Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт компьютерных наук и технологий
Высшая школа программной инженерии

Лабораторная работа № 1

по дисциплине
«Математические модели»

Выполнил: Ферапонтов М.В.
Группа: гр. 3530904/01004

Проверил: Дед Пихто

Санкт-Петербург
2023

Содержание

1 Вступление

1.1 Постановка задачи

Вариант СР. Используя интегро-интерполяционный метод (метод баланса), разработать программу для моделирования стационарного распределения температуры в полом цилиндре, описываемого математической моделью вида:

$$\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rk(r)\frac{du}{dr}\right) \;-\; q(r)u\right] = f(r),\; r \in \left[R_L,\; R_R\right],\; R_L > 0,$$
$$0 < c_1 \leq k(r) \leq c_2,\; 0 \leq q(r)$$

Граничные условия:

$$k\,\frac{du}{dt}\bigg|_{r=R_L} \;=\; -\nu_1 \qquad\qquad -k\,\frac{du}{dt}\bigg|_{r=R_R} \;=\; -\nu_2$$

1.2 Используемое ПО

1. Boost library - библиотека для тестирования и других функций

2 Основная часть

2.1 Интегро-интеполяционный метод (метод баланса)

Введем основную сетку, где N - число разбиений.

$$r_0 < r_1 < \dots < r_N,\ r_i \in [R_L, R_R],\ r_0 = R_L,\ r_N = R_R$$

$$h_i = r_i - r_{i-1},\ i = 1, 2, \dots, N$$

$$r_{r-0.5} = \frac{r_i - r_{i-1}}{2},\ i = 1, 2, \dots, N$$

Введем дополнительную сетку:

$$\hbar_i = \begin{cases} \frac{h_i + 1}{2},\ i = 0 \\ \\ \frac{h_i + h_{i+1}}{2},\ i = 1, 2, \dots, N-1 \\ \\ \frac{h_i}{2},\ i = N \end{cases}$$

Проведем аппроксимацию начального уравнения.
Для i = 0

$$-\int_{r_i}^{r_{i+0.5}} \left[\frac{d}{dr}\left(rk(r)\frac{du(r)}{dr}\right) - rq(r)u(r)\right] dr = \int_{r_i}^{r_{i+0.5}} rf(r)\, dr,$$

$$-\left[rk(r)\left.\frac{du(r)}{dr}\right|_{r=r_{i+0.5}} - rk(r)\left.\frac{du(r)}{dr}\right|_{r_i} - \int_{r_i}^{r_{i+0.5}} rq(r)u(r)\, dr\right] = \int_{r_i}^{r_{i+0.5}} rf(r)\, dr,$$

Формула центральных разностей:

$$\frac{du(r)}{dr}|_{r=r_{i+0.5}} \approx \frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}},$$

Граничное условие:

$$k(r)\left.\frac{du(r)}{dr}\right|_{r=R_L} = -\nu_1,$$

Формула левых прямоугольников:

$$\int_{r_i}^{r_{r+0.5}} r\varphi_i\, dr = \hbar_i r_i \varphi_i$$

Получаем разностную схему для i = 0:

$$-\left[r_{i+0.5} \cdot k_{i+0.5}\frac{v_{i+1} - v_i}{h_{i+1}} - r_i \cdot (-\nu_1) - \hbar r_i q_i v_i\right] = \hbar_i r_i f_i$$

Для i = 1, 2, ..., N-1

$$-\int_{r_{i-0,5}}^{r_{i+0.5}} \left[\frac{d}{dr}\left(rk(r)\frac{du(r)}{dr}\right) - rq(r)u(r)\right] dr = \int_{r_{i-0.5}}^{r_{i+0.5}} rf(r)\, dr,$$

$$-\left[rk(r)\left.\frac{du(r)}{dr}\right|_{r=r_{i+0.5}} - rk(r)\left.\frac{du(r)}{dr}\right|_{r_{i-0.5}} - \int_{r_{i-0.5}}^{r_{i+0.5}} rq(r)u(r)\,dr\right] = \int_{r_{i-0.5}}^{r_{i+0.5}} rf(r)\,dr,$$

$$\frac{du(r)}{dr}|_{r=r_{i-0.5}} \approx \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i}$$

$$\int_{r_{i-0.5}}^{r_{r+0.5}} r\varphi_i\,dr = \hbar_i r_i\varphi_i$$

Получаем разностную схему для i = 1, 2, ..., N-1:

$$-\left[r_{i+0.5}\cdot k_{i+0.5}\frac{v_{i+1}-v_i}{h_{i+1}} - r_{i-0.5}k_{i-0.5}\frac{v_i - v_{i-1}}{h_i} - \hbar r_i q_i v_i\right] = \hbar_i r_i f_i$$

Для i = N:

$$-\int_{r_{i-0.5}}^{r_i}\left[\frac{d}{dr}\left(rk(r)\frac{du(r)}{dr}\right) - rq(r)u(r)\right]dr = \int_{r_{i-0.5}}^{r_i} rf(r)\,dr,$$

$$-\left[rk(r)\left.\frac{du(r)}{dr}\right|_{r=r_i} - rk(r)\left.\frac{du(r)}{dr}\right|_{r_{i-0.5}} - \int_{r_{i-0.5}}^{r_i} rq(r)u(r)\,dr\right] = \int_{r_{i-0.5}}^{r_i} rf(r)\,dr,$$

$$\frac{du(r)}{dr}|_{r=r_{i-0.5}} \approx \frac{v_i - v_{i-1}}{h_i},$$

$$-k(r)\left.\frac{du(r)}{dr}\right|_{r=R_R} = -\nu_2$$

$$\int_{r_{i-0.5}}^{r_i} r\varphi(r)\,dr \approx \hbar_i r_i\varphi_i$$

Получаем разностную схему для i=N:

$$-\left[-r_i\cdot(-\nu_2) - r_{i-0.5}k_{i-0.5}\cdot\frac{v_i - v_{i-1}}{h_i} - \hbar_i r_i q_i u_i\right] = \hbar_i r_i f_i$$

После аппроксимации уравнения можно представить в виде системы из трёхдиагональной матрицы где a, c, b - диагонали матрица A и вектора g. Элементы матрицы:
Для i = 0

$$\begin{aligned} c_i &= r_{i+0.5}\frac{k_{i+0.5}}{h_{i+1}} + \hbar_i r_i q_i \\ b_i &= -r_{i+0.5}\cdot\frac{k_{i+0.5}}{h_{i+1}} \\ g_i &= \hbar_i r_i f_i + r(-\nu_1) \end{aligned}$$

Для i = 1, 2, ..., N-1

$$\begin{aligned} a_i &= -r_{i-0.5}\frac{k_{i-0.5}}{h_i} \\ c_i &= r_{i-0.5}\frac{k_{i-0.5}}{h_i} + r_{i+0.5}\frac{k_{i+0.5}}{h_{i+1}} + \hbar_i r_i q_i \\ b_i &= -r_{i+0.5}\frac{k_{i+0.5}}{h_{i+1}} \\ g_i &= \hbar_i r_i f_i \end{aligned}$$

Для i = N:

$$\begin{aligned} a_i &= -r_{i-0.5}\frac{k_{i-0.5}}{h_i} \\ c_i &= r_{i-0.5}\frac{k_{i-0.5}}{h_i} + \hbar_i r_i q_i \\ g_i &= \hbar_i r_i f_i + r_i \cdot (-\nu_2) \end{aligned}$$

2.2 Метод прогонки

Метод прогонки это простой способ решать трёхдиагональные системы.

$$\begin{pmatrix} c_1 & b_1 & & & & & 0 \\ a_2 & c_2 & b_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & a_{n-1} & c_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & & & & a_n & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{pmatrix}$$

Этап 1

Строка 1. Разделим первую строку на c_1:

$$c_1 x_1 + b_1 x_2 = g_1$$

$$x_1 + \gamma_1 x_2 = \rho_1, \;\; \gamma_1 = \frac{b_1}{c_1}, \;\; \rho_1 = \frac{g_1}{c_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & & & & & 0 \\ a_2 & c_2 & b_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & a_{n-1} & c_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & & & & a_n & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{pmatrix}$$

Строки от 2 до N-1. Здесь представлена общая формула для всех строк в промежутке

$$a_n x_{n-1} + c_n x_n + b_n x_{n+1} = g_n, \;\; n = 2, 3, \ldots, N-1$$

Умножим n-1 строку на a_n и вычтем из строки под номером n. Получим строку

$$(c_n - a_n \cdot \gamma_{n-1})x_n + c_n x_{n+1} = g_n - a_n \rho_{n-1}$$

Разделим на $(c_n - a_n \cdot \gamma_{n-1})$

$$x_n + \frac{b_n}{c_n - a_n \gamma_{n-1}} x_{n+1} = \frac{g_n - a_n \rho_{n-1}}{c_n - a_n \gamma_{n-1}}$$

$$x_n + \gamma_n x_{n+1} = \rho_n, \;\; \gamma_n = \frac{b_n}{c_n - a_n\gamma_{n-1}}, \;\; \rho_n = \frac{g_n - a_n\rho_{n-1}}{c_n - a_n\gamma_{n-1}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & & & & & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & a_{n-1} & c_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & & & & & a_n & c_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ g_{n-1} \\ g_n \end{pmatrix}$$

Строка N.

$$a_n x_{n-1} + c_n x_n = g_n$$
$$x_n = \rho_n, \;\; \rho_n = \frac{r_n - a_n\rho_{n-1}}{c_n - a_n\gamma_{n-1}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & & & & & 0 \\ 0 & 1 & \gamma_2 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & 0 & 1 & \gamma_{n-1} \\ 0 & & & & & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \rho_{n-1} \\ \rho_n \end{pmatrix}$$

Этап 2

Чтобы узнать значения вектора x нам нужно "подняться" по уже вычисленным значеням.

$$x_n = \rho_n$$
$$x_i = \rho_i - \gamma_i x_{i+1}, \;\; i = n-1, n-2, \dots, 1$$

3 Заключение

3.1 Вывод

3.2 Код

```
/* tma.hpp */
```