Курс “Введение в математический анализ”

Тема 7 “Ряды”

1. Исследовать ряд на сходимость, используя признак д’Аламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{\left((n+1)!\right)^2}}{\frac{n^n}{(n!)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^{n+1}\cdot(n!)^2}{\left((n+1)!\right)^2\cdot n^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n\cdot\cancel{(n+1)}\cdot\cancel{n!}\cdot\cancel{n!}}{\cancel{n!}\cdot\cancel{(n+1)}\cdot\cancel{n!}\cdot(n+1)\cdot n^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{(n+1)\cdot n^n} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1 \Longrightarrow \text{ряд сходится}$$

2. Исследовать ряд на сходимость, используя радикальный признак Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n}} = \frac{n^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1}{(2^n)^{\frac{1}{n}} = 2^{n\cdot\frac{1}{n}} = 2} = \frac{1}{2} < 1 \Longrightarrow \text{ряд сходится}$$

3. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Лейбница:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln n} = -1 + \frac{1}{2{,}693} - \frac{1}{4{,}099} + \frac{1}{5{,}386} - \frac{1}{6{,}609} + \frac{1}{7{,}792}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln n} = \frac{(-1)^\infty}{\infty+\ln\infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \\ &\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n+\ln n}\right| = 1 + \frac{1}{2{,}693} + \frac{1}{4{,}099} \Longrightarrow |a_n| > |a_{n+1}| \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \text{ряд сходится условно}$$

4. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Раабе:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\right)=n\cdot\left(\left(\frac{\frac{3^n}{2^n}}{\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}}\right)-1\right)=n\cdot\left(\frac{3^n\cdot 2^{n+1}}{2^n\cdot 3^{n+1}}-1\right)=$$

$$=n\cdot\left(\frac{3^1\cdot 2^{1+1}}{2^1\cdot 3^{1+1}}-1\right)=n\cdot\left(\frac{12}{18}-1\right)=n\cdot\left(\frac{2}{3}-1\right)=-\frac{1}{3}n<1\Rightarrow \text{ряд расходится}$$

5. Разложить функцию по Тейлору в единице:

$$f(x)=\ln(16x^2)$$

Найдем значения функции и ее производных при x=1:

$$f(1)=\ln(16\cdot 1^2)=\ln(16)$$

$$f'(x)=(\ln(16x^2))'\cdot(16x^2)'=\frac{1}{\cancel{16}x^{\cancel{2}}}\cdot\cancel{16}\cdot 2\cancel{x}=\frac{2}{x};\ f'(1)=\frac{2}{1}=2$$

$$f''(x)=\left(\frac{2}{x}\right)'=2\cdot(x^{-1})'=-\frac{2}{x^2};\ f''(1)=-\frac{2}{1^2}=-2$$

$$f'''(x)=\left(-\frac{2}{x^2}\right)'=-2\cdot(x^{-2})'=\frac{4}{x^3};\ f'''(1)=\frac{4}{1^3}=4$$

$$f^{IV}(x)=\left(\frac{4}{x^3}\right)'=4\cdot(x^{-3})'=-\frac{12}{x^4};\ f^{IV}(1)=-\frac{12}{1^4}=-12$$

$$f^{V}(x)=\left(-\frac{12}{x^4}\right)'=-12\cdot(x^{-4})'=\frac{48}{x^5};\ f^{V}(1)=\frac{48}{1^5}=48$$

$$f^{VI}(x)=\left(\frac{48}{x^5}\right)'=48\cdot(x^{-5})'=-\frac{240}{x^6};\ f^{VI}(1)=-\frac{240}{1^6}=-240$$

$$f^{VII}(x)=\left(-\frac{240}{x^6}\right)'=-240\cdot(x^{-6})'=\frac{1440}{x^7};\ f^{VII}(1)=\frac{1440}{1^7}=1440$$

Подставляя полученные значения производных в формулу ряда Тейлора, получим:

$$\ln(16x^2)=\ln(16)+\frac{2}{1!}(x-1)+\frac{-2}{2!}(x-1)^2+\frac{4}{3!}(x-1)^3+\frac{-12}{4!}(x-1)^4+$$

$$+\frac{48}{5!}(x-1)^5+\frac{-240}{6!}(x-1)^6+\frac{1440}{7!}(x-1)^7+\cdots=\ln(16)+2x-2-$$

$$-(x-1)^2+\frac{2(x-1)^3}{3}-\frac{(x-1)^4}{2}+\frac{2(x-1)^5}{5}-\frac{(x-1)^6}{3}+\frac{2(x-1)^7}{7}+\cdots$$

6.* Дана функция $f(x)=x^2$:

a. Разложить функцию в ряд Фурье по косинусам на отрезке $x\in[-\pi;\pi]$.

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\left(\frac{\pi nx}{l}\right)+b_n\sin\left(\frac{\pi nx}{l}\right)\right)\xRightarrow{l=\pi}\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

$x^2 -$ чётная функция, поэтому коэффициент Фурье $b_n = 0$, тогда ряд примет вид:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

Найдем коэффициенты разложения a_0 и a_n:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{x^3}{3}\bigg|_{-\pi}^{\pi}\right) = \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{\pi^3}{3} - \left(-\frac{\pi^3}{3}\right)\right) = \frac{1}{2\pi}\cdot\left(\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{2\pi}}\cdot\frac{\cancel{2\pi^3}}{3} = \frac{\pi^2}{3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)\,dx = (*)$$

$$\int x^2 \cos(nx)\,dx = \begin{vmatrix} \int u dv = & uv - \int v du \\ u = x^2 & dv = \cos(nx)\,dx \\ du = 2x\,dx & v = \frac{\sin(nx)}{n} \end{vmatrix} = x^2\frac{\sin(nx)}{n} -$$

$$-\int 2x\frac{\sin(nx)}{n}\,dx = x^2\frac{\sin(nx)}{n} - 2\begin{vmatrix} u = x & dv = \frac{\sin(nx)}{n}dx \\ du = dx & v = -\frac{\cos(nx)}{n^2} \end{vmatrix} =$$

$$= x^2\frac{\sin(nx)}{n} - \left(2\left(-x\frac{\cos(nx)}{n^2}\right)\right) - 2\int\frac{\cos(nx)}{n^2}\,dx =$$

$$= x^2\frac{\sin(nx)}{n} + 2x\frac{\cos(nx)}{n^2} - 2\frac{\sin(nx)}{n^3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx = \frac{1}{\pi}\cdot\left(x^2\frac{\sin(nx)}{n} + 2x\frac{\cos(nx)}{n^2} - 2\frac{\sin(nx)}{n^3}\right)\bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$F(\pi) = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\pi^2\frac{\sin(n\pi)}{n} + 2\pi\frac{\cos(n\pi)}{n^2} - 2\frac{\sin(n\pi)}{n^3}\right) = \begin{vmatrix}\cos(\pi n) = (-1)^n \\ \sin(\pi n) = 0\end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\cdot\left(\pi^2\frac{0}{n} + 2\pi\frac{(-1)^n}{n^2} - 2\frac{0}{n^3}\right) = \frac{1}{\cancel{\pi}}\cdot 2\cancel{\pi}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{2(-1)^n}{n^2}$$

$$F(-\pi) = \frac{1}{\pi}\cdot\left((-\pi)^2\frac{\sin(-\pi n)}{n} + 2(-\pi)\frac{\cos(-\pi n)}{n^2} - 2\frac{\sin(-\pi n)}{n^3}\right) =$$

$$= \begin{vmatrix}\cos(\pi n) = (-1)^n \\ \sin(\pi n) = 0\end{vmatrix} = \frac{1}{\pi}\cdot\left(\pi^2\frac{0}{n} + 2(-\pi)\frac{(-1)^n}{n^2} - 2\frac{0}{n^3}\right) =$$

$$= \frac{1}{\cancel{\pi}} \cdot \left(-2\cancel{\pi}\frac{(-1)^n}{n^2}\right) = -\frac{2(-1)^n}{n^2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx)\, dx = \frac{2(-1)^n}{n^2} - \left(-\frac{2(-1)^n}{n^2}\right) = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

$$x^2_{[-\pi;\pi]} = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2}\cos(nx) = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}$$

b. Построить график функции и ее разложения.

Тема 8 “Понятие об интеграле”

1. Найти неопределенный интеграл:

$$\int (2x^2 - 2x - 1 + \sin x - \cos x + \ln x + e^x)\, dx$$
$$= 2\int x^2\, dx - 2\int x\, dx - \int 1\, dx + \int \sin(x)\, dx -$$
$$- \int \cos(x)\, dx + \int \ln(x)\, dx + \int e^x\, dx$$
$$= 2 \cdot \frac{x^3}{3} - \cancel{2} \cdot \frac{x^2}{\cancel{2}} - x + (-\cos(x)) - \sin(x) + x\ln(x) - x +$$
$$+ e^x + C = \frac{2x^3}{3} - x^2 - 2x - \cos(x) - \sin(x) + x\ln(x) + e^x + C$$

2. Найти неопределенный интеграл:

$$\int (2x + 6xz^2 - 5x^2y - 3\ln z)\, dx = (2 + 6z^2)\int x\, dx - 5y\int x^2\, dx - 3\ln(z)\int 1\, dx =$$
$$= \frac{(2+6z^2)\cdot x^2}{2} - 5y \cdot \frac{x^3}{3} - 3\ln(z)\cdot x + C = \frac{2x^2 + 6z^2x^2}{2} - \frac{5yx^3}{3} - 3\ln(z)\cdot x + C$$

3. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^\pi 3x^2 \sin(2x)\, dx$$
$$\int 3x^2 \sin(2x)\, dx$$
$$\int u dv = uv - \int v du$$
$$u = x^2$$
$$dv = 3\sin(2x)\, dx$$
$$du = 2x\, dx$$
$$v = -3\frac{\cos(2x)}{2}$$
$$\int 3x^2 \sin(2x)\, dx = -3x^2\frac{\cos(2x)}{2} - \int -3x\cos(2x)\, dx = -3x^2\frac{\cos(2x)}{2} + \int 3x\cos(2x)\, dx$$
$$\int 3x\cos(2x)\, dx$$
$$u = x$$
$$dv = \cos(2x)\, dx$$
$$du = x\, dx$$
$$v = 3\frac{\sin(2x)}{2}$$
$$\int 3x\cos(2x)\, dx = 3x\frac{\sin(2x)}{2} - \left(-\frac{3}{4}\cos(2x)\right) + C = 3x\frac{\sin(2x)}{2} + \frac{3}{4}\cos(2x) + C$$
$$\int 3x^2\sin(2x)\, dx = -3x^2\frac{\cos(2x)}{2} + 3x\frac{\sin(2x)}{2} + \frac{3}{4}\cos(2x) + C$$

$$\int_0^{\pi} 3x^2 \sin(2x)\, dx$$

$$F(\pi) = -3\pi^2 \frac{\cos(2\pi)}{2} + 3\pi \frac{\sin(2\pi)}{2} + \frac{3}{4}\cos(2\pi) = -3\pi^2 \cdot \frac{1}{2} + 3\pi \cdot \frac{0}{2} + \frac{3}{4} \cdot 1 = -3\frac{\pi^2}{2} + \frac{3}{4}$$

$$F(0) = -3 \cdot 0^2 \frac{\cos(2 \cdot 0)}{2} + 3 \cdot 0 \frac{\sin(2 \cdot 0)}{2} + \frac{3}{4}\cos(0) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{0}{2} + \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$$

$$\int_0^{\pi} 3x^2 \sin(2x)\, dx = F(\pi) - F(0) = -3\frac{\pi^2}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = -3\frac{\pi^2}{2}$$

4. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{(x+1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x+1} + C$$