

Курс “Введение в математический анализ”

Практическое задание к уроку 4

Инструкции к сдаче:

Присылайте фото листочков с вашими решениями в текстовом файле .doc или .txt или в формате .pdf

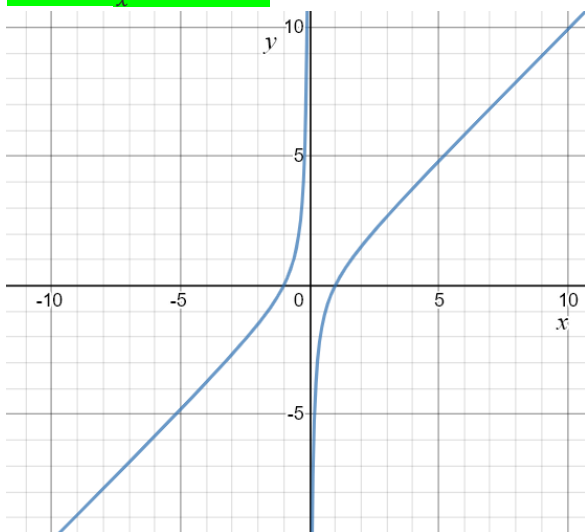
Прикладывайте ссылку на ваш репозиторий с кодом. Для написания кода используйте привычную среду программирования, желательно, Jupiter Notebook

Тема 4 “Предел функции”

1. Предложить пример функции, не имеющей предела в нуле и в бесконечностях.

Решение

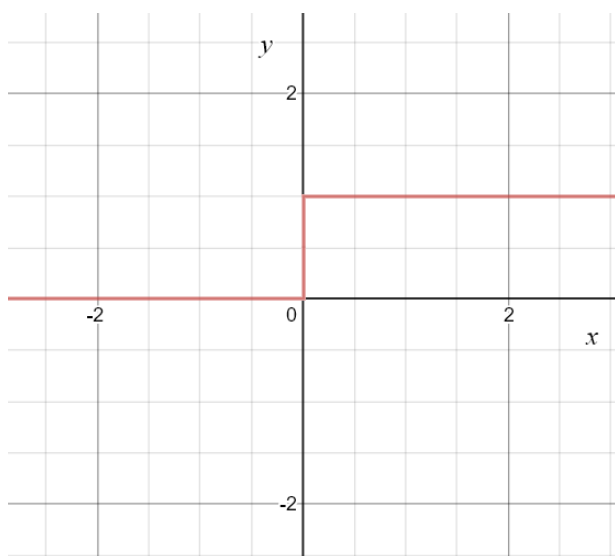
Ответ: $\frac{1}{x} \cdot (x^2 - 1)$



2. Привести пример функции, не имеющей предела в точке, но определенной в ней.

Решение

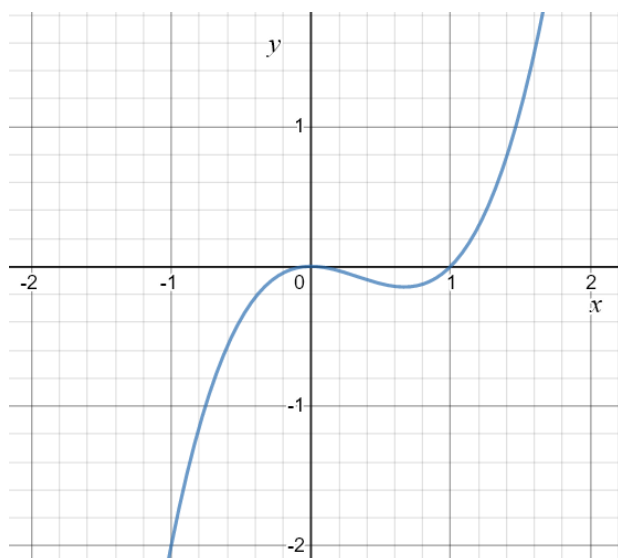
Ответ: $\begin{cases} y = 0 & \text{при } x \leq 0 \\ y = 1 & \text{при } x \geq 0 \end{cases}$



3. Исследовать функцию $f(x) = x^3 - x^2$ по плану:

а. Область задания и область значений.

Построим график функции:



$$O_0: f(x) \in \mathbb{R}$$

$$O_3: f(x) = x^3 - x^2 \in \mathbb{R}$$

б. Нули функции и их кратность.

$$f(x) = x^3 - x^2$$

$$x^3 - x^2 = 0$$

$$x(x^2 - x) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x^2 - x = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x(x - 1) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 1$$

$$x_3 = 1 - \text{корень кратен } 2$$

с. Отрезки знакопостоянства.

$$f(x) \leq 0, x \leq 1$$

$$f(x) > 0, x > 1$$

d. Интервалы монотонности.

$$f'(x) = 3x^2 - 2x$$

$$3x^2 - 2x = 0$$

$$x(3x - 2) = 0$$

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{2}{3}$$

$$f(x) \text{ возрастает при } x \in (-\infty, 0)$$

$$f(x) \text{ убывает при } x \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$$

$$f(x) \text{ возрастает при } x \in \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$$

e. Четность функции.

$$f(x) \neq f(-x)$$

$$f(-x) \neq -f(x)$$

$$f(x) = x^3 - x^2 \text{ — функция общего вида}$$

f. Ограниченность.

$$f(x) = x^3 - x^2 \quad f(x) \in \mathbb{R} \text{ — функция не ограничена}$$

g. Периодичность.

$$f(x + T) \neq f(x)$$

$$f(x) = x^3 - x^2 \text{ — функция не периодична}$$

4. Найти предел:

$$a. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 - 2x^2}{4x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{x^2(3x-2)}{4x^2} = \frac{(3x-2)}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$b. \quad * \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{x \left(\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{x} - \frac{1}{x} \right)}{x \left(\frac{(x+1)^{\frac{1}{3}}}{x} - \frac{1}{x} \right)} = \frac{\frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{x} - \frac{1}{x}}{\frac{(x+1)^{\frac{1}{3}}}{x} - \frac{1}{x}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

$$c. \quad * \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x} \right)^{4x+10}$$

Тема 5 “Теоремы о пределах”

1. Найти предел:

a. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{4x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{\sin x \cdot 2}{x \cdot 4} = \frac{x}{x} \cdot \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ – первый замечательный предел

b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{x}{x} = 1$ – первый замечательный предел

c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\arcsin(x)} = \left(\frac{0}{0}\right) = \frac{x}{x} = 1$ – следствие первого замечательного предела

d. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+3}{4x-3}\right)^{6x}$

e. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x + \ln x}{x}$

f. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) + \ln(x)}{x}$