

Курс “Введение в математический анализ”

Практическое задание к уроку 3

Инструкции к сдаче:

Присылайте фото листочков с вашими решениями в текстовом файле .doc или .txt или в формате .pdf

Прикладывайте ссылку на ваш репозиторий с кодом. Для написания кода используйте привычную среду программирования, желательно, Jupyter Notebook

Тема 3 “Последовательность”

1. Даны 4 последовательности. Необходимо:

- исследовать их на монотонность;
- исследовать на ограниченность;
- найти пятый по счету член.

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 2^n - n$$

$$\{b_n\}_{n=2}^{\infty} = \frac{1}{1-n}$$

$$\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = -1^n + \sqrt{2n}$$

$$\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^{2n} + \frac{1}{n^2}$$

Решение

1) а. $\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_3}{x_4} = \frac{2^3-3}{2^4-4} = \frac{8-3}{16-4} = \frac{5}{12} < 1 \Rightarrow$

\Rightarrow послед — ть монотонно возрастает

б. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 2^1 - 1 = 1$ т.к. $a_n \geq 1 \Rightarrow$ послед — ть ограничена снизу

с. $\{a_5\}_{n=1}^{\infty} = 2^5 - 5 = 27$

2) а. $\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_3}{x_4} = \left(\frac{1}{1-3}\right) \div \left(\frac{1}{1-4}\right) = \frac{1}{-2} \div \frac{1}{-3} = \frac{1 \cdot (-3)}{(-2) \cdot 1} = \frac{-3}{-2} = 1\frac{1}{2} > 1 \Rightarrow$

\Rightarrow ~~послед — ть монотонно убывает~~ **возрастающая**

последовательность (но её элементы убывают по модулю, поэтому

$\frac{b_{n+1}}{b_n} < 1$). Чтобы исследовать монотонность, учитывая знак, нужно

рассмотреть разность: $b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} > 0$

b. $\{b_n\}_{n=2}^{\infty} = \frac{1}{1-2} = -1$ т.к. $-1 \leq b_n < 0 \Rightarrow$ послед-ть ограничена

снизу и сверху

c. $\{b_5\}_{n=2}^{\infty} = \frac{1}{1-5} = -\frac{1}{4} = -0,25$

3) a. $\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_3}{x_4} = \frac{-1^2 + \sqrt{2 \cdot 2}}{-1^3 + \sqrt{2 \cdot 3}} = \frac{1 + \sqrt{4}}{-1 + \sqrt{6}} = -\frac{3}{1,4494897...} = 2,06969... > 1 \Rightarrow$

\Rightarrow послед-ть монотонно убывает

b. $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = -1^1 + \sqrt{2} = 0,4142$

т.к. $c_n > 0 \Rightarrow$ послед-ть ограничена снизу

c. $\{c_5\}_{n=1}^{\infty} = -1^5 + \sqrt{2 \cdot 5} = -1 + \sqrt{10} = 2,1623$

4) a. $\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_3}{x_4} = \frac{(-1)^{2 \cdot 3} + \frac{1}{3^2}}{(-1)^{2 \cdot 4} + \frac{1}{4^2}} = \frac{1\frac{1}{9}}{1\frac{1}{16}} = \frac{\frac{10}{9}}{\frac{17}{16}} = \frac{10 \cdot 16}{9 \cdot 17} = \frac{1600}{153} = 10,4575... > 1 \Rightarrow$

\Rightarrow послед-ть монотонно убывает

b. $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^{2 \cdot 1} + \frac{1}{1^2} = 1 + 1 = 2$

т.к. $d_n > 1 \Rightarrow$ послед-ть ограничена снизу

c. $\{d_5\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^{2 \cdot 5} + \frac{1}{5^2} = (-1)^{10} + \frac{1}{25} = 1\frac{1}{25}$

2. Найти 12-й член заданной неявно последовательности

$$a_1 = 128, a_{n+1} - a_n = 6$$

Решение

$$a_{n+1} - a_n = 6 \Rightarrow a_{n+1} = a_n + 6 \Rightarrow \{a_n\}_{n=128}^{\infty} = 128 + 6(n-1)$$

$$a_2 = a_1 + 6 = 128 + 6 = 134$$

$$\{a_{12}\}_{n=128}^{\infty} = 128 + 6 \cdot 11 = 128 + 66 = 194$$

2. *На языке Python предложить алгоритм вычисляющий численно предел с точностью $\varepsilon = 10^{-7}$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

Решение

```
# n / (n! ** (1 / n))
# n = 1, +oo
```

```

def f(n):
    return n / pow(fact(n), 1 / n)
#%%time
eps = 10 ** -7
i = 1
n = 1
x0 = f(n)
while True:
    i += 1
    n += 1
    x1 = f(n)
    if abs(x0 - x1) <= eps:
        break
    x0 = x1
print(f'n_iter: {i}')
print(f'f(n) = {x0}')

```

3. *Предложить оптимизацию алгоритма, полученного в задании 3, ускоряющую его сходимость.