Курс “Введение в математический анализ”

Тема 7 “Производная функции одной переменной”

1. Найти длину x и ширину y прямоугольника при заданном периметре P=144 см, при которых данный прямоугольник имеет наибольшую площадь S.

Решение:

Периметр прямоугольника задан выражением $2(x+y)=144 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x+y=\frac{144}{2}=72.$ Площадь прямоугольника задается функцией

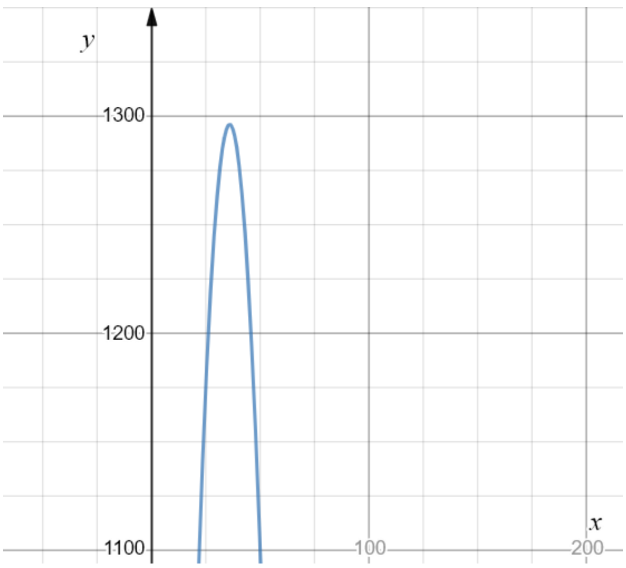
$f(x)=x\cdot y.$ Составим ситему, выразим y и подставим в уравнение $f(x)$:

$$\begin{cases} x+y=72 \\ f(x)=x\cdot y \end{cases} = \begin{cases} y=72-x \\ f(x)=x\cdot y \end{cases} = \begin{cases} y=72-x \\ f(x)=x\cdot(72-x) \end{cases} = \begin{cases} y=72-x \\ f(x)=72x-x^2 \end{cases}$$

Максимальная площадь прямоугольника будет при x равном значению в точке экстремума $f(x)=x\cdot(72-x).$ Найдем экстремум взяв производ – ную $f'(x)$ и приравняем к 0:

$$f'(x)=(72x-x^2)'=(72x)'-(x^2)'=72\cdot 1-2x=72-2x$$

$72-2x=0 \Longrightarrow 2x=72,$ откуда $x=\frac{72}{2}=36.$ Тогда:



© geekbrains.ru

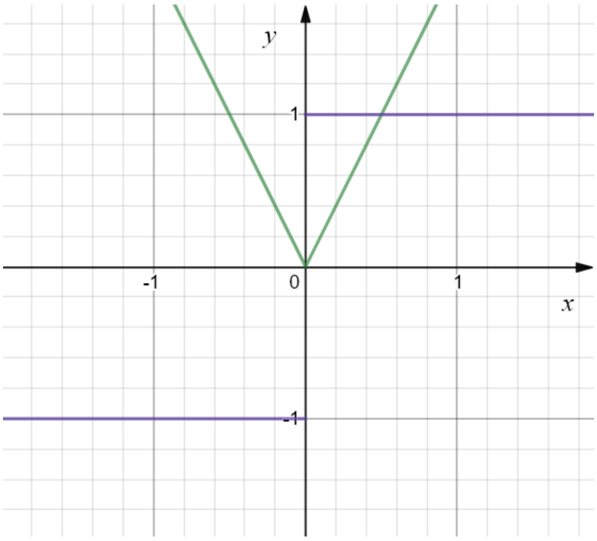
$$\begin{cases} y = 72 - x \\ f(x) = x \cdot y \end{cases} = \begin{cases} y = 72 - 36 \\ f(x) = x \cdot y \end{cases} = \begin{cases} y = 36 \\ f(x) = 36 \cdot 36 = 1296 \end{cases}$$

Ответ: при $x = 36$ и $y = 36$ площадь прямоугольника будет максимальной и составит 1296 см^2.

2. Найти экстремумы функций (если они есть):

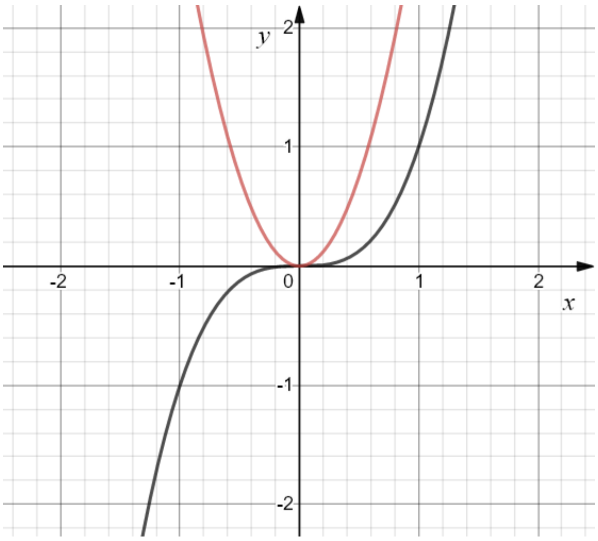
a. $y = |2x| \Longrightarrow y' = 2 \cdot |x|' = 2\frac{x}{|x|}$ – при $x = 0$ y' не существует

$$\left.\begin{array}{r} y'(-1) = 2 \cdot \dfrac{-1}{|-1|} = -2 < 0 \\ y'(1) = 2 \cdot \dfrac{1}{|1|} = 2 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x = 0 - \text{экстремум функции } y = |2x|??$$



b. $y = x^3 \Longrightarrow y' = (x^3)' = 3x^2$

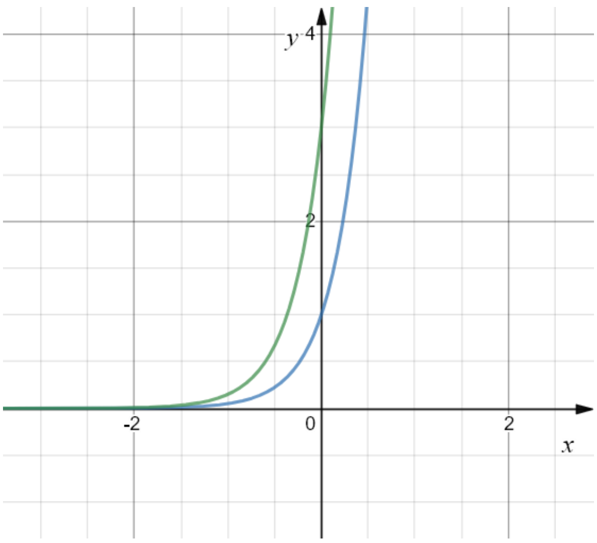
$$\left.\begin{array}{r} y'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3 > 0 \\ y'(1) = 3 \cdot (1)^2 = 3 > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x = 0 - \text{является точкой перегиба}$$
функции $y = x^3$



c. $y = e^{3x} \Longrightarrow y' = (e^{3x})' \cdot (3x)' = 3e^{3x}$

$$\left.\begin{aligned} y'(-1) = 3 \cdot e^{3\cdot(-1)} = 3 \cdot e^{-3} = \frac{3}{e^3} \approx 0{,}149 \ldots > 0 \\ y'(1) = 3 \cdot e^{3\cdot 1} = 3e^3 \approx 60{,}2566 \ldots > 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = 0 - \text{является}$$

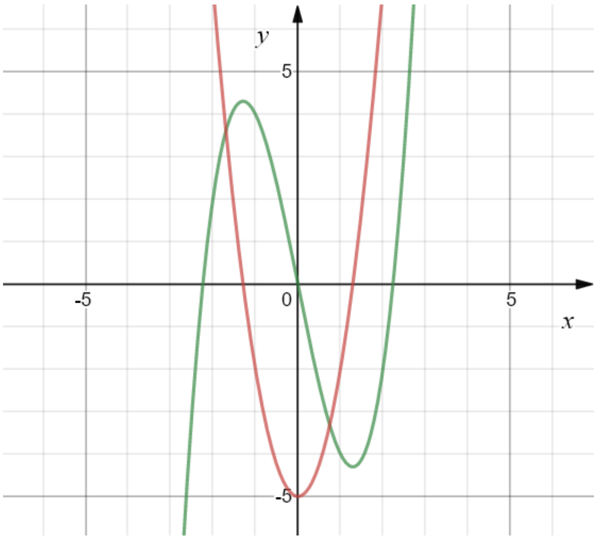
$\text{точкой перегиба функции } y = e^{3x}$



d. $y = x^3 - 5x \Longrightarrow y' = (x^3 - 5x)' = (x^3)' - (5x)' = 3x^2 - 5$

$$\left.\begin{aligned} y'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 5 = -2 < 0 \\ y'(1) = 3 \cdot (1)^2 - 5 = -2 < 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = 0 - \text{является точкой перегиба}$$

$\text{функции } y = x^3 - 5x$



y
5
-5
0
5
x
-5