Курс “Введение в математический анализ”

Тема 6 “Производная функции одной переменной”

1. Найти длину x и ширину y прямоугольника при заданном периметре P=144 см, при которых данный прямоугольник имеет наибольшую площадь S.

Решение:

Периметр прямоугольника задан выражением $2(x+y)=144 \Longrightarrow$

$\Longrightarrow x+y=\dfrac{144}{2}=72.$ Площадь прямоугольника задается функцией

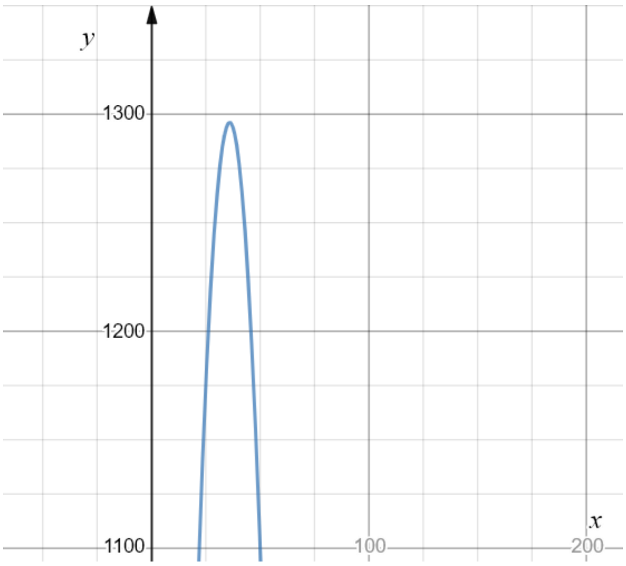
$f(x)=x\cdot y.$ Составим ситему, выразим y и подставим в уравнение $f(x)$:

$$\begin{cases} x+y=72 \\ f(x)=x\cdot y \end{cases} = \begin{cases} y=72-x \\ f(x)=x\cdot y \end{cases} = \begin{cases} y=72-x \\ f(x)=x\cdot(72-x) \end{cases} = \begin{cases} y=72-x \\ f(x)=72x-x^2 \end{cases}$$

Максимальная площадь прямоугольника будет при x равном значению в точке экстремума $f(x)=x\cdot(72-x).$ Найдем экстремум взяв производ – ную $f'(x)$ и приравняем к 0:

$$f'(x)=(72x-x^2)'=(72x)'-(x^2)'=72\cdot 1-2x=72-2x$$

$72-2x=0 \Longrightarrow 2x=72,$ откуда $x=\dfrac{72}{2}=36.$ Тогда:



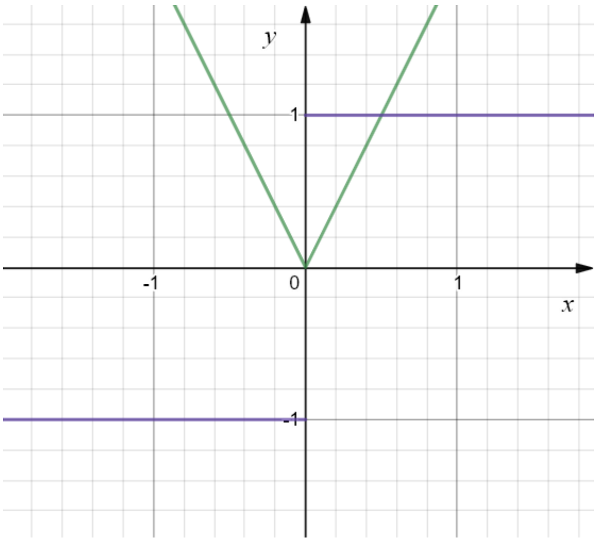
$$\begin{cases} y = 72 - x \\ f(x) = x \cdot y \end{cases} = \begin{cases} y = 72 - 36 \\ f(x) = x \cdot y \end{cases} = \begin{cases} y = 36 \\ f(x) = 36 \cdot 36 = 1296 \end{cases}$$

Ответ: при $x = 36$ и $y = 36$ площадь прямоугольника будет максимальной и составит 1296 см^2.

2. Найти экстремумы функций (если они есть):

a. $y = |2x| \Longrightarrow y' = 2 \cdot |x|' = 2\frac{x}{|x|}$ – при $x = 0$ y' не существует

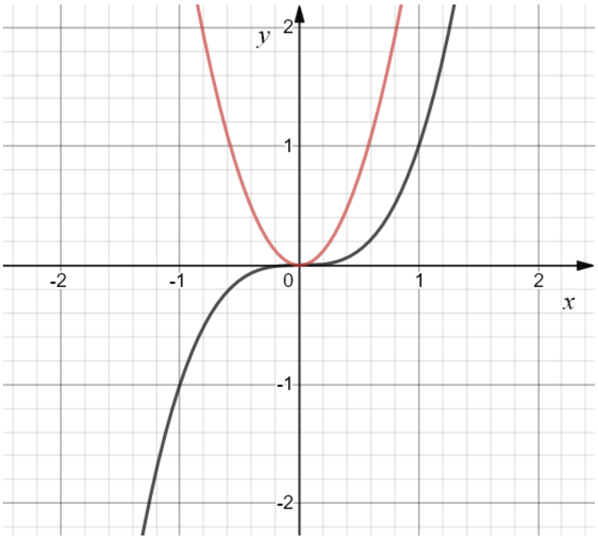
$$\left.\begin{aligned} y'(-1) = 2 \cdot \frac{-1}{|-1|} = -2 < 0 \\ y'(1) = 2 \cdot \frac{1}{|1|} = 2 > 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = 0 - \text{минимум функции } y = |2x|$$



b. $y = x^3 \Longrightarrow y' = (x^3)' = 3x^2$

$$\left.\begin{aligned} y'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 = 3 > 0 \\ y'(1) = 3 \cdot (1)^2 = 3 > 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = 0 - \text{является точкой перегиба}$$

функции $y = x^3$

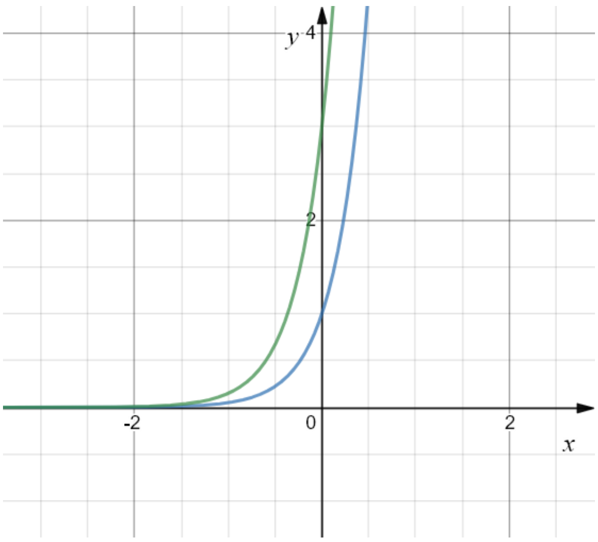


c. $y = e^{3x} \Longrightarrow y' = (e^{3x})' \cdot (3x)' = 3e^{3x}$

~~$\left.\begin{aligned} y'(-1) = 3 \cdot e^{3\cdot(-1)} = 3 \cdot e^{-3} = \frac{3}{e^3} \approx 0{,}149\ldots > 0 \\ y'(1) = 3 \cdot e^{3\cdot 1} = 3e^3 \approx 60{,}2566\ldots > 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = 0$ — является~~

~~точкой перегиба функции $y = e^{3x}$~~

Приравняем y' к 0: $3e^{3x} \neq 0$ ни при каком $x \Longrightarrow$ у функции $y = e^{3x}$ нет экстремумов



d. $y = x^3 - 5x \Longrightarrow y' = (x^3 - 5x)' = (x^3)' - (5x)' = 3x^2 - 5$

~~$\left.\begin{aligned} y'(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 5 = -2 < 0 \\ y'(1) = 3 \cdot (1)^2 - 5 = -2 < 0 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow x = 0$ — является точкой перегиба~~

~~функции $y = x^3 - 5x$~~

$$(x^3 - 5x)' = 3x^2 - 5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{5}{3}} = \pm 1{,}291\ldots$$

Найдем значение $y = x^3 - 5x$ в точках $x_1 = -1{,}291$ и $x_2 = 1{,}291$:

$y(x_1) = (-1{,}291)^3 - 5 \cdot (-1{,}291) = -2{,}152 - (-6{,}455) = 4{,}303$

$y(x_2) = 1{,}291^3 - 5 \cdot 1{,}291 = 2{,}152 - 6{,}455 = -4{,}303$

Точки $M_1(-1{,}291; 4{,}303)$ и $M_2(1{,}291; -4{,}303)$ – критические точки

Рассмотрим поведение $y' = 3x^2 - 5$ при переходе через эти точки:

$$\left.\begin{array}{l} y'(-1{,}2) = 3 \cdot (-1{,}2)^2 - 5 = -0{,}68 < 0 \\ y'(-1{,}4) = 3 \cdot (-1{,}4)^2 - 5 = 0{,}88 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = -1{,}291 - \text{экстремум}$$

функции $y = x^3 - 5x$

$$\left.\begin{array}{l} y'(1{,}2) = 3 \cdot 1{,}2^2 - 5 = -0{,}68 < 0 \\ y'(1{,}4) = 3 \cdot 1{,}4^2 - 5 = 0{,}88 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 1{,}291 - \text{экстремум}$$

функции $y = x^3 - 5x$

Ответ: функция $y = x^3 - 5x$ имеет экстремумы в точках

$M_1(-1{,}291; 4{,}303)$ и $M_2(1{,}291; -4{,}303)$