

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт компьютерных наук и технологий
Высшая школа программной инженерии

Курсовая Работа

по дисциплине
«Математические модели»

Выполнил:
Группа:

Ферапонтов М.В.
гр. 3530904/00104

Проверил:

Воскобойников С. П.

Санкт-Петербург
2023

Содержание

1	Вступление	2
1.1	Постановка задачи	2
2	Основная часть	3
2.1	Разностная схема	3
2.1.1	На левой границе	4
2.1.2	На правой границе	5
2.1.3	На нижней границе	5
2.1.4	На верхней границе	6
2.1.5	Правый-нижний угол	6
3	Заключение	8

1 Вступление

1.1 Постановка задачи

Вариант N. Используя интегро-интерполяционный метод, разработать подпрограмму для моделирования распределения температуры в цилиндре, описываемого математической моделью

$$-\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]=f(r,z)$$

$$0 \leq c_{11} \leq k_1(r,z) \leq c_{12}, \quad 0 \leq c_{11} \leq k_2(r,z) \leq c_{22}, \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq z \leq L$$

С граничными условиями:

$$\begin{array}{ll} u|_{r=0} - \text{ограничено} & -k_1 \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = \chi_2 u|_{r=R} - \varphi_2(z) \\ k_2 \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \chi_3 u|_{z=0} - \varphi_3(r) & u|_{z=L} = \varphi_r(r) \\ \chi_2 \geq 0 & \chi_3 \geq 0 \end{array}$$

Матрица алгебраической системы должна храниться в упакованной форме.

2 Основная часть

2.1 Разностная схема

Введем основную сетку:

N_r — число разбиений на $[0, R]$

$r_0 < r_1 < \dots < r_N$

$r_0 = 0, \quad r_N = R$

$h_i = \frac{R - 0}{N_r}, \quad i = 0, \dots, N_r$

N_z — число разбиений на $[0, L]$

$z_0 < z_1 < \dots < z_N$

$z_0 = 0, \quad z_N = L$

$h_j = \frac{L - 0}{N_z}, \quad j = 0, \dots, N_z$

Введем дополнительную сетку:

$r_{i-\frac{1}{2}} = \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \quad i = 1, \dots, N_r$

$z_{j-\frac{1}{2}} = \frac{z_j + z_{j-1}}{2} \quad j = 1, \dots, N_z$

$\bar{h}_i = \begin{cases} \frac{h_i+1}{2}, & i = 0 \\ \frac{h_i+h_{i+1}}{2}, & i = 1, 2, \dots, N_r - 1 \\ \frac{h_i}{2}, & i = N_r \end{cases}$

$\bar{h}_j = \begin{cases} \frac{h_j+1}{2}, & j = 0 \\ \frac{h_j+h_{j+1}}{2}, & j = 1, 2, \dots, N_z - 1 \\ \frac{h_j}{2}, & j = N_z \end{cases}$

Преобразуем наше начальное уравнение домножив на r

$$- \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(rk_1(r, z) \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(rk_2(r, z) \frac{\partial u}{\partial v} \right) \right] = rf(r, z)$$

Проинтегрируем уравнение внутри интервала:

$$- \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \int_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(rk_1(r, z) \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(rk_2(r, z) \frac{\partial u}{\partial v} \right) \right] dr dz = \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \int_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r, z) dr dz$$

Получим:

$$\begin{aligned} & - \left[\int_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} rk_1(r, z) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_{i+\frac{1}{2}}} dz - \int_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} rk_1(r, z) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_{i-\frac{1}{2}}} dz \right. \\ & \left. + \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rk_2(r, z) \frac{\partial u}{\partial v} \Big|_{z=z_{j+\frac{1}{2}}} dr - \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rk_2(r, z) \frac{\partial u}{\partial v} \Big|_{z=z_{j-\frac{1}{2}}} dr \right] = \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \int_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r, z) dr dz \end{aligned}$$

Воспользуемся формулами численного дифференцирования:

$$k_1(r, z) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_{i-\frac{1}{2}}} \approx k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z) \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_i}$$

$$k_2(r, z) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{z=z_{j-\frac{1}{2}}} \approx k_2(r, z_{j-\frac{1}{2}}) \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_j}$$

Также воспользуемся формулой средних прямоугольников:

$$\int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} r \varphi(r, z) dr = \bar{h}_i r_i \varphi_i$$

$$\int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \int_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} r \varphi(r, z) dr dz = \bar{h}_i \bar{h}_j r_i \varphi_{i,j}$$

В итоге получаем разностную схему внутри интервала:

$$\begin{aligned} & - \left[\bar{h}_j r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}}, z_j) \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_{i+1}} - \bar{h}_j r_{i-\frac{1}{2}} k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z_j) \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_i} \right. \\ & \left. + \bar{h}_i r_{i+\frac{1}{2}} k_2(r_i, z_{j+\frac{1}{2}}) \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_{j+1}} - \bar{h}_i r_{i-\frac{1}{2}} k_2(r_i, z_{j-\frac{1}{2}}) \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_j} \right] = \bar{h}_i \bar{h}_j r_i f_{i,j} \end{aligned}$$

Теперь найдем значение разностной схемы на углах и границах интервалов

2.1.1 На левой границе

Проинтегрируем наше уравнение в $i = 0$ и z внутри промежутка

$$- \int_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \int_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r k_1(r, z) \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r k_2(r, z) \frac{\partial u}{\partial v} \right) \right] dr dz = \int_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \int_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} r f(r, z) dr dz$$

Получаем:

$$\begin{aligned} & - \left[\int_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} r k_1(r, z) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_{i+\frac{1}{2}}} dz - \int_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} r k_1(r, z) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_i} dz \right. \\ & \left. + \int_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} r k_2(r, z) \frac{\partial u}{\partial v} \Big|_{z=z_{j+\frac{1}{2}}} dr - \int_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} r k_2(r, z) \frac{\partial u}{\partial v} \Big|_{z=z_{j-\frac{1}{2}}} dr \right] = \int_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \int_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} r f(r, z) dr dz \end{aligned}$$

Имеем граничное условие:

$$u|_{r=0} - \text{ограничено, т. е. } \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0$$

$$\int_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} r f dr \approx f_i \int_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} r dr = f_i \frac{r_{i+\frac{1}{2}}^2}{2} = h_r f_i \frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{2}, \quad i = 0, \quad r_i = 0, r_{i+\frac{1}{2}} = \frac{h_r}{2}$$

Получаем разностную схему:

$$\begin{aligned} & - \left[\bar{h}_j r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}}, z_j) \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_{i+1}} - 0 \right. \\ & \left. + \bar{h}_i r_{i+\frac{1}{2}} k_2(r_i, z_{j+\frac{1}{2}}) \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_{j+1}} - \bar{h}_i r_{i-\frac{1}{2}} k_2(r_i, z_{j-\frac{1}{2}}) \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_j} \right] = \bar{h}_i \bar{h}_j r_i f_{i,j} \end{aligned}$$

2.1.2 На правой границе

Проинтегрируем наше уравнение в $i = N_x$ и z внутри промежутка

$$- \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i} \int_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r k_1(r, z) \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r k_2(r, z) \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dr dz = \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i} \int_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} r f(r, z) dr dz$$

Получаем:

$$\begin{aligned} & - \left[\int_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} r k_1(r, z) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_i} dz - \int_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} r k_1(r, z) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_{i-\frac{1}{2}}} dz \right. \\ & \left. + \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i} r k_2(r, z) \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=z_{j+\frac{1}{2}}} dr - \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i} r k_2(r, z) \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=z_{j-\frac{1}{2}}} dr \right] = \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i} \int_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} r f(r, z) dr dz \end{aligned}$$

Имеем граничное условие:

$$-k_1 \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} = \chi_2 u|_{r=R} - \varphi_2(z)$$

Получаем разностную схему:

$$\begin{aligned} & - \left[-\bar{h}_j (\chi_2 v_i - \varphi_2(z)) - \bar{h}_j r_{i-\frac{1}{2}} k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z_j) \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_i} \right. \\ & \left. + \bar{h}_i r_{i+\frac{1}{2}} k_2(r_i, z_{j+\frac{1}{2}}) \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_{j+1}} - \bar{h}_i r_{i-\frac{1}{2}} k_2(r_i, z_{j-\frac{1}{2}}) \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_j} \right] = \bar{h}_i \bar{h}_j r_i f_{i,j} \end{aligned}$$

2.1.3 На нижней границе

Проинтегрируем наше уравнение $j = 0$ и i внутри промежутка

$$- \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \int_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r k_1(r, z) \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r k_2(r, z) \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] dr dz = \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \int_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} r f(r, z) dr dz$$

Получаем:

$$\begin{aligned}
& - \left[\int_{z_i}^{z_{i+\frac{1}{2}}} rk_1(r, z) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_{i+\frac{1}{2}}} dz - \int_{z_i}^{z_{i+\frac{1}{2}}} rk_1(r, z) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_{i-\frac{1}{2}}} dz \right. \\
& \left. + \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rk_2(r, z) \frac{\partial u}{\partial v} \Big|_{z=z_{j+\frac{1}{2}}} dr - \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rk_2(r, z) \frac{\partial u}{\partial v} \Big|_{z=z_j} dr \right] = \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \int_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r, z) dr dz
\end{aligned}$$

Имеем граничное условие:

$$k_2 \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} = \chi_3 u|_{z=0} - \varphi_3(r)$$

Получаем разностную схему:

$$\begin{aligned}
& - \left[\bar{h}_j r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}}, z_j) \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_{i+1}} - \bar{h}_j r_{i-\frac{1}{2}} k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z_j) \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_i} \right. \\
& \left. + \bar{h}_i r_{i+\frac{1}{2}} k_2(r_i, z_{j+\frac{1}{2}}) \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_{j+1}} - \bar{h}_i (\chi_3 v_i - \varphi_3(r)) \right] = \bar{h}_i \bar{h}_j r_i f_{i,j}
\end{aligned}$$

2.1.4 На верхней границе

Имеем граничное условие:

$$u|_{z=L} = \varphi_r(r)$$

2.1.5 Правый-нижний угол

Проинтегрируем наше уравнение

$$- \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i} \int_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(rk_1(r, z) \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(rk_2(r, z) \frac{\partial u}{\partial v} \right) \right] = \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i} \int_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r, z)$$

Получаем:

$$\begin{aligned}
& - \left[\int_{z_i}^{z_{i+\frac{1}{2}}} rk_1(r, z) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_i} dz - \int_{z_i}^{z_{i+\frac{1}{2}}} rk_1(r, z) \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=r_{i-\frac{1}{2}}} dz \right. \\
& \left. + \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i} rk_2(r, z) \frac{\partial u}{\partial v} \Big|_{z=z_{j+\frac{1}{2}}} dr - \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i} rk_2(r, z) \frac{\partial u}{\partial v} \Big|_{z=z_j} dr \right] = \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i} \int_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r, z) dr dz
\end{aligned}$$

Имеем граничные условия:

$$\begin{aligned} -k_1 \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} &= \chi_2 u|_{r=R} - \varphi_2(z) \\ k_2 \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \chi_3 u|_{z=0} - \varphi_3(r) \end{aligned}$$

Получаем разностную схему:

$$\begin{aligned} & - \left[-\bar{h}_j (\chi_2 u|_{r=R} - \varphi_2(z)) - \bar{h}_j r_{i-\frac{1}{2}} k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z_j) \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_i} \right. \\ & \left. + \bar{h}_i r_{i+\frac{1}{2}} k_2(r_i, z_{j+\frac{1}{2}}) \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_{j+1}} - \bar{h}_i (\chi_3 v_i - \varphi_3(r)) \right] = \bar{h}_i \bar{h}_j r_i f_{i,j} \end{aligned}$$

Другие углы нам известны.

3 Заключение