Курс “Введение в математический анализ”

Тема 6 “Производные функций нескольких переменных”

1. Исследовать функцию на условный экстремум

$$U = 3 - 8x + 6y, \qquad \text{если } x^2 + y^2 = 36$$

Решение:

a. Составим уравнение Лагранжа:

$$L(\lambda, x, y) = 3 - 8x + 6y + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 36) = 3 - 8x + 6y + \lambda x^2 + \lambda y^2 - 36\lambda$$
$$L'_x = (3 - 8x + 6y + \lambda x^2 + \lambda y^2 - 36\lambda)'_x = -8 + \lambda \cdot 2x$$
$$L'_y = (3 - 8x + 6y + \lambda x^2 + \lambda y^2 - 36\lambda)'_y = 6 + \lambda \cdot 2y$$

b. Составим систему уравнений и найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} L'_x = -8 + \lambda \cdot 2x = 0 \\ L'_y = 6 + \lambda \cdot 2y = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + y^2 - 36 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8}{2\lambda} \\ y = -\dfrac{6}{2\lambda} \\ \dfrac{64}{4\lambda^2} + \dfrac{36}{4\lambda^2} = 36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8}{2\lambda} \\ y = -\dfrac{6}{2\lambda} \\ \lambda^2 = \dfrac{100}{36 \cdot 4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{8}{2\lambda} \\ y = -\dfrac{6}{2\lambda} \\ \lambda = \sqrt{\dfrac{100}{144}} = \pm\dfrac{10}{12} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{8}{2 \cdot \frac{10}{12}} = \dfrac{96}{20} = \dfrac{24}{5};\ x_2 = \dfrac{8}{2 \cdot \left(-\frac{10}{12}\right)} = -\dfrac{96}{20} = -\dfrac{24}{5} \\ y_1 = -\dfrac{6}{2 \cdot \frac{10}{12}} = -\dfrac{72}{20} = -\dfrac{18}{5};\ y_2 = -\dfrac{6}{2 \cdot \left(-\frac{10}{12}\right)} = -\left(-\dfrac{72}{20}\right) = \dfrac{18}{5} \\ \lambda_1 = \dfrac{10}{12};\ \lambda_2 = -\dfrac{10}{12} \end{cases}$$

Стационарные точки: $M_1\left(\frac{10}{12}, \frac{24}{5}, -\frac{18}{5}\right)$ и $M_2\left(-\frac{10}{12}, -\frac{24}{5}, \frac{18}{5}\right)$

c. Найдем частные производные 2-го порядка и составим матрицу множителей:

$$L''_{\lambda\lambda} = (x^2 + y^2 - 36)'_\lambda = 0 + 0 - 0 = 0$$
$$L''_{\lambda x} = (x^2 + y^2 - 36)'_x = 2x + 0 - 0 = 2x$$
$$L''_{\lambda y} = (x^2 + y^2 - 36)'_y = 0 + 2y - 0 = 2y$$
$$L''_{x\lambda} = (-8 + \lambda \cdot 2x)'_\lambda = 0 + 2x \cdot 1 = 2x$$

$L''_{xx} = (-8 + \lambda \cdot 2x)'_x = 0 + 2\lambda \cdot 1 = 2\lambda$
$L''_{xy} = (-8 + \lambda \cdot 2x)'_y = 0 + 0 = 0$
$L''_{y\lambda} = (6 + \lambda \cdot 2y)'_\lambda = 0 + 2y \cdot 1 = 2y$
$L''_{yx} = (6 + \lambda \cdot 2y)'_x = 0 + 0 = 0$
$L''_{yy} = (6 + \lambda \cdot 2y)'_y = 0 + 2\lambda \cdot 1 = 2\lambda$

$$det \begin{bmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} 2\lambda & 0 \\ 0 & 2\lambda \end{bmatrix} - 2x \cdot \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 2y & 2\lambda \end{bmatrix} + 2y \cdot \begin{bmatrix} 2x & 2\lambda \\ 2y & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= 0 - 2x \cdot (2x \cdot 2\lambda - 0) + 2y \cdot (0 - 2y \cdot 2\lambda) = -8x^2\lambda - 8y^2\lambda = -8\lambda(x^2 + y^2)$$

d. Найдем значение детерминанта в каждой стационарной точке:

$$det_{M_1} = -8 \cdot \frac{10}{12} \cdot \left(\left(\frac{24}{5}\right)^2 + \left(-\frac{18}{5}\right)^2\right) = -\frac{800}{12} \cdot \left(\frac{576 + 324}{25}\right) = -\frac{200}{3} \cdot \frac{900}{25} =$$

$$= -\frac{200 \cdot \cancel{36}}{\cancel{3}} = -200 \cdot 12 = -2\,400 < 0 \Longrightarrow \text{в этой точке минимум функции}$$

$$det_{M_2} = -8 \cdot \left(-\frac{10}{12}\right) \cdot \left(\left(-\frac{24}{5}\right)^2 + \left(\frac{18}{5}\right)^2\right) = \frac{800}{12} \cdot \left(\frac{576 + 324}{25}\right) = \frac{200}{3} \cdot \frac{900}{25} =$$

$$= \frac{200 \cdot \cancel{36}}{\cancel{3}} = 200 \cdot 12 = 2\,400 > 0 \Longrightarrow \text{в этой точке максимум функции}$$

Ответ: функция $U = 3 - 8x + 6y$ при условии $x^2 + y^2 = 36$ имеет минимум в точке $M_1\left(\frac{24}{5}; -\frac{18}{5}\right)$ и максимум в точке $M_2\left(-\frac{24}{5}; \frac{18}{5}\right)$

2. Исследовать функцию на условный экстремум

$U = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15,$ если $x^2 + 16y^2 = 64$

Решение:

a. Составим уравнение Лагранжа:

$L(\lambda, x, y) = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15 + \lambda \cdot (x^2 + 16y^2 - 64) =$
$= 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15 + \lambda x^2 + \lambda \cdot 16y^2 - 64\lambda$
$L'_x = (2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15 + \lambda x^2 + \lambda \cdot 16y^2 - 64\lambda)'_x = 4x + 12y + \lambda \cdot 2x$
$L'_y = (2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15 + \lambda x^2 + \lambda \cdot 16y^2 - 64\lambda)'_y = 12x + 64y + \lambda \cdot 32y$

b. Составим систему уравнений и найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} L'_x = 4x + 12y + \lambda \cdot 2x = 0 \\ L'_y = 12x + 64y + \lambda \cdot 32y = 0 \\ L'_\lambda = x^2 + 16y^2 - 64 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{4x + 12y}{2x} \\ \lambda_2 = -\dfrac{12x + 64y}{32y} \\ x^2 + 16y^2 = 64 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\dfrac{2x + 6y}{x} & (1) \\ \lambda_2 = -\dfrac{3x + 16y}{8y} & (2) \\ x^2 + 16y^2 = 64 & (3) \end{cases}$$

Приравняем правые части λ_1 и λ_2, приведем к общему знаменателю, найдем значения x, y и λ:

$$-\frac{2x + 6y}{x} = -\frac{3x + 16y}{8y} \Rightarrow \left(\frac{2x + 6y}{x}\right) \cdot 8y = \left(\frac{3x + 16y}{8y}\right) \cdot x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{16xy} + 48y^2}{\cancel{8xy}} = \frac{3x^2 + \cancel{16xy}}{\cancel{8xy}} \Rightarrow 16y^2 = x^2$$

Подставим $16y^2 = x^2$ в (3) и найдем x, далее найдем y:

$$x^2 + x^2 = 64 \Rightarrow 2x^2 = 64 \Rightarrow x = \sqrt{32} = \pm 4\sqrt{2}$$

$$16y^2 = x^2 = 32 \Rightarrow y = \sqrt{\frac{32}{16}} = \pm\sqrt{2}$$

Найдем λ_1 из (1) и λ_2 из (2):

$$\lambda_1 = -\frac{2 \cdot 4\sqrt{2} + 6 \cdot \sqrt{2}}{4\sqrt{2}} = -\frac{14\cancel{\sqrt{2}}}{4\cancel{\sqrt{2}}} = -\frac{7}{2}$$

$$\lambda_2 = -\frac{3 \cdot \left(-4\sqrt{2}\right) + 16\sqrt{2}}{8\sqrt{2}} = -\frac{4\cancel{\sqrt{2}}}{8\cancel{\sqrt{2}}} = -\frac{1}{2}$$

Стационарные точки: $M_1\left(-\frac{7}{2}, 4\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, $M_2\left(-\frac{1}{2}, -4\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, $M_3\left(-\frac{1}{2}, 4\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$ и $M_4\left(-\frac{7}{2}, -4\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$

c. Найдем частные производные 2-го порядка и составим матрицу множителей:

$$L''_{\lambda\lambda} = \left(x^2 + 16y^2 - 64\right)'_\lambda = 0 + 0 - 0 = 0$$
$$L''_{\lambda x} = \left(x^2 + 16y^2 - 64\right)'_x = 2x + 0 - 0 = 2x$$
$$L''_{\lambda y} = \left(x^2 + 16y^2 - 64\right)'_y = 0 + 32y - 0 = 32y$$
$$L''_{x\lambda} = (4x + 12y + \lambda \cdot 2x)'_\lambda = 0 + 0 + 2x \cdot 1 = 2x$$
$$L''_{xx} = (4x + 12y + \lambda \cdot 2x)'_x = 4 \cdot 1 + 0 + 2\lambda \cdot 1 = 4 + 2\lambda$$
$$L''_{xy} = (4x + 12y + \lambda \cdot 2x)'_y = 0 + 12 + 0 = 12$$
$$L''_{y\lambda} = (12x + 64y + \lambda \cdot 32y)'_\lambda = 0 + 0 + 32y \cdot 1 = 32y$$
$$L''_{yx} = (12x + 64y + \lambda \cdot 32y)'_x = 12 + 0 + 0 = 12$$
$$L''_{yy} = (12x + 64y + \lambda \cdot 32y)'_y = 0 + 64 + 32\lambda \cdot 1 = 64 + 32\lambda$$

$$det\begin{bmatrix} 0 & 2x & 32y \\ 2x & 4+2\lambda & 12 \\ 32y & 12 & 64+32\lambda \end{bmatrix} = 0\cdot\begin{bmatrix} 4+2\lambda & 12 \\ 12 & 64+32\lambda \end{bmatrix} -$$

$$-2x\cdot\begin{bmatrix} 2x & 12 \\ 32y & 64+32\lambda \end{bmatrix} + 32y\cdot\begin{bmatrix} 2x & 4+2\lambda \\ 32y & 12 \end{bmatrix} =$$

$$= 0 - 2x\cdot(128x + 64x\lambda - 384y) + 32y\cdot(24x - 128y - 64y\lambda) =$$

$$= -256x^2 - 128x^2\lambda + 768xy + 768xy - 4\,096y^2 - 2\,048y^2\lambda =$$

$$= -256(x^2+16y^2) - 128\lambda(x^2+16y^2) + 1536xy = -256\cdot 64 - 128\lambda\cdot 64 + 1\,536xy =$$

$$= -16\,384 - 8\,192\lambda + 1\,536xy$$

d. Найдем значение детерминанта в каждой стацинарной точке:

$$det_{M_1} = -16\,384 - 8\,192\cdot\left(-\frac{7}{2}\right) + 1\,536\cdot\cancel{4\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = -16\,384 - \left(-\frac{57\,344}{2}\right) + 6\,144 =$$

$= -16\,384 + 28\,672 + 6\,144 = 18\,432 > 0 \Longrightarrow$ в этой точке максимум функции

$$det_{M_2} = -16\,384 - 8\,192\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\,536\cdot\left(-\cancel{4\sqrt{2}}\right)\cdot\cancel{\sqrt{2}} = -16\,384 - \left(-\frac{8\,192}{2}\right) - 6\,144 =$$

$= -16\,384 + 4\,096 - 6\,144 = -18\,432 < 0 \Longrightarrow$ в этой точке минимум функции

$$det_{M_3} = -16\,384 - 8\,192\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\,536\cdot\cancel{4\sqrt{2}}\cdot\left(-\cancel{\sqrt{2}}\right) = -16\,384 - \left(-\frac{8\,192}{2}\right) - 6\,144 =$$

$= -16\,384 + 4\,096 - 6\,144 = -18\,432 < 0 \Longrightarrow$ в этой точке минимум функции

$$det_{M_4} = -16\,384 - 8\,192\cdot\left(-\frac{7}{2}\right) + 1\,536\cdot\left(-\cancel{4\sqrt{2}}\right)\cdot\left(-\cancel{\sqrt{2}}\right) = -16\,384 - \left(-\frac{57\,344}{2}\right) +$$

$+6\,144 = -16\,384 + 28\,672 + 6\,144 = 18\,432 > 0 \Longrightarrow$ в этой точке максимум функции

Ответ: функция $U = 2x^2 + 12xy + 32y^2 + 15$ при условии $x^2 + 16y^2 = 64$ имеет минимумы в точках $M_2\left(-4\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ и $M_3\left(4\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$ и максимумы в точках $M_1\left(4\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ и $M_4\left(-4\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$

3. Найти производную функции по направлению вектора в точке

$U = x^2 + y^2 + z^2$ по направлению вектора $\vec{c}(-9, 8, -12)$ в точке $M(8, -12, 9)$

Решение:

$$|\vec{c}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \sqrt{(-9)^2 + 8^2 + (-12)^2} = \sqrt{81 + 64 + 144} = \sqrt{289} = 17$$

$$\overrightarrow{c_0} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}\left(= -\frac{9}{17}, \frac{8}{17}, -\frac{12}{17}\right)$$

$$U'_x = (x^2 + y^2 + z^2)'_x = (x^2)'_x + (y^2)'_x + (z^2)'_x = 2x + 0 + 0 = 2x$$

$$U'_y = (x^2 + y^2 + z^2)'_y = (x^2)'_y + (y^2)'_y + (z^2)'_y = 0 + 2y + 0 = 2y$$

$$U'_z = (x^2 + y^2 + z^2)'_z = (x^2)'_z + (y^2)'_z + (z^2)'_z = 0 + 0 + 2z = 2z$$

$\text{grad}\, U|_{(8,-12,9)} = (16, -24, 18)$

$$U'_{\vec{c}}\Big|_{(8,-12,9)} = -\frac{9}{17}\cdot 16 + \frac{8}{17}\cdot(-24) - \frac{12}{17}\cdot 18 = \frac{-144-192-216}{17} = -\frac{552}{17} = -32\frac{8}{17}$$

Ответ: Функция $U = x^2 + y^2 + z^2$ в точке $M(8, -12, 9)$ по направлению вектора $\vec{c}(-9{,}8, -12)$ будет убывать со скоростью $-\frac{552}{17} = -32\frac{8}{17} = -32{,}47\ldots$

4. Найти производную функции по направлению вектора в точке

$U = e^{x^2+y^2+z^2}$ по направлению вектора $\vec{d}(4, -13, -16)$ в точке $L(-16, 4, -13)$

Решение:

$$|\vec{d}| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = \sqrt{(4)^2 + (-13)^2 + (-16)^2} = \sqrt{16+169+256} = \sqrt{441} = 21$$

$$\overrightarrow{d_0} = \frac{\vec{d}}{|\vec{d}|}\left(= \frac{4}{21}, -\frac{13}{21}, -\frac{16}{21}\right)$$

$$U'_x = \left(e^{x^2+y^2+z^2}\right)'_x \cdot (x^2+y^2+z^2)'_x = e^{x^2+y^2+z^2}\cdot(2x+0+0) = 2x\cdot e^{x^2+y^2+z^2}$$

$$U'_x(-16, 4, -13) = 2x\cdot e^{x^2+y^2+z^2} = 2\cdot(-16)\cdot e^{(-16)^2+(4)^2+(-13)^2} = -32e^{441}$$

$$U'_y = \left(e^{x^2+y^2+z^2}\right)'_y \cdot (x^2+y^2+z^2)'_y = e^{x^2+y^2+z^2}\cdot(0+2y+0) = 2y\cdot e^{x^2+y^2+z^2}$$

$$U'_y(-16, 4, -13) = 2y\cdot e^{x^2+y^2+z^2} = 2\cdot(4)\cdot e^{(-16)^2+(4)^2+(-13)^2} = 8e^{441}$$

$$U'_z = \left(e^{x^2+y^2+z^2}\right)'_z \cdot (x^2+y^2+z^2)'_z = e^{x^2+y^2+z^2}\cdot(0+0+2z) = 2z\cdot e^{x^2+y^2+z^2}$$

$$U'_z(-16, 4, -13) = 2z\cdot e^{x^2+y^2+z^2} = 2\cdot(-13)\cdot e^{(-16)^2+(4)^2+(-13)^2} = -26e^{441}$$

$\text{grad}\, U|_{(-16,4,-13)} = (-32e^{441}, 8e^{441}, -26e^{441})$

$$U'_{\vec{d}}\Big|_{(-16,4,-13)} = \frac{4}{21}\cdot(-32e^{441}) - \frac{13}{21}\cdot 8e^{441} - \frac{16}{21}\cdot(-26e^{441}) =$$

$$= \frac{-128e^{441} - 104e^{441} - (-416e^{441})}{21} = \frac{(-232+416)\cdot e^{441}}{21} = \frac{184e^{441}}{21} = 8\frac{16e^{441}}{21}$$

Ответ: Функция $U = e^{x^2+y^2+z^2}$ в точке $L(-16{,}4, -13)$ по направлению вектора $\vec{d}(4, -13, -16)$ будет возрастать со скоростью $\frac{184e^{441}}{21} = 8\frac{16e^{441}}{21} =$

$= 8{,}7619\ldots\cdot(3{,}34\ldots\cdot 10^{191}) = 29{,}27285\ldots\cdot 10^{191}$