{R}$ поставим в соответствие 0, если элемент лежит в первом классе, и

1, если во втором. Получили биекцию и мощность таких отношений эквивалентности - $2^{\mathbb{R}}$, а множество всех отношений эквивалентности *не менее чем* $2^{\mathbb{R}}$. Искомая мощность - $2^{\mathbb{R}}$.

4. Решение. Заметим, что $\bar{A} \vee B = A \to B$. Перепишем исходную формулу используя эту формулу.

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \to x_3) \wedge (x_2 \to x_4) \wedge (x_3 \to x_5) \wedge ... \wedge (x_6 \to x_8) \wedge (x_7 \to x_9)$$

. Построим СДНФ по таблице истинности.

$$(x_1 \vee x_2) \wedge (x_1 \to x_3) \wedge (x_2 \to x_4) \wedge (x_3 \to x_5) \wedge ... \wedge (x_6 \to x_8) \wedge (x_7 \to x_9) = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \vee x_2 = 1 \quad (1) \\ x_1 \to x_3 = 1 \ (2) \\ x_3 \to x_5 = 1 \ (3) \\ x_5 \to x_7 = 1 \ (4) \\ x_7 \to x_9 = 1 \ (5) \\ x_2 \to x_4 = 1 \ (6) \\ x_4 \to x_6 = 1 \ (7) \\ x_6 \to x_8 = 1 \ (8) \end{cases}$$

Рассмотрим подсистему этой системы для иксов с нечетными индексами(2-5 уравнения). Берем набор $x_1, x_3, ..., x_9$. Очевидно, что в таком наборе если $x_i = 1$, то $x_{i+2} \neq 0$. Иными словами: из истины может идти только истинна, а из лжи все, что угодно. Аналогично и с четными "иксами"(6-8 уравнения). Составим таблицы истинности для четных и нечетных отдельно, вписывая только те наборы, что дают 1.

x_1	x_3	x_5	x_7	x_9
0	0	0	0	0
0	0	0	0	1
0	0	0	1	1
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	1

x_2	x_4	x_6	x_8
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	1
0	1	1	1
1	1	1	1

Слева таблица наборов, дающих 1 в уравнениях 2-5, а справа таблица для наборов дающих 1 в уравнениях 6-8. Понятно, что система для уравнений 2-8 даст 1, если скомбинировать эти наборы($5 \cdot 6 = 30$ решений будет), но у нас еще есть первое уравнение. Что оно дает?

1) Если $x_1 = 0$, то, чтобы (1) стало истинно, надо, чтобы $x_2 = 1$. То есть левые наборы, где стоит в первом столбце 0(таких 5) можно совмещать только теми

правыми, где стоит в первом столбце 1(а таких 1).
2) Если $x_1 = 1$, то неважно какой x_2, ибо (1) всегда будет истинно в силу x_1. То есть левые наборы, где в первом столбце стоит 1 (таких 1) можно комбинировать с любыми из правых(таких 5). Всего 10 решений (1)-(8). Зная все эти 10 решений составим СДНФ(для удобства я буду пропускать знак $\wedge$ так же, как это делается с арифметическим умножением):

$$\bar{x_1}\bar{x_3}\bar{x_5}\bar{x_7}\bar{x_9}x_2x_4x_6x_8\vee$$

$$\bar{x_1}\bar{x_3}\bar{x_5}\bar{x_7}x_9x_2x_4x_6x_8\vee$$

$$\bar{x_1}\bar{x_3}\bar{x_5}x_7x_9x_2x_4x_6x_8\vee$$

$$\bar{x_1}\bar{x_3}x_5x_7x_9x_2x_4x_6x_8\vee$$

$$\bar{x_1}x_3x_5x_7x_9x_2x_4x_6x_8\vee$$

$$x_1x_3x_5x_7x_9\bar{x_2}\bar{x_4}\bar{x_6}\bar{x_8}\vee$$

$$x_1x_3x_5x_7x_9\bar{x_2}\bar{x_4}\bar{x_6}x_8\vee$$

$$x_1x_3x_5x_7x_9\bar{x_2}\bar{x_4}x_6x_8\vee$$

$$x_1x_3x_5x_7x_9\bar{x_2}x_4x_6x_8\vee$$

$$x_1x_3x_5x_7x_9x_2x_4x_6x_8$$

5. Решение. Воспользуемся полнотой $\{\vee, \neg\}$. Выразим эти операции через штрих Шеффера:

$$\bar{x} = \overline{x \wedge x} = x|x$$

$$x \vee y = \overline{(\bar{x} \wedge \bar{y})} = \bar{x}|\bar{y} = (x|x)|(y|y)$$

6. Решение. Пусть есть высказывание $X = \bar{Y} = \overline{y_1 \vee ... \vee y_m} = \bar{y_1} \wedge ... \wedge \bar{y_m}$. Но каждый y_i в себе содержит конъюнкцию n литералов. Рассмотрим $\bar{y_i} = \overline{a_1 \wedge ... \wedge a_n} = \bar{a_1} \vee ... \vee \bar{a_n}$ - ну а это представимо в виде КНФ применяя рассуждения выше для $n = 1$ Подставляя в X получим КНФ.
7. Решение. Докажем по индукции, что ненулевых коэффициентов будет $2^n - 1$
1) База: n = 0. Коэффициентов ненулевых 0 - верно.
2) Пусть верно для n, тогда

$$x_1 \vee ... \vee x_n \vee x_{n+1} = (x_1 \vee ... \vee x_n) \oplus x_{n+1} \oplus x_{n+1} \wedge (x_1 \vee ... \vee x_n)$$

Каждое слагаемое ненулевое и по предположению индукции получаем:
$2^n - 1 + 1 + 2^n - 1 = 2^{n+1} - 1$ – верно по индукции. Доказано.
8. Решение. Пусть она полная, тогда можем выразить $x_1 \wedge x_2$. Заметим, что

только через отрицание невозможно выразить такую функцию, следовательно, в представлении функции есть MAJ. Пусть $x_1 = 0, x_2 = 1, x3 = \{0, 1\} \Rightarrow x_1 \wedge x_2 = 0$. В наборе противоположном нашему: $x_1 = 1, x_2 = 1, x3 = \{1, 0\}$ функция MAJ меняет свой знак, а $x_1 \wedge x_2$ по-прежнему 0. Следовательно, невозможно выразить через такую систему данную функцию. Система неполная.