Курс “Введение в математический анализ”

Практическое задание к уроку 4

Инструкции к сдаче:

Присылайте фото листочков с вашими решениями в текстовом файле .doc или .txt или в формате .pdf

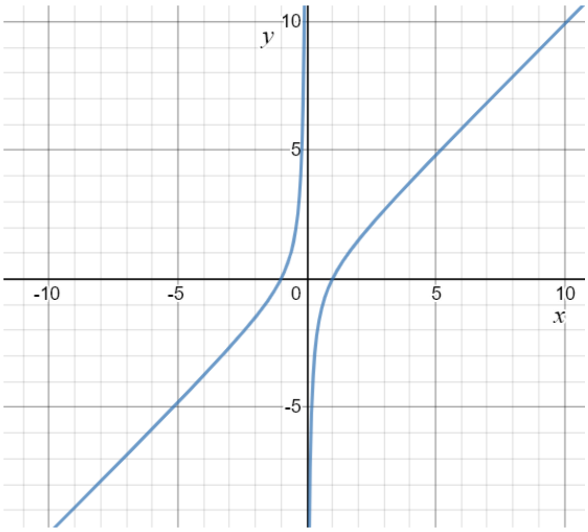
Прикладывайте ссылку на ваш репозиторий с кодом. Для написания кода используйте привычную среду программирования, желательно, Jupiter Notebook

Тема 4 “Предел функции”

1. Предложить пример функции, не имеющей предела в нуле и в бесконечностях.

Решение

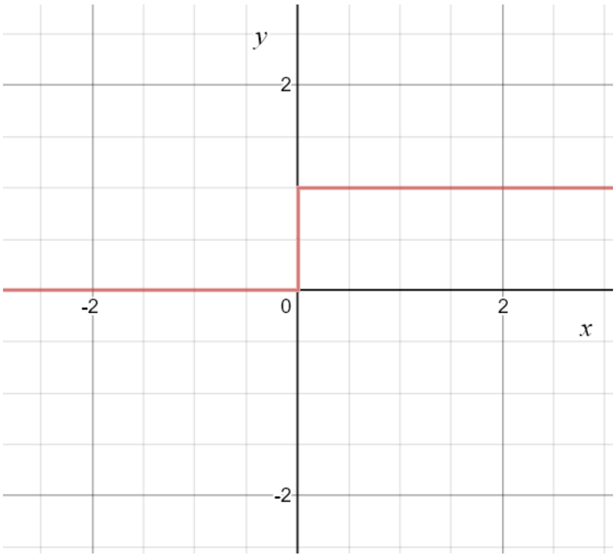
Ответ: $\frac{1}{x} \cdot (x^2 - 1)$



2. Привести пример функции, не имеющей предела в точке, но определенной в ней.

Решение

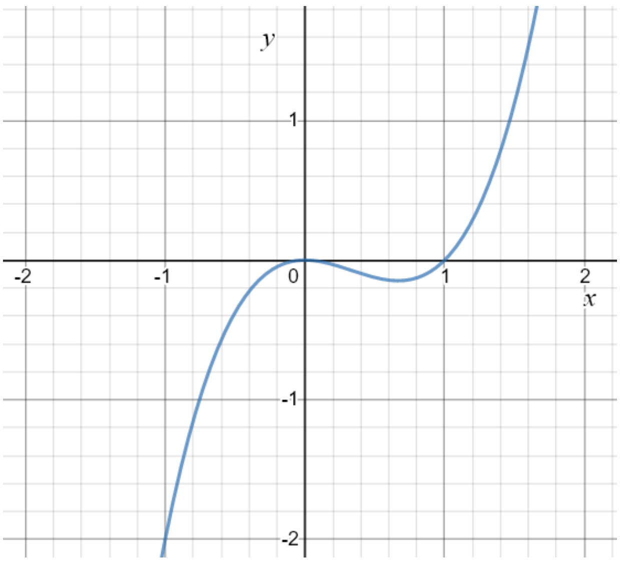
Ответ: $\begin{cases} y = 0 \text{ при } x \leq 0 \\ y = 1 \text{ при } x \geq 0 \end{cases}$



3. Исследовать функцию $f(x) = x^3 - x^2$ по плану:

a. Область задания и область значений.

Построим график функции:



ОО: $f(x) \in \mathbb{R}$

ОЗ: $f(x) = x^3 - x^2 \in \mathbb{R}$

b. Нули функции и их кратность.

$f(x) = x^3 - x^2$

$x^3 - x^2 = 0$

$x(x^2 - x) = 0$

$x_1 = 0, \qquad x^2 - x = 0$

$x_1 = 0, \qquad x(x-1) = 0$

$x_1 = 0, \qquad x_2 = 0, \qquad x_3 = 1$

$x_3 = 1 - \text{корень кратен } 2$

c. Отрезки знакопостоянства.

$f(x) \leq 0, x \leq 1$

$f(x) > 0, x > 1$

d. Интервалы монотонности.

$f'(x) = 3x^2 - 2x$

$3x^2 - 2x = 0$

$x(3x - 2) = 0$

$x_1 = 0, \qquad x_2 = \frac{2}{3}$

$f(x)$ возрастает при $x \in (-\infty, 0)$

$f(x)$ убывает при $x \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$

$f(x)$ возрастает при $x \in \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$

e. Четность функции.

$f(x) \neq f(-x)$

$f(-x) \neq -f(x)$

$f(x) = x^3 - x^2 \quad -$ функция общего вида

f. Ограниченность.

$f(x) = x^3 - x^2 \;\; f(x) \in \mathbb{R} -$ функция не ограничена

g. Периодичность.

$f(x + T) \neq f(x)$

$f(x) = x^3 - x^2 \quad -$ функция не периодична

4. Найти предел:

a. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{3x^3 - 2x^2}{4x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{x^2(3x-2)}{4x^2} = \frac{(3x-2)}{4} = -\frac{1}{2}$

b.* $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{x\left(\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{x} - \frac{1}{x}\right)}{x\left(\frac{(x+1)^{\frac{1}{3}}}{x} - \frac{1}{x}\right)} = \frac{\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{(x+1)^{\frac{1}{3}}}{x} - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

c.* $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x+3}{x}\right)^{4x+1}$

Тема 5 “Теоремы о пределах”

1. Найти предел:

a. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin(2x)}{4x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{\sin x\cdot 2}{x\cdot 4} = \frac{x}{x}\cdot\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ – первый замечательный предел

b. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{x}{\sin(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{x}{x} = 1$ – первый замечательный предел

c. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{x}{\arcsin(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{x}{x} = 1$ – следствие первого замечательного предела

d. $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\left(\frac{4x+3}{4x-3}\right)^{6x}$

e.* $\lim\limits_{x\longrightarrow\infty}\frac{\sin x+\ln x}{x}$

f.* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin(x)+\ln(x)}{x}$