

Тема 6 “Производные функций нескольких переменных”

1. Найти область определения функции.

$$z = \sqrt{1 - x^3} + \ln(y^2 - 1) \quad \text{ОЗФ: } z \in \mathbb{R}$$

Решение:

$$\text{ООФ: } (x, y) \in \mathbb{R}^2: \begin{cases} x \in [-\infty; 1] \\ y \in [-\infty; -1) \cup (1; +\infty] \end{cases} = \begin{cases} x \leq 1 \\ y < -1 \cup y > 1 \end{cases}$$

$$z'_x = \left(\sqrt{1 - x^3} \right)'_x + (\ln(y^2 - 1))'_x = \left((1 - x^3)^{\frac{1}{2}} \right)'_x =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (1 - x^3)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (-3x^2) + 0 = -\frac{3x^2}{2\sqrt{1 - x^3}}$$

$$z'_y = \left(\sqrt{1 - x^3} \right)'_y + (\ln(y^2 - 1))'_y = 0 + \frac{1}{y^2 - 1} \cdot (y^2)'_y - (1)'_y = \frac{2y}{y^2 - 1}$$

$$\text{Ответ: ООФ: } (x, y) \in \mathbb{R}^2: \begin{cases} x \in [-\infty; 1] \\ y \in [-\infty; -1) \cup (1; +\infty] \end{cases} = \begin{cases} x \leq 1 \\ y < -1 \cup y > 1 \end{cases}$$

2. Найти производные 1-го порядка функции.

$$z = \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y} \right)^3 = \left(\frac{\ln y}{\ln y} + \frac{\ln x}{\ln y} \right)^3 = \frac{(\ln x + \ln y)^3}{\ln^3 y} - \text{можно упростить}$$

Решение:

$$z'_x = \left(\frac{(\ln x + \ln y)^3}{\ln^3 y} \right)'_x = \frac{((\ln x + \ln y)^3)'_x}{(\ln^3 y)'_x} = \frac{3(\ln x + \ln y)^2 \cdot ((\ln x)'_x + (\ln y)'_x)}{\ln^3 y (x)'_x} =$$

$$= \frac{3(\ln x + \ln y)^2 \cdot \left(\frac{1}{x} + 0 \right)}{\ln^3 y \cdot 1} = \frac{3(\ln x + \ln y)^2}{x \cdot \ln^3 y}$$

$$z'_y = \left(\frac{(\ln x + \ln y)^3}{\ln^3 y} \right)'_y = \frac{((\ln x + \ln y)^3)'_y}{(\ln^3 y)'_y} =$$

$$= \left(3(\ln x + \ln y)^2 \cdot ((\ln x)'_y + (\ln y)'_y) \right) \cdot (\ln^{-3} y)'_y =$$

$$= \left(3(\ln x + \ln y)^2 \cdot \left(0 + \frac{1}{y} \right) \right) \cdot (\ln^{-3-1} y) = \frac{3(\ln x + \ln y)^2}{y \cdot \ln^4 y}$$

$$z'_x = \left(\left(1 + \frac{\ln x}{\ln y} \right)^3 \right)'_x = 3 \cdot \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\ln y} \cdot (\ln x)'_x \right) = 3 \cdot \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y} \right)^2 \cdot \left(\frac{1}{\ln y} \cdot \frac{1}{x} \right) =$$

$$= \frac{3}{x \cdot \ln y} \cdot \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y} \right)^2$$

$$z'_y = \left(\left(1 + \frac{\ln x}{\ln y} \right)^3 \right)'_y = 3 \cdot \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y} \right)^2 \cdot \left(\ln x \cdot (((\ln y)^{-1})'_y \cdot (\ln y)'_y) \right) =$$

$$= 3 \cdot \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y} \right)^2 \cdot \left(\ln x \cdot \left(-1 \cdot \left(\frac{1}{\ln^2 y} \right) \right) \cdot \frac{1}{y} \right) = -\frac{3 \ln x}{y \cdot \ln^2 y} \cdot \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y} \right)^2$$

$$\text{Ответ: } z'_x = \frac{3}{x \cdot \ln y} \cdot \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y} \right)^2; \quad z'_y = -\frac{3 \ln x}{y \cdot \ln^2 y} \cdot \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y} \right)^2$$

3. Найти полный дифференциал функции в точке (1;1).

$$z = \sqrt{2xy + \cos \frac{x}{y}}$$

Решение:

$$z'_x = \left(\sqrt{2xy + \cos \frac{x}{y}} \right)'_x = \left(\left(2xy + \cos \frac{x}{y} \right)^{\frac{1}{2}} \right)'_x \cdot \left((2xy)'_x + \left(\left(\cos \frac{x}{y} \right)'_x \cdot ((x)'_x \cdot (y^{-1})) \right) \right) =$$

$$= \left(2xy + \cos \frac{x}{y} \right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \left(2y \cdot (x)'_x + \left(\left(-\sin \frac{x}{y} \right) \cdot \frac{1}{y} \right) \right) = \frac{2y - \frac{\sin \frac{x}{y}}{y}}{2 \sqrt{2xy + \cos \frac{x}{y}}}$$

$$z'_y = \left(\sqrt{2xy + \cos \frac{x}{y}} \right)'_y = \left(\left(2xy + \cos \frac{x}{y} \right)^{\frac{1}{2}} \right)'_y \cdot \left((2xy)'_y + \left(\left(\cos \frac{x}{y} \right)'_y \cdot (x \cdot (y^{-1})'_y) \right) \right) =$$

$$= \left(2xy + \cos \frac{x}{y} \right)^{\frac{1}{2}-1} \cdot \left(2x \cdot (y)'_y + \left(\left(-\sin \frac{x}{y} \right) \cdot (x \cdot (-1y^{-1-2})) \right) \right) = \frac{2x + \frac{x \cdot \sin \frac{x}{y}}{y^2}}{2 \sqrt{2xy + \cos \frac{x}{y}}}$$

$$dz(x; y) = z'(x)dx + z'(y)dy = \left(\frac{2y - \frac{\sin \frac{x}{y}}{y}}{2\sqrt{2xy + \cos \frac{x}{y}}} \right) dx + \left(\frac{2x + \frac{x \cdot \sin \frac{x}{y}}{y^2}}{2\sqrt{2xy + \cos \frac{x}{y}}} \right) dy$$

$$dz(1; 1) = \left(\frac{2 \cdot 1 - \frac{\sin \frac{1}{1}}{1}}{2\sqrt{2 \cdot 1 \cdot 1 + \cos \frac{1}{1}}} \right) dx + \left(\frac{2 \cdot 1 + \frac{1 \cdot \sin \frac{1}{1}}{1^2}}{2\sqrt{2 \cdot 1 \cdot 1 + \cos \frac{1}{1}}} \right) dy =$$

$$= \left(\frac{2 - \sin 1}{2\sqrt{2 + \cos 1}} \right) dx + \left(\frac{2 + \sin 1}{2\sqrt{2 + \cos 1}} \right) dy = \left(\frac{2 - 0,84147}{2\sqrt{2 + 0,5403}} \right) dx + \left(\frac{2 + 0,84147}{2\sqrt{2 + 0,5403}} \right) dy =$$

$$= \left(\frac{1,15853}{2 \cdot 1,594} \right) dx + \left(\frac{2,84147}{3,188} \right) dy = (0,3634 \dots) dx + (0,8913 \dots) dy$$

Ответ: $dz(1; 1) = \left(\frac{2 - \sin 1}{2\sqrt{2 + \cos 1}} \right) dx + \left(\frac{2 + \sin 1}{2\sqrt{2 + \cos 1}} \right) dy = 0,3634 \dots dx + 0,8913 \dots dy$

4. Исследовать на экстремум функцию

$$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$$

Решение:

1) Найдем частные производные 1-го порядка:

$$z'_x = (x^2)'_x + (xy)'_x + (y^2)'_x - (6x)'_x - (9y)'_x = 2x + y \cdot (x)'_x + 0 - 6 - 0 = 2x + y - 6$$

$$z'_y = (x^2)'_y + (xy)'_y + (y^2)'_y - (6x)'_y - (9y)'_y = 0 + x \cdot (y)'_y + 2y - 0 - 9 = x + 2y - 9$$

2) Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y - 6 = 0 & (1) \\ x + 2y - 9 = 0 & (2) \end{cases}$$

Из (2) получим $x = 9 - 2y$ и подставим в (1):

$$2 \cdot (9 - 2y) + y - 6 = 0$$

$$18 - 4y + y - 6 = 0$$

$$12 - 3y = 0$$

$$y = \frac{12}{3} = 4, \quad \text{откуда } x = 9 - 2 \cdot 4 = 1$$

$M_0(1; 4)$ – стационарная точка

3) Найдем частные производные 2-го порядка:

$$z''_{xx} = (2x + y - 6)'_x = (2x)'_x + (y)'_x - (6)'_x = 2 + 0 - 0 = 2$$

$$z''_{xy} = (2x + y - 6)'_y = (2x)'_y + (y)'_y - (6)'_y = 0 + 1 - 0 = 1$$

$$z''_{yy} = (x + 2y - 9)'_y = (x)'_y + (2y)'_y - (9)'_y = 0 + 2 - 0 = 2$$

$$z''_{yx} = (x + 2y - 9)'_x = (x)'_x + (2y)'_x - (9)'_x = 1 + 0 - 0 = 1$$

4) Составим матрицу частных производных 2-го порядка и найдем определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 4 - 1 = 3 > 0$$

$$\begin{cases} \Delta = 3 > 0 \\ z''_{xx} = 2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \text{точка } M_0(1; 4) - \text{минимум функции } z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$$

$$z(1; 4) = 1^2 + 1 \cdot 4 + 4^2 - 6 \cdot 1 - 9 \cdot 4 = 1 + 4 + 16 - 6 - 36 = -21$$

$$\text{Ответ: В точке } M_0(1; 4) \text{ } z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y \text{ имеет минимум } z(1; 4) = -21$$