

Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт компьютерных наук и технологий
Высшая школа программной инженерии

Курсовая Работа

по дисциплине
«Математические модели»

Выполнил:

Ферапонтов М.В.

Группа:

гр. 3530904/00104

Проверил:

Воскобойников С. П.

Санкт-Петербург
2023

1 Вступление

1.1 Постановка задачи

Вариант N. Используя интегро-интерполяционный метод, разработать подпрограмму для моделирования распределения температуры в цилиндре, описываемого математической моделью

$$-\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]=f(r,z)$$

$$0 \leq c_{11} \leq k_1(r,z) \leq c_{12}, \quad 0 \leq c_{11} \leq k_2(r,z) \leq c_{22}, \quad 0 \leq r \leq R \leq z \leq L$$

С граничными условиями:

$$\begin{aligned} u|_{r=0} & - \text{ограничено} & -k_1 \frac{\partial u}{\partial r} \Big|_{r=R} & = \chi_2 u|_{r=R} - \varphi_2(z) \\ -k_2 \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=0} & = \chi_3 u|_{z=0} - \varphi_3(r) & u|_{z=L} & = \varphi_r(r) \\ \chi_2 & \geq 0 & \chi_3 & \geq 0 \end{aligned}$$

Матрица алгебраической системы должна храниться в упакованной форме.

2 Основная часть

2.1 Разностная схема

Преобразуем наше начальное уравнение

$$-\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r, z)\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(rk_2(r, z)\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right] = rf(r, z)$$

Проинтегрируем уравнение внутри интервала:

$$-\int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r, z)\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(rk_2(r, z)\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right] = \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r, z)$$

Получим:

$$\begin{aligned} & -\left[\int_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} rk_1(r, z)\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=r_{i+\frac{1}{2}}} - \int_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} rk_1(r, z)\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=r_{i-\frac{1}{2}}} \right. \\ & \left. + \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rk_2(r, z)\frac{\partial u}{\partial v}\Big|_{z=z_{j+\frac{1}{2}}} - \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rk_2(r, z)\frac{\partial u}{\partial v}\Big|_{z=z_{j-\frac{1}{2}}} \right] = \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r, z) \end{aligned}$$

Воспользуемся формулами численного дифференцирования:

$$\begin{aligned} k_1(r, z)\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=r_{i-\frac{1}{2}}} & \approx k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z)\frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_i} \\ k_2(r, z)\frac{\partial u}{\partial v}\Big|_{z=z_{j-\frac{1}{2}}} & \approx k_2(r, z_{j-\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_j} \end{aligned}$$

Также воспользуемся формулой средних прямоугольников:

$$\begin{aligned} \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} r\varphi(r, z)dr & = \bar{h}_i r_i \varphi_i \\ \int_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} r\varphi(r, z)drdz & = \bar{h}_i \bar{h}_j r_i \varphi_{i,j} \end{aligned}$$

В итоге получаем разностную схему внутри интервала:

$$\begin{aligned} & -\left[\bar{h}_j r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}}, z_j)\frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_{i+1}} - \bar{h}_j r_{i-\frac{1}{2}} k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z_j)\frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_i} \right. \\ & \left. + \bar{h}_i r_{i+\frac{1}{2}} k_2(r_i, z_{j+\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_{j+1}} - \bar{h}_i r_{i-\frac{1}{2}} k_2(r_i, z_{j-\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_j} \right] = \bar{h}_i \bar{h}_j r_i f_{i,j} \end{aligned}$$

3 Заключение