Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт компьютерных наук и технологий
Высшая школа программной инженерии

Курсовая Работа

по дисциплине
«Математические модели»

Выполнил: Ферапонтов М.В.
Группа: гр. 3530904/00104

Проверил: Воскобойников С. П.

Санкт-Петербург
2023

Содержание

1 Вступление

1.1 Постановка задачи

Вариант N7. Используя интегро-интерполяционный метод, разработать подпрограмму для моделирования распределения температуры в цилиндре, описываемого математической моделью

$$-\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]=f(r,z)$$

$$0\le c_{11}\le k_1(r,z)\le c_{12},\quad 0\le c_{11}\le k_2(r,z)\le c_{22},\quad 0\le r\le R,\ 0\le z\le L$$

С граничными условиями:

$u\big|_{r=0}$ – ограничено

$$-k_1\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=R}=\chi_2\, u\big|_{r=R}-\varphi_2(z)$$

$$k_2\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0}=\chi_3\, u\big|_{z=0}-\varphi_3(r)$$

$$u\big|_{z=L}=\varphi_4(r)$$

$\chi_2\ge 0$ $\qquad$ $\chi_3\ge 0$

Матрица алгебраической системы должна храниться в упакованной форме.

2 Разностная схема

Введем основную сетку:

N_r – число разбиений на$[0, R]$

$r_0 < r_1 < \dots < r_N$

$r_0 = 0, \quad r_N = R$

$h_r = \dfrac{R-0}{N_r}$

N_z – число разбиений на$[0, L]$

$z_0 < z_1 < \dots < z_N$

$z_0 = 0, \quad z_N = L$

$h_z = \dfrac{L-0}{N_z}$

Введем дополнительную сетку:

$$r_{i-\frac{1}{2}} = \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \quad i = 1, \cdots, N_r$$

$$\hbar_i = \begin{cases} \frac{h_r}{2},\ i = 0 \\ h_r,\ i = 1, 2, \dots, N_r - 1 \\ \frac{h_r}{2},\ i = N_r \end{cases}$$

$$z_{j-\frac{1}{2}} = \frac{z_j + z_{j-1}}{2} \quad j = 1, \cdots, N_z$$

$$\hbar_j = \begin{cases} \frac{h_z}{2},\ j = 0 \\ h_z,\ j = 1, 2, \dots, N_z - 1 \\ \frac{h_z}{2},\ j = N_z \end{cases}$$

Преобразуем наше начальное уравнение домножив на r

$$-\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] = rf(r,z)$$

2.1 Внутренние точки

Проинтегрируем уравнение внутри интервала:

$$-\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]drdz = \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)drdz$$

Получим:

$$-\left[\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_{i+\frac{1}{2}}} dz - \int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_{i-\frac{1}{2}}} dz\right.$$
$$\left. + \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=z_{j+\frac{1}{2}}} dr - \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=z_{j-\frac{1}{2}}} dr\right] = \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)drdz$$

Воспользуемся формулами численного дифференцирования:

$$k_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_{i-\frac{1}{2}}} \approx k_1(r_{i-\frac{1}{2}},z)\frac{v_{i,j}-v_{i-1,j}}{h_r}$$

$$k_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{z=z_{j-\frac{1}{2}}} \approx k_2(r,z_{j-\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j}-v_{i,j-1}}{h_z}$$

Также воспользуемся формулой средних прямоугольников:

$$\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} r\varphi(r,z)dr = \hbar_i r_i \varphi_i$$

$$\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} r\varphi(r,z)drdz = \hbar_i\hbar_j r_i \varphi_{i,j}$$

В итоге получаем разностную схему внутри интервала:

$$-\Bigg[\hbar_j r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}},z_j)\frac{v_{i+1,j}-v_{i,j}}{h_r} - \hbar_j r_{i-\frac{1}{2}} k_1(r_{i-\frac{1}{2}},z_j)\frac{v_{i,j}-v_{i-1,j}}{h_r}$$
$$+\hbar_i r_i k_2(r_i,z_{j+\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j+1}-v_{i,j}}{h_z} - \hbar_i r_i k_2(r_i,z_{j-\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j}-v_{i,j-1}}{h_z}\Bigg] = \hbar_i\hbar_j r_i f_{i,j}$$

Перейдём к частному:

$$-\Bigg[h_z r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}},z_j)\frac{v_{i+1,j}-v_{i,j}}{h_r} - h_z r_{i-\frac{1}{2}} k_1(r_{i-\frac{1}{2}},z_j)\frac{v_{i,j}-v_{i-1,j}}{h_r}$$
$$+h_r r_i k_2(r_i,z_{j+\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j+1}-v_{i,j}}{h_z} - h_r r_i k_2(r_i,z_{j-\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j}-v_{i,j-1}}{h_z}\Bigg] = h_r h_z r_i f_{i,j}$$

Теперь найдем значение разностной схемы на углах и границах интервалов

2.2 На левой границе

Проинтегрируем наше уравнение в $i=0$ и z внутри промежутка

$$-\int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]drdz = \int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)drdz$$

Получаем:

$$-\left[\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=r_{i+\frac{1}{2}}} dz - \int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=r_i} dz \right.$$
$$\left. + \int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=z_{j+\frac{1}{2}}} dr - \int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=z_{j-\frac{1}{2}}} dr\right] = \int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)drdz$$

Имеем граничное условие:

$$u\big|_{r=0} \text{ – ограничено, т. е } \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0$$

$$\int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rfdr \approx f_i \int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rdr = f_i\frac{r^2_{i+\frac{1}{2}}}{2} = \frac{h_r}{2}f_i\frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{2}, \quad i=0, \quad r_i = 0, r_{i+\frac{1}{2}} = \frac{h_r}{2}$$

Получаем разностную схему:

$$-\left[\hbar_j r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}}, z_j)\frac{v_{i+1,j}-v_{i,j}}{h_{i+1}} - 0\right.$$
$$\left.+\hbar_i r_i k_2(r_i, z_{j+\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j+1}-v_{i,j}}{h_{j+1}} - \hbar_i r_i k_2(r_i, z_{j-\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j}-v_{i,j-1}}{h_j}\right] = \hbar_i\hbar_j r_i f_{i,j}$$

Перейдём к частному:

$$-\left[h_z r_{\frac{1}{2}} k_1(r_{\frac{1}{2}}, z_j)\frac{v_{1,j}-v_{0,j}}{h_r} - 0\right.$$
$$\left.+\frac{h_r}{2}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} k_2(r_0, z_{j+\frac{1}{2}})\frac{v_{0,j+1}-v_{0,j}}{h_z} - \frac{h_r}{2}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} k_2(r_0, z_{j-\frac{1}{2}})\frac{v_{0,j}-v_{0,j-1}}{h_z}\right] = \frac{h_r}{2}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2}h_z f_{0,j}$$

2.3 На правой границе

Проинтегрируем наше уравнение в $i = N_x$ и z внутри промежутка

$$-\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] drdz = \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)drdz$$

Получаем:

$$-\left[\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_i} dz - \int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_{i-\frac{1}{2}}} dz\right.$$

$$\left.+\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=z_{j+\frac{1}{2}}} dr - \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=z_{j-\frac{1}{2}}} dr\right] = \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)drdz$$

Имеем граничное условие:

$$-k_1\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \chi_2\ u|_{r=R} - \varphi_2(z)$$

Получаем разностную схему:

$$-\left[-\hbar_j(\chi_2 v_i - \varphi_2(z)) - \hbar_j r_{i-\frac{1}{2}} k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z_j)\frac{v_{i,j}-v_{i-1,j}}{h_r}\right.$$

$$\left.+\hbar_i r_i k_2(r_i, z_{j+\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j+1}-v_{i,j}}{h_z} - \hbar_i r_i k_2(r_i, z_{j-\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j}-v_{i,j-1}}{h_z}\right] = \hbar_i\hbar_j r_i f_{i,j}$$

Перейдём к частному:

$$-\left[-h_z(\chi_2 v_{N_r} - \varphi_2(z)) - h_z r_{N_r-\frac{1}{2}} k_1(r_{N_r-\frac{1}{2}}, z_j)\frac{v_{N_r,j}-v_{N_r-1,j}}{h_r}\right.$$

$$\left.+\frac{h_r}{2} r_{N_r} k_2(r_{N_r}, z_{j+\frac{1}{2}})\frac{v_{N_r,j+1}-v_{N_r,j}}{h_z} - \frac{h_r}{2} r_{N_r} k_2(r_{N_r}, z_{j-\frac{1}{2}})\frac{v_{N_r,j}-v_{N_r,j-1}}{h_z}\right] = \frac{h_r}{2} r_{N_r} h_z f_{N_r,j}$$

2.4 На нижней границе

Проинтегрируем наше уравнение $j = 0$ и i внутри промежутка

$$-\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] drdz = \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)drdz$$

Получаем:

$$-\left[\int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_{i+\frac{1}{2}}} dz - \int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_{i-\frac{1}{2}}} dz\right.$$

$$\left.+\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=z_{j+\frac{1}{2}}} dr - \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=z_j} dr\right] = \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)drdz$$

Имеем граничное условие:

$$k_2 \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = \chi_3 \; u|_{z=0} - \varphi_3(r)$$

Получаем разностную схему:

$$-\Bigg[\hbar_j r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}}, z_j) \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_r} - \hbar_j r_{i-\frac{1}{2}} k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z_j) \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_r} \\ + \hbar_i r_i k_2(r_i, z_{j+\frac{1}{2}}) \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_z} - \hbar_i(\chi_3 v_i - \varphi_3(r))\Bigg] = \hbar_i \hbar_j r_i f_{i,j}$$

Перейдём к частному:

$$-\Bigg[\frac{h_z}{2} r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}}, z_0) \frac{v_{i+1,0} - v_{i,0}}{h_r} - \frac{h_z}{2} r_{i-\frac{1}{2}} k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z_0) \frac{v_{i,0} - v_{i-1,0}}{h_r} \\ + h_r r_i k_2(r_i, z_{\frac{1}{2}}) \frac{v_{i,1} - v_{i,0}}{h_z} - h_r(\chi_3 v_{i,0} - \varphi_3(r))\Bigg] = h_r \frac{h_z}{2} r_i f_{i,0}$$

2.5 На верхней границе

Имеем граничное условие:

$$u|_{z=L} = \varphi_r(r)$$

$$v_{i,N_z} = \varphi(r_i)$$

2.6 Левый-нижний угол

Проинтегрируем наше уравнение в $i = 0$ и $j = 0$ внутри промежутка

$$-\int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r k_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r k_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] dr dz = \int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} r f(r,z) dr dz$$

Получаем:

$$-\Bigg[\int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} r k_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=r_{i+\frac{1}{2}}} dz - \int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} r k_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=r_i} dz \\ + \int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} r k_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=z_{j+\frac{1}{2}}} dr - \int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} r k_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=z_j} dr\Bigg] = \int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} r f(r,z) dr dz$$

Имеем граничное условие:

$$u\big|_{r=0} - \text{ограничено, т. е } \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=0} = 0$$

$$\int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rfdr \approx f_i \int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rdr = f_i \frac{r_{i+\frac{1}{2}}^2}{2} = h_r f_i \frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{2}, \quad i = 0, \quad r_i = 0, r_{i+\frac{1}{2}} = \frac{h_r}{2}$$

Также:

$$k_2 \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \chi_3 \; u\big|_{z=0} - \varphi_3(r)$$

Получаем:

$$-\Bigg[\hbar_j r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}}, z_j) \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_r} - 0$$
$$+ \hbar_i \frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{2} k_2(r_i, z_{j+\frac{1}{2}}) \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_z} - \hbar_i \frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{2}(\chi_3 \; u\big|_{z=0} - \varphi_3(r))\Bigg] = \hbar_i \hbar_j \frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{2} f_{i,j}$$

Перейдём к частному:

$$-\Bigg[\frac{h_z}{2} r_{\frac{1}{2}} k_1(r_{\frac{1}{2}}, z_0) \frac{v_{1,0} - v_{0,0}}{h_r} - 0$$
$$+ \frac{h_r}{2} \frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} k_2(r_0, z_{\frac{1}{2}}) \frac{v_{0,1} - v_{0,0}}{h_z} - \frac{h_r}{2} \frac{r_{\frac{1}{2}}}{2}(\chi_3 v_{0,0} - \varphi_3(r))\Bigg] = \frac{h_r}{2} \frac{h_z}{2} \frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} f_{0,0}$$

2.7 Левый-верхний угол

При $i = 0$ и $z = N_z$ имеем граничное условие:
Имеем граничное условие:

$$u\big|_{z=L} = \varphi_r(r)$$

$$v_{0,N_z} = \varphi(r_0)$$

2.8 Правый-верхний угол

При $i = N_r$ и $z = N_z$ имеем граничное условие:
Имеем граничное условие:

$$u\big|_{z=L} = \varphi_r(r)$$

$$v_{N_r,N_z} = \varphi(r_{N_r})$$

2.9 Правый-нижний угол

Проинегрируем наше уравнение в $i = N_r$ и $j = 0$:

$$-\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i} \int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] = \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i} \int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)$$

Получаем:

$$-\left[\int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=r_i} dz - \int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=r_{i-\frac{1}{2}}} dz \right.$$
$$\left. + \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=z_{j+\frac{1}{2}}} dr - \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=z_j} dr\right] = \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i} \int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)drdz$$

Имеем граничные условия:

$$-k_1\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=R} = \chi_2\ u|_{r=R} - \varphi_2(z)$$
$$k_2\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0} = \chi_3\ u|_{z=0} - \varphi_3(r)$$

Получаем разностную схему:

$$-\left[-\hbar_j(\chi_2\ u|_{r=R} - \varphi_2(z)) - \hbar_j r_{i-\frac{1}{2}} k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z_j)\frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_r}\right.$$
$$\left. + \hbar_i r_i k_2(r_i, z_{j+\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_z} - \hbar_i(\chi_3 v_i - \varphi_3(r))\right] = \hbar_i\hbar_j r_i f_{i,j}$$

Перейдём к частному

$$-\left[-\frac{h_z}{2}(\chi_2 v_{N_r,0} - \varphi_2(z)) - \frac{h_z}{2} r_{N_r-\frac{1}{2}} k_1(r_{N_r-\frac{1}{2}}, z_0)\frac{v_{N_r,0} - v_{N_r-1,0}}{h_r}\right.$$
$$\left. + \frac{h_r}{2} r_{N_r} k_2(r_{N_r}, z_{\frac{1}{2}})\frac{v_{N_r,1} - v_{N_r,0}}{h_z} - \frac{h_r}{2}(\chi_3 v_{N_r,0} - \varphi_3(r))\right] = \frac{h_r}{2}\frac{h_z}{2} r_{N_r} f_{N_r,0}$$

3 Невязка разностной схемы

3.1 Невязка во внутренних точках

Запишем для уравнения разностной сетки во внутренних точках невязку:

$$-\Bigg[h_z r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}}, z_j)\frac{v_{i+1,j}-v_{i,j}}{h_r} - h_z r_{i-\frac{1}{2}} k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z_j)\frac{v_{i,j}-v_{i-1,j}}{h_r}$$
$$+h_r r_i k_2(r_i, z_{j+\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j+1}-v_{i,j}}{h_z} - h_r r_i k_2(r_i, z_{j-\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j}-v_{i,j-1}}{h_z}\Bigg] = h_r h_z r_i f_{i,j}$$

$$\xi_{i,j} = h_r h_z r_i f_{i,j} + \Bigg[h_z r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}}, z_j)\frac{u_{i+1,j}-u_{i,j}}{h_r} - h_z r_{i-\frac{1}{2}} k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z_j)\frac{u_{i,j}-u_{i-1,j}}{h_r}$$
$$+h_r r_i k_2(r_i, z_{j+\frac{1}{2}})\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{h_z} - h_r r_i k_2(r_i, z_{j-\frac{1}{2}})\frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{h_z}\Bigg]$$

Напишем разложение Тейлора для невязки:

$$u_{i,j-1} = u(r_i, z_j - h_z) = \left[u - h_z\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{h_z^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{h_z^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \frac{h_z^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}\right]_{i,j} + \mathcal{O}(h_y^5)$$

$$\frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{h_z} = \left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{h_z}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{h_z^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} - \frac{h_z^3}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial z^4}\right]_{i,j} + \mathcal{O}(h_y^4)$$

$$r_i k_2(r_i, z_{j-\frac{1}{2}}) = r_i k_2(x_i, z_j - \frac{h_z}{2}) = \left[rk_2 - \frac{h_z}{2}\frac{\partial rk_2}{\partial z} + \frac{h_z^2}{8}\frac{\partial^2 rk_2}{\partial z^2} - \frac{h_z^3}{48}\frac{\partial^3 rk_2}{\partial z^3}\right]_{i,j} + \mathcal{O}(h^4)$$

$$\begin{aligned}
r_i k_2(r_i, z_{j-\frac{1}{2}})\frac{u_{i,j}-u_{i,j-1}}{h_z} &= \left[rk_2\frac{\partial u}{\partial z}\right]_{i,j} - h_z\left[\frac{1}{2}rk_2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial rk_2}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}\right]_{i,j} + \\
&+ h_z^2\left[\frac{1}{6}rk_2\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \frac{1}{4}\frac{\partial rk_2}{\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{8}\frac{\partial^2 rk_2}{\partial z^2}\frac{\partial u}{\partial z}\right]_{i,j} - \\
&- h_z^3\left[\frac{1}{24}rk_2\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \frac{1}{12}\frac{\partial rk_2}{\partial z}\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \frac{1}{16}\frac{\partial^2 rk_2}{\partial z^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{48}\frac{\partial^3 rk_2}{\partial z^3}\frac{\partial u}{\partial z}\right]_{i,j} + \\
&+ \mathcal{O}(h^4)
\end{aligned}$$

Для $r_i k_2(r_i, z_{j+\frac{1}{2}})$ можно получить невязку аналогичным способом:

$$\begin{aligned}
r_i k_2(r_i, z_{j+\frac{1}{2}})\frac{u_{i,j+1}-u_{i,j}}{h_z} &= \left[rk_2\frac{\partial u}{\partial z}\right]_{i,j} + h_z\left[\frac{1}{2}rk_2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial rk_2}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}\right]_{i,j} + \\
&+ h_z^2\left[\frac{1}{6}rk_2\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \frac{1}{4}\frac{\partial rk_2}{\partial z}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{8}\frac{\partial^2 rk_2}{\partial z^2}\frac{\partial u}{\partial z}\right]_{i,j} + \\
&+ h_z^3\left[\frac{1}{24}rk_2\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \frac{1}{12}\frac{\partial rk_2}{\partial z}\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \frac{1}{16}\frac{\partial^2 rk_2}{\partial z^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{48}\frac{\partial^3 rk_2}{\partial z^3}\frac{\partial u}{\partial z}\right]_{i,j} + \\
&+ \mathcal{O}(h^4)
\end{aligned}$$

$$u_{i-1,j} = u(r_i - h_r, j) = \left[u - h_r\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{h_r^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \frac{h_r^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{h_r^4}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}\right]_{i,j} + \mathcal{O}(h^5)$$

$$\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_r} = \left[\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{h_r}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{h_r^2}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} - \frac{h_r^3}{24}\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}\right]_{i,j} + \mathcal{O}(h^4)$$

$$r_i k1(r_{i-\frac{1}{2}}, z_j) = r_i k1(x_i - \frac{h_r}{2}, z_j) = \left[rk1 - \frac{h_r}{2}\frac{\partial rk_1}{\partial r} + \frac{h_r^2}{8}\frac{\partial^2 rk_1}{\partial r^2} - \frac{h_r^3}{48}\frac{\partial^3 rk_1}{\partial r^3}\right]_{i,j} + \mathcal{O}(h^4)$$

$$\begin{aligned} r_i k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z_j)\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_r} &= \left[rk_1\frac{\partial u}{\partial r}\right]_{i,j} - h_r\left[\frac{1}{2}rk_1\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial rk_1}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial r}\right]_{i,j} + \\ &+ h_r^2\left[\frac{1}{6}rk_1\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{1}{4}\frac{\partial rk_1}{\partial r}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{8}\frac{\partial^2 rk_1}{\partial r^2}\frac{\partial u}{\partial r}\right]_{i,j} - \\ &- h_r^3\left[\frac{1}{24}rk_1\frac{\partial^4 u}{\partial r^4} - \frac{1}{12}\frac{\partial rk_1}{\partial r}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{1}{16}\frac{\partial^2 rk_1}{\partial r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{48}\frac{\partial^3 rk_1}{\partial r^3}\frac{\partial u}{\partial r}\right]_{i,j} + \\ &+ \mathcal{O}(h^4) \end{aligned}$$

Для $r_i k1(x_{i=\frac{1}{2}}, z_j)\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_r}$ можно получить невязку аналогично:

$$\begin{aligned} r_i k_1(x_{i+\frac{1}{2}}, z_j)\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_r} &= \left[rk_1\frac{\partial u}{\partial r}\right]_{i,j} + h_r\left[\frac{1}{2}rk_1\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial rk_1}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial r}\right]_{i,j} + \\ &+ h_r^2\left[\frac{1}{6}rk_1\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{1}{4}\frac{\partial rk_1}{\partial r}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{8}\frac{\partial^2 rk_1}{\partial r^2}\frac{\partial u}{\partial r}\right]_{i,j} + \\ &+ h_r^3\left[\frac{1}{24}rk_1\frac{\partial^4 u}{\partial r^4} - \frac{1}{12}\frac{\partial rk_1}{\partial r}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{1}{16}\frac{\partial^2 rk_1}{\partial r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{48}\frac{\partial^3 rk_1}{\partial r^3}\frac{\partial u}{\partial r}\right]_{i,j} + \\ &+ \mathcal{O}(h^4) \end{aligned}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} &r_i k_1(x_{i+\frac{1}{2}}, z_j)\frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h_r} - r_i k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z_j)\frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h_r} = h_r h_z\left(\left[rk_1\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial rk_1}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial r}\right]_{i,j} + \right. \\ &\left. + h_r^2\left[\frac{1}{12}rk_1\frac{\partial^4 u}{\partial r^4} - \frac{1}{6}\frac{\partial rk_1}{\partial r}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{1}{8}\frac{\partial^2 rk_1}{\partial r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{24}\frac{\partial^3 rk_1}{\partial r^3}\frac{\partial u}{\partial r}\right] + \mathcal{O}(h_r^4)\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &r_i k_2(r_i, z_{j+\frac{1}{2}})\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{h_z} - r_i k_2(r_i, z_{j-\frac{1}{2}})\frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{h_z} = h_r h_z\left(\left[rk_2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial rk_2}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}\right]_{i,j} + \right. \\ &\left. + h_z^2\left[\frac{1}{12}rk_2\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \frac{1}{6}\frac{\partial rk_2}{\partial z}\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \frac{1}{8}\frac{\partial^2 rk_2}{\partial z^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{24}\frac{\partial^3 rk_2}{\partial z^3}\frac{\partial u}{\partial z}\right]_{i,j} + \mathcal{O}(h_z^4)\right) \end{aligned}$$

Будем искать невязку в следующем виде:

$$\tilde{\xi}_{i,j} = \frac{\xi_{i,j}}{h_r h_z}$$

Тогда:

$$\tilde{\xi}_{i,j} = r_i f_{i,j} + \left[rk_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial rk_1}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial r}\right]_{i,j} \left[rk_2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial rk_2}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}\right]_{i,j} +$$
$$+ h_r^2 \left[\frac{1}{12} rk_1 \frac{\partial^4 u}{\partial r^4} - \frac{1}{6}\frac{\partial rk_1}{\partial r}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{1}{8}\frac{\partial^2 rk_1}{\partial r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{24}\frac{\partial^3 rk_1}{\partial r^3}\frac{\partial u}{\partial r}\right] + \mathcal{O}(h_r^3) +$$
$$+ h_z^2 \left[\frac{1}{12} rk_2 \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \frac{1}{6}\frac{\partial rk_2}{\partial z}\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \frac{1}{8}\frac{\partial^2 rk_2}{\partial z^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{24}\frac{\partial^3 rk_2}{\partial z^3}\frac{\partial u}{\partial z}\right]_{i,j} + \mathcal{O}(h_z^3)$$

Можно заметить, что:

$$\left[rk_1 \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial rk_1}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial r}\right]_{i,j} = \frac{\partial}{\partial r}\left(k_1 \frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

$$\left[rk_2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial rk_2}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}\right]_{i,j} = \frac{\partial}{\partial z}\left(k_2 \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Тем самым:

$$r_i f_{i,j} + \frac{\partial}{\partial r}\left(k_1 \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_2 \frac{\partial u}{\partial z}\right) = 0$$

Получаем:

$$\tilde{\xi}_{i,j} = h_r^2 \left[\frac{1}{12} rk_1 \frac{\partial^4 u}{\partial r^4} - \frac{1}{6}\frac{\partial rk_1}{\partial r}\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{1}{8}\frac{\partial^2 rk_1}{\partial r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{24}\frac{\partial^3 rk_1}{\partial r^3}\frac{\partial u}{\partial r}\right] + \mathcal{O}(h_r^3) +$$
$$+ h_z^2 \left[\frac{1}{12} rk_2 \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \frac{1}{6}\frac{\partial rk_2}{\partial z}\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \frac{1}{8}\frac{\partial^2 rk_2}{\partial z^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{24}\frac{\partial^3 rk_2}{\partial z^3}\frac{\partial u}{\partial z}\right]_{i,j} + \mathcal{O}(h_z^3)$$

Порядок аппроксимации $p_r = 2 - 0$, $p_z = 2 - 0$.

3.2 Невязка на левой границе

Запишем для уравнения разностной сетки на левой границе невязку:

$$-\left[h_z r_{\frac{1}{2}} k_1(r_{\frac{1}{2}}, z_j)\frac{v_{1,j} - v_{0,j}}{h_r} - 0\right.$$
$$\left. + \frac{h_r}{2}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} k_2(r_0, z_{j+\frac{1}{2}})\frac{v_{0,j+1} - v_{0,j}}{h_z} - \frac{h_r}{2}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} k_2(r_0, z_{j-\frac{1}{2}})\frac{v_{0,j} - v_{0,j-1}}{h_z}\right] = \frac{h_r}{2}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} h_z f_{0,j}$$

$$\xi_{0,j} = \frac{h_r}{2} h_z f_{0,j} + \left[h_z r_{\frac{1}{2}} k_1(r_{\frac{1}{2}}, z_j)\frac{v_{1,j} - v_{0,j}}{h_r} - 0\right.$$
$$\left. + \frac{h_r}{2}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} k_2(r_0, z_{j+\frac{1}{2}})\frac{v_{0,j+1} - v_{0,j}}{h_z} - \frac{h_r}{2}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} k_2(r_0, z_{j-\frac{1}{2}})\frac{v_{0,j} - v_{0,j-1}}{h_z}\right]$$

Напишем разложение Тейлора для невязки:

$$
k_1(r_{\frac{1}{2}}, z_j)\frac{u_{1,j}-u_{0,j}}{h_r} = \left[k_1\frac{\partial u}{\partial r}\right]_{i,j} + \frac{h_r}{2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]_{i,j} + \\
+ h_r^2\left[\frac{1}{6}k_1\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{1}{4}\frac{\partial k_1}{\partial r}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{8}\frac{\partial^2 k_1}{\partial r^2}\frac{\partial u}{\partial r}\right]_{i,j} + \mathcal{O}(h_r^3)
$$

$$
h_r k_2(r_0, z_{j+\frac{1}{2}})\frac{u_{0,j+1}-u_{0,j}}{h_z} - h_r k_2(r_0, z_{j-\frac{1}{2}})\frac{u_{0,j}-u_{0,j-1}}{h_z} = h_r\Bigg[h_z\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(k_2\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right)_{i,j} + \\
+ h_z^3\left(\frac{1}{12}k_2\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{1}{6}\frac{\partial k_2}{\partial z}\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \frac{1}{8}\frac{\partial^2 k_2}{\partial z^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{24}\frac{\partial^3 k_2}{\partial z^3}\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{0,j} + \mathcal{O}(h_z^4)\Bigg]
$$

$$
\xi_{0,j} = \frac{h_r}{2}h_z f_{0,j} + \Bigg[2h_z\Bigg(\left[k_1\frac{\partial u}{\partial r}\right]_{i,j} + \frac{h_r}{2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial r}\right)\right]_{i,j} + \\
+ h_r^2\left[\frac{1}{6}k_1\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{1}{4}\frac{\partial k_1}{\partial r}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{8}\frac{\partial^2 k_1}{\partial r^2}\frac{\partial u}{\partial r}\right]_{i,j} + \mathcal{O}(h_r^3)\Bigg) - 0 + \\
\frac{h_r}{2}\left(h_z\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(k_2\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]_{i,j} + h_z^3\left[\frac{1}{12}k_2\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{1}{6}\frac{\partial k_2}{\partial z}\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \frac{1}{8}\frac{\partial^2 k_2}{\partial z^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{24}\frac{\partial^3 k_2}{\partial z^3}\frac{\partial u}{\partial z}\right]_{0,j} + \mathcal{O}(h_z^4)\right)\Bigg]
$$

Будем искать невязку в следующем виде:

$$
\tilde{\xi}_{0,j} = \frac{\xi_{0,j}}{2h_z}
$$

$$
\tilde{\xi}_{0,j} = \frac{h_r}{4}\left[f + 2\frac{\partial}{\partial r}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_2\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]_{0,j} + \left[k_1\frac{\partial u}{\partial r}\right]_{0,j} + \\
+ h_r^2\left[\frac{1}{6}k_1\frac{\partial^3 u}{\partial r^3} + \frac{1}{4}\frac{\partial k_1}{\partial r}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{8}\frac{\partial^2 k_1}{\partial r^2}\frac{\partial u}{\partial r}\right]_{i,j} + \mathcal{O}(h_r^3) + \\
+ \frac{h_r}{4}\left[h_z^2\left(\frac{1}{12}k_2\frac{\partial^4 u}{\partial z^4} + \frac{1}{6}\frac{\partial k_2}{\partial z}\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} + \frac{1}{8}\frac{\partial^2 k_2}{\partial z^2}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{24}\frac{\partial^3 k_2}{\partial z^3}\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{0,j} + \mathcal{O}(h_z^3)\right]
$$

Можно заметить:

$$
\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=0} = 0
$$

$$
\left[f + 2\frac{\partial}{\partial r}\left(k_1\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_2\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]_{0,j} = 0
$$

Порядок аппроксимации $p_r = 2 - 0, p_z = 2 - 0$.

4 Запись СЛАУ

Перейдём к одноиндексной записи

$$m = j(N_r + 1) + i$$

Индексы изменяются в следующих границах:

$$0 \le i \le N_r$$

$$0 \le j \le N_z$$

Тогда имеем:

$$0 \le m < (N_r + 1)(N_y + 1)$$

4.1 Запись для внутренних точек

Перепишем наше уравнение с использованием нового индеса для $i \in (0, N_r)$ и $j \in (0, N_z)$:

$$-\left[h_z r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}}, z_j)\frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_r} - h_z r_{i-\frac{1}{2}} k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z_j)\frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_r}\right.$$
$$\left. + h_r r_i k_2(r_i, z_{j+\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_z} - h_r r_i k_2(r_i, z_{j-\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_z}\right] = h_r h_z r_i f_{i,j}$$

$$-\frac{h_r}{h_z} r_i k_2(r_i, z_{j-\frac{1}{2}}) v_{i,j-1} - \frac{h_z}{h_r} r_{i-\frac{1}{2}} k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z_j) v_{i-1,j} +$$
$$+\left[\frac{h_z}{h_r} r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}}, z_j) + \frac{h_z}{h_r} r_{i-\frac{1}{2}} k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z_j) + \frac{h_r}{h_z} r_i k_2(r_i, z_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{h_r}{h_z} r_i k_2(r_i, z_{j-\frac{1}{2}})\right] v_{i,j}$$
$$-\frac{h_z}{h_r} r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}}, z_j) v_{i+1,j} - \frac{h_r}{h_z} r_i k_2(r_i, z_{j+1}) v_{i,j+\frac{1}{2}} = h_r h_z r_i f_{i,j}$$

Введём новые обозначения:

$$a_m w_{m-L} + b_m w_{m-1} + c_m w_m + d_m w_{m+1} + e_m w_{m+L} = g_m$$

где коэффициенты равны:

$$a_m = -\frac{h_r}{h_z} r_i k_2(r_i, z_{j-\frac{1}{2}})$$

$$b_m = -\frac{h_z}{h_r} r_{i-\frac{1}{2}} k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z_j)$$

$$c_m = \frac{h_z}{h_r} r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}}, z_j) + \frac{h_z}{h_r} r_{i-\frac{1}{2}} k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z_j) + \frac{h_r}{h_z} r_i k_2(r_i, z_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{h_r}{h_z} r_i k_2(r_i, z_{j-\frac{1}{2}})$$

$$d_m = -\frac{h_z}{h_r} r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}}, z_j)$$

$$e_m = -\frac{h_r}{h_z} r_i k_2(r_i, z_{j+1})$$

$$g_m = h_r h_z r_i f_{i,j}$$

4.2 Запись для левой границы

Перепишем наше уравнение с использованием нового индекса для $i = 0$ и $j \in (0, N_z)$:

$$\begin{aligned}
&-\Bigg[h_z r_{\frac{1}{2}} k_1(r_{\frac{1}{2}}, z_j) \frac{v_{1,j} - v_{0,j}}{h_r} - 0 \\
&+\frac{h_r}{2}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} k_2(r_0, z_{j+\frac{1}{2}}) \frac{v_{0,j+1} - v_{0,j}}{h_z} - \frac{h_r}{2}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} k_2(r_0, z_{j-\frac{1}{2}}) \frac{v_{0,j} - v_{0,j-1}}{h_z}\Bigg] = \frac{h_r}{2}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} h_z f_{0,j}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\frac{h_r}{2h_z}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} k_2(r_0, z_{j-\frac{1}{2}}) v_{0,j-1} + \\
&+\left[\frac{h_z}{h_r} r_{\frac{1}{2}} k_1(r_{\frac{1}{2}}, z_j) + \frac{h_r}{2h_z}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} k_2(r_0, z_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{h_r}{2h_z}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} k_2(r_0, z_{j-\frac{1}{2}})\right] v_{0,j} \\
&-\frac{h_z}{h_r} r_{\frac{1}{2}} k_1(r_{\frac{1}{2}}, z_j) v_{1,j} - \frac{h_r}{2h_z}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} k_2(r_0, z_{j+\frac{1}{2}}) v_{0,j+1} = \frac{h_r}{2}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} h_z f_{0,j}
\end{aligned}$$

Введём новые обозначения:

$$a_m w_{m-L} + c_m w_m + d_m w_{m+1} + e_m w_{m+L} = g_m$$

где коэффициенты равны:

$$a_m = -\frac{h_r}{2h_z}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} k_2(r_0, z_{j-\frac{1}{2}})$$

$$c_m = \frac{h_z}{h_r} r_{\frac{1}{2}} k_1(r_{\frac{1}{2}}, z_j) + \frac{h_r}{2h_z}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} k_2(r_0, z_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{h_r}{2h_z}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} k_2(r_0, z_{j-\frac{1}{2}})$$

$$d_m = -\frac{h_z}{h_r} r_{\frac{1}{2}} k_1(r_{\frac{1}{2}}, z_j)$$

$$e_m = -\frac{h_r}{2h_z}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} k_2(r_0, z_{j+\frac{1}{2}})$$

$$g_m = \frac{h_r}{2}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} h_z f_{0,j}$$

4.3 Запись для правой границы

Перепишем наше уравнение с использованием нового индекса для $i = N_r$ и $j \in (0, N_z)$:

$$-\Bigg[-h_z(\chi_2 v_{N_r} - \varphi_2(z)) - h_z r_{N_r-\frac{1}{2}} k_1(r_{N_r-\frac{1}{2}}, z_j)\frac{v_{N_r,j} - v_{N_r-1,j}}{h_r}$$
$$+\frac{h_r}{2} r_{N_r} k_2(r_{N_r}, z_{j+\frac{1}{2}})\frac{v_{N_r,j+1} - v_{N_r,j}}{h_z} - \frac{h_r}{2} r_{N_r} k_2(r_{N_r}, z_{j-\frac{1}{2}})\frac{v_{N_r,j} - v_{N_r,j-1}}{h_z}\Bigg] = \frac{h_r}{2} r_{N_r} h_z f_{N_r,j}$$

$$-\frac{h_r}{2h_z} r_{N_r} k_2(r_{N_r}, z_{j-\frac{1}{2}}) v_{N_r,j-1} - \frac{h_z}{h_r} r_{N_r-\frac{1}{2}} k_1(r_{N_r-\frac{1}{2}}, z_j) v_{N_r-1,j}$$
$$+\left[h_z\chi_2 + \frac{h_z}{h_r} r_{N_r-\frac{1}{2}} k_1(r_{N_r-\frac{1}{2}}, z_j) + \frac{h_r}{2h_z} r_{N_r} k_2(r_{N_r, z_{j+\frac{1}{2}}}) + \frac{h_r}{2h_z} r_{N_r} k_2(r_{N_r}, z_{j-\frac{1}{2}})\right] v_{N_r,j}$$
$$-\frac{h_r}{2h_z} r_{N_r} k_2(r_{N_r}, z_{j+\frac{1}{2}}) v_{N_r,j+1} = \frac{h_r}{2} r_{N_r} h_z f_{N_r,j} + h_z\phi_2(z)$$

Введём новые обозначения:

$$a_m w_{m-L} + b_m w_{m-1} + c_m w_m + e_m w_{m+L} = g_m$$

где коэффициенты:

$$a_m = -\frac{h_r}{2h_z} r_{N_r} k_2(r_{N_r}, z_{j-\frac{1}{2}})$$

$$b_m = -\frac{h_z}{h_r} r_{N_r-\frac{1}{2}} k_1(r_{N_r-\frac{1}{2}}, z_j)$$

$$c_m = h_z\chi_2 + \frac{h_z}{h_r} r_{N_r-\frac{1}{2}} k_1(r_{N_r-\frac{1}{2}}, z_j) + \frac{h_r}{2h_z} r_{N_r} k_2(r_{N_r, z_{j+\frac{1}{2}}}) + \frac{h_r}{2h_z} r_{N_r} k_2(r_{N_r}, z_{j-\frac{1}{2}})$$

$$e_m = -\frac{h_r}{2h_z} r_{N_r} k_2(r_{N_r}, z_{j+\frac{1}{2}})$$

$$g_m = \frac{h_r}{2} r_{N_r} h_z f_{N_r,j} + h_z\varphi_2(z)$$

4.4 Запись для нижней границы

Перепишем наше уравнение с использованием нового индекса для $i \in (0, N_r)$ и $j = 0$:

$$-\Bigg[\frac{h_z}{2} r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}}, z_0)\frac{v_{i+1,0} - v_{i,0}}{h_r} - \frac{h_z}{2} r_{i-\frac{1}{2}} k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z_0)\frac{v_{i,0} - v_{i-1,0}}{h_r}$$
$$+h_r r_i k_2(r_i, z_{\frac{1}{2}})\frac{v_{i,1} - v_{i,0}}{h_z} - h_r(\chi_3 v_{i,0} - \varphi_3(r))\Bigg] = h_r\frac{h_z}{2} r_i f_{i,0}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{h_z}{2h_r}v_{i-\frac{1}{2}}k_1(r_{i-\frac{1}{2}},z_0)v_{i-1,0}\\
&+\left[h_r\chi_3+\frac{h_z}{2h_r}r_{i+\frac{1}{2}}k_1(r_{i+\frac{1}{2}},z_0)+\frac{h_z}{2h_r}r_{i-\frac{1}{2}}k_1(r_{i-\frac{1}{2}},z_0)+\frac{h_r}{h_z}r_ik_2(r_i,z_{\frac{1}{2}})\right]v_{i,0}\\
&-\frac{h_z}{2h_r}r_{i+\frac{1}{2}}k_1(r_{i+\frac{1}{2}},z_0)v_{i+1,0}-\frac{h_r}{h_z}r_ik_2(r_i,z_{\frac{1}{2}})v_{i,1}=h_r\frac{h_z}{2}r_if_{i,0}+h_r\varphi(r)
\end{aligned}
$$

Введём новые обозначения:

$$b_mw_{m-1}+c_mw_m+d_mw_{m+1}+e_mw_{m+L}=g_m$$

где коэффициенты ранвы:

$$b_m=-\frac{h_z}{2h_r}r_{i-\frac{1}{2}}k_1(r_{i-\frac{1}{2}},z_0)$$

$$c_m=h_r\chi_3+\frac{h_z}{2h_r}r_{i+\frac{1}{2}}k_1(r_{i+\frac{1}{2}},z_0)+\frac{h_z}{2h_r}r_{i-\frac{1}{2}}k_1(r_{i-\frac{1}{2}},z_0)+\frac{h_r}{h_z}r_ik_2(r_i,z_{\frac{1}{2}})$$

$$d_m=-\frac{h_z}{2h_r}r_{i+\frac{1}{2}}k_1(r_{i+\frac{1}{2}},z_0)$$

$$e_m=-\frac{h_r}{h_z}r_ik_2(r_i,z_{\frac{1}{2}})$$

$$g_m=h_r\frac{h_z}{2}r_if_{i,0}+h_r\varphi_3(r)$$

4.5 Запись для верхней границы

Перепишем наше уравнение с использованием нового индекса для $i\in[0,N_r]$ и $j=N_z$:

$$v_{i,N_z}=\varphi(r_i)$$

Перейдём к новым обозначениям:

$$c_mw_m=\varphi_m$$

где:

$$c_m=1,\quad \varphi_m=\varphi_2(r_i)$$

4.6 Запись для левой нижней граничной точки

Перепишем наше уравнение с использованием нового индекса для $i = 0$ и $j = 0$:

$$-\left[\frac{h_z}{2} r_{\frac{1}{2}} k_1(r_{\frac{1}{2}}, z_0) \frac{v_{1,0} - v_{0,0}}{h_r} - 0 \right.$$
$$\left. + \frac{h_r}{2} \frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} k_2(r_0, z_{\frac{1}{2}}) \frac{v_{0,1} - v_{0,0}}{h_z} - \frac{h_r}{2} \frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} (\chi_3 v_{0,0} - \varphi_3(r)) \right] = \frac{h_r}{2} \frac{h_z}{2} \frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} f_{0,0}$$

$$\left[\frac{h_z}{2h_r} r_{\frac{1}{2}} k_1(r_{\frac{1}{2}}, z_0) + \frac{h_r}{2h_z} \frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} k_2(r_0, z_{\frac{1}{2}}) + \frac{h_r}{2} \chi_3 \right] v_{0,0} -$$
$$- \frac{h_z}{2h_r} r_{\frac{1}{2}} k_1(r_{\frac{1}{2}}, z_0) v_{1,0} - \frac{h_r}{2h_z} \frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} k_2(r_0, z_{\frac{1}{2}}) v_{0,1} = \frac{h_r}{2} \frac{h_z}{2} \frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} f_{0,0} + \frac{h_r}{2} \frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} \varphi_3(r_0)$$

Введём новые обозначения:

$$c_m w_m + d_m w_{m+1} + e_m w_{m+L} = g_m$$

где коэффициенты ранвы:

$$c_m = \frac{h_z}{2h_r} r_{\frac{1}{2}} k_1(r_{\frac{1}{2}}, z_0) + \frac{h_r}{2h_z} \frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} k_2(r_0, z_{\frac{1}{2}}) + \frac{h_r}{2} \chi_3$$

$$d_m = -\frac{h_z}{2h_r} r_{\frac{1}{2}} k_1(r_{\frac{1}{2}}, z_0)$$

$$e_m = -\frac{h_r}{2h_z} \frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} k_2(r_0, z_{\frac{1}{2}})$$

$$g_m = \frac{h_r}{2} \frac{h_z}{2} \frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} f_{0,0} + \frac{h_r}{2} \frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} \varphi_3(r_0)$$

4.7 Запись для правой нижней граничной точки

Перепишем наше уравнение с использованием нового индекса для $i = N_r$ и $j = 0$:

$$-\left[-\frac{h_z}{2} (\chi_2 v_{N_r,0} - \varphi_2(z)) - \frac{h_z}{2} r_{N_r - \frac{1}{2}} k_1(r_{N_r - \frac{1}{2}}, z_0) \frac{v_{N_r,0} - v_{N_r-1,0}}{h_r} \right.$$
$$\left. + \frac{h_r}{2} r_{N_r} k_2(r_{N_r}, z_{\frac{1}{2}}) \frac{v_{N_r,1} - v_{N_r,0}}{h_z} - \frac{h_r}{2} (\chi_3 v_{N_r,0} - \varphi_3(r)) \right] = \frac{h_r}{2} \frac{h_z}{2} r_{N_r} f_{N_r,0}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{h_z}{2h_r} r_{N_r-\frac{1}{2}} k_1(r_{N_r-\frac{1}{2}}, z_0) v_{N_r-1,0} + \\
&+ \left[\frac{h_z}{2}\chi_2 + \frac{h_z}{2h_r} r_{N_r-\frac{1}{2}} k_1(r_{N_r-\frac{1}{2}}, z_0) + \frac{h_r}{2h_z} r_{N_r} k_2(r_{N_r, z_{\frac{1}{2}}}) + \frac{h_r}{2}\chi_3\right] v_{N_r,0} - \\
&- \frac{h_r}{2h_z} r_{N_r} k_2(r_{N_r}, z_{\frac{1}{2}}) v_{N_r,1} = \frac{h_r}{2}\frac{h_z}{2} r_{N_r} f_{N_r,0} + \frac{h_z}{2}\varphi_2(z) + \frac{h_r}{2}\varphi_3(r)
\end{aligned}
$$

Введём новые обозначения:

$$
b_m w_{m-1} + c_m w_m + e_m w_{m+L} = g_m
$$

где коэффициенты равны:

$$
b_m = -\frac{h_z}{2h_r} r_{N_r-\frac{1}{2}} k_1(r_{N_r-\frac{1}{2}}, z_0)
$$

$$
c_m = \frac{h_z}{2}\chi_2 + \frac{h_z}{2h_r} r_{N_r-\frac{1}{2}} k_1(r_{N_r-\frac{1}{2}}, z_0) + \frac{h_r}{2h_z} r_{N_r} k_2(r_{N_r, z_{\frac{1}{2}}}) + \frac{h_r}{2}\chi_3
$$

$$
e_m = -\frac{h_r}{2h_z} r_{N_r} k_2(r_{N_r}, z_{\frac{1}{2}})
$$

$$
g_m = \frac{h_r}{2}\frac{h_z}{2} r_{N_r} f_{N_r,0} + \frac{h_z}{2}\varphi_2(z) + \frac{h_r}{2}\varphi_3(r)
$$

5 Заключение