Курс “Введение в математический анализ”

Тема 7 “Ряды”

1. Исследовать ряд на сходимость, используя признак д’Аламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$$

2. Исследовать ряд на сходимость, используя радикальный признак Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

3. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Лейбница:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+\ln n}$$

4. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Раабе:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$$

5. Разложить функцию по Тейлору в единице:

$$f(x) = \ln(16x^2)$$

6.* Дана функция $f(x) = x^2$:

   a. Разложить функцию в ряд Фурье по косинусам на отрезке $x \in [-2; 0]$.

   b. Построить график функции и ее разложения.

Тема 8 “Понятие об интеграле”

1. Найти неопределенный интеграл:

$$\int (2x^2 - 2x - 1 + \sin x - \cos x + \ln x + e^x)\,dx = 2\int x^2\,dx - 2\int x\,dx - \int 1\,dx + \int \sin(x)\,dx -$$

$$-\int \cos(x)\,dx + \int \ln(x)\,dx + \int e^x\,dx = 2\cdot\frac{x^3}{3} - \cancel{2}\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}} - x + (-\cos(x)) - \sin(x) + x\ln(x) - x +$$

$$+e^x + C = \frac{2x^3}{3} - x^2 - 2x - \cos(x) - \sin(x) + x\ln(x) + e^x + C$$

2. Найти неопределенный интеграл:

$$\int (2x + 6xz^2 - 5x^2y - 3\ln z)\,dx = (2 + 6z^2)\int x\,dx - 5y\int x^2\,dx - 3\ln(z)\int 1\,dx =$$

$$= \frac{(2+6z^2)\cdot x^2}{2} - 5y\cdot\frac{x^3}{3} - 3\ln(z)\cdot x + C = \frac{2x^2 + 6z^2x^2}{2} - \frac{5yx^3}{3} - 3\ln(z)\cdot x + C$$

3. Вычислить определенный интеграл:

$$\int_0^{\pi} 3x^2\sin(2x)\,dx$$

$$\int 3x^2\sin(2x)\,dx$$

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$u = x^2$$

$$dv = 3\sin(2x)\,dx$$

$$du = 2x\,dx$$

$$v = -3\frac{\cos(2x)}{2}$$

$$\int 3x^2\sin(2x)\,dx = -3x^2\frac{\cos(2x)}{2} - \int -3x\cos(2x)\,dx = -3x^2\frac{\cos(2x)}{2} + \int 3x\cos(2x)\,dx$$

$$\int 3x\cos(2x)\,dx$$

$$u = x$$

$$dv = \cos(2x)\,dx$$

$$du = x\,dx$$

$$v = 3\frac{\sin(2x)}{2}$$

$$\int 3x\cos(2x)\,dx = 3x\frac{\sin(2x)}{2} - \left(-\frac{3}{4}\cos(2x)\right) + C = 3x\frac{\sin(2x)}{2} + \frac{3}{4}\cos(2x) + C$$

$$\int 3x^2\sin(2x)\,dx = -3x^2\frac{\cos(2x)}{2} + 3x\frac{\sin(2x)}{2} + \frac{3}{4}\cos(2x) + C$$

$$\int_0^{\pi} 3x^2\sin(2x)\,dx$$

$$F(\pi) = -3\pi^2\frac{\cos(2\pi)}{2} + 3\pi\frac{\sin(2\pi)}{2} + \frac{3}{4}\cos(2\pi) = -3\pi^2\cdot\frac{1}{2} + 3\pi\cdot\frac{0}{2} + \frac{3}{4}\cdot 1 = -3\frac{\pi^2}{2} + \frac{3}{4}$$

$$F(0) = -3 \cdot 0^2 \frac{\cos(2 \cdot 0)}{2} + 3 \cdot 0 \frac{\sin(2 \cdot 0)}{2} + \frac{3}{4}\cos(0) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{0}{2} + \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$$

$$\int_0^\pi 3x^2 \sin(2x)\, dx = F(\pi) - F(0) = -3\frac{\pi^2}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = -3\frac{\pi^2}{2}$$

4. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{(x+1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x+1} + C$$