GeekBrains

Курс “Введение в математический анализ”

Практическое задание к уроку 4

Инструкции к сдаче:

Присылайте фото листочков с вашими решениями в текстовом файле .doc или .txt или в формате .pdf

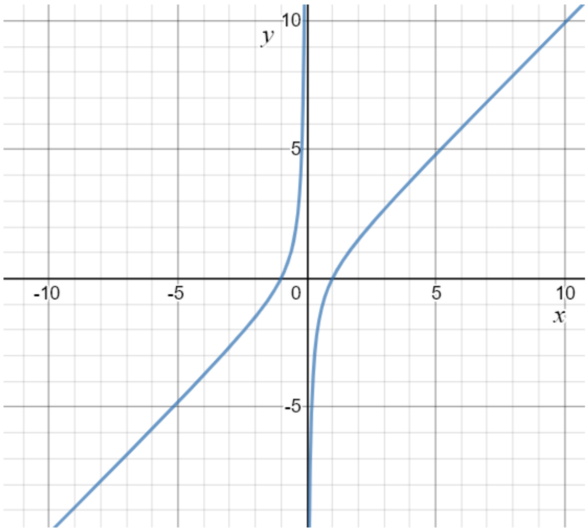
Прикладывайте ссылку на ваш репозиторий с кодом. Для написания кода используйте привычную среду программирования, желательно, Jupiter Notebook

Тема 4 “Предел функции”

1. Предложить пример функции, не имеющей предела в нуле и в бесконечностях.

Решение

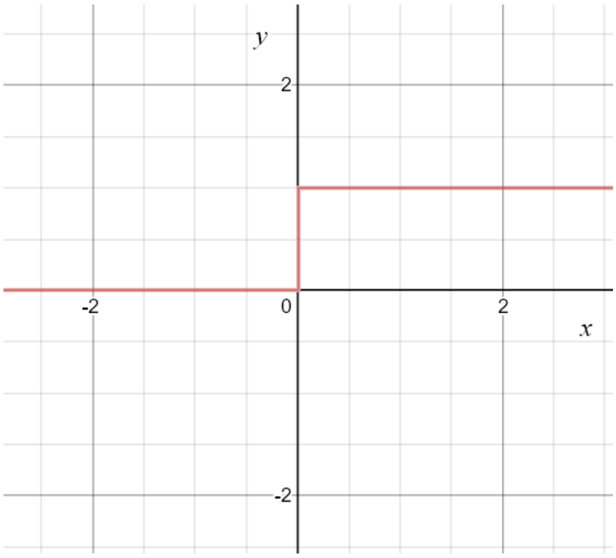
Ответ: $\frac{1}{x} \cdot (x^2 - 1)$



2. Привести пример функции, не имеющей предела в точке, но определенной в ней.

Решение

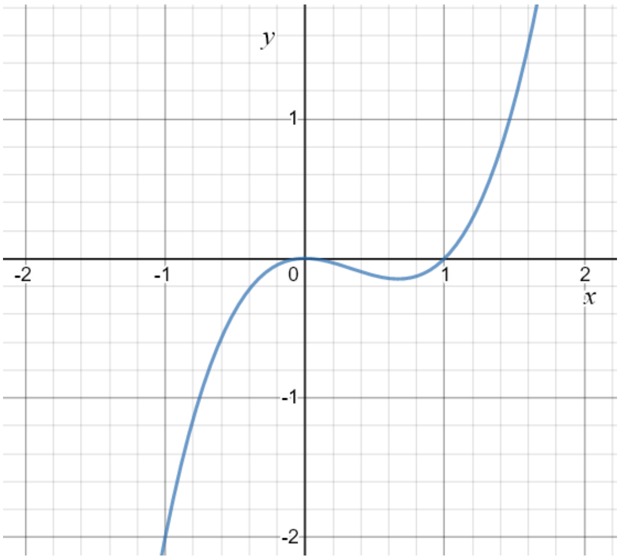
Ответ: $\begin{cases} y = 0 \text{ при } x \le 0 \\ y = 1 \text{ при } x \ge 0 \end{cases}$



3. Исследовать функцию $f(x) = x^3 - x^2$ по плану:

a. Область задания и область значений.

Построим график функции:



ОО: $f(x) \in \mathbb{R}$

ОЗ: $f(x) = x^3 - x^2 \in \mathbb{R}$

b. Нули функции и их кратность.

$$f(x) = x^3 - x^2$$
$$x^3 - x^2 = 0$$
$$x(x^2 - x) = 0$$
$$x_1 = 0, \qquad x^2 - x = 0$$
$$x_1 = 0, \qquad x(x-1) = 0$$
$$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 1$$
$$x_3 = 1 - \text{корень кратен } 2$$

c. Отрезки знакопостоянства.

$f(x) \le 0, x \le 1$

$f(x) > 0, x > 1$

d. Интервалы монотонности.

$f'(x) = 3x^2 - 2x$

$3x^2 - 2x = 0$

$x(3x - 2) = 0$

$x_1 = 0, \qquad x_2 = \frac{2}{3}$

$f(x)$ возрастает при $x \in (-\infty, 0)$

$f(x)$ убывает при $x \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$

$f(x)$ возрастает при $x \in \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$

e. Четность функции.

$f(x) \ne f(-x)$

$f(-x) \ne -f(x)$

$f(x) = x^3 - x^2 \quad$ – функция общего вида

f. Ограниченность.

$f(x) = x^3 - x^2 \;\; f(x) \in \mathbb{R}$ – функция не ограничена

g. Периодичность.

$f(x + T) \ne f(x)$

$f(x) = x^3 - x^2 \quad$ – функция не периодична

4. Найти предел:

a. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^3 - 2x^2}{4x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{x^2(3x-2)}{4x^2} = \frac{(3x-2)}{4} = -\frac{1}{2}$

b.* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{x\left(\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{x} - \frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{(x+1)^{\frac{1}{3}}}{x} - \frac{1}{x}\right)} = \frac{\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{(x+1)^{\frac{1}{3}}}{x} - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

c.* $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{4x+1} = (1^{\infty}) = \left(\frac{x}{x} + \frac{3}{x}\right)^{4 \cdot x + 1} = \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{4 \cdot x + 1} = e^{3 \cdot 4} = e^{12}$

$\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$ – свойство второго замечательного предела

Тема 5 “Теоремы о пределах”

1. Найти предел:

a. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(2x)}{4x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{\sin x \cdot 2}{x \cdot 4} = \frac{x}{x} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ – первый замечательный предел

b. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\sin(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{x}{x} = 1$ – первый замечательный предел

c. $\lim_{x \to 0} \frac{x}{\arcsin(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{x}{x} = 1$ – следствие первого замечательного предела

d. $\lim_{x \to \infty} \left(\frac{4x+3}{4x-3}\right)^{6x} = (1^{\infty}) = \left(\frac{4 \cdot x+3}{4 \cdot x-3}\right)^{6 \cdot x} = \left(1 + \frac{6}{4 \cdot x-3}\right)^{\frac{4 \cdot (6 \cdot x)}{4}} = \left(1 + \frac{6}{4 \cdot x-3}\right)^{\frac{6}{4} \cdot (4 \cdot x-3)} = e^{6 \cdot \frac{6}{4}} = e^{9}$

$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^{bx} = e^{ab}$ – свойство второго замечательного предела

e.* $\lim_{x \to \infty} \frac{\sin x + \ln x}{x} = \frac{\sin(x)}{x} + \frac{\ln(x)}{x} = 0 + 0 = 0$

f.* $\lim_{x \to 0} \frac{\sin(x) + \ln(x)}{x} = 1 + \ln x = -\infty$

Курс “Введение в математический анализ”

Тема 6 “Понятие о производной”

1. Найти производную выражения:

a. $\sin x \cdot \cos x = (\sin x \cdot \cos x)' = (\sin x)' \cdot \cos x + \sin x \cdot (\cos x)' =$

$= \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x) = \cos x^2 - \sin x^2$

b. $\ln(2x+1)^3 = (\ln((2x+1)^3))' = (\ln((2x+1)^3))' \cdot ((2x+1)^3)' =$

$$= \frac{1}{(2x+1)^{\cancel{3}}} \cdot 6 \cdot \cancel{(2x+1)^2} = \frac{6}{2x+1}$$

c. $\sqrt{\sin^2(\ln(x^3))}$

d. $\frac{x^4}{\ln(x)} = \left(\frac{x^4}{\ln(x)}\right)' = \frac{(x^4)' \cdot \ln(x) - x^4 \cdot (\ln(x))'}{(\ln(x))^2} = \frac{4x^3 \cdot \ln(x) - x^4 \cdot \frac{1}{x}}{(\ln(x))^2} = \frac{4x^3 \cdot \ln(x) - \frac{x^4}{x}}{(\ln(x))^2} =$

$$= \frac{4x^3 \cdot \ln(x) - x^3}{(\ln(x))^2}$$

2. Найти выражение производной функции и ее значение в точке:

$f(x) = \cos(x^2 + 3x), \quad x_0 = \sqrt{\pi}$

3.* Найти значение производной функции в точке:

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 - x - 1}{1 + 2x + 3x^2 + 4x^3}, \quad x_0 = 0$$

4. Найти угол наклона касательной к графику функции в точке:

$f(x) = \sqrt{3x} \cdot \ln x, \quad x_0 = 1$