

Практические задания к уроку 2

Инструкции к сдаче:

Присылайте фото листочков с вашими решениями в текстовом файле .doc или .txt или в формате .pdf

Прикладывайте ссылку на ваш репозиторий с кодом. Для написания кода используйте привычную среду программирования, желательно, Jupiter Notebook

Тема “Элементарная алгебра”

1. Задание

Напишите уравнение параболы, проходящей через три точки (x, y) : $(1, 2)$, $(3, 10)$, $(5, 1)$

Решение

Уравнение параболы в общем виде: $y = ax^2 + bx + c$, где a, b и c — коэффициенты, которые необходимо найти. Подставим известные точки в уравнение параболы и составим систему из трёх уравнений, затем выразим каждое неизвестное по очереди:

$$\begin{cases} 2 = a + b + c \\ 10 = 9a + 3b + c \\ 1 = 25a + 5b + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2 - a - b \\ 10 = 9a + 3b + 2 - a - b \\ 1 = 25a + 5b + 2 - a - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2 - a - b \\ 8 = 8a + 2b \\ -1 = 24a + 4b \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на 2 и вычтем из третьего второе, чтобы избавиться от b :

$$\begin{cases} c = 2 - a - b \\ 16 = 16a + 4b \\ -1 = 24a + 4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2 - a - b \\ b = 4 - 4a \\ 8a = -17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 2 - a - b \\ b = 4 - 4a \\ a = -\frac{17}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = -\frac{67}{8} \\ b = \frac{25}{2} \\ a = -\frac{17}{8} \end{cases}$$

Ответ: $y = -\frac{17}{8}x^2 + \frac{25}{2}x - \frac{67}{8}$ — уравнение параболы

2. Задание

Известно, что свежий огурец на 99% состоит из воды. Месяц назад взвесили мешок со свежими огурцами. Получилось, что огурцов ровно 100 кг. Мешок убрали, а через месяц снова взвесили. Огурцы за это время усохли, и теперь вода составляет уже только 98% их веса. Сколько теперь (в кг) весят огурцы?

Решение

Масса свежего огурца = вода + сухое в-во = 99% + 1% = 100%

Масса воды в 100 кг = 100 кг * 99% = 99 кг

Найдем массу сух в-ва в 100 кг:

$$100 \text{ кг} - 99 \text{ кг} = 1 \text{ кг}$$

Через месяц масса сухого в-ва = 100% - 98% = 2% \Rightarrow 1 кг сухого в-ва = 2% всей массы

Составим пропорцию: $\frac{1 \text{ кг} = 2\%}{x \text{ кг} = 100\%}$, откуда найдем $x = 50$ кг

Ответ: через месяц мешок с огурцами весит 50 кг

3. Задание. Определение логарифма. Решить уравнения:

1. $2^x = 256$

Решение

$$x = \log_2 256 = 8$$

2. $2^x = 300$

Решение

$$x = \log_2 300 \approx 8,2288$$

3.* $\log_8 2^{8x-4} = 4$

Решение

$$\text{т.к. } \log_a b^m = m \cdot \log_a b \Rightarrow (8x - 4) \cdot \log_8 2 = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (8x - 4) \cdot \frac{1}{3} = 4 \Rightarrow \frac{8x - 4}{3} = 4 \Rightarrow 8x - 4 = 12 \Rightarrow 8x = 16 \Rightarrow x = 2$$

4.* $3^{\log_9(5x-5)} = 5$

Решение

$$\text{т.к. } a^{\log_c b} = b^{\log_c a} \Rightarrow (5x - 5)^{\log_9 3} = 5 \Rightarrow (5x - 5)^{\frac{1}{2}} = 5 \Rightarrow \sqrt{5x - 5} = 5 \Rightarrow 5x - 5 = 5^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow 5x - 5 = 25 \Rightarrow 5x = 25 + 5 \Rightarrow x = 6$$

5.* $x^{\log_3 x+1} = 9$

Решение

$$\text{Прологарифмируем обе части по основанию 3: } \log_3 x^{\log_3 x+1} = \log_3 9 \xrightarrow{\text{т.к. } \log_a b^m = m \cdot \log_a b}$$

$$\Rightarrow (\log_3 x + 1) \log_3 x = 2. \text{ Пусть } \log_3 x = k, \text{ тогда: } (k + 1)k = 2 \Rightarrow k^2 + k - 2 = 0$$

Вычислим дискриминант: $D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$, откуда:

$$k_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} \Rightarrow k_1 = \frac{-1 + 3}{2} = 1; \quad k_2 = \frac{-1 - 3}{2} = -2$$

$$\text{Найдем } x: \log_3 x_1 = k_1 = 1 \Rightarrow x_1 = 3^1 = 3; \quad \log_3 x_2 = k_2 = -2 \Rightarrow x_2 = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

Ответ: $x_1 = 3, x_2 = \frac{1}{9}$

4. Задание Свойства логарифмов. Вычислить:

$$6. \log_4 16 = 2$$

$$7. \log_5 \frac{1}{25} = \log_5 25^{-1} = -1 \cdot \log_5 25 = -2$$

$$8. \log_{25} 5 = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$9. \log_3 \sqrt{27} = \log_3 27^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log_3 27 = \frac{1}{2} \cdot 3 = 1,5$$

$$10. \log_2 12 - \log_2 3 = \log_2 \frac{12}{3} = \log_2 4 = 2$$

$$11. \log_6 12 + \log_6 3 = \log_6 12 \cdot 3 = \log_6 36 = 2$$

$$12. e^{\ln 5} = 5$$

$$13. \frac{\log_2 225}{\log_2 15} = \log_{15} 225 = 2$$

$$14. \log_4 32 - \log_{0,1} 10 = \log_4 16 \cdot 2 - \log_{\frac{1}{10}} 10 = \log_4 16 + \log_4 2 - (\log_{10^{-1}} 10^1) = 2 + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{-1}\right) = 2 + \frac{1}{2} - (-1) = 3\frac{1}{2} = 3,5$$

$$15. * 9^{\log_3 \sqrt{5}} \xrightarrow{\text{т.к. } a^{\log_c b} = b^{\log_c a}} \sqrt{5}^{\log_3 9} = \sqrt{5}^2 = 5$$