GeekBrains

Курс “Введение в математический анализ”

Практическое задание к уроку 3

Инструкции к сдаче:
Присылайте фото листочков с вашими решениями в текстовом файле .doc или .txt или в формате .pdf

Прикладывайте ссылку на ваш репозиторий с кодом. Для написания кода используйте привычную среду программирования, желательно, Jupyter Notebook

Тема 3 “Последовательность”

1. Даны 4 последовательности. Необходимо:
   a. исследовать их на монотонность;
   b. исследовать на ограниченность;
   c. найти пятый по счету член.

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 2^n - n$$

$$\{b_n\}_{n=2}^{\infty} = \frac{1}{1-n}$$

$$\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = -1^n + \sqrt{2n}$$

$$\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^{2n} + \frac{1}{n^2}$$

Решение

1) a. $\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_3}{x_4} = \frac{2^3-3}{2^4-4} = \frac{8-3}{16-4} = \frac{5}{12} < 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ послед − ть монотонно возрастает

b. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = 2^1 - 1 = 1$ т.к. $a_n \geq 1 \Rightarrow$ послед − ть ограничена снизу

c. $\{a_5\}_{n=1}^{\infty} = 2^5 - 5 = 27$

2) a. $\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_3}{x_4} = \left(\frac{1}{1-3}\right) \div \left(\frac{1}{1-4}\right) = \frac{1}{-2} \div \frac{1}{-3} = \frac{1\cdot(-3)}{(-2)\cdot 1} = \frac{-3}{-2} = 1\frac{1}{2} > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ послед − ть монотонно убывает

b. $\{b_n\}_{n=2}^{\infty} = \frac{1}{1-2} = -1$ т.к. $-1 \leq b_n < 0 \Rightarrow$ послед − ть ограничена

снизу и сверху

c. $\{b_5\}_{n=2}^{\infty} = \frac{1}{1-5} = -\frac{1}{4}$

3) a. $\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_3}{x_4} = \frac{-1^2+\sqrt{2\cdot 2}}{-1^3+\sqrt{2\cdot 3}} = \frac{1+\sqrt{4}}{-1+\sqrt{6}} = -\frac{3}{1{,}4494897\ldots} = 2{,}06969\ldots > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ послед − ть монотонно убывает

b. $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} = -1^1 + \sqrt{2} = 0{,}4142$

т.к. $c_n > 0 \Rightarrow$ послед − ть ограничена снизу

c. $\{c_5\}_{n=1}^{\infty} = -1^5 + \sqrt{2\cdot 5} = -1 + \sqrt{10} = 2{,}1623$

4) a. $\frac{x_n}{x_{n+1}} = \frac{x_3}{x_4} = \frac{(-1)^{2\cdot 3}+\frac{1}{3^2}}{(-1)^{2\cdot 4}+\frac{1}{4^2}} = \frac{1\frac{1}{9}}{1\frac{1}{16}} = \frac{\frac{10}{9}}{\frac{17}{16}} = \frac{10\cdot 16}{9\cdot 17} = \frac{1600}{153} = 10{,}4575\ldots > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ послед − ть монотонно убывает

b. $\{d_n\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^{2\cdot 1} + \frac{1}{1^2} = 1 + 1 = 2$

т.к. $c_n > 1 \Rightarrow$ послед − ть ограничена снизу

c. $\{d_5\}_{n=1}^{\infty} = (-1)^{2\cdot 5} + \frac{1}{5^2} = (-1)^{10} + \frac{1}{25} = 1\frac{1}{25}$

2. Найти 12-й член заданной неявно последовательности

$$a_1 = 128, a_{n+1} - a_n = 6$$

Решение

$a_{n+1} - a_n = 6 \Rightarrow a_{n+1} = a_n + 6 \Rightarrow \{a_n\}_{n=128}^{\infty} = 128 + 6(n-1)$

$a_2 = a_1 + 6 = 128 + 6 = 134$

$\{a_{12}\}_{n=128}^{\infty} = 128 + 6\cdot 11 = 128 + 66 = 194$

2. *На языке Python предложить алгоритм вычисляющий численно предел с точностью $\varepsilon = 10^{-7}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

Решение

```
# n / (n! ** (1 / n))
# n = 1, +oo

def f(n):
    return n / pow(fact(n), 1 / n)
#%%time
eps = 10 ** -7
i = 1
n = 1
```

```
x0 = f(n)
while True:
    i += 1
    n += 1
    x1 = f(n)
    if abs(x0 - x1) <= eps:
        break
    x0 = x1
print(f'n_iter: {i}')
print(f'f(n) = {x0}')
```

3. *Предложить оптимизацию алгоритма, полученного в задании 3, ускоряющую его сходимость.