

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт компьютерных наук и технологий
Высшая школа программной инженерии

Лабораторная работа № 1

по дисциплине
«Математические модели»

Выполнил:
Группа:

Ферапонтов М.В.
гр. 3530904/01004

Проверил:

Дед Пихто

Санкт-Петербург
2023

Содержание

1	Вступление	2
1.1	Постановка задачи	2
1.2	Используемое ПО	2
2	Основная часть	3
2.1	Интегро-интеполяционный метод (метод баланса)	3
2.2	Метод прогонки	5
2.3	Оценка погрешности	7
2.3.1	Невязка разностной схемы	7
2.3.2	Структура погрешности разностной схемы	7
2.3.3	Вклад от погрешности решения системы алгебраических уравнений	8
2.3.4	Разложение невязки	8
3	Заключение	13
3.1	Вывод	13
3.2	Код	13

1 Вступление

1.1 Постановка задачи

Вариант СР. Используя интегро-интерполяционный метод (метод баланса), разработать программу для моделирования стационарного распределения температуры в полом цилиндре, описываемого математической моделью вида:

$$-\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rk(r)\frac{du}{dr}\right) - q(r)u\right] = f(r), \quad r \in [R_L, R_R], \quad R_L > 0, \\ 0 < c_1 \leq k(r) \leq c_2, \quad 0 \leq q(r)$$

Граничные условия:

$$k \frac{du}{dr} \Big|_{r=R_L} = -\nu_1 \qquad -k \frac{du}{dr} \Big|_{r=R_R} = -\nu_2$$

1.2 Используемое ПО

1. [Boost library](#) - библиотека для тестирования и других функций

2 Основная часть

2.1 Интегро-интеполяционный метод (метод баланса)

Введем основную сетку, где N - число разбиений.

$$r_0 < r_1 < \dots < r_N, \quad r_i \in [R_L, R_R], \quad r_0 = R_L, \quad r_N = R_R$$

$$h_i = r_i - r_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

$$r_{r-0.5} = \frac{r_i - r_{i-1}}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

Введем дополнительную сетку:

$$\bar{h}_i = \begin{cases} \frac{h_i+1}{2}, & i = 0 \\ \frac{h_i+h_{i+1}}{2}, & i = 1, 2, \dots, N-1 \\ \frac{h_i}{2}, & i = N \end{cases}$$

Проведем аппроксимацию начального уравнения.

Для $i = 0$

$$\begin{aligned} & - \int_{r_i}^{r_{i+0.5}} \left[\frac{d}{dr} \left(rk(r) \frac{du(r)}{dr} \right) - rq(r)u(r) \right] dr = \int_{r_i}^{r_{i+0.5}} rf(r) dr, \\ & - \left[rk(r) \frac{du(r)}{dr} \Big|_{r=r_{i+0.5}} - rk(r) \frac{du(r)}{dr} \Big|_{r_i} - \int_{r_i}^{r_{i+0.5}} rq(r)u(r) dr \right] = \int_{r_i}^{r_{i+0.5}} rf(r) dr, \end{aligned}$$

Формула центральных разностей:

$$\frac{du(r)}{dr} \Big|_{r=r_{i+0.5}} \approx \frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}},$$

Граничное условие:

$$k(r) \frac{du(r)}{dr} \Big|_{r=R_L} = -\nu_1,$$

Формула левых прямоугольников:

$$\int_{r_i}^{r_{i+0.5}} r \varphi_i dr = \bar{h}_i r_i \varphi_i$$

Получаем разностную схему для $i = 0$:

$$- \left[r_{i+0.5} \cdot k_{i+0.5} \frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}} - r_i \cdot (-\nu_1) - \bar{h}_i r_i q_i v_i \right] = \bar{h}_i r_i f_i$$

Для $i = 1, 2, \dots, N-1$

$$- \int_{r_{i-0.5}}^{r_{i+0.5}} \left[\frac{d}{dr} \left(rk(r) \frac{du(r)}{dr} \right) - rq(r)u(r) \right] dr = \int_{r_{i-0.5}}^{r_{i+0.5}} rf(r) dr,$$

$$\begin{aligned}
& - \left[rk(r) \frac{du(r)}{dr} \Big|_{r=r_{i+0.5}} - rk(r) \frac{du(r)}{dr} \Big|_{r_{i-0.5}} - \int_{r_{i-0.5}}^{r_{i+0.5}} rq(r)u(r) dr \right] = \int_{r_{i-0.5}}^{r_{i+0.5}} rf(r) dr, \\
& \frac{du(r)}{dr} \Big|_{r=r_{i-0.5}} \approx \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i} \\
& \int_{r_{i-0.5}}^{r_{i+0.5}} r\varphi_i dr = \hbar r_i \varphi_i
\end{aligned}$$

Получаем разностную схему для $i = 1, 2, \dots, N-1$:

$$- \left[r_{i+0.5} \cdot k_{i+0.5} \frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}} - r_{i-0.5} k_{i-0.5} \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i} - \hbar r_i q_i v_i \right] = \hbar r_i f_i$$

Для $i = N$:

$$\begin{aligned}
& - \int_{r_{i-0.5}}^{r_i} \left[\frac{d}{dr} \left(rk(r) \frac{du(r)}{dr} \right) - rq(r)u(r) \right] dr = \int_{r_{i-0.5}}^{r_i} rf(r) dr, \\
& - \left[rk(r) \frac{du(r)}{dr} \Big|_{r=r_i} - rk(r) \frac{du(r)}{dr} \Big|_{r_{i-0.5}} - \int_{r_{i-0.5}}^{r_i} rq(r)u(r) dr \right] = \int_{r_{i-0.5}}^{r_i} rf(r) dr, \\
& \frac{du(r)}{dr} \Big|_{r=r_{i-0.5}} \approx \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i}, \\
& -k(r) \frac{du(r)}{dr} \Big|_{r=R_R} = -\nu_2 \\
& \int_{r_{i-0.5}}^{r_i} r\varphi(r) dr \approx \hbar r_i \varphi_i
\end{aligned}$$

Получаем разностную схему для $i=N$:

$$- \left[-r_i \cdot (-\nu_2) - r_{i-0.5} k_{i-0.5} \cdot \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i} - \hbar r_i q_i u_i \right] = \hbar r_i f_i$$

Сгруппируем полученные уравнения:

$$\begin{aligned}
& - \left[r_{i+0.5} \cdot k_{i+0.5} \frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}} - r_i \cdot (-\nu_1) - \hbar r_i q_i v_i \right] = \hbar r_i f_i \quad i = 0 \\
& - \left[r_{i+0.5} \cdot k_{i+0.5} \frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}} - r_{i-0.5} k_{i-0.5} \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i} - \hbar r_i q_i v_i \right] = \hbar r_i f_i \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \\
& - \left[-r_i \cdot (-\nu_2) - r_{i-0.5} k_{i-0.5} \cdot \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i} - \hbar r_i q_i u_i \right] = \hbar r_i f_i \quad i = N
\end{aligned}$$

После аппроксимации уравнения можно представить в виде системы из трёх-диагональной матрицы где a , c , b - диагонали матрица A и вектора g . Элементы матрицы:

Для $i = 0$

$$c_i = r_{i+0.5} \frac{k_{i+0.5}}{h_{i+1}} + \hbar r_i q_i \quad b_i = -r_{i+0.5} \cdot \frac{k_{i+0.5}}{h_{i+1}} \quad g_i = \hbar r_i f_i + r \nu_1$$

Для $i = 1, 2, \dots, N-1$

$$a_i = -r_{i-0.5} \frac{k_{i-0.5}}{h_i} \quad c_i = r_{i-0.5} \frac{k_{i-0.5}}{h_i} + r_{i+0.5} \frac{k_{i+0.5}}{h_{i+1}} + \hbar_i r_i q_i \quad b_i = -r_{i+0.5} \frac{k_{i+0.5}}{h_{i+1}} \\ g_i = \hbar_i r_i f_i$$

Для $i = N$:

$$a_i = -r_{i-0.5} \frac{k_{i-0.5}}{h_i} \quad c_i = r_{i-0.5} \frac{k_{i-0.5}}{h_i} + \hbar_i r_i q_i \quad g_i = \hbar_i r_i f_i + r_i \cdot \nu_2$$

2.2 Метод прогонки

Метод прогонки это простой способ решать трёхдиагональные системы.

$$\begin{pmatrix} c_1 & b_1 & & & & 0 \\ a_2 & c_2 & b_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & a_{n-1} & c_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & & & a_n & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{pmatrix}$$

Этап 1

Строка 1. Разделим первую строку на c_1 :

$$c_1 x_1 + b_1 x_2 = g_1 \\ x_1 + \gamma_1 x_2 = \rho_1, \quad \gamma_1 = \frac{b_1}{c_1}, \quad \rho_1 = \frac{g_1}{c_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & & & & 0 \\ a_2 & c_2 & b_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & a_{n-1} & c_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & & & a_n & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{pmatrix}$$

Строки от 2 до N-1. Здесь представлена общая формула для всех строк в промежуток

$$a_n x_{n-1} + c_n x_n + b_n x_{n+1} = g_n, \quad n = 2, 3, \dots, N-1$$

Умножим $n-1$ строку на a_n и вычтем из строки под номером n . Получим строку

$$(c_n - a_n \cdot \gamma_{n-1}) x_n + c_n x_{n+1} = g_n - a_n \rho_{n-1}$$

Разделим на $(c_n - a_n \cdot \gamma_{n-1})$

$$x_n + \frac{b_n}{c_n - a_n \gamma_{n-1}} x_{n+1} = \frac{g_n - a_n \rho_{n-1}}{c_n - a_n \gamma_{n-1}}$$

$$x_n + \gamma_n x_{n+1} = \rho_n, \quad \gamma_n = \frac{b_n}{c_n - a_n \gamma_{n-1}}, \quad \rho_n = \frac{g_n - a_n \rho_{n-1}}{c_n - a_n \gamma_{n-1}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & & & & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & a_{n-1} & c_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & & & a_n & c_n & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{pmatrix}$$

Строка N.

$$a_n x_{n-1} + c_n x_n = g_n$$

$$x_n = \rho_n, \quad \rho_n = \frac{g_n - a_n \rho_{n-1}}{c_n - a_n \gamma_{n-1}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & & & & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & 0 & 1 & \gamma_{n-1} \\ 0 & & & & 0 & 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \rho_{n-1} \\ \rho_n \end{pmatrix}$$

Этап 2

Чтобы узнать значения вектора x нам нужно "подняться" по уже вычисленным значениям.

$$x_n = \rho_n$$

$$x_i = \rho_i - \gamma_i x_{i+1}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1$$

2.3 Оценка погрешности

2.3.1 Невязка разностной схемы

$$Av = g, \quad A - (N+1)r(N+1), \quad v, g \in R^{(N+1)}$$

Пусть v - это точное решение разностной схемы, u - точное решение дифференциального уравнения, \tilde{v} - полученное решение разностной схемы.

Ищем погрешность решения разностной схемы:

$$\varepsilon = \tilde{v} - u$$

Введем обозначения:

- Погрешность решения системы линейных алгебраических уравнений

$$z = \tilde{v} - v$$

- Погрешность от аппроксимации дифференциального уравнения разностной схемой

$$\zeta = v - u$$

- Невязка разностной схемы

$$\xi = g - Au$$

- Невязка алгебраической системы

$$r = g - A\tilde{v}$$

2.3.2 Структура погрешности разностной схемы

$$\|\varepsilon\| = \|\tilde{v} - u\| = \|\tilde{v} - v + v - u\| = \|z + \zeta\| \leq \|z\| + \|\zeta\|$$

Для $\|\zeta\|$:

$$\begin{aligned}\xi &= g - Au = A(A^{-1}g - u) = A(v - u) \\ A\zeta &= \xi\end{aligned}$$

Тем самым погрешность от аппроксимации дифференциального уравнения разностной схемой, связана с невязкой разностной схемы:

$$\zeta = A^{-1}\xi$$

Для $\|z\|$:

$$\begin{aligned}r &= g - A\tilde{v} = A(A^{-1}g - \tilde{v}) = A(v - \tilde{v}) \\ Az &= r\end{aligned}$$

Тем самым погрешность решения системы линейных алгебраических уравнений, связана с невязкой алгебраической системы:

$$z = A^{-1}r$$

Подставим в наше неравенство, тем самым получаем:

$$\|\varepsilon\| \leq \|A^{-1}r\| + \|A^{-1}\xi\| \leq \|A^{-1}\| (\|r\| + \|\xi\|) \quad \|A^{-1}\| < C$$

2.3.3 Вклад от погрешности решения системы алгебраических уравнений

$$\|z\| \leq \|A^{-1}\| \|r\| = \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|r\|}{\|A\|}$$

Знаем что:

$$\|A\| \geq \frac{\|g\|}{\|v\|}$$

Из этого получаем:

$$\|z\| \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|r\|}{\|A\|} \|v\|$$

$$\text{cond}(A) = \|A\| \|A^{-1}\|$$

$$\frac{\|r\|}{\|A\|} \sim \varepsilon_M$$

$$\|z\| \leq \text{cond}(A) \varepsilon_M \|v\|$$

2.3.4 Разложение невязки

Разностная схема

$$\begin{aligned} - \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(rk \frac{du}{dr} \right) - qu(r) \right] &= f_i \\ - \left[\frac{d}{dr} \left(rk \frac{du}{dr} \right) - rqu(r) \right] &= rf_i \end{aligned}$$

Введем новые обозначения:

$$\tilde{k} = rk \quad \tilde{q} = rq \quad \tilde{f} = rf$$

Получим:

$$- \left[\frac{d}{dr} \left(\tilde{k} \frac{du}{dr} \right) - \tilde{q}u(r) \right] = \tilde{f}_i$$

Еще раз напишем разностную схему:

$$\begin{aligned} - \left[\tilde{k}_{i+0.5} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \nu_1 - \frac{h}{2} \tilde{q}_i v_i \right] &= \frac{h}{2} \tilde{f}_i \quad i = 0 \\ - \left[\tilde{k}_{i+0.5} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \tilde{k}_{i-0.5} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - h \tilde{q}_i v_i \right] &= h \tilde{f}_i \quad i = 1, 2, \dots, N-1 \\ - \left[\nu_2 - \tilde{k}_{i-0.5} \cdot \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - \frac{h}{2} \tilde{q}_i v_i \right] &= \frac{h}{2} \tilde{f}_i \quad i = N \end{aligned}$$

На левой границе интервала уравнение для невязки выглядит следующим образом:

$$\xi_i = \frac{h}{2} \tilde{f}_i + \left[\tilde{k}_{i+0.5} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \nu_1 - \frac{h}{2} \tilde{q}_i u_i \right]$$

Внутри интервала:

$$\xi_i = h\tilde{f}_i + \left[\tilde{k}_{i+0.5} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - \tilde{k}_{i-0.5} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - h\tilde{q}_i u_i \right]$$

На правой границе:

$$\xi_i = \frac{h}{2}\tilde{f}_i + \left[\nu_2 - \tilde{k}_{i-0.5} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - \frac{h}{2}\tilde{q}_i u_i \right]$$

Найдем разложение разностной схемы

$$\begin{aligned} u_i &= u(x_i + h) = u_i + h \frac{du_i}{dr} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 u_i}{dr^2} + \frac{h^3}{6} \frac{d^3 u_i}{dr^3} + \frac{h^4}{24} \frac{d^4 u_i}{dr^4} + \mathcal{O}(h^5) \\ \frac{u_{i+1} - u_i}{h} &= \frac{du_i}{dr} + \frac{h}{2} \frac{d^2 u_i}{dr^2} + \frac{h^2}{6} \frac{d^3 u_i}{dr^3} + \frac{h^3}{24} \frac{d^4 u_i}{dr^4} + \mathcal{O}(h^4) \\ \tilde{k}_{i+\frac{1}{2}} &= \tilde{k}(x_i + \frac{h}{2}) = \tilde{k}_i + \frac{h}{2} \frac{d\tilde{k}_i}{dr} + \frac{h^2}{8} \frac{d^2 \tilde{k}_i}{dr^2} + \frac{h^3}{48} \frac{d^3 \tilde{k}_i}{dr^3} + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \tilde{k}_{i+\frac{1}{2}} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} &= \tilde{k}_i \frac{du_i}{dr} \\ &+ h \left[\frac{1}{2} \tilde{k}_i \frac{d^2 u_i}{dr^2} + \frac{1}{2} \frac{d\tilde{k}_i}{dr} \frac{du_i}{dr} \right] \\ &+ h^2 \left[\frac{1}{6} \tilde{k}_i \frac{d^3 u_i}{dr^3} + \frac{1}{4} \frac{d\tilde{k}_i}{dr} \frac{d^2 u_i}{dr^2} + \frac{1}{8} \frac{d^2 \tilde{k}_i}{dr^2} \frac{du_i}{dr} \right] \\ &+ h^3 \left[\frac{1}{24} \tilde{k}_i \frac{d^4 u_i}{dr^4} + \frac{1}{12} \frac{d\tilde{k}_i}{dr} \frac{d^3 u_i}{dr^3} + \frac{1}{16} \frac{d^2 \tilde{k}_i}{dr^2} \frac{d^2 u_i}{dr^2} + \frac{1}{48} \frac{d^3 \tilde{k}_i}{dr^3} \frac{du_i}{dr} \right] \\ &+ \mathcal{O}(h^4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{i-1} &= u(x_i - h) = u_i - h \frac{du_i}{dr} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2 u_i}{dr^2} - \frac{h^3}{6} \frac{d^3 u_i}{dr^3} + \frac{h^4}{24} \frac{d^4 u_i}{dr^4} + \mathcal{O}(h^5) \\ \frac{u_i - u_{i-1}}{h} &= \frac{du_i}{dr} - \frac{h}{2} \frac{d^2 u_i}{dr^2} + \frac{h^2}{6} \frac{d^3 u_i}{dr^3} - \frac{h^3}{24} \frac{d^4 u_i}{dr^4} + \mathcal{O}(h^4) \\ \tilde{k}_{i-\frac{1}{2}} &= \tilde{k}(x_i - \frac{h}{2}) = \tilde{k}_i - \frac{h}{2} \frac{d\tilde{k}_i}{dr} + \frac{h^2}{8} \frac{d^2 \tilde{k}_i}{dr^2} - \frac{h^3}{48} \frac{d^3 \tilde{k}_i}{dr^3} + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

Получаем:

$$\begin{aligned}
\tilde{k}_{i-\frac{1}{2}} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} &= \tilde{k}_i \frac{du_i}{dr} \\
&- h \left[\frac{1}{2} \tilde{k}_i \frac{d^2 u_i}{dr^2} + \frac{1}{2} \frac{d\tilde{k}_i}{dr} \frac{du_i}{dr} \right] \\
&+ h^2 \left[\frac{1}{6} \tilde{k}_i \frac{d^3 u_i}{dr^3} + \frac{1}{4} \frac{d\tilde{k}_i}{dr} \frac{d^2 u_i}{dr^2} + \frac{1}{8} \frac{d^2 \tilde{k}_i}{dr^2} \frac{du_i}{dr} \right] \\
&- h^3 \left[\frac{1}{24} \tilde{k}_i \frac{d^4 u_i}{dr^4} + \frac{1}{12} \frac{d\tilde{k}_i}{dr} \frac{d^3 u_i}{dr^3} + \frac{1}{16} \frac{d^2 \tilde{k}_i}{dr^2} \frac{d^2 u_i}{dr^2} + \frac{1}{48} \frac{d^3 \tilde{k}_i}{dr^3} \frac{du_i}{dr} \right] \\
&+ \mathcal{O}(h^4)
\end{aligned}$$

Подставим это в уравнение невязки внутри интервала:

$$\begin{aligned}
\xi_i &= h \tilde{f}_i + \left[\tilde{k}_i \frac{du_i}{dr} + h \left[\frac{1}{2} \tilde{k}_i \frac{d^2 u_i}{dr^2} + \frac{1}{2} \frac{d\tilde{k}_i}{dr} \frac{du_i}{dr} \right] + h^2 \left[\frac{1}{6} \tilde{k}_i \frac{d^3 u_i}{dr^3} + \frac{1}{4} \frac{d\tilde{k}_i}{dr} \frac{d^2 u_i}{dr^2} + \frac{1}{8} \frac{d^2 \tilde{k}_i}{dr^2} \frac{du_i}{dr} \right] \right. \\
&+ h^3 \left[\frac{1}{24} \tilde{k}_i \frac{d^4 u_i}{dr^4} + \frac{1}{12} \frac{d\tilde{k}_i}{dr} \frac{d^3 u_i}{dr^3} + \frac{1}{16} \frac{d^2 \tilde{k}_i}{dr^2} \frac{d^2 u_i}{dr^2} + \frac{1}{48} \frac{d^3 \tilde{k}_i}{dr^3} \frac{du_i}{dr} \right] \\
&- \tilde{k}_i \frac{du_i}{dr} + h \left[\frac{1}{2} \tilde{k}_i \frac{d^2 u_i}{dr^2} + \frac{1}{2} \frac{d\tilde{k}_i}{dr} \frac{du_i}{dr} \right] \\
&- h^2 \left[\frac{1}{6} \tilde{k}_i \frac{d^3 u_i}{dr^3} + \frac{1}{4} \frac{d\tilde{k}_i}{dr} \frac{d^2 u_i}{dr^2} + \frac{1}{8} \frac{d^2 \tilde{k}_i}{dr^2} \frac{du_i}{dr} \right] \\
&\left. - h^3 \left[\frac{1}{24} \tilde{k}_i \frac{d^4 u_i}{dr^4} + \frac{1}{12} \frac{d\tilde{k}_i}{dr} \frac{d^3 u_i}{dr^3} + \frac{1}{16} \frac{d^2 \tilde{k}_i}{dr^2} \frac{d^2 u_i}{dr^2} + \frac{1}{48} \frac{d^3 \tilde{k}_i}{dr^3} \frac{du_i}{dr} \right] \right]
\end{aligned}$$

Приводим подобные слагаемые:

$$\begin{aligned}
\xi_i &= h \left[\tilde{f} + \tilde{k} \frac{d^2 u}{dr^2} \frac{d\tilde{k}}{dr} \frac{du}{dr} - \tilde{q}u \right] \\
&+ h^3 \left[\frac{1}{12} \tilde{k} \frac{d^4 u}{dr^4} + \frac{1}{6} \frac{d\tilde{k}}{dr} \frac{d^3 u}{dr^3} + \frac{1}{8} \frac{d^2 \tilde{k}}{dr^2} \frac{d^3 u}{dr^3} + \frac{1}{24} \frac{d^3 \tilde{k}}{dr^3} \frac{du_i}{dr} \right] + \mathcal{O}(h^4)
\end{aligned}$$

Можно заметить что:

$$\left[\tilde{k} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{d\tilde{k}}{dr} \frac{du}{dr} \right] = \frac{d}{dr} \left(\tilde{k} \frac{du}{dr} \right)$$

При этом:

$$\tilde{f} + \frac{d}{dr} \left(\tilde{k} \frac{du}{dr} \right) - \tilde{q}u = 0$$

Тем самым получаем:

$$\xi_i = h^3 \left[\frac{1}{12} \tilde{k} \frac{d^4 u}{dr^4} + \frac{1}{6} \frac{d\tilde{k}}{dr} \frac{d^3 u}{dr^3} + \frac{1}{8} \frac{d^2 \tilde{k}}{dr^2} \frac{d^3 u}{dr^3} + \frac{1}{24} \frac{d^3 \tilde{k}}{dr^3} \frac{du_i}{dr} \right] + \mathcal{O}(h^4)$$

Найдем разложение невязки для граничного условия слева:

$$\xi_i = \frac{h}{2} \tilde{f}_i + \left[\tilde{k}_{i+0.5} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} + \nu_1 - \frac{h}{2} \tilde{q}_i u_i \right] \quad i = 0$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \xi_i = & \frac{h}{2} \tilde{f}_i + \tilde{k}_i \frac{du_i}{dr} + h \left[\frac{1}{2} \tilde{k}_i \frac{d^2 u_i}{dr^2} + \frac{1}{2} \frac{d\tilde{k}_i}{dr} \frac{du_i}{dr} \right] \\ & + h^2 \left[\frac{1}{6} \tilde{k}_i \frac{d^3 u_i}{dr^3} + \frac{1}{4} \frac{d\tilde{k}_i}{dr} \frac{d^2 u_i}{dr^2} + \frac{1}{8} \frac{d^2 \tilde{k}_i}{dr^2} \frac{du_i}{dr} \right] + \mathcal{O}(h^3) + \nu_1 - \frac{h}{2} \tilde{q}_i u_i \end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые при одинаковых степенях h :

$$\begin{aligned} \xi_i = & h^0 \left[\nu_1 + \tilde{k}_i \frac{du_i}{dr} \right] + \frac{h}{2} \left[\tilde{f}_i + \tilde{k}_i \frac{d^2 u_i}{dr^2} + \frac{d\tilde{k}_i}{dr} \frac{du_i}{dr} - \tilde{q}_i u_i \right] \\ & + h^2 \left[\frac{1}{6} \tilde{k}_i \frac{d^3 u_i}{dr^3} + \frac{1}{4} \frac{d\tilde{k}_i}{dr} \frac{d^2 u_i}{dr^2} + \frac{1}{8} \frac{d^2 \tilde{k}_i}{dr^2} \frac{du_i}{dr} \right] + \mathcal{O}(h^3) \end{aligned}$$

Из условия:

$$k \frac{du}{dr} \Big|_{r=R_L} = -\nu_1$$

Также:

$$\begin{aligned} \left[\tilde{k} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{d\tilde{k}}{dr} \frac{du}{dr} \right] &= \frac{d}{dr} \left(\tilde{k} \frac{du}{dr} \right) \\ \tilde{f} + \frac{d}{dr} \left(\tilde{k} \frac{du}{dr} \right) - \tilde{q} u &= 0 \end{aligned}$$

Тем самым получаем:

$$\xi_i = h^2 \left[\frac{1}{6} \tilde{k}_i \frac{d^3 u_i}{dr^3} + \frac{1}{4} \frac{d\tilde{k}_i}{dr} \frac{d^2 u_i}{dr^2} + \frac{1}{8} \frac{d^2 \tilde{k}_i}{dr^2} \frac{du_i}{dr} \right] + \mathcal{O}(h^3)$$

Теперь найдем разложение невязки для правой границы

$$\xi_i = \frac{h}{2} \tilde{f}_i + \left[\nu_2 - \tilde{k}_{i-0.5} \frac{u_i - u_{i-1}}{h} - \frac{h}{2} \tilde{q}_i u_i \right], \quad i = N$$

Получаем:

$$\begin{aligned} \xi_i = & \frac{h}{2} \tilde{f}_i - \tilde{k}_i \frac{du_i}{dr} + h \left[\frac{1}{2} \tilde{k}_i \frac{d^2 u_i}{dr^2} + \frac{1}{2} \frac{d\tilde{k}_i}{dr} \frac{du_i}{dr} \right] \\ & - h^2 \left[\frac{1}{6} \tilde{k}_i \frac{d^3 u_i}{dr^3} + \frac{1}{4} \frac{d\tilde{k}_i}{dr} \frac{d^2 u_i}{dr^2} + \frac{1}{8} \frac{d^2 \tilde{k}_i}{dr^2} \frac{du_i}{dr} \right] + \mathcal{O}(h^3) + \nu_2 - \frac{h}{2} \tilde{q}_i u_i \end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые при одинаковых степенях h :

$$\begin{aligned}\xi_i = & h^0 \left[\nu_2 - \tilde{k}_i \frac{du_i}{dr} \right] + \frac{h}{2} \left[\tilde{f}_i + \tilde{k}_i \frac{d^2 u_i}{dr^2} + \frac{d\tilde{k}_i}{dr} \frac{du_i}{dr} - \tilde{q}_i u_i \right] \\ & - h^2 \left[\frac{1}{6} \tilde{k}_i \frac{d^3 u_i}{dr^3} + \frac{1}{4} \frac{d\tilde{k}_i}{dr} \frac{d^2 u_i}{dr^2} + \frac{1}{8} \frac{d^2 \tilde{k}_i}{dr^2} \frac{du_i}{dr} \right] + \mathcal{O}(h^3)\end{aligned}$$

Из условия:

$$-k \frac{du}{dr} \Big|_{r=R_R} = -\nu_2$$

Также:

$$\begin{aligned}\left[\tilde{k} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{d\tilde{k}}{dr} \frac{du}{dr} \right] &= \frac{d}{dr} \left(\tilde{k} \frac{du}{dr} \right) \\ \tilde{f} + \frac{d}{dr} \left(\tilde{k} \frac{du}{dr} \right) - \tilde{q}u &= 0\end{aligned}$$

Тем самым получаем:

$$\xi_i = -h^2 \left[\frac{1}{6} \tilde{k}_i \frac{d^3 u_i}{dr^3} + \frac{1}{4} \frac{d\tilde{k}_i}{dr} \frac{d^2 u_i}{dr^2} + \frac{1}{8} \frac{d^2 \tilde{k}_i}{dr^2} \frac{du_i}{dr} \right] + \mathcal{O}(h^3)$$

3 Заключение

3.1 Вывод

3.2 Код

```
/* tma.hpp */
```