Практические задания к уроку 6

Инструкции к сдаче:
Присылайте фото листочков с вашими решениями в текстовом файле .doc или .txt или в формате .pdf

Прикладывайте ссылку на ваш репозиторий с кодом. Для написания кода используйте привычную среду программирования, желательно, Jupiter Notebook

Тема “Элементы теории вероятностей”

1. **Задание (теорема сложения)**

Найти вероятность выпадения 2 или 5 очков при подбрасывании игральной кости, на гранях которой имеются соответственно 1,2,3,4,5 и 6 очков.

Решение

Всего 6 вариантов события. Вероятность выпадения любого значения кости $= \frac{1}{6}$,
благоприятный исход — выпадение 2 ИЛИ 5 $\Rightarrow$ нужно сложить вероятность для 2 и 5 очков: $P(A+B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

2. **Задание (теорема умножения)**

Найти вероятность того, что при двух подбрасываниях той же самой игральной кости сначала выпадет 2, а затем 5.

Решение

Благоприятный исход — выпадение 2 И 5, количество вариантов не меняется после первого события $\Rightarrow$ нужно умножить вероятность для 2 и 5 очков:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

3. **Задание**

Найти вероятность выпадения 2 и 5 очков при двух подбрасываниях той же самой игральной кости.

Решение

В данной задаче имеем серию испытаний. Благоприятный исход в каждом испытании 2 И 5, а результат двух испытаний: (2 И 5) ИЛИ (5 И 2). Таким образом общая вероятность вычисляется путем умножения на 2 произведений вероятностей в каждом испытании:

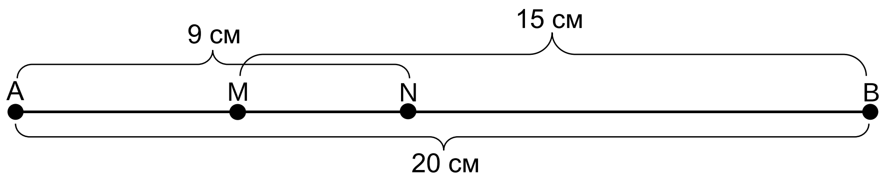
$$2 * P(AB) = 2 \cdot (P(A) \cdot P(B)) = 2 \cdot \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}\right) = 2 \cdot \frac{1}{36} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

4. **Задание (Геометрическая вероятность + интервалы)**

На отрезке АВ длиной 20 см наугад отметили точку С. Какова вероятность, что она находится на расстоянии не более 9 см от точки А и не более 15 см от точки В?

Решение

Сделаем рисунок:



Из условия следует, что точка C должна лежать на отрезке MN, длина которого равна $9 + 15 - 20 = 4$ см.

Вероятность $P(A)$события A "наугад кинутая точка на область G попадет в область g" вычисляется по формуле $P(A) = \frac{mes\ g}{mes\ G}$, при этом область g называется благоприятной для события. Символом mes обозначается мера области, которая может быть длиной отрезка, площадью фигуры, объемом тела и т. п.

Таким образом, из $P(A) = \frac{mes\ g}{mes\ G}$ искомая вероятность равна: $P(A) = \frac{MN}{AB} = \frac{4}{20} = 0{,}2$

5. **Задание**.

Телефонный номер состоит из 7 цифр. Какова вероятность, что это номер 8882227?

Решение

Всего возможно 10^7 вариантов. 8882227 – это 1 из вариантов. Вероятность $P = \frac{1}{10^7}$

6. **Задание**.

Набирая номер телефона, абонент забыл 2 последние цифры, и, помня только то, что эти цифры различны и среди них нет нуля, стал набирать их наудачу. Сколько вариантов ему надо перебрать, чтобы наверняка найти нужный номер? Какова вероятность того, что он угадает номер с первого раза?

Решение

Из условия всего возможно: $9 * 8 = 72$ варианта, которые нужно перебрать.

Вероятность угадать номер с первого раза $P = \frac{1}{72} = 0{,}013888\ldots.$

7. **Задание** (необязательное)**

Чёрный куб покрасили снаружи белой краской, затем разрезали на 27 одинаковых маленьких кубиков и как попало сложили из них большой куб. С какой вероятностью все грани этого куба будут белыми?

Решение

После разрезания мы получаем 27 кубов со следующими характеристиками: 8 угловых (по 3 белых грани), 12 реберных кубика (по 2 белых грани), 6 центровых (1 белая грань) и 1 центральный кубик без белых граней вообще. Задачу следует рассматривать как серию испытаний подобно подбрасыванею игральной кости. Из всех возможных исходов благоприятным является исход в котором все белые грани каждого куба будут видны. На это влияет позиция кубика в большом кубе и положение самого кубика. Будем считать вероятность выпадения кубика с нужным количеством граней и в нужной позиции. После каждого испытания общее количество кубиков уменьшается на 1. Общая вероятность благоприятного исхода является произведением вероятностей всех элементов:

1. Вероятность извлечения кубика без белых граней: $\frac{1}{27} = 0{,}037037037037037$
2. Вероятность извлечения из 26 кубиков 6 раз подряд кубика с одной белой гранью в нужном положении: $\left(\frac{6}{26}\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{5}{25}\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{4}{24}\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{3}{23}\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{2}{22}\cdot\frac{1}{6}\right)\cdot\left(\frac{1}{21}\cdot\frac{1}{6}\right) =$

$$= \frac{6}{156}\cdot\frac{5}{150}\cdot\frac{4}{144}\cdot\frac{3}{138}\cdot\frac{2}{132}\cdot\frac{1}{126} = \frac{1}{26}\cdot\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{46}\cdot\frac{1}{66}\cdot\frac{1}{126} = \frac{1}{10\,741\,610\,880} =$$
$$= 9{,}30959063004152\cdot 10^{-11}$$

3. Вероятность извлечения из 20 кубиков 12 раз подряд кубика с двумя белыми гранями в нужном положении: $\left(\frac{12}{20}\cdot\frac{1}{12}\right)\cdot\left(\frac{11}{19}\cdot\frac{1}{12}\right)\cdot\left(\frac{10}{18}\cdot\frac{1}{12}\right)\cdot\left(\frac{9}{17}\cdot\frac{1}{12}\right)\cdot\left(\frac{8}{16}\cdot\frac{1}{12}\right)\cdot\left(\frac{7}{15}\cdot\frac{1}{12}\right)\cdot\left(\frac{6}{14}\cdot\frac{1}{12}\right)\cdot\left(\frac{5}{13}\cdot\frac{1}{12}\right)\cdot$ $\cdot\left(\frac{4}{12}\cdot\frac{1}{12}\right)\cdot\left(\frac{3}{11}\cdot\frac{1}{12}\right)\cdot\left(\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{12}\right)\cdot\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{12}\right) =$

$$\frac{12}{240}\cdot\frac{11}{228}\cdot\frac{10}{216}\cdot\frac{9}{204}\cdot\frac{8}{192}\cdot\frac{7}{180}\cdot\frac{6}{168}\cdot\frac{5}{156}\cdot\frac{4}{144}\cdot\frac{3}{132}\cdot\frac{2}{120}\cdot\frac{1}{108} =$$
$$= \frac{1}{20}\cdot\frac{11}{228}\cdot\frac{5}{108}\cdot\frac{3}{68}\cdot\frac{1}{24}\cdot\frac{7}{180}\cdot\frac{1}{28}\cdot\frac{5}{156}\cdot\frac{1}{36}\cdot\frac{1}{44}\cdot\frac{1}{60}\cdot\frac{1}{108} = \frac{5\,775}{6\,486\,255\,776\,770\,818\,048\,000} =$$
$$= \frac{1}{1\,123\,161\,173\,466\,808\,320} = 8{,}903441675368\cdot 10^{-19}$$

4. Вероятность извлечения из из 8 кубиков 8 раз подряд кубика с тремя белыми гранями в нужном положении: $\left(\frac{8}{8}\cdot\frac{1}{8}\right)\cdot\left(\frac{7}{7}\cdot\frac{1}{8}\right)\cdot\left(\frac{6}{6}\cdot\frac{1}{8}\right)\cdot\left(\frac{5}{5}\cdot\frac{1}{8}\right)\cdot\left(\frac{4}{4}\cdot\frac{1}{8}\right)\cdot\left(\frac{3}{3}\cdot\frac{1}{8}\right)\cdot\left(\frac{2}{2}\cdot\frac{1}{8}\right)\cdot\left(\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{8}\right) =$

$$= \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{8^8} = \frac{1}{16\,777\,216} = 5{,}96046447753906\cdot 10^{-8}$$

5. Перемножив полученные вероятности получаем следующее выражение:

$$\frac{6!\cdot 12!\cdot 8!}{27!\cdot 6^6\cdot 12^{12}\cdot 8^8} = \frac{13\,905\,608\,048\,640\,000}{7.59950214248628303447901552663816044434612551 68\,\cdot 10^{52}} =$$
$$= 1{,}82981\cdot 10^{-37}$$

6. Сравним с промежуточными расчетами:

$$\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{10\,741\,610\,880}\cdot\frac{1}{1\,123\,161\,173\,466\,808\,320}\cdot\frac{1}{16\,777\,216} = 0{,}037037037037037\cdot$$
$$9{,}30959063004152\cdot 10^{-11}\cdot 8{,}903441675368\cdot 10^{-19}\cdot 5{,}96046447753906\cdot 10^{-8} = 1{,}82981\cdot 10^{-37}$$

Ответ: вероятность выпадения всех белых граней куба равна $\frac{6!\cdot 12!\cdot 8!}{27!\cdot 6^6\cdot 12^{12}\cdot 8^8} = 1{,}82981\cdot 10^{-37}$