Курс “Введение в математический анализ”

Тема 8 “Производные функций нескольких переменных”

1. Найти область определения функции.

$$z = \sqrt{1 - x^3} + \ln(y^2 - 1) \;\; \text{ОЗФ}: z \in \mathbb{R}$$

Решение:

$$\text{ООФ}: (x, y) \in \mathbb{R}^2: \begin{cases} x \in [-\infty; 1] \\ y \in [-\infty; -1) \cup (1; +\infty] \end{cases} = \begin{cases} x \leq 1 \\ y < -1 \cup y > 1 \end{cases}$$

$$z'_x = \left(\sqrt{1 - x^3}\right)'_x + (\ln(y^2 - 1))'_x = \left((1 - x^3)^{\frac{1}{2}}\right)'_x =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (1 - x^3)^{\frac{1}{2} - 1} \cdot (-3x^2) + 0 = -\frac{3x^2}{2\sqrt{1 - x^3}}$$

$$z'_y = \left(\sqrt{1 - x^3}\right)'_y + (\ln(y^2 - 1))'_y = 0 + \frac{1}{y^2 - 1} \cdot (y^2)'_y - (1)'_y = \frac{2y}{y^2 - 1}$$

Ответ:

$$\text{ООФ}: (x, y) \in \mathbb{R}^2: \begin{cases} x \in [-\infty; 1] \\ y \in [-\infty; -1) \cup (1; +\infty] \end{cases} = \begin{cases} x \leq 1 \\ y < -1 \cup y > 1 \end{cases}$$

2. Найти производные 1-го порядка функции.

$$z = \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^3 = \left(\frac{\ln y}{\ln y} + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^3 = \frac{(\ln x + \ln y)^3}{\ln^3 y}$$

Решение:

$$z'_x = \left(\frac{(\ln x + \ln y)^3}{\ln^3 y}\right)'_x = \frac{((\ln x + \ln y)^3)'_x}{(\ln^3 y)'_x} = \frac{3(\ln x + \ln y)^2 \cdot ((\ln x)'_x + (\ln y)'_x)}{\ln^3 y\,(x)'_x} =$$

$$= \frac{3(\ln x + \ln y)^2 \cdot \left(\frac{1}{x} + 0\right)}{\ln^3 y \cdot 1} = \frac{3(\ln x + \ln y)^2}{x \cdot \ln^3 y}$$

$$z'_y = \left(\frac{(\ln x + \ln y)^3}{\ln^3 y}\right)'_y = \frac{((\ln x + \ln y)^3)'_y}{(\ln^3 y)'_y} =$$

$$= \left(3(\ln x + \ln y)^2 \cdot ((\ln x)'_y + (\ln y)'_y)\right) \cdot (\ln^{-3} y)'_y =$$

$$=\left(3(\ln x+\ln y)^2\cdot\left(0+\frac{1}{y}\right)\right)\cdot(\ln^{-3-1}y)=\frac{3(\ln x+\ln y)^2}{y\cdot\ln^4 y}$$

$$\text{Ответ: } z'_x=\frac{3(\ln x+\ln y)^2}{x\cdot\ln^3 y};\ \ z'_y=\frac{3(\ln x+\ln y)^2}{y\cdot\ln^4 y}$$

3. Найти полный дифференциал функции в точке (1;1).

$$z=\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}$$

Решение:

$$z'_x=\left(\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}\right)'_x=\left(\left(2xy+\cos\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\right)'_x\cdot\left((2xy)'_x+\left(\left(\cos\frac{x}{y}\right)'_x\cdot\left((x)'_x\cdot(y^{-1})\right)\right)\right)=$$

$$=\left(2xy+\cos\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\left(2y\cdot(x)'_x+\left(\left(-\sin\frac{x}{y}\right)\cdot\frac{1}{y}\right)\right)=\frac{2y-\frac{\sin\frac{x}{y}}{y}}{2\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}}$$

$$z'_y=\left(\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}\right)'_y=\left(\left(2xy+\cos\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}}\right)'_y\cdot\left((2xy)'_y+\left(\left(\cos\frac{x}{y}\right)'_y\cdot\left(x\cdot(y^{-1})'_y\right)\right)\right)=$$

$$=\left(2xy+\cos\frac{x}{y}\right)^{\frac{1}{2}-1}\cdot\left(2x\cdot(y)'_y+\left(\left(-\sin\frac{x}{y}\right)\cdot\left(x\cdot(-1y^{-1-2})\right)\right)\right)=\frac{2x+\frac{x\cdot\sin\frac{x}{y}}{y^2}}{2\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}}$$

$$dW(x;y)=W'(x)dx+W'(y)dy=\left(\frac{2y-\frac{\sin\frac{x}{y}}{y}}{2\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}}\right)dx+\left(\frac{2x+\frac{x\cdot\sin\frac{x}{y}}{y^2}}{2\sqrt{2xy+\cos\frac{x}{y}}}\right)dy$$

$$dW(1;1)=\left(\frac{2\cdot1-\frac{\sin\frac{1}{1}}{1}}{2\sqrt{2\cdot1\cdot1+\cos\frac{1}{1}}}\right)dx+\left(\frac{2\cdot1+\frac{1\cdot\sin\frac{1}{1}}{1^2}}{2\sqrt{2\cdot1\cdot1+\cos\frac{1}{1}}}\right)dy=$$

$$=\left(\frac{2-\sin1}{2\sqrt{2+\cos1}}\right)dx+\left(\frac{2+\sin1}{2\sqrt{2+\cos1}}\right)dy=\left(\frac{2-0{,}017452}{2\sqrt{2+0{,}999848}}\right)dx+\left(\frac{2+0{,}017452}{2\sqrt{2+0{,}999848}}\right)dy=$$

$$= \left(\frac{1{,}982548}{2 \cdot 1{,}732}\right) dx + \left(\frac{2{,}017452}{3{,}464}\right) dy = (0{,}5723 \dots) dx + (0{,}5824 \dots) dy$$

Ответ: $dW(1;1) = \left(\frac{2 - \sin 1}{2\sqrt{2 + \cos 1}}\right) dx + \left(\frac{2 + \sin 1}{2\sqrt{2 + \cos 1}}\right) dy = 0{,}5723 \dots dx + 0{,}5824 \dots dy$

4. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$$

Решение:

1) Найдем частные производные 1-го порядка:

$$z'_x = (x^2)'_x + (xy)'_x + (y^2)'_x - (6x)'_x - (9y)'_x = 2x + y \cdot (x)'_x + 0 - 6 - 0 = 2x + y - 6$$
$$z'_y = (x^2)'_y + (xy)'_y + (y^2)'_y - (6x)'_y - (9y)'_y = 0 + x \cdot (y)'_y + 2y - 0 - 9 = x + 2y - 9$$

2) Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y - 6 = 0 & (1) \\ x + 2y - 9 = 0 & (2) \end{cases}$$

Из (2) получим $x = 9 - 2y$ и подставим в (1):

$$2 \cdot (9 - 2y) + y - 6 = 0$$
$$18 - 4y + y - 6 = 0$$
$$12 - 3y = 0$$
$$y = \frac{12}{3} = 4, \qquad \text{откуда } x = 9 - 2 \cdot 4 = 1$$

$M_0(1;4)$ – стационарная точка

3) Найдем частные производные 2-го порядка:

$$z''_{xx} = (2x + y - 6)'_x = (2x)'_x + (y)'_x - (6)'_x = 2 + 0 - 0 = 2$$
$$z''_{xy} = (2x + y - 6)'_y = (2x)'_y + (y)'_y - (6)'_y = 0 + 1 - 0 = 1$$
$$z''_{yy} = (x + 2y - 9)'_y = (x)'_y + (2y)'_y - (9)'_y = 0 + 2 - 0 = 2$$
$$z''_{yx} = (x + 2y - 9)'_x = (x)'_x + (2y)'_x - (9)'_x = 1 + 0 - 0 = 1$$

4) Составим матрицу частных производных 2-го порядка и найдем определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 4 - 1 = 3 > 0$$

$\begin{cases} \Delta = 3 > 0 \\ z''_{xx} = 2 > 0 \end{cases} \Longrightarrow$ точка $M_0(1;4)$ – минимум функции $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$

$$z(1;4) = 1^2 + 1 \cdot 4 + 4^2 - 6 \cdot 1 - 9 \cdot 4 = 1 + 4 + 16 - 6 - 36 = -21$$

Ответ: В точке $M_0(1;4)$ $z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$ имеет минимум $z(1;4) = -21$