GeekBrains

Введение в высшую математику

Практическое задание №5

5.1.

Вектор – это частный случай матрицы 1xN и Nx1. Повторите материал для векторов, уделяя особое внимание умножению A·B.

Вычислите, по возможности не используя программирование: $(5E)^{-1}$ где E – единичная матрица размера 5x5.

Решение:

$(5E)^{-1}$ можно представить как $5^{-1}\cdot E^{-1}$. Очевидно что E^{-1} таже является единичной матрицей.

Таким образом: $5^{-1}\cdot\begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{vmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{vmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}{}^1\!/_5&0&0&0&0\\0&{}^1\!/_5&0&0&0\\0&0&{}^1\!/_5&0&0\\0&0&0&{}^1\!/_5&0\\0&0&0&0&{}^1\!/_5\end{vmatrix}$

5.2.

Вычислите определитель:

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&0&6\\7&8&9\end{vmatrix}$$

Решение:

$\det A=\begin{vmatrix}1&2&3\\4&0&6\\7&8&9\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}0&6\\8&9\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}4&6\\7&9\end{vmatrix}+3\begin{vmatrix}4&0\\7&8\end{vmatrix}=$

$=1\cdot(0\cdot9-6\cdot8)-2\cdot(4\cdot9-6\cdot7)+3\cdot(4\cdot8-0\cdot7)=1\cdot(0-48)-2\cdot(36-42)+3\cdot(32-0)=$

$=-48+12+96=60$

5.3.

1. Вычислите матрицу, обратную данной:

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&0&6\\7&8&9\end{vmatrix}$$

Решение:

Главный определитель данной матрицы (вычисленный в задании 5.2)равен 60 — отличен от нуля, следовательно мы можем вычислить матрицу обратную данной: $A^{-1} = {A_*^T}/_{detA}$

Запишем транспонированную матрицу: $A^T = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix}$

Найдем алгебраические дополнения для каждого элемента матрицы A^T:

$\left[A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 8 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = (0 \cdot 9 - 6 \cdot 8) = -48\right]$ $\left[A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = -(2 \cdot 9 - 3 \cdot 8) = 6\right]$

$\left[A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = (2 \cdot 6 - 0 \cdot 3) = 12\right]$ $\left[A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 6 & 9 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 9 - 6 \cdot 7) = \right]6$

$\left[A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = (1 \cdot 9 - 3 \cdot 7) = -12\right]$ $\left[A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 6 - 3 \cdot 4) = 6\right]$

$\left[A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = (4 \cdot 8 - 0 \cdot 7) = 32\right]$ $\left[A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 8 - 2 \cdot 7) = 6\right]$

$\left[A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (1 \cdot 0 - 2 \cdot 4) = -8\right]$

Обратная матрица: $A^{-1} = \dfrac{1}{60} \cdot \begin{vmatrix} -48 & 6 & 12 \\ 6 & -12 & 6 \\ 32 & 6 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} {-48}/_{60} & {6}/_{60} & {12}/_{60} \\ {6}/_{60} & {-12}/_{60} & {6}/_{60} \\ {32}/_{60} & {6}/_{60} & {-8}/_{60} \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} {-4}/_{5} & {1}/_{10} & {1}/_{5} \\ {1}/_{10} & {-1}/_{5} & {1}/_{10} \\ {8}/_{15} & {1}/_{10} & {-2}/_{15} \end{vmatrix}$

Проверим правильность нахождения обратной матрицы путем умножения исходной матрицы на обратную.

Должны получить единичную матрицу E: $E = A \cdot A^{-1} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \cdot \dfrac{1}{60} \cdot \begin{vmatrix} -48 & 6 & 12 \\ 6 & -12 & 6 \\ 32 & 6 & -8 \end{vmatrix} =$

$= \dfrac{1}{60} \cdot \begin{vmatrix} 1 \cdot (-48) + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 32 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot (-12) + 3 \cdot 6 & 1 \cdot 12 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot (-8) \\ 4 \cdot (-48) + 0 \cdot 6 + 6 \cdot 32 & 4 \cdot 6 + 0 \cdot (-12) + 6 \cdot 6 & 4 \cdot 12 + 0 \cdot 6 + 6 \cdot (-8) \\ 7 \cdot (-48) + 8 \cdot 6 + 9 \cdot 32 & 7 \cdot 6 + 8 \cdot (-12) + 9 \cdot 6 & 7 \cdot 12 + 8 \cdot 6 + 9 \cdot (-8) \end{vmatrix} = \dfrac{1}{60} \cdot \begin{vmatrix} 60 & 0 & 0 \\ 0 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 60 \end{vmatrix} =$

$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

2. Приведите пример матрицы 4x4, ранг которой равен 1.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

5.4. Вычислите скалярное произведение двух векторов:
(1, 5) и (2, 8)

Решение:

Т. к. векторы заданы координатами, то скалярное произведение этих векторов определяется формулой:

$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 = 1 \cdot 2 + 5 \cdot 8 = 42$

5.5. Вычислите смешанное произведение трех векторов:
(1, 5, 0), (2, 8, 7) и (7, 1.5, 3)

Решение:

Чтобы вычислить смешанное произведение векторов, необходимо найти определитель системы, составленной из координат векторов.

Запишем матрицу: $\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 2 & 8 & 7 \\ 7 & 1{,}5 & 3 \end{vmatrix}$

$\det A = 1 \cdot (8 \cdot 3 - 1{,}5 \cdot 7) - 2 \cdot (5 \cdot 3 - 1{,}5 \cdot 0) + 7 \cdot (5 \cdot 7 - 8 \cdot 0) \ = \ $ 228.5