

Тема 6 “Производная функции одной переменной”

1. Найти длину x и ширину y прямоугольника при заданном периметре $P=144$ см, при которых данный прямоугольник имеет наибольшую площадь S .

Решение:

Периметр прямоугольника задан выражением $2(x + y) = 144 \Rightarrow$

$\Rightarrow x + y = \frac{144}{2} = 72$. Площадь прямоугольника задается функцией

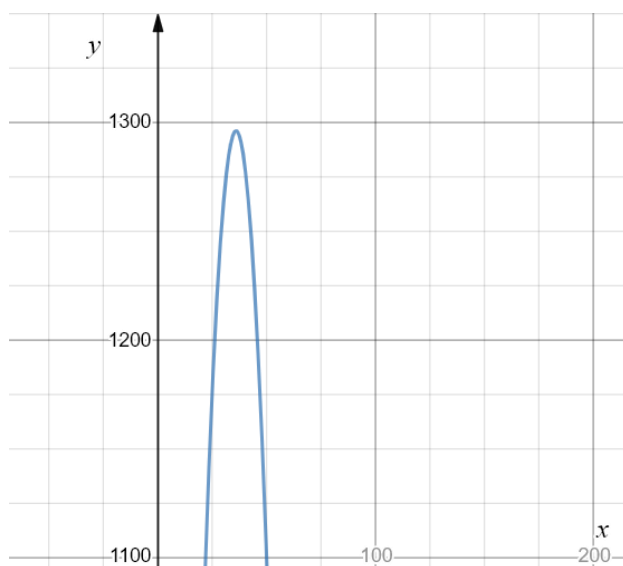
$f(x) = x \cdot y$. Составим систему, выразим y и подставим в уравнение $f(x)$:

$$\begin{cases} x + y = 72 \\ f(x) = x \cdot y \end{cases} = \begin{cases} y = 72 - x \\ f(x) = x \cdot y \end{cases} = \begin{cases} y = 72 - x \\ f(x) = x \cdot (72 - x) \end{cases} = \begin{cases} y = 72 - x \\ f(x) = 72x - x^2 \end{cases}$$

Максимальная площадь прямоугольника будет при x равном значению в точке экстремума $f(x) = x \cdot (72 - x)$. Найдем экстремум взяв производную $f'(x)$ и приравняем к 0:

$$f'(x) = (72x - x^2)' = (72x)' - (x^2)' = 72 \cdot 1 - 2x = 72 - 2x$$

$72 - 2x = 0 \Rightarrow 2x = 72$, откуда $x = \frac{72}{2} = 36$. Тогда:



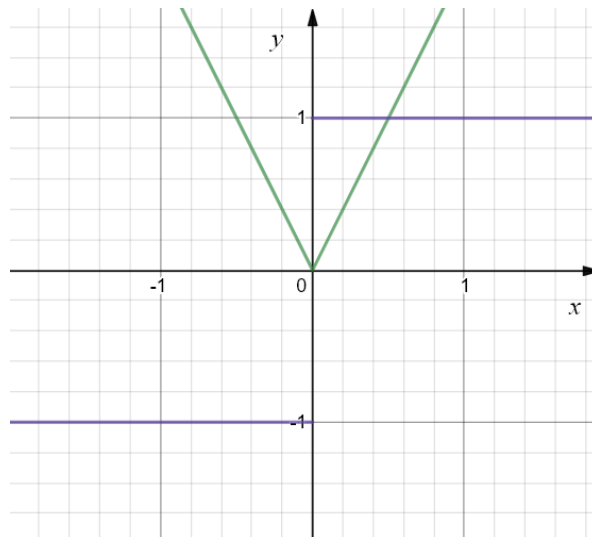
$$\begin{cases} y = 72 - x \\ f(x) = x \cdot y \end{cases} = \begin{cases} y = 72 - 36 \\ f(x) = x \cdot y \end{cases} = \begin{cases} y = 36 \\ f(x) = 36 \cdot 36 = 1296 \end{cases}$$

Ответ: при $x = 36$ и $y = 36$ площадь прямоугольника будет максимальной и составит 1296 см^2 .

2. Найти экстремумы функций (если они есть):

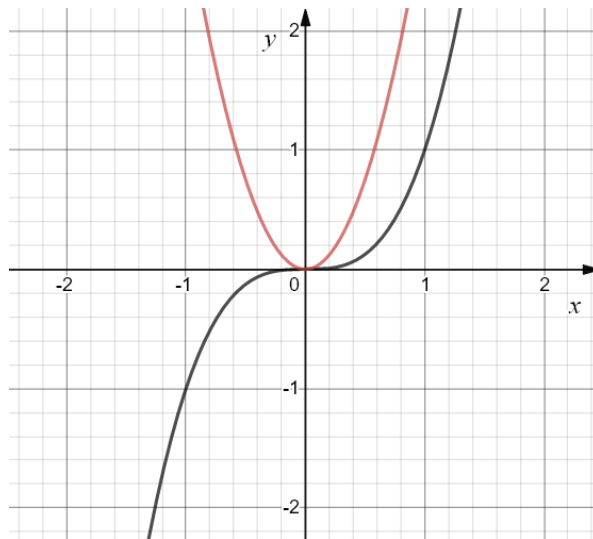
а. $y = |2x| \Rightarrow y' = 2 \cdot |x|' = 2 \frac{x}{|x|}$ — при $x = 0$ y' не существует

$$\left. \begin{aligned} y'(-1) &= 2 \cdot \frac{-1}{|-1|} = -2 < 0 \\ y'(1) &= 2 \cdot \frac{1}{|1|} = 2 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 0 - \text{экстремум функции } y = |2x|??$$



б. $y = x^3 \Rightarrow y' = (x^3)' = 3x^2$

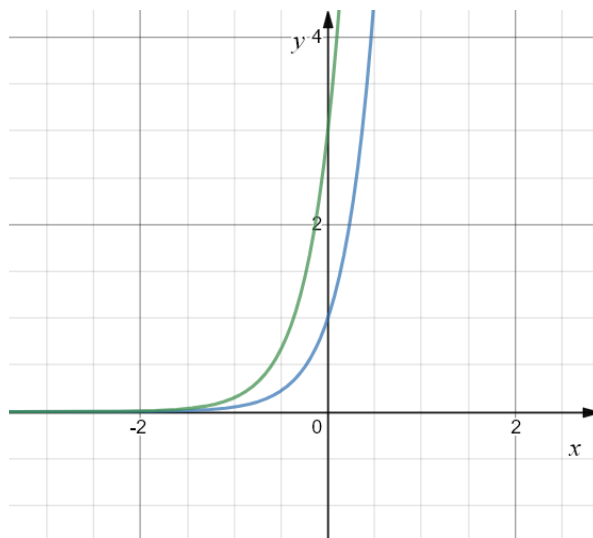
$$\left. \begin{aligned} y'(-1) &= 3 \cdot (-1)^2 = 3 > 0 \\ y'(1) &= 3 \cdot (1)^2 = 3 > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 0 - \text{является точкой перегиба функции } y = x^3$$



c. $y = e^{3x} \Rightarrow y' = (e^{3x})' \cdot (3x)' = 3e^{3x}$

$$\left. \begin{aligned} y'(-1) &= 3 \cdot e^{3 \cdot (-1)} = 3 \cdot e^{-3} = \frac{3}{e^3} \approx 0,149 \dots > 0 \\ y'(1) &= 3 \cdot e^{3 \cdot 1} = 3e^3 \approx 60,2566 \dots > 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 0 - \text{является}$$

точкой перегиба функции $y = e^{3x}$



d. $y = x^3 - 5x \Rightarrow y' = (x^3 - 5x)' = (x^3)' - (5x)' = 3x^2 - 5$

$$\left. \begin{aligned} y'(-1) &= 3 \cdot (-1)^2 - 5 = -2 < 0 \\ y'(1) &= 3 \cdot (1)^2 - 5 = -2 < 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = 0 - \text{является точкой перегиба}$$

функции $y = x^3 - 5x$

