Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт компьютерных наук и технологий
Высшая школа программной инженерии

Лабораторная работа № 2

по дисциплине
«Математические модели»

Выполнил: Ферапонтов М.В.
Группа: гр. 3530904/00104

Проверил: Воскобойников С. П.

Санкт-Петербург
2023

Содержание

1 Вступление

1.1 Постановка задачи

Вариант СР. Используя интегро-интерполяционный метод (метод баланса), разработать программу для моделирования нестационарного распределения температуры в полом цилиндре, описываемого математической моделью вида:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk(r,t)\frac{\partial u}{\partial r}\right) - q(r,t)u + f(r,t),\ r \in [R_L,\ R_R]\,,\ t \in [0,T],$$
$$0 < c_1 \leq k(r,t) \leq c_2,\ 0 \leq q(r,t)$$

Начальное условие:

$$u|_{t=0} = \varphi(r)$$

Граничные условия:

$$k\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R_L} = -\nu_1(t) \qquad -k\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R_R} = -\nu_2(t)$$

1.2 Используемое ПО

1. Boost library - библиотека для тестирования и других функций
2. **GSL** - GNU Scientific Library. Математическая библиотека для C и C++.

2 Основная часть

2.1 Разностная схема

Введем основную сетку, где N - число разбиений.

$$r_0 < r_1 < \cdots < r_N,\ r_i \in [R_L, R_R],\ r_0 = R_L,\ r_N = R_R$$

$$h_i = r_i - r_{i-1},\ i = 1, 2, \ldots, N$$

$$r_{r-0.5} = \frac{r_i - r_{i-1}}{2},\ i = 1, 2, \ldots, N$$

Введем дополнительную сетку:

$$\hbar_i = \begin{cases} \frac{h_i + 1}{2},\ i = 0 \\ \frac{h_i + h_{i+1}}{2},\ i = 1, 2, \ldots, N-1 \\ \frac{h_i}{2},\ i = N \end{cases}$$

Напишем наше уравнение:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk(r,t)\frac{\partial u}{\partial r}\right) - q(r,t)u + f(r,t)$$

$$r \cdot \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial r}\left(rk\frac{\partial u}{\partial r}\right) - r \cdot qu + r \cdot f$$

$$\int\limits_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} r\frac{\partial u}{\partial t}dt = \int\limits_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \frac{\partial}{\partial r}\left(rk\frac{\partial u}{\partial r}\right)dr - \int\limits_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} rqudr - \int\limits_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} rfdr$$

$$\int\limits_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \varphi(x)dx \approx \hbar_i\varphi(x)$$

$$\hbar_i r_i \frac{dv_i}{dt} = rk\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_{i+\frac{1}{2}}} - rk\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_{i-\frac{1}{2}}} - \hbar_i r_i q v_i + \hbar_i r_i f_i$$

$$rk\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_{i+\frac{1}{2}}} = r_{i+\frac{1}{2}}k_{i+\frac{1}{2}}\frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}}$$

$$rk\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_{i-\frac{1}{2}}} == r_{i-\frac{1}{2}}k_{i-\frac{1}{2}}\frac{v_i - v_{i-1}}{h_i}$$

Тем самым мы получили нашу разностную схему внутри промежутка:

$$\hbar_i r_i \frac{dv_i}{dt} = r_{i+\frac{1}{2}} k_{i+\frac{1}{2}} \frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}} - r_{i-\frac{1}{2}} k_{i-\frac{1}{2}} \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i} - \hbar_i r_i q v_i + \hbar_i r_i f_i,\ i = 1, 2, \dots, N-1$$

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{r_{i+\frac{1}{2}} k_{i+\frac{1}{2}}}{\hbar_i r_i h_{i+1}} (v_{i+1} - v_i) - \frac{r_{i-\frac{1}{2}} k_{i-\frac{1}{2}}}{\hbar_i r_i h_i} (v_i - v_{i-1}) - q v_i + f_i,\ i = 1, 2, \dots, N-1$$

Проведем аппроксимацию граничного условия слева:

$$\int\limits_{x_i}^{x_i+\frac{1}{2}} r \frac{\partial u}{\partial t} dt = \int\limits_{x_i}^{x_i+\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial r} \left(rk \frac{\partial u}{\partial r} \right) dr - \int\limits_{x_i}^{x_i+\frac{1}{2}} rqudr - \int\limits_{x_i}^{x_i+\frac{1}{2}} rfdr,\ i = 0$$

$$\hbar_i r_i \frac{dv_i}{dt} = rk \frac{\partial u}{\partial r} \bigg|_{r=r_{i+\frac{1}{2}}} - rk \frac{\partial u}{\partial r} \bigg|_{r=r_i} - \hbar_i r_i q v_i + \hbar_i r_i f_i,\ i = 0$$

Граничное условие

$$k \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R_L} = -\nu_1(t)$$

Получаем:

$$\hbar_i r_i \frac{dv_i}{dt} = r_{i+\frac{1}{2}} k_{i+\frac{1}{2}} \frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}} - r_i \cdot \nu_1 - \hbar_i r_i q v_i + \hbar_i r_i f_i x - \frac{1}{2},\ i = 0$$

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{r_{i+\frac{1}{2}} k_{i+\frac{1}{2}}}{\hbar_i r_i h_{i+1}} (v_{i+1} - v_i) - \frac{\nu_1}{\hbar_i} - q v_i + f_i,\ i = 0$$

Проведем аппроксимацию граничного условия справа:

$$\int\limits_{x_i-\frac{1}{2}}^{x_i} r \frac{\partial u}{\partial t} dt = \int\limits_{x_i-\frac{1}{2}}^{x_i} \frac{\partial}{\partial r} \left(rk \frac{\partial u}{\partial r} \right) dr - \int\limits_{x_i-\frac{1}{2}}^{x_i} rqudr - \int\limits_{x_i-\frac{1}{2}}^{x_i} rfdr,\ i = N$$

$$\hbar_i r_i \frac{dv_i}{dt} = rk \frac{\partial u}{\partial r} \bigg|_{r=r_i} - rk \frac{\partial u}{\partial r} \bigg|_{r=r_{i-\frac{1}{2}}} - \hbar_i r_i q v_i + \hbar_i r_i f_i,\ i = N$$

Граничное условие:

$$-k \left. \frac{\partial u}{\partial r} \right|_{r=R_R} = -\nu_2(t)$$

Получаем:

$$\hbar_i r_i \frac{dv_i}{dt} = r_i \frac{\nu_2}{h_{i+1}} - r_{i-\frac{1}{2}} k_{i-\frac{1}{2}} \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i} - \hbar_i r_i q v_i + \hbar_i r_i f_i,\ i = N$$

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{\nu_2}{\hbar_i} - \frac{r_{i-\frac{1}{2}} k_{i-\frac{1}{2}}}{\hbar_i r_i h_i} (v_i - v_{i-1}) - q v_i + f_i,\ i = N$$

Введем обозначения:

$$B_1 = \frac{r_{i+\frac{1}{2}}k_{i+\frac{1}{2}}}{\hbar_i r_i h_{i+1}} \quad B_2 = \frac{r_{i-\frac{1}{2}}k_{i-\frac{1}{2}}}{\hbar_i r_i h_i}$$

Запишем полученные уравнения:

$$\begin{cases} \frac{dv_i}{dt} = B_1(v_{i+1} - v_i) - \frac{\nu_1}{\hbar_i} - qv_i + f_i, \ i = 0 \\ \frac{dv_i}{dt} = B_1(v_{i+1} - v_i) - B_2(v_i - v_{i-1}) - qv_i + f_i, \ i = 1, 2, \ldots, N-1 \\ \frac{dv_i}{dt} = \frac{\nu_2}{\hbar_i} - B_2(v_i - v_{i-1}) - qv_i + f_i, \ i = N \end{cases}$$

Сгруппируем значения:

$$\begin{cases} \frac{dv_i}{dt} = B_1 v_{i+1} - (B_1 + q_i)v_i - \frac{\nu_1}{\hbar_i} + f_i, \ i = 0 \\ \frac{dv_i}{dt} = B_1 v_{i+1} - (B_1 + B_2 + q_i)v_i - B_2 v_{i-1} + f_i, \ i = 1, 2, \ldots, N-1 \\ \frac{dv_i}{dt} = -(B_2 + q_i)v_i - B_2 v_{i-1} + \frac{\nu_2}{\hbar_i} + f_i, \ i = N \end{cases}$$

Мы получили систему:

$$\begin{pmatrix} \frac{dv_0}{dt} \\ \frac{dv_1}{dt} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{dv_{n-1}}{dt} \\ \frac{dv_n}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 & b_0 & & & & & 0 \\ a_1 & c_1 & b_1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & a_{n-1} & c_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & & & & a_n & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{pmatrix}$$

где:

$$\begin{array}{llll} & c_0 = -(B_1 + q_0) & b_0 = B_1 & g_0 = \dfrac{\nu_1}{\hbar_0} + f_0 \\ a_i = B_2 & c_i = -(B_1 + B_2 + q_i) & b_i = B_1 & g_i = f_i \\ a_N = B_2 & c_N = -(B_2 + q_N) & & g_N = \dfrac{\nu_2}{\hbar_N} + f_N \end{array}$$

2.2 Решение системы ОДУ

Система имеет вид:

$$\frac{dv_i}{dt} = Av + g$$

Введем дискретизацию по времени и проинтегрируем на одном из промежутков:

$$\int\limits_{t_n}^{t_n+1} \frac{dv_i}{dt}\, dt = \int\limits_{t_n}^{t_n+1} (Av + g) dt$$

$$v(t_{n+1}) - v(t_n) = \int\limits_{t_n}^{t_n+1} (Av + g)dt$$

$$v(t_{n+1}) = v(t_n) + \int\limits_{t_n}^{t_n+1} (Av + g)dt$$

Добавим к полученному уравнению начальное условие и тем самым получаем систему:

$$\begin{cases} v(t_{n+1}) = v(t_n) + \int\limits_{t_n}^{t_n+1} (Av + g)dt \\ v(t_0) = \varphi(r) \end{cases}$$

Решение задачи сводится к поиску значения интеграла.

2.2.1 Явный метод Эйлера

Мы имеем уравнение:

$$v(t_{n+1}) = v(t_n) + \int\limits_{t_n}^{t_n+1} (Av + g)dt$$

Интерполлируем интеграл по формуле левых треугольников:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx f(a)(b - a)$$

Тем самым получаем:

$$v(t_{n+1}) = v(t_n) + (t_{n+1} - t_n)Av(t_n) + (t_{n+1} - t_n)g$$

Введем обозначение:

$$H = (t_{n+1} - t_n)$$

$$v(t_{n+1}) = v(t_n) + HAv(t_n) + Hg$$

$$v(t_{n+1}) = (E + HA)v(t_n) + Hg$$

Явный метод ломанных Эйлера:

$$\begin{cases} v(t_{n+1}) = (E + HA)v(t_n) + Hg \\ v(t_0) = \varphi(r) \end{cases}$$

2.2.2 Неявный метод Эйлера

Теперь проинтерполируем интеграл формулой правых треугольников:

$$\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx f(b)(b-a)$$

Получаем:

$$v(t_{n+1}) = v(t_n) + HAv(t_{n+1}) + Hg$$
$$(E - HA)v(t_{t_{n+1}}) = v(t_n) + Hg$$

Неявный метод ломанных Эйлера:

$$\begin{cases} (E - HA)v(t_{t_{n+1}}) = v(t_n) + Hg \\ v(t_0) = \varphi(r) \end{cases}$$

3 Заключение

3.1 Вывод

3.2 Код