Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт компьютерных наук и технологий
Высшая школа программной инженерии

Лабораторная работа № 1

по дисциплине
«Математические модели»

Выполнил: Ферапонтов М.В.
Группа: гр. 3530904/01004

Проверил: Дед Пихто

Санкт-Петербург
2023

Содержание

1 Вступление

1.1 Постановка задачи

Вариант CP. Используя интегро-интерполяционный метод (метод баланса), разработать программу для моделирования стационарного распределения температуры в полом цилиндре, описываемого математической моделью вида:

$$
\begin{aligned}
&-\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rk(r)\frac{du}{dr}\right) \;-\; q(r)u\right] = f(r),\; r \in \left[R_L,\; R_R\right],\; R_L > 0,\\
&0 < c_1 \leq k(r) \leq c_2,\; 0 \leq q(r)
\end{aligned}
$$

Граничные условия:

$$
k\,\frac{du}{dr}\bigg|_{r=R_L} \;=\; -\nu_1 \qquad\qquad -k\,\frac{du}{dr}\bigg|_{r=R_R} \;=\; -\nu_2
$$

1.2 Используемое ПО

1. Boost library - библиотека для тестирования и других функций

2 Основная часть

2.1 Интегро-интеполяционный метод (метод баланса)

Введем основную сетку, где N - число разбиений.

$$r_0 < r_1 < \dots < r_N,\ r_i \in [R_L, R_R],\ r_0 = R_L,\ r_N = R_R$$

$$h_i = r_i - r_{i-1},\ i = 1, 2, \dots, N$$

$$r_{r-0.5} = \frac{r_i - r_{i-1}}{2},\ i = 1, 2, \dots, N$$

Введем дополнительную сетку:

$$\hbar_i = \begin{cases} \frac{h_i + 1}{2},\ i = 0 \\ \\ \frac{h_i + h_{i+1}}{2},\ i = 1, 2, \dots, N-1 \\ \\ \frac{h_i}{2},\ i = N \end{cases}$$

Проведем аппроксимацию начального уравнения.
Для i = 0

$$-\int_{r_i}^{r_{i+0.5}} \left[\frac{d}{dr}\left(rk(r)\frac{du(r)}{dr}\right) - rq(r)u(r)\right] dr = \int_{r_i}^{r_{i+0.5}} rf(r)\,dr,$$

$$-\left[rk(r)\left.\frac{du(r)}{dr}\right|_{r=r_{i+0.5}} - rk(r)\left.\frac{du(r)}{dr}\right|_{r_i} - \int_{r_i}^{r_{i+0.5}} rq(r)u(r)\,dr\right] = \int_{r_i}^{r_{i+0.5}} rf(r)\,dr,$$

Формула центральных разностей:

$$\frac{du(r)}{dr}\Big|_{r=r_{i+0.5}} \approx \frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}},$$

Граничное условие:

$$k(r)\left.\frac{du(r)}{dr}\right|_{r=R_L} = -\nu_1,$$

Формула левых прямоугольников:

$$\int_{r_i}^{r_{r+0.5}} r\varphi_i\,dr = \hbar_i r_i \varphi_i$$

Получаем разностную схему для i = 0:

$$-\left[r_{i+0.5} \cdot k_{i+0.5}\frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}} - r_i \cdot (-\nu_1) - \hbar r_i q_i v_i\right] = \hbar_i r_i f_i$$

Для i = 1, 2, ..., N-1

$$-\int_{r_{i-0,5}}^{r_{i+0.5}} \left[\frac{d}{dr}\left(rk(r)\frac{du(r)}{dr}\right) - rq(r)u(r)\right] dr = \int_{r_{i-0.5}}^{r_{i+0.5}} rf(r)\,dr,$$

$$-\left[rk(r)\left.\frac{du(r)}{dr}\right|_{r=r_{i+0.5}} - rk(r)\left.\frac{du(r)}{dr}\right|_{r_{i-0.5}} - \int_{r_{i-0.5}}^{r_{i+0.5}} rq(r)u(r)\,dr\right] = \int_{r_{i-0.5}}^{r_{i+0.5}} rf(r)\,dr,$$

$$\frac{du(r)}{dr}|_{r=r_{i-0.5}} \;\approx\; \frac{v_i \;-\; v_{i-1}}{h_i}$$

$$\int_{r_{i-0.5}}^{r_{r+0.5}} r\varphi_i\,dr \;=\; \hbar_i r_i \varphi_i$$

Получаем разностную схему для i = 1, 2, . . . , N-1:

$$-\left[r_{i+0.5}\cdot k_{i+0.5}\frac{v_{i+1}-v_i}{h_{i+1}} - r_{i-0.5}k_{i-0.5}\frac{v_i \;-\; v_{i-1}}{h_i} - \hbar r_i q_i v_i\right] \;=\; \hbar_i r_i f_i$$

Для i = N:

$$-\int_{r_{i-0.5}}^{r_i}\left[\frac{d}{dr}\left(rk(r)\frac{du(r)}{dr}\right) - rq(r)u(r)\right]\,dr = \int_{r_{i-0.5}}^{r_i} rf(r)\,dr,$$

$$-\left[rk(r)\left.\frac{du(r)}{dr}\right|_{r=r_i} - rk(r)\left.\frac{du(r)}{dr}\right|_{r_{i-0.5}} - \int_{r_{i-0.5}}^{r_i} rq(r)u(r)\,dr\right] = \int_{r_{i-0.5}}^{r_i} rf(r)\,dr,$$

$$\frac{du(r)}{dr}|_{r=r_{i-0.5}} \;\approx\; \frac{v_i \;-\; v_{i-1}}{h_i},$$

$$-k(r)\left.\frac{du(r)}{dr}\right|_{r=R_R} \;=\; -\nu_2$$

$$\int_{r_{i-0.5}}^{r_i} r\varphi(r)\,dr \approx \hbar_i r_i \varphi_i$$

Получаем разностную схему для i=N:

$$-\left[-r_i\cdot(-\nu_2) - r_{i-0.5}k_{i-0.5}\cdot\frac{v_i - v_{i-1}}{h_i} - \hbar_i r_i q_i u_i\right] \;=\; \hbar_i r_i f_i$$

Сгрупиируем полученные уравнения:

$$-\left[r_{i+0.5}\cdot k_{i+0.5}\frac{v_{i+1}-v_i}{h_{i+1}} - r_i\cdot(-\nu_1) - \hbar r_i q_i v_i\right] \;=\; \hbar_i r_i f_i \quad i=0$$

$$-\left[r_{i+0.5}\cdot k_{i+0.5}\frac{v_{i+1}-v_i}{h_{i+1}} - r_{i-0.5}k_{i-0.5}\frac{v_i \;-\; v_{i-1}}{h_i} - \hbar r_i q_i v_i\right] \;=\; \hbar_i r_i f_i \quad i=1,2,...,N-1$$

$$-\left[-r_i\cdot(-\nu_2) - r_{i-0.5}k_{i-0.5}\cdot\frac{v_i - v_{i-1}}{h_i} - \hbar_i r_i q_i u_i\right] \;=\; \hbar_i r_i f_i \quad i=N$$

После аппроксимации уравнения можно представить в виде системы из трёх-диагональной матрицы где a, c, b - диагонали матрица A и вектора g. Элементы матрицы:
Для i = 0

$$c_i = r_{i+0.5}\frac{k_{i+0.5}}{h_{i+1}} + \hbar_i r_i q_i \quad b_i = -r_{i+0.5}\cdot\frac{k_{i+0.5}}{h_{i+1}} \quad g_i = \hbar_i r_i f_i + r(-\nu_1)$$

Для i = 1, 2, . . . , N-1

$$a_i = -r_{i-0.5}\frac{k_{i-0.5}}{h_i} \quad c_i = r_{i-0.5}\frac{k_{i-0.5}}{h_i} + r_{i+0.5}\frac{k_{i+0.5}}{h_{i+1}} + \hbar_i r_i q_i \quad b_i = -r_{i+0.5}\frac{k_{i+0.5}}{h_{i+1}}$$
$$g_i = \hbar_i r_i f_i$$

Для i = N:

$$a_i = -r_{i-0.5}\frac{k_{i-0.5}}{h_i} \quad c_i = r_{i-0.5}\frac{k_{i-0.5}}{h_i} + \hbar_i r_i q_i \quad g_i = \hbar_i r_i f_i + r_i \cdot (-\nu_2)$$

2.2 Метод прогонки

Метод прогонки это простой способ решать трёхдиагональные системы.

$$\begin{pmatrix} c_1 & b_1 & & & & & 0 \\ a_2 & c_2 & b_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & a_{n-1} & c_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & & & & a_n & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{pmatrix}$$

Этап 1

Строка 1. Разделим первую строку на c_1:

$$c_1 x_1 + b_1 x_2 = g_1$$
$$x_1 + \gamma_1 x_2 = \rho_1, \;\; \gamma_1 = \frac{b_1}{c_1}, \;\; \rho_1 = \frac{g_1}{c_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & & & & & 0 \\ a_2 & c_2 & b_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & a_{n-1} & c_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & & & & a_n & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{pmatrix}$$

Строки от 2 до N-1. Здесь представлена общая формула для всех строк в промежутке

$$a_n x_{n-1} + c_n x_n + b_n x_{n+1} = g_n, \;\; n = 2, 3, \ldots, N-1$$

Умножим n-1 строку на a_n и вычтем из строки под номером n. Получим строку

$$(c_n - a_n \cdot \gamma_{n-1}) x_n + c_n x_{n+1} = g_n - a_n \rho_{n-1}$$

Разделим на $(c_n - a_n \cdot \gamma_{n-1})$

$$x_n + \frac{b_n}{c_n - a_n\gamma_{n-1}} x_{n+1} = \frac{g_n - a_n\rho_{n-1}}{c_n - a_n\gamma_{n-1}}$$

$$x_n + \gamma_n x_{n+1} = \rho_n, \;\; \gamma_n = \frac{b_n}{c_n - a_n\gamma_{n-1}}, \;\; \rho_n = \frac{g_n - a_n\rho_{n-1}}{c_n - a_n\gamma_{n-1}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & & & & & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & a_{n-1} & c_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & & & & a_n & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{pmatrix}$$

Строка N.

$$a_n x_{n-1} + c_n x_n = g_n$$
$$x_n = \rho_n, \;\; \rho_n = \frac{r_n - a_n\rho_{n-1}}{c_n - a_n\gamma_{n-1}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & & & & & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 & \gamma_{n-1} \\ 0 & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \rho_{n-1} \\ \rho_n \end{pmatrix}$$

Этап 2

Чтобы узнать значения вектора x нам нужно "подняться" по уже вычисленным значеням.

$$x_n = \rho_n$$
$$x_i = \rho_i - \gamma_i x_{i+1}, \;\; i = n-1, n-2, \ldots, 1$$

2.3 Оценка погрешности

2.3.1 Невязка разностной схемы

$$Av = g,\ A - (N+1)r(N+1), v, g \in R^{(N+1)}$$

Пусть v - это точное решение разностной схемы, u - точное решение дифференциального уравнения, $\tilde{v}$ - полученное решение разностной схемы.

Ищем погрешность решения разностной схемы:

$$\varepsilon = \tilde{v} - u$$

Введем обозначения:

- Погрешность решения системы линейных алгебраических уравнений

$$z = \tilde{v} - v$$

- Погрешность от аппроксимации дифференциального уравнения разностной схемой

$$\zeta = v - u$$

- Невязка разностной схемы

$$\xi = g - Au$$

- Невязка алгебраической системы

$$r = g - A\tilde{v}$$

2.3.2 Структура погрешности разностной схемы

$$\|\varepsilon\| = \|\tilde{v} - u\| = \|\tilde{v} - v + v - u\| = \|z + \zeta\| \leq \|z\| + \|\zeta\|$$

Для $\|\zeta\|$:

$$\xi = g - Au = A(A^{-1}g - u) = A(v - u)$$
$$A\zeta = \xi$$

Тем самым погрешность от аппроксимации дифференциального уравнения разностной схемой, связана с невязкой разностной схемы:

$$\zeta = A^{-1}\xi$$

Для $\|z\|$:

$$r = g - A\tilde{v} = A(A^{-1}g - \tilde{v}) = A(v - \tilde{v})$$
$$Az = r$$

Тем самым погрешность решения системы линейных алгебраических уравнений, связана с невязкой алгебраической системы:

$$z = A^{-1}r$$

Подставим в наше неравенство, тем самым получаем:

$$\|\varepsilon\| \leq \left\|A^{-1}r\right\| + \left\|A^{-1}\xi\right\| \leq \left\|A^{-1}\right\| (\|r\| + \|\xi\|) \quad \left\|A^{-1}\right\| < C$$

2.3.3 Вклад от погрешности решения системы алгебраических уравнений

$$\|z\| \leq \left\|A^{-1}\right\| \|r\| = \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|r\|}{\|A\|}$$

Знаем что:

$$\|A\| \geq \frac{\|g\|}{\|v\|}$$

Из этого получаем:

$$\|z\| \leq \|A\| \left\|A^{-1}\right\| \frac{\|r\|}{\|A\|} \|v\|$$

$$cond(A) = \|A\| \left\|A^{-1}\right\|$$

$$\frac{\|r\|}{\|A\|} \sim \varepsilon_M$$

$$\|z\| \leq cond(A)\varepsilon_M \|v\|$$

2.3.4 Разложение невязки

Разностная схема

$$-\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rk\frac{du}{dr}\right) \ - \ qu(r)\right] = f_i$$

$$-\left[\frac{d}{dr}\left(rk\frac{du}{dr}\right) \ - \ rqu(r)\right] = rf_i$$

Введем новые обозначения:

$$\tilde{k} = rk \qquad \tilde{q} = rq \qquad \tilde{f} = rf$$

Получим:

$$-\left[\frac{d}{dr}\left(\tilde{k}\frac{du}{dr}\right) \ - \ \tilde{q}u(r)\right] = \tilde{f}_i$$

Еще раз напишем разностную схему:

$$-\left[\tilde{k}_{i+0.5}\frac{u_{i+1}-u_i}{h} + \nu_1 - \frac{h}{2}\tilde{q}_i v_i\right] \ = \ \frac{h}{2}\tilde{f}_i \quad i = 0$$

$$-\left[\tilde{k}_{i+0.5}\frac{u_{i+1}-u_i}{h} - \tilde{k}_{i-0.5}\frac{u_i-u_{i-1}}{h} - h\tilde{q}_i v_i\right] \ = \ h\tilde{f}_i \quad i = 1, 2, ..., N-1$$

$$-\left[\nu_2 - \tilde{k}_{i-0.5}\cdot\frac{u_i-u_{i-1}}{h} - \frac{h}{2}\tilde{q}_i v_i\right] \ = \ \frac{h}{2}\tilde{f}_i \quad i = N$$

На левой границе интервала уравнение для невязки выглядит следующим образом:

$$\xi_i = \frac{h}{2}\tilde{f}_i + \left[\tilde{k}_{i+0.5}\frac{u_{i+1}-u_i}{h} + \nu_1 - \frac{h}{2}\tilde{q}_i u_i\right]$$

Внутри интервала:

$$\xi_i = h\tilde{f}_i + \left[\tilde{k}_{i+0.5}\frac{u_{i+1}-u_i}{h} - \tilde{k}_{i-0.5}\frac{u_i-u_{i-1}}{h} - h\tilde{q}_i u_i\right]$$

На правой границе:

$$\xi_i = \frac{h}{2}\tilde{f}_i + \left[\nu_2 - \tilde{k}_{i-0.5}\frac{u_i-u_{i-1}}{h} - \frac{h}{2}\tilde{q}_i u_i\right]$$

Найдем разложение разностной схемы

$$\begin{gathered}
u_i = u(x_i+h) = u_i + h\frac{du_i}{dr} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2u_i}{dr^2} + \frac{h^3}{6}\frac{d^4u_i}{dr^3} + \frac{h^4}{24}\frac{d^4u_i}{dr^4} + \mathcal{O}(h^5) \\
\frac{u_{i+1}-u_i}{h} = \frac{du_i}{dr} + \frac{h}{2}\frac{d^2u_i}{dr^2} + \frac{h^2}{6}\frac{d^3u_i}{dr^3} + \frac{h^3}{24}\frac{d^4u_i}{dr^4} + \mathcal{O}(h^4) \\
\tilde{k}_{i+\frac{1}{2}} = \tilde{k}(x_i+\frac{h}{2}) = \tilde{k}_i + \frac{h^2}{2}\frac{d\tilde{k}_i}{dr} + \frac{h^2}{8}\frac{d^2\tilde{k}_i}{dr^2} + \frac{h^3}{48}\frac{d^3\tilde{k}_i}{dr^3} + \mathcal{O}(h^3)
\end{gathered}$$

Получаем:

$$\begin{aligned}
\tilde{k}_{i+\frac{1}{2}}\frac{u_{i+1}-u_i}{h} =& \tilde{k}_i\frac{du_i}{dr} \\
&+ h\left[\frac{1}{2}\tilde{k}_i\frac{d^2u_i}{dr^2} + \frac{1}{2}\frac{d\tilde{k}_i}{dr}\frac{du_i}{dr}\right] \\
&+ h^2\left[\frac{1}{6}\tilde{k}_i\frac{d^3u_i}{dr^3} + \frac{1}{4}\frac{d\tilde{k}_i}{dr}\frac{d^2u_i}{dr^2} + \frac{1}{8}\frac{d^2\tilde{k}_i}{dr^2}\frac{du_i}{dr}\right] \\
&+ h^3\left[\frac{1}{24}\tilde{k}_i\frac{d^4u_i}{dr^4} + \frac{1}{12}\frac{d\tilde{k}_i}{dr}\frac{d^3u_i}{dr^3} + \frac{1}{16}\frac{d^2\tilde{k}_i}{dr^2}\frac{d^2u_i}{dr^2} + \frac{1}{48}\frac{d^3\tilde{k}_i}{dr^3}\frac{du_i}{dr}\right] \\
&+ \mathcal{O}(h^4)
\end{aligned}$$

$$\begin{gathered}
u_{i-1} = u(x_i-h) = u_i - h\frac{du_i}{dr} + \frac{h^2}{2}\frac{d^2u_i}{dr^2} - \frac{h^3}{6}\frac{d^4u_i}{dr^3} + \frac{h^4}{24}\frac{d^4u_i}{dr^4} + \mathcal{O}(h^5) \\
\frac{u_i-u_{i-1}}{h} = \frac{du_i}{dr} - \frac{h}{2}\frac{d^2u_i}{dr^2} + \frac{h^2}{6}\frac{d^3u_i}{dr^3} - \frac{h^3}{24}\frac{d^4u_i}{dr^4} + \mathcal{O}(h^4) \\
\tilde{k}_{i-\frac{1}{2}} = \tilde{k}(x_i-\frac{h}{2}) = \tilde{k}_i - \frac{h^2}{2}\frac{d\tilde{k}_i}{dr} + \frac{h^2}{8}\frac{d^2\tilde{k}_i}{dr^2} - \frac{h^3}{48}\frac{d^3\tilde{k}_i}{dr^3} + \mathcal{O}(h^3)
\end{gathered}$$

Получаем:

$$\begin{aligned}\tilde{k}_{i-\frac{1}{2}}\frac{u_i-u_{i-1}}{h} =&\tilde{k}_i\frac{du_i}{dr}\\&-h\left[\frac{1}{2}\tilde{k}_i\frac{d^2u_i}{dr^2}+\frac{1}{2}\frac{d\tilde{k}_i}{dr}\frac{du_i}{dr}\right]\\&+h^2\left[\frac{1}{6}\tilde{k}_i\frac{d^3u_i}{dr^3}+\frac{1}{4}\frac{d\tilde{k}_i}{dr}\frac{d^2u_i}{dr^2}+\frac{1}{8}\frac{d^2\tilde{k}_i}{dr^2}\frac{du_i}{dr}\right]\\&-h^3\left[\frac{1}{24}\tilde{k}_i\frac{d^4u_i}{dr^4}+\frac{1}{12}\frac{d\tilde{k}_i}{dr}\frac{d^3u_i}{dr^3}+\frac{1}{16}\frac{d^2\tilde{k}_i}{dr^2}\frac{d^2u_i}{dr^2}+\frac{1}{48}\frac{d^3\tilde{k}_i}{dr^3}\frac{du_i}{dr}\right]\\&+\mathcal{O}(h^4)\end{aligned}$$

Подставим это в уравнение невязки внутри интервала:

$$\begin{aligned}\xi_i = h\tilde{f}_i+ &\left[\tilde{k}_i\frac{du_i}{dr}+h\left[\frac{1}{2}\tilde{k}_i\frac{d^2u_i}{dr^2}+\frac{1}{2}\frac{dk_i}{dr}\frac{du_i}{dr}\right]+h^2\left[\frac{1}{6}\tilde{k}_i\frac{d^3u_i}{dr^3}+\frac{1}{4}\frac{dk_i}{dr}\frac{d^2u_i}{dr^2}+\frac{1}{8}\frac{d^2\tilde{k}_i}{dr^2}\frac{du_i}{dr}\right]\right.\\&+h^3\left[\frac{1}{24}\tilde{k}_i\frac{d^4u_i}{dr^4}+\frac{1}{12}\frac{d\tilde{k}_i}{dr}\frac{d^3u_i}{dr^3}+\frac{1}{16}\frac{d^2\tilde{k}_i}{dr^2}\frac{d^2u_i}{dr^2}+\frac{1}{48}\frac{d^3\tilde{k}_i}{dr^3}\frac{du_i}{dr}\right]\\&-\tilde{k}_i\frac{du_i}{dr}+h\left[\frac{1}{2}\tilde{k}_i\frac{d^2u_i}{dr^2}+\frac{1}{2}\frac{dk_i}{dr}\frac{du_i}{dr}\right]\\&-h^2\left[\frac{1}{6}\tilde{k}_i\frac{d^3u_i}{dr^3}+\frac{1}{4}\frac{dk_i}{dr}\frac{d^2u_i}{dr^2}+\frac{1}{8}\frac{d^2\tilde{k}_i}{dr^2}\frac{du_i}{dr}\right]\\&\left.-h^3\left[\frac{1}{24}\tilde{k}_i\frac{d^4u_i}{dr^4}+\frac{1}{12}\frac{d\tilde{k}_i}{dr}\frac{d^3u_i}{dr^3}+\frac{1}{16}\frac{d^2\tilde{k}_i}{dr^2}\frac{d^2u_i}{dr^2}+\frac{1}{48}\frac{d^3\tilde{k}_i}{dr^3}\frac{du_i}{dr}\right]\right]\end{aligned}$$

Приводим подобные слагаемые:

$$\begin{aligned}\xi_i =&h\left[\tilde{f}+\tilde{k}\frac{d^2u}{dr^2}\frac{d\tilde{k}}{dr}\frac{du}{dr}-\tilde{q}u\right]\\&+h^3\left[\frac{1}{12}\tilde{k}\frac{d^4u_i}{dr^4}+\frac{1}{6}\frac{d\tilde{k}}{dr}\frac{d^3u_i}{dr^3}+\frac{1}{8}\frac{d^2\tilde{k}}{dr^2}\frac{d^3u_i}{dr^3}+\frac{1}{24}\frac{d^3\tilde{k}}{dr^3}\frac{du_i}{dr}\right]+\mathcal{O}(h^4)\end{aligned}$$

Можно заметить что:

$$\left[\tilde{k}\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{d\tilde{k}}{dr}\frac{du}{dr}\right]=\frac{d}{dr}\left(\tilde{k}\frac{du}{dr}\right)$$

При этом:

$$\tilde{f}+\frac{d}{dr}\left(\tilde{k}\frac{du}{dr}\right)-\tilde{q}u=0$$

Тем самым получаем:

$$\xi_i = h^3\left[\frac{1}{12}\tilde{k}\frac{d^4u_i}{dr^4}+\frac{1}{6}\frac{d\tilde{k}}{dr}\frac{d^3u_i}{dr^3}+\frac{1}{8}\frac{d^2\tilde{k}}{dr^2}\frac{d^3u_i}{dr^3}+\frac{1}{24}\frac{d^3\tilde{k}}{dr^3}\frac{du_i}{dr}\right]+\mathcal{O}(h^4)$$

Найдем разложение невязки для граничного условия слева:

$$\xi_i = \frac{h}{2}\tilde{f}_i + \left[\tilde{k}_{i+0.5}\frac{u_{i+1}-u_i}{h} + \nu_1 - \frac{h}{2}\tilde{q}_i u_i\right] \quad i=0$$

Получаем:

$$\begin{aligned}\xi_i =& \frac{h}{2}\tilde{f}_i + \tilde{k}_i\frac{du_i}{dr} + h\left[\frac{1}{2}\tilde{k}_i\frac{d^2u_i}{dr^2} + \frac{1}{2}\frac{d\tilde{k}_i}{dr}\frac{du_i}{dr}\right] \\ &+ h^2\left[\frac{1}{6}\tilde{k}_i\frac{d^3u_i}{dr^3} + \frac{1}{4}\frac{d\tilde{k}_i}{dr}\frac{d^2u_i}{dr^2} + \frac{1}{8}\frac{d^2\tilde{k}_i}{dr^2}\frac{du_i}{dr}\right] + \mathcal{O}(h^3) + \nu_1 - \frac{h}{2}\tilde{q}_i u_i\end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые при одинаковых степенях h:

$$\begin{aligned}\xi_i =& h^0\left[\nu_1 + \tilde{k}_i\frac{du_i}{dr}\right] + \frac{h}{2}\left[\tilde{f}_i + \tilde{k}_i\frac{d^2u_i}{dr^2} + \frac{d\tilde{k}_i}{dr}\frac{du_i}{dr} - \tilde{q}_i u_i\right] \\ &+ h^2\left[\frac{1}{6}\tilde{k}_i\frac{d^3u_i}{dr^3} + \frac{1}{4}\frac{d\tilde{k}_i}{dr}\frac{d^2u_i}{dr^2} + \frac{1}{8}\frac{d^2\tilde{k}_i}{dr^2}\frac{du_i}{dr}\right] + \mathcal{O}(h^3)\end{aligned}$$

Из условия:

$$k\left.\frac{du}{dr}\right|_{r=R_L} = -\nu_1$$

Также:

$$\left[\tilde{k}\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{d\tilde{k}}{dr}\frac{du}{dr}\right] = \frac{d}{dr}\left(\tilde{k}\frac{du}{dr}\right)$$

$$\tilde{f} + \frac{d}{dr}\left(\tilde{k}\frac{du}{dr}\right) - \tilde{q}u = 0$$

Тем самым получаем:

$$\xi_i = h^2\left[\frac{1}{6}\tilde{k}_i\frac{d^3u_i}{dr^3} + \frac{1}{4}\frac{d\tilde{k}_i}{dr}\frac{d^2u_i}{dr^2} + \frac{1}{8}\frac{d^2\tilde{k}_i}{dr^2}\frac{du_i}{dr}\right] + \mathcal{O}(h^3)$$

Теперь найдем разложение невязки для правой границы

$$\xi_i = \frac{h}{2}\tilde{f}_i + \left[\nu_2 - \tilde{k}_{i-0.5}\frac{u_i-u_{i-1}}{h} - \frac{h}{2}\tilde{q}_i u_i\right], \quad i=N$$

Получаем:

$$\begin{aligned}\xi_i =& \frac{h}{2}\tilde{f}_i - \tilde{k}_i\frac{du_i}{dr} + h\left[\frac{1}{2}\tilde{k}_i\frac{d^2u_i}{dr^2} + \frac{1}{2}\frac{d\tilde{k}_i}{dr}\frac{du_i}{dr}\right] \\ &- h^2\left[\frac{1}{6}\tilde{k}_i\frac{d^3u_i}{dr^3} + \frac{1}{4}\frac{d\tilde{k}_i}{dr}\frac{d^2u_i}{dr^2} + \frac{1}{8}\frac{d^2\tilde{k}_i}{dr^2}\frac{du_i}{dr}\right] + \mathcal{O}(h^3) + \nu_2 - \frac{h}{2}\tilde{q}_i u_i\end{aligned}$$

Сгруппируем слагаемые при одинаковых степенях h:

$$\begin{aligned}\xi_i =& h^0\left[\nu_2 - \tilde{k}_i\frac{du_i}{dr}\right] + \frac{h}{2}\left[\tilde{f}_i + \tilde{k}_i\frac{d^2u_i}{dr^2} + \frac{d\tilde{k}_i}{dr}\frac{du_i}{dr} - \tilde{q}_iu_i\right]\\ &- h^2\left[\frac{1}{6}\tilde{k}_i\frac{d^3u_i}{dr^3} + \frac{1}{4}\frac{d\tilde{k}_i}{dr}\frac{d^2u_i}{dr^2} + \frac{1}{8}\frac{d^2\tilde{k}_i}{dr^2}\frac{du_i}{dr}\right] + \mathcal{O}(h^3)\end{aligned}$$

Из условия:

$$-k\left.\frac{du}{dr}\right|_{r=R_R} = -\nu_2$$

Также:

$$\left[\tilde{k}\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{d\tilde{k}}{dr}\frac{du}{dr}\right] = \frac{d}{dr}\left(\tilde{k}\frac{du}{dr}\right)$$

$$\tilde{f} + \frac{d}{dr}\left(\tilde{k}\frac{du}{dr}\right) - \tilde{q}u = 0$$

Тем самым получаем:

$$\xi_i = -h^2\left[\frac{1}{6}\tilde{k}_i\frac{d^3u_i}{dr^3} + \frac{1}{4}\frac{d\tilde{k}_i}{dr}\frac{d^2u_i}{dr^2} + \frac{1}{8}\frac{d^2\tilde{k}_i}{dr^2}\frac{du_i}{dr}\right] + \mathcal{O}(h^3)$$

3 Заключение

3.1 Вывод

3.2 Код

```
/* tma.hpp */
```