

Тема 7 “Ряды”

1. Исследовать ряд на сходимость, используя признак д’Аламбера:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}}{\frac{n^n}{(n!)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot (n!)^2}{((n+1)!)^2 \cdot n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n \cdot (n+1) \cdot n! \cdot n!}{n! \cdot (n+1) \cdot n! \cdot (n+1) \cdot n^n} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^n}{(n+1) \cdot n^n} = \frac{1}{\infty} = 0 < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится}$$

2. Исследовать ряд на сходимость, используя радикальный признак Коши:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{2^n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{n}}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n}} = \frac{n^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1}{(2^n)^{\frac{1}{n}} = 2^{n \cdot \frac{1}{n}} = 2} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{ряд сходится}$$

3. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Лейбница:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n + \ln n} = -1 + \frac{1}{2,693} - \frac{1}{4,099} + \frac{1}{5,386} - \frac{1}{6,609} + \frac{1}{7,792}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n + \ln n} &= \frac{(-1)^\infty}{\infty + \ln \infty} = \frac{1}{\infty} = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n + \ln n} \right| &= 1 + \frac{1}{2,693} + \frac{1}{4,099} \Rightarrow |a_n| > |a_{n+1}| \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{ряд сходится условно}$$

4. Исследовать ряд на сходимость, используя признак Раабе:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \cdot \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) \right) = n \cdot \left(\left(\frac{\frac{3^n}{2^n}}{\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}} \right) - 1 \right) = n \cdot \left(\frac{3^n \cdot 2^{n+1}}{2^n \cdot 3^{n+1}} - 1 \right) =$$

$$= n \cdot \left(\frac{3^1 \cdot 2^{1+1}}{2^1 \cdot 3^{1+1}} - 1 \right) = n \cdot \left(\frac{12}{18} - 1 \right) = n \cdot \left(\frac{2}{3} - 1 \right) = -\frac{1}{3}n < 1 \Rightarrow \text{ряд расходится}$$

5. Разложить функцию по Тейлору в единице:

$$f(x) = \ln(16x^2)$$

Найдем значения функции и ее производных при $x=1$:

$$f(1) = \ln(16 \cdot 1^2) = \ln(16)$$

$$f'(x) = (\ln(16x^2))' \cdot (16x^2)' = \frac{1}{16x^2} \cdot 16 \cdot 2x = \frac{2}{x}; f'(1) = \frac{2}{1} = 2$$

$$f''(x) = \left(\frac{2}{x} \right)' = 2 \cdot (x^{-1})' = -\frac{2}{x^2}; f''(1) = -\frac{2}{1^2} = -2$$

$$f'''(x) = \left(-\frac{2}{x^2} \right)' = -2 \cdot (x^{-2})' = \frac{4}{x^3}; f'''(1) = \frac{4}{1^3} = 4$$

$$f^{IV}(x) = \left(\frac{4}{x^3} \right)' = 4 \cdot (x^{-3})' = -\frac{12}{x^4}; f^{IV}(1) = -\frac{12}{1^4} = -12$$

$$f^V(x) = \left(-\frac{12}{x^4} \right)' = -12 \cdot (x^{-4})' = \frac{48}{x^5}; f^V(1) = \frac{48}{1^5} = 48$$

$$f^{VI}(x) = \left(\frac{48}{x^5} \right)' = 48 \cdot (x^{-5})' = -\frac{240}{x^6}; f^{VI}(1) = -\frac{240}{1^6} = -240$$

$$f^{VII}(x) = \left(-\frac{240}{x^6} \right)' = -240 \cdot (x^{-6})' = \frac{1440}{x^7}; f^{VII}(1) = \frac{1440}{1^7} = 1440$$

Подставляя полученные значения производных в формулу ряда Тейлора, получим:

$$\ln(16x^2) = \ln(16) + \frac{2}{1!}(x-1) + \frac{-2}{2!}(x-1)^2 + \frac{4}{3!}(x-1)^3 + \frac{-12}{4!}(x-1)^4 +$$

$$+ \frac{48}{5!}(x-1)^5 + \frac{-240}{6!}(x-1)^6 + \frac{1440}{7!}(x-1)^7 + \dots = \ln(16) + 2x - 2 -$$

$$-(x-1)^2 + \frac{2(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{2} + \frac{2(x-1)^5}{5} - \frac{(x-1)^6}{3} + \frac{2(x-1)^7}{7} + \dots$$

6.* Дана функция $f(x) = x^2$:

а. Разложить функцию в ряд Фурье по косинусам на отрезке $x \in [-\pi; \pi]$.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{\pi n x}{l}\right) + b_n \sin\left(\frac{\pi n x}{l}\right) \right) \stackrel{l=\pi}{\Rightarrow} \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

x^2 — чётная функция, поэтому коэффициент Фурье $b_n = 0$, тогда ряд примет вид:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

Найдем коэффициенты разложения a_0 и a_n :

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{x^3}{3} \Big|_{-\pi}^{\pi} \right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\pi^3}{3} - \left(-\frac{\pi^3}{3} \right) \right) = \frac{1}{2\pi} \cdot \left(\frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3} \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3} \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = (*)$$

$$\int x^2 \cos(nx) dx = \left| \begin{array}{ll} \int u dv = & uv - \int v du \\ u = x^2 & dv = \cos(nx) dx \\ du = 2x dx & v = \frac{\sin(nx)}{n} \end{array} \right| = x^2 \frac{\sin(nx)}{n} -$$

$$- \int 2x \frac{\sin(nx)}{n} dx = x^2 \frac{\sin(nx)}{n} - 2 \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \frac{\sin(nx)}{n} dx \\ du = dx & v = -\frac{\cos(nx)}{n^2} \end{array} \right| =$$

$$= x^2 \frac{\sin(nx)}{n} - \left(2 \left(-x \frac{\cos(nx)}{n^2} \right) \right) - 2 \int \frac{\cos(nx)}{n^2} dx =$$

$$= x^2 \frac{\sin(nx)}{n} + 2x \frac{\cos(nx)}{n^2} - 2 \frac{\sin(nx)}{n^3}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left(x^2 \frac{\sin(nx)}{n} + 2x \frac{\cos(nx)}{n^2} - 2 \frac{\sin(nx)}{n^3} \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} = (*)$$

$$F(\pi) = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\pi^2 \frac{\sin(n\pi)}{n} + 2\pi \frac{\cos(n\pi)}{n^2} - 2 \frac{\sin(n\pi)}{n^3} \right) = \left| \begin{array}{l} \cos(\pi n) = (-1)^n \\ \sin(\pi n) = 0 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\pi^2 \frac{0}{n} + 2\pi \frac{(-1)^n}{n^2} - 2 \frac{0}{n^3} \right) = \frac{1}{\pi} \cdot 2\pi \frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{2(-1)^n}{n^2}$$

$$F(-\pi) = \frac{1}{\pi} \cdot \left((-\pi)^2 \frac{\sin(-\pi n)}{n} + 2(-\pi) \frac{\cos(-\pi n)}{n^2} - 2 \frac{\sin(-\pi n)}{n^3} \right) =$$

$$= \left| \begin{array}{l} \cos(\pi n) = (-1)^n \\ \sin(\pi n) = 0 \end{array} \right| = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\pi^2 \frac{0}{n} + 2(-\pi) \frac{(-1)^n}{n^2} - 2 \frac{0}{n^3} \right) =$$

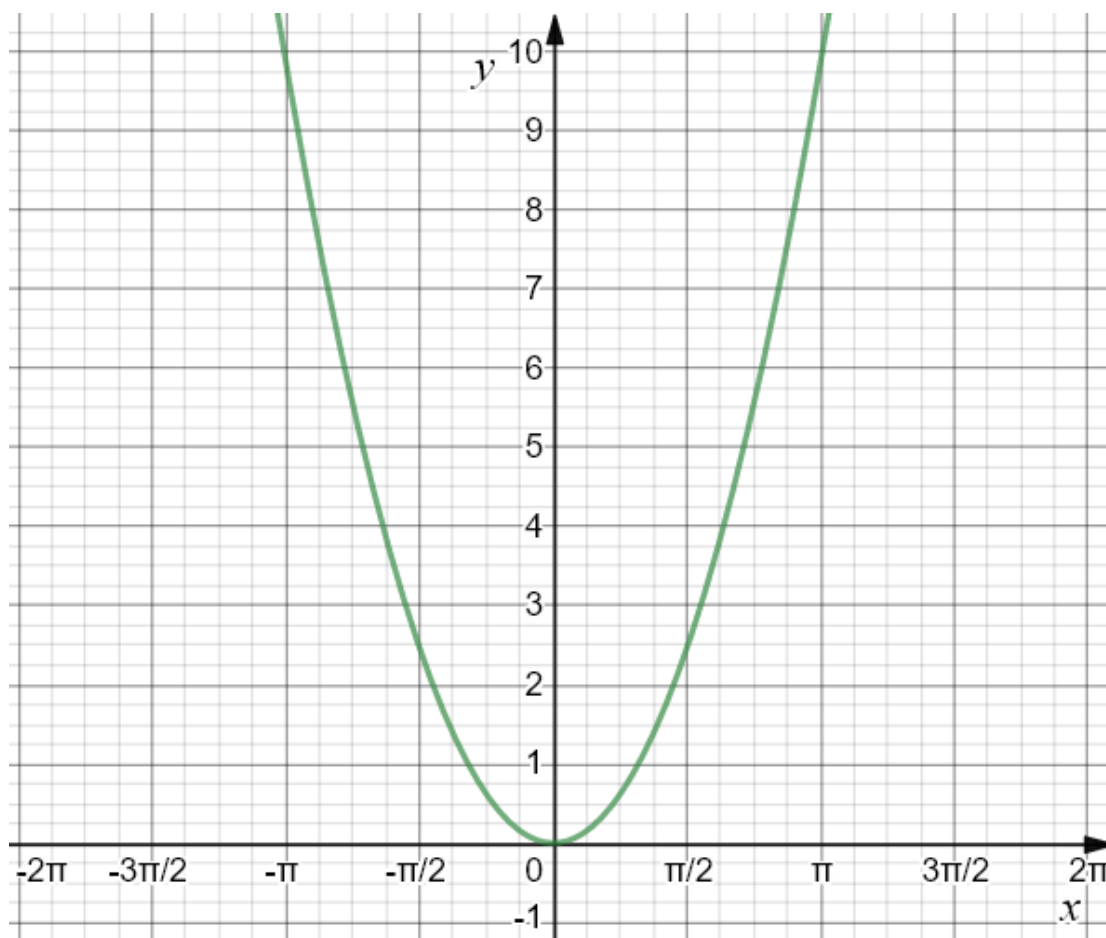
$$= \frac{1}{\pi} \cdot \left(-2\pi \frac{(-1)^n}{n^2} \right) = -\frac{2(-1)^n}{n^2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx = \frac{2(-1)^n}{n^2} - \left(-\frac{2(-1)^n}{n^2} \right) = \frac{4(-1)^n}{n^2}$$

$$x^2_{[-\pi;\pi]} = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(-1)^n}{n^2} \cos(nx) = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos(nx)}{n^2}$$

b. Построить график функции и ее разложения.

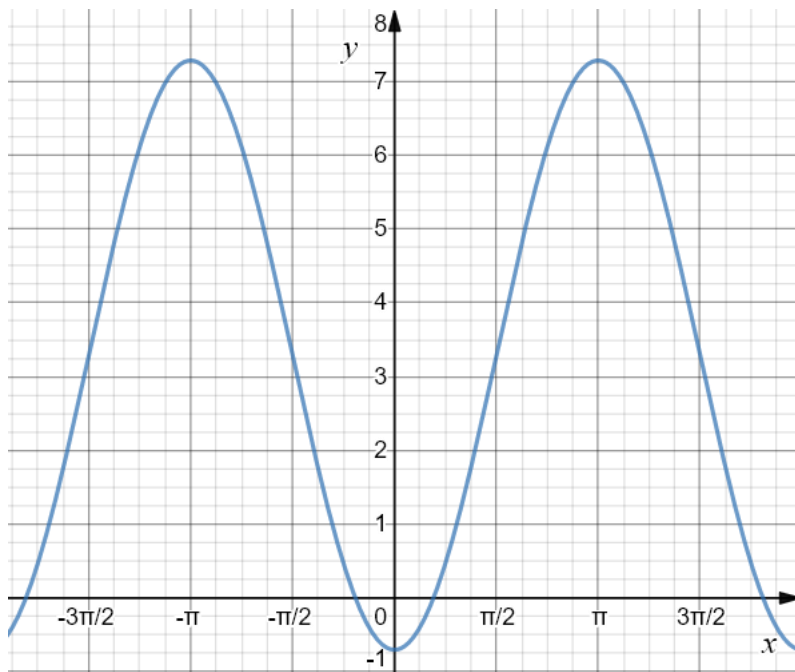
(1) График функции $f(x) = x^2$:



(см. следующую страницу)

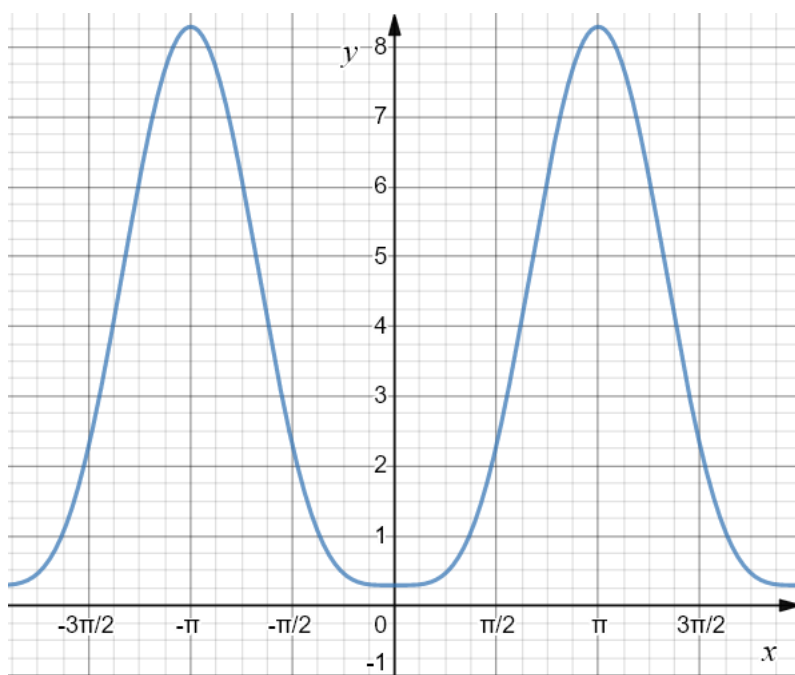
(2) График разложения ряда при $n = 1$:

$$x^2_{[-\pi;\pi]} = \frac{\pi^2}{3} + \frac{4(-1)^1}{1^2} \cos(x) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos x$$



(3) График разложения ряда при $n = 2$:

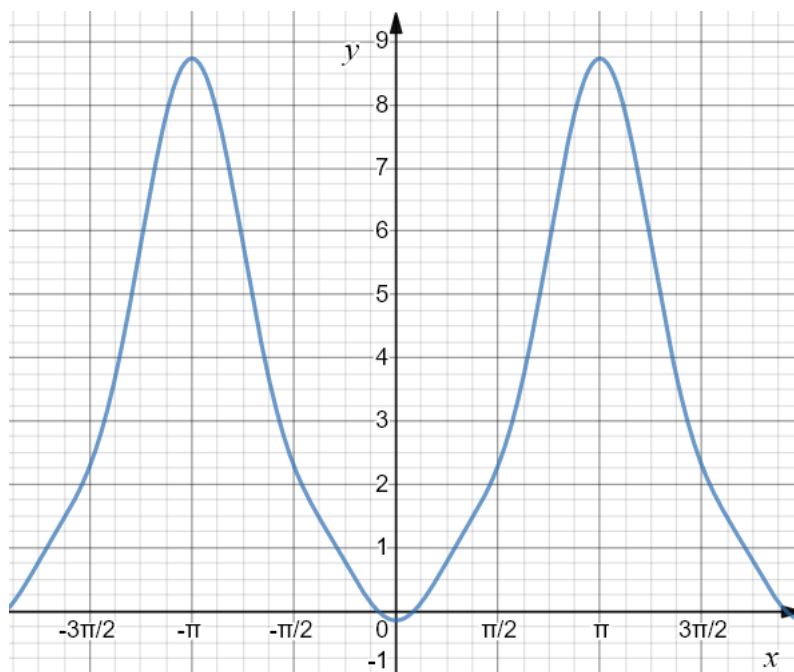
$$x^2_{[-\pi;\pi]} = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos x + \frac{4(-1)^2}{2^2} \cos(2x) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos x + \cos(2x)$$



(4) График разложения ряда при $n = 3$:

$$x_{[-\pi; \pi]}^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos x + \cos(2x) + \frac{4(-1)^3}{3^2} \cos(3x) =$$

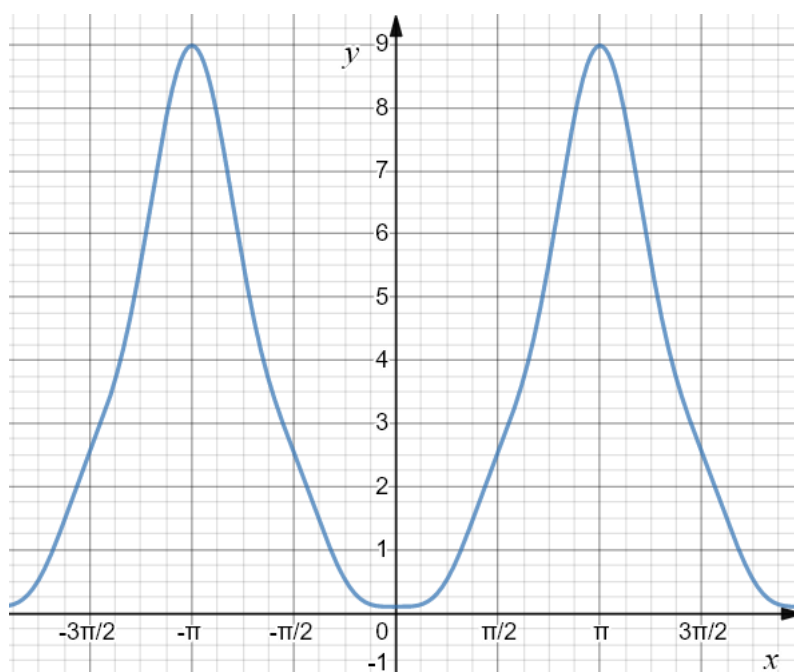
$$= \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos x + \cos(2x) - \frac{4}{9} \cos(3x)$$



(5) График разложения ряда при $n = 4$:

$$x_{[-\pi; \pi]}^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos x + \cos(2x) - \frac{4}{9} \cos(3x) + \frac{4(-1)^4}{4^2} \cos(4x) =$$

$$= \frac{\pi^2}{3} - 4 \cos x + \cos(2x) - \frac{4}{9} \cos(3x) + \frac{1}{4} \cos(4x)$$



Тема 8 “Понятие об интеграле”

1. Найти неопределенный интеграл:

$$\begin{aligned} & \int (2x^2 - 2x - 1 + \sin x - \cos x + \ln x + e^x) dx \\ &= 2 \int x^2 dx - 2 \int x dx - \int 1 dx + \int \sin(x) dx - \\ & - \int \cos(x) dx + \int \ln(x) dx + \int e^x dx \\ &= 2 \cdot \frac{x^3}{3} - 2 \cdot \frac{x^2}{2} - x + (-\cos(x)) - \sin(x) + x \ln(x) - x + \\ & + e^x + C = \frac{2x^3}{3} - x^2 - 2x - \cos(x) - \sin(x) + x \ln(x) + e^x + C \end{aligned}$$

2. Найти неопределенный интеграл:

$$\begin{aligned} & \int (2x + 6xz^2 - 5x^2y - 3 \ln z) dx = (2 + 6z^2) \int x dx - 5y \int x^2 dx - 3 \ln(z) \int 1 dx = \\ &= \frac{(2 + 6z^2) \cdot x^2}{2} - 5y \cdot \frac{x^3}{3} - 3 \ln(z) \cdot x + C = \frac{2x^2 + 6z^2x^2}{2} - \frac{5yx^3}{3} - 3 \ln(z) \cdot x + C \end{aligned}$$

3. Вычислить определенный интеграл:

$$\begin{aligned} & \int_0^{\pi} 3x^2 \sin(2x) dx \\ & \int 3x^2 \sin(2x) dx \\ & \int u dv = uv - \int v du \\ & u = x^2 \\ & dv = 3 \sin(2x) dx \\ & du = 2x dx \\ & v = -3 \frac{\cos(2x)}{2} \\ & \int 3x^2 \sin(2x) dx = -3x^2 \frac{\cos(2x)}{2} - \int -3x \cos(2x) dx = -3x^2 \frac{\cos(2x)}{2} + \int 3x \cos(2x) dx \\ & \int 3x \cos(2x) dx \\ & u = x \\ & dv = \cos(2x) dx \\ & du = x dx \\ & v = 3 \frac{\sin(2x)}{2} \\ & \int 3x \cos(2x) dx = 3x \frac{\sin(2x)}{2} - \left(-\frac{3}{4} \cos(2x) \right) + C = 3x \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{3}{4} \cos(2x) + C \\ & \int 3x^2 \sin(2x) dx = -3x^2 \frac{\cos(2x)}{2} + 3x \frac{\sin(2x)}{2} + \frac{3}{4} \cos(2x) + C \end{aligned}$$

$$\int_0^{\pi} 3x^2 \sin(2x) dx$$

$$F(\pi) = -3\pi^2 \frac{\cos(2\pi)}{2} + 3\pi \frac{\sin(2\pi)}{2} + \frac{3}{4} \cos(2\pi) = -3\pi^2 \cdot \frac{1}{2} + 3\pi \cdot \frac{0}{2} + \frac{3}{4} \cdot 1 = -3\frac{\pi^2}{2} + \frac{3}{4}$$

$$F(0) = -3 \cdot 0^2 \frac{\cos(2 \cdot 0)}{2} + 3 \cdot 0 \frac{\sin(2 \cdot 0)}{2} + \frac{3}{4} \cos(0) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{0}{2} + \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}$$

$$\int_0^{\pi} 3x^2 \sin(2x) dx = F(\pi) - F(0) = -3\frac{\pi^2}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = -3\frac{\pi^2}{2}$$

4. Найти неопределенный интеграл:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{(x+1)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x+1} + C$$