Домашнее задание 2

Бурминов Михаил

13 мая 2025 г.

Задание 1

$$x_t = Ax_{t-1} + w_t, \quad w_t \sim \mathcal{N}(0, Q)$$
$$z_t = Hx_t + v_t, \quad v_t \sim \mathcal{N}(0, R)$$
$$x_{t-1} \mid z_{1:t-1} \sim \mathcal{N}(\hat{x}_{t-1|t-1}, P_{t-1|t-1})$$

1. Prediction step

1. Распределение $p(x_t \mid z_{1:t-1})$. Поскольку x_t линейно зависит от нормально распределенной величины x_{t-1} и гауссовского шума w_t, распределение $x_t \mid z_{1:t-1}$ тоже является нормальным:

$$x_t \mid z_{1:t-1} \sim \mathcal{N}\left(A\hat{x}_{t-1|t-1},\ AP_{t-1|t-1}A^\top + Q\right)$$

2. Математическое ожидание $\hat{x}_{t|t-1}$ и ковариация $P_{t|t-1}$.

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{t|t-1} &= \mathbb{E}[x_t \mid z_{1:t-1}] \\
&= A\mathbb{E}[x_{t-1} \mid z_{1:t-1}] + \mathbb{E}[w_t] \\
&= A\hat{x}_{t-1|t-1} + 0 \\
&= A\hat{x}_{t-1|t-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P_{t|t-1} &= \mathrm{Cov}(x_t \mid z_{1:t-1}) \\
&= \mathrm{Cov}(Ax_{t-1} + w_t \mid z_{1:t-1}) \\
&= A \cdot \mathrm{Cov}(x_{t-1} \mid z_{1:t-1}) \cdot A^\top + \mathrm{Cov}(w_t) \\
&= AP_{t-1|t-1}A^\top + Q
\end{aligned}$$

2. Update step

1. Распределение $p(x_t \mid z_{1:t})$. Используем теорему Байеса:

$$p(x_t \mid z_{1:t}) \propto p(z_t \mid x_t) \cdot p(x_t \mid z_{1:t-1})$$

$$p(x_t \mid z_{1:t}) \propto \mathcal{N}(z_t; Hx_t, R) \cdot \mathcal{N}(x_t; \hat{x}_{t|t-1}, P_{t|t-1})$$

Раскрываем квадратичные формы:

$$\mathcal{N}(z_t; Hx_t, R) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(z_t - Hx_t)^\top R^{-1}(z_t - Hx_t)\right),$$
$$\mathcal{N}(x_t; \hat{x}_{t|t-1}, P_{t|t-1}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}(x_t - \hat{x}_{t|t-1})^\top P_{t|t-1}^{-1}(x_t - \hat{x}_{t|t-1})\right)$$

Перемножаем экспоненты:

$$p(x_t \mid z_{1:t}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\left[(z_t - Hx_t)^\top R^{-1}(z_t - Hx_t) + (x_t - \hat{x}_{t|t-1})^\top P_{t|t-1}^{-1}(x_t - \hat{x}_{t|t-1})\right]\right)$$

Раскладываем квадратичные формы:

$$(z_t - Hx_t)^\top R^{-1}(z_t - Hx_t) = z_t^\top R^{-1} z_t - 2x_t^\top H^\top R^{-1} z_t + x_t^\top H^\top R^{-1} H x_t,$$
$$(x_t - \hat{x}_{t|t-1})^\top P_{t|t-1}^{-1}(x_t - \hat{x}_{t|t-1}) = x_t^\top P_{t|t-1}^{-1} x_t - 2x_t^\top P_{t|t-1}^{-1}\hat{x}_{t|t-1} + \text{const}$$

Суммируем и группируем:

$$\text{Квадратичная форма} = x_t^\top \left(H^\top R^{-1} H + P_{t|t-1}^{-1}\right) x_t - 2x_t^\top \left(H^\top R^{-1} z_t + P_{t|t-1}^{-1}\hat{x}_{t|t-1}\right) + \text{const}$$

Из сравнения с канонической формой гауссовского распределения:

$$\mathcal{N}(x_t \,|\, \hat{x}_{t|t}, P_{t|t}) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\left[x_t^\top P_{t|t}^{-1} x_t - 2x_t^\top P_{t|t}^{-1}\hat{x}_{t|t}\right]\right),$$
$$P_{t|t}^{-1} = H^\top R^{-1} H + P_{t|t-1}^{-1},$$
$$P_{t|t}^{-1}\hat{x}_{t|t} = H^\top R^{-1} z_t + P_{t|t-1}^{-1}\hat{x}_{t|t-1}$$

2. Математическое ожидание $\hat{x}_{t|t}$ и ковариация $P_{t|t}$. Применим лемму об обращении матриц:

Лемма 1. *Пусть даны матрицы:*

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ *— обратимая матрица,*
- $U \in \mathbb{R}^{n \times k}$, $V \in \mathbb{R}^{k \times n}$*,*
- $C \in \mathbb{R}^{k \times k}$ *— обратимая матрица.*

Тогда:

$$(A + UCV)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(C^{-1} + VA^{-1}U)^{-1}VA^{-1}$$

И мы получаем:

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - P_{t|t-1}H^\top(HP_{t|t-1}H^\top + R)^{-1}HP_{t|t-1}$$

Определим матрицу Калмана:

$$K_t = P_{t|t-1}H^\top(HP_{t|t-1}H^\top + R)^{-1}$$

Имеем:

$$P_{t|t} = P_{t|t-1} - P_{t|t-1}H^\top(HP_{t|t-1}H^\top + R)^{-1}HP_{t|t-1} = (I - K_tH)P_{t|t-1}$$

Разберемся с матожиданием:

$$\hat{x}_{t|t} = P_{t|t}\left(H^\top R^{-1}z_t + P^{-1}_{t|t-1}\hat{x}_{t|t-1}\right)$$

$$\hat{x}_{t|t} = (I - K_tH)P_{t|t-1}\left(H^\top R^{-1}z_t + P^{-1}_{t|t-1}\hat{x}_{t|t-1}\right)$$

$$\hat{x}_{t|t} = (I - K_tH)P_{t|t-1}H^\top R^{-1}z_t + (I - K_tH)\hat{x}_{t|t-1}$$

Упростим первое слагаемое:

$$\begin{aligned}
(I - K_tH)P_{t|t-1}H^\top R^{-1}z_t &= P_{t|t-1}H^\top R^{-1}z_t - K_tHP_{t|t-1}H^\top R^{-1}z_t \\
&= K_t(HP_{t|t-1}H^\top + R)R^{-1}z_t - K_tHP_{t|t-1}H^\top R^{-1}z_t \\
&= K_tz_t + K_tHP_{t|t-1}H^\top R^{-1}z_t - K_tHP_{t|t-1}H^\top R^{-1}z_t \\
&= K_tz_t
\end{aligned}$$

Упростим второе слагаемое:

$$(I - K_tH)\hat{x}_{t|t-1} = \hat{x}_{t|t-1} - K_tH\hat{x}_{t|t-1}$$

Тогда получим

$$\hat{x}_{t|t} = K_tz_t + \hat{x}_{t|t-1} - K_tH\hat{x}_{t|t-1} = \hat{x}_{t|t-1} + K_t(z_t - H\hat{x}_{t|t-1})$$

Итого получили все, что хотели:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_{t|t} &= \hat{x}_{t|t-1} + K_t(z_t - H\hat{x}_{t|t-1}), \\
P_{t|t} &= (I - K_tH)P_{t|t-1}, \\
K_t &= P_{t|t-1}H^\top(HP_{t|t-1}H^\top + R)^{-1}.
\end{aligned}$$