Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт компьютерных наук и технологий
Высшая школа программной инженерии

Курсовая Работа

по дисциплине
«Математические модели»

Выполнил: Ферапонтов М.В.
Группа: гр. 3530904/00104

Проверил: Воскобойников С. П.

Санкт-Петербург
2023

Содержание

1 Вступление

1.1 Постановка задачи

Вариант N. Используя интегро-интерполяционный метод, разработать подпрограмму для моделирования распределения температуры в цилиндре, описываемого математической моделью

$$-\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right]=f(r,z)$$

$$0\le c_{11}\le k_1(r,z)\le c_{12},\quad 0\le c_{11}\le k_2(r,z)\le c_{22},\quad 0\le r\le R,\ 0\le z\le L$$

С граничными условиями:

$$\begin{aligned}
&u\big|_{r=0} - \text{ограничено} && -k_1\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=R}=\chi_2\, u\big|_{r=R}-\varphi_2(z)\\
&k_2\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0}=\chi_3\, u\big|_{z=0}-\varphi_3(r) && u\big|_{z=L}=\varphi_r(r)\\
&\chi_2\ge 0 && \chi_3\ge 0
\end{aligned}$$

Матрица алгебраической системы должна храниться в упакованной форме.

2 Основная часть

2.1 Разностная схема

Введем основную сетку:

$$\begin{aligned}
&N_x - \text{число разбиений на } [0,R] && N_y - \text{число разбиений на} [0,L]\\
&x_0, x_1 < \cdots < x_N && y_0 < y_1 < \cdots < y_N\\
&x_0 = 0, \quad x_N = R && y_0 = 0, \quad y_N = L\\
&h_i = \frac{R-0}{N_x}, \quad i = 0, \cdots, N_x && h_j = \frac{L-0}{N_y}, \quad j = 0, \cdots, N_y
\end{aligned}$$

Введем дополнительную сетку:

$$x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{x_i + x_{i-1}}{2} \quad i = 1, \cdots, N_x \qquad\qquad y_{j-\frac{1}{2}} = \frac{y_j + y_{j-1}}{2} \quad j = 1, \cdots, N_y$$

$$\hbar_i = \begin{cases} \frac{h_i+1}{2}, \ i = 0 \\ \\ \frac{h_i+h_{i+1}}{2}, \ i = 1, 2, \ldots, N_x - 1 \\ \\ \frac{h_i}{2}, \ i = N_x \end{cases} \qquad \hbar_j = \begin{cases} \frac{h_j+1}{2}, \ j = 0 \\ \\ \frac{h_j+h_{j+1}}{2}, \ j = 1, 2, \ldots, N_y - 1 \\ \\ \frac{h_j}{2}, \ j = N_y \end{cases}$$

Преобразуем наше начальное уравнение

$$-\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right] = rf(r,z)$$

Проинтегрируем уравнение внутри интервала:

$$-\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right] = \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)$$

Получим:

$$\begin{aligned}
-&\left[\int\limits_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_{i+\frac{1}{2}}} - \int\limits_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_{i-\frac{1}{2}}}\right.\\
&\left.+\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\bigg|_{z=z_{j+\frac{1}{2}}} - \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\bigg|_{z=z_{j-\frac{1}{2}}}\right] = \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)
\end{aligned}$$

Воспользуемся формулами численного дифференцирования:

$$k_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_{i-\frac{1}{2}}} \approx k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z)\frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_i}$$

$$k_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{z=z_{j-\frac{1}{2}}} \approx k_2(r, z_{j-\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j}-v_{i,j-1}}{h_j}$$

Также воспользуемся формулой средних прямоугольников:

$$\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} r\varphi(r,z)dr = \hbar_i r_i \varphi_i$$

$$\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} r\varphi(r,z)drdz = \hbar_i \hbar_j r_i \varphi_{i,j}$$

В итоге получаем разностную схему внутри интервала:

$$-\Bigg[\hbar_j r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}}, z_j)\frac{v_{i+1,j}-v_{i,j}}{h_{i+1}} - \hbar_j r_{i-\frac{1}{2}} k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z_j)\frac{v_{i,j}-v_{i-1,j}}{h_i}$$
$$+\hbar_i r_{i+\frac{1}{2}} k_2(r_i, z_{j+\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j+1}-v_{i,j}}{h_{j+1}} - \hbar_i r_{i-\frac{1}{2}} k_2(r_i, z_{j-\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j}-v_{i,j-1}}{h_j}\Bigg] = \hbar_i \hbar_j r_i f_{i,j}$$

Теперь найдем значение разностной схемы на углах и границах интервалов

2.1.1 На левой границе

Проинтегрируем наше уравнение в $i = 0$ и z внутри промежутка

$$-\int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right] = \int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)$$

Получаем:

$$-\Bigg[\int\limits_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_{i+\frac{1}{2}}} - \int\limits_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_i}$$
$$+\int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\bigg|_{z=z_{j+\frac{1}{2}}} - \int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\bigg|_{z=z_{j-\frac{1}{2}}}\Bigg] = \int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)$$

Имеем граничное условие:

$$u|_{r=0} - \text{ограничено}$$

Получаем разностную схему:

$$-\Bigg[\hbar_j r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}}, z_j)\frac{v_{i+1,j}-v_{i,j}}{h_{i+1}} - 0$$
$$+\hbar_i r_{i+\frac{1}{2}} k_2(r_i, z_{j+\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j+1}-v_{i,j}}{h_{j+1}} - \hbar_i r_{i-\frac{1}{2}} k_2(r_i, z_{j-\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j}-v_{i,j-1}}{h_j}\Bigg] = \hbar_i \hbar_j r_i f_{i,j}$$

2.1.2 На правой границе

Проинтегрируем наше уравнение в $i = N_x$ и z внутри промежутка

$$-\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right]=\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)$$

Получаем:

$$-\left[\int\limits_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_i}-\int\limits_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_{i-\frac{1}{2}}}\right.$$

$$\left.+\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\bigg|_{z=z_{j+\frac{1}{2}}}-\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\bigg|_{z=z_{j-\frac{1}{2}}}\right]=\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)$$

Имеем граничное условие:

$$-k_1\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=R}=\chi_2\, u|_{r=R}-\varphi_2(z)$$

Получаем разностную схему:

$$-\left[-\hbar_j(\chi_2 v_i-\varphi_2(z))-\hbar_j r_{i-\frac{1}{2}}k_1(r_{i-\frac{1}{2}},z_j)\frac{v_{i,j}-v_{i-1,j}}{h_i}\right.$$

$$\left.+\hbar_i r_{i+\frac{1}{2}}k_2(r_i,z_{j+\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j+1}-v_{i,j}}{h_{j+1}}-\hbar_i r_{i-\frac{1}{2}}k_2(r_i,z_{j-\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j}-v_{i,j-1}}{h_j}\right]=\hbar_i\hbar_j r_i f_{i,j}$$

2.1.3 На нижней границе

Проинтегрируем наше уравнение $j = 0$ и i внутри промежутка

$$-\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right]=\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)$$

Получаем:

$$-\left[\int\limits_{z_i}^{z_{i+\frac{1}{2}}} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_{i+\frac{1}{2}}}-\int\limits_{z_i}^{z_{i+\frac{1}{2}}} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_{i-\frac{1}{2}}}\right.$$

$$\left.+\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\bigg|_{z=z_{j+\frac{1}{2}}}-\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\bigg|_{z=z_j}\right]=\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)$$

Имеем граничное условие:

$$k_2 \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \chi_3 \; u|_{z=0} - \varphi_3(r)$$

Получаем разностную схему:

$$-\Bigg[\hbar_j r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}}, z_j) \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_{i+1}} - \hbar_j r_{i-\frac{1}{2}} k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z_j) \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_i}$$
$$+\hbar_i r_{i+\frac{1}{2}} k_2(r_i, z_{j+\frac{1}{2}}) \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_{j+1}} - \hbar_i(\chi_3 v_i - \varphi_3(r))\Bigg] = \hbar_i \hbar_j r_i f_{i,j}$$

2.1.4 На верхней границе

Проинтегрируем наше уравнение при $j = N_y$ и r внутри интервала.

$$-\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_j} \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right] = \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_j} rf(r,z)$$

Получаем:

$$-\Bigg[\int\limits_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_i} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_{i+\frac{1}{2}}} - \int\limits_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_i} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_{i-\frac{1}{2}}}$$
$$+\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\bigg|_{z=z_j} - \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\bigg|_{z=z_{j-\frac{1}{2}}}\Bigg] = \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)$$

Имеем граничное условие:

$$u|_{z=L} = \varphi_r(r)$$

2.1.5 Левый-нижний угол

$$-\int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right] = \int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)$$

2.1.6 Левый-верхний угол

$$-\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i} \int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right] = \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i} \int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)$$

2.1.7 Правый-нижний угол

$$-\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i}\int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right]=\int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}}rf(r,z)$$

2.1.8 Правый-верхний угол

$$-\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_j}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right]=\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_j}rf(r,z)$$

3 Заключение