Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого
Институт компьютерных наук и технологий
Высшая школа программной инженерии

Курсовая Работа

по дисциплине
«Математические модели»

Выполнил:	Ферапонтов М.В.
Группа:	гр. 3530904/00104
Проверил:	Воскобойников С. П.

Санкт-Петербург
2023

Содержание

1 Вступление

1.1 Постановка задачи

Вариант N. Используя интегро-интерполяционный метод, разработать подпрограмму для моделирования распределения температуры в цилиндре, описываемого математической моделью

$$-\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right]=f(r,z)$$

$$0\le c_{11}\le k_1(r,z)\le c_{12},\quad 0\le c_{11}\le k_2(r,z)\le c_{22},\quad 0\le r\le R,\ 0\le z\le L$$

С граничными условиями:

$$\begin{array}{ll} u\big|_{r=0} \text{ – ограничено} & -k_1\left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=R}=\chi_2\, u\big|_{r=R}-\varphi_2(z) \\ k_2\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0}=\chi_3\, u\big|_{z=0}-\varphi_3(r) & u\big|_{z=L}=\varphi_r(r) \\ \chi_2\ge 0 & \chi_3\ge 0 \end{array}$$

Матрица алгебраической системы должна храниться в упакованной форме.

2 Основная часть

2.1 Разностная схема

Введем основную сетку:

N_r – число разбиений на$[0, R]$

$r_0 < r_1 < \cdots < r_N$

$r_0 = 0, \quad r_N = R$

$$h_r = \frac{R - 0}{N_r}$$

N_z – число разбиений на$[0, L]$

$z_0 < z_1 < \cdots < z_N$

$z_0 = 0, \quad z_N = L$

$$h_z = \frac{L - 0}{N_z}$$

Введем дополнительную сетку:

$$r_{i-\frac{1}{2}} = \frac{r_i + r_{i-1}}{2} \quad i = 1, \cdots, N_r$$

$$\hbar_i = \begin{cases} \frac{h_r}{2},\ i = 0 \\ h_r,\ i = 1, 2, \dots, N_r - 1 \\ \frac{h_r}{2},\ i = N_r \end{cases}$$

$$z_{j-\frac{1}{2}} = \frac{z_j + z_{j-1}}{2} \quad j = 1, \cdots, N_z$$

$$\hbar_j = \begin{cases} \frac{h_z}{2},\ j = 0 \\ h_z,\ j = 1, 2, \dots, N_z - 1 \\ \frac{h_z}{2},\ j = N_z \end{cases}$$

Преобразуем наше начальное уравнение домножив на r

$$-\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right] = rf(r,z)$$

Проинтегрируем уравнение внутри интервала:

$$-\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right]drdz = \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)drdz$$

Получим:

$$-\left[\int\limits_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_{i+\frac{1}{2}}} dz - \int\limits_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_{i-\frac{1}{2}}} dz \right.$$
$$\left. + \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\bigg|_{z=z_{j+\frac{1}{2}}} dr - \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\bigg|_{z=z_{j-\frac{1}{2}}} dr\right] = \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)drdz$$

Воспользуемся формулами численного дифференцирования:

$$k_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=r_{i-\frac{1}{2}}} \approx k_1(r_{i-\frac{1}{2}},z)\frac{v_{i,j}-v_{i-1,j}}{h_r}$$

$$k_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{z=z_{j-\frac{1}{2}}} \approx k_2(r,z_{j-\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j}-v_{i,j-1}}{h_z}$$

Также воспользуемся формулой средних прямоугольников:

$$\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} r\varphi(r,z)dr = \hbar_i r_i \varphi_i$$

$$\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} r\varphi(r,z)drdz = \hbar_i\hbar_j r_i \varphi_{i,j}$$

В итоге получаем разностную схему внутри интервала:

$$-\left[\hbar_j r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}},z_j)\frac{v_{i+1,j}-v_{i,j}}{h_r} - \hbar_j r_{i-\frac{1}{2}} k_1(r_{i-\frac{1}{2}},z_j)\frac{v_{i,j}-v_{i-1,j}}{h_r} \right.$$
$$\left. +\hbar_i r_i k_2(r_i,z_{j+\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j+1}-v_{i,j}}{h_z} - \hbar_i r_i k_2(r_i,z_{j-\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j}-v_{i,j-1}}{h_z}\right] = \hbar_i\hbar_j r_i f_{i,j}$$

Перейдём к частному:

$$-\left[h_j r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}},z_j)\frac{v_{i+1,j}-v_{i,j}}{h_r} - h_j r_{i-\frac{1}{2}} k_1(r_{i-\frac{1}{2}},z_j)\frac{v_{i,j}-v_{i-1,j}}{h_r} \right.$$
$$\left. +h_i r_i k_2(r_i,z_{j+\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j+1}-v_{i,j}}{h_z} - h_i r_i k_2(r_i,z_{j-\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j}-v_{i,j-1}}{h_z}\right] = h_r h_z r_i f_{i,j}$$

Теперь найдем значение разностной схемы на углах и границах интервалов

2.1.1 На левой границе

Проинтегрируем наше уравнение в $i=0$ и z внутри промежутка

$$-\int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right] drdz = \int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)drdz$$

Получаем:

$$-\left[\int\limits_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=r_{i+\frac{1}{2}}} dz - \int\limits_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=r_i} dz\right.$$
$$\left.+\int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\Big|_{z=z_{j+\frac{1}{2}}} dr - \int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\Big|_{z=z_{j-\frac{1}{2}}} dr\right] = \int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)drdz$$

Имеем граничное условие:

$$u\big|_{r=0} - \text{ограничено, т. е } \frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=0} = 0$$

$$\int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rfdr \approx f_i \int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rdr = f_i\frac{r^2_{i+\frac{1}{2}}}{2} = h_r f_i \frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{2}, \quad i=0, \quad r_i = 0, r_{i+\frac{1}{2}} = \frac{h_r}{2}$$

Получаем разностную схему:

$$-\left[\hbar_j r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}}, z_j)\frac{v_{i+1,j}-v_{i,j}}{h_{i+1}} - 0\right.$$
$$\left.+\hbar_i r_{i+\frac{1}{2}} k_2(r_i, z_{j+\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j+1}-v_{i,j}}{h_{j+1}} - \hbar_i r_i k_2(r_i, z_{j-\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j}-v_{i,j-1}}{h_j}\right] = \hbar_i\hbar_j r_i f_{i,j}$$

Перейдём к частному:

$$-\left[h_z r_{\frac{1}{2}} k_1(r_{\frac{1}{2}}, z_j)\frac{v_{1,j}-v_{0,j}}{h_r} - 0\right.$$
$$\left.+\frac{h_r}{2}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} k_2(r_0, z_{j+\frac{1}{2}})\frac{v_{0,j+1}-v_{0,j}}{h_z} - \frac{h_r}{2}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} k_2(r_0, z_{j-\frac{1}{2}})\frac{v_{0,j}-v_{0,j-1}}{h_z}\right] = \frac{h_r}{2}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} h_z f_{0,j}$$

2.1.2 На правой границе

Проинтегрируем наше уравнение в $i = N_x$ и z внутри промежутка

$$-\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right]drdz = \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)drdz$$

Получаем:

$$-\left[\int\limits_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_i} dz - \int\limits_{z_{i-\frac{1}{2}}}^{z_{i+\frac{1}{2}}} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_{i-\frac{1}{2}}} dz\right.$$

$$\left.+\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\bigg|_{z=z_{j+\frac{1}{2}}} dr - \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\bigg|_{z=z_{j-\frac{1}{2}}} dr\right] = \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i}\int\limits_{z_{j-\frac{1}{2}}}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)drdz$$

Имеем граничное условие:

$$-k_1\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=R} = \chi_2\ u|_{r=R} - \varphi_2(z)$$

Получаем разностную схему:

$$-\left[-\hbar_j(\chi_2 v_i - \varphi_2(z)) - \hbar_j r_{i-\frac{1}{2}} k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z_j)\frac{v_{i,j}-v_{i-1,j}}{h_r}\right.$$

$$\left.+\hbar_i r_i k_2(r_i, z_{j+\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j+1}-v_{i,j}}{h_z} - \hbar_i r_i k_2(r_i, z_{j-\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j}-v_{i,j-1}}{h_z}\right] = \hbar_i\hbar_j r_i f_{i,j}$$

Перейдём к частному:

$$-\left[-h_z(\chi_2 v_{N_r} - \varphi_2(z)) - h_z r_{N_r-\frac{1}{2}} k_1(r_{N_r-\frac{1}{2}}, z_j)\frac{v_{N_r,j}-v_{N_r-1,j}}{h_r}\right.$$

$$\left.+\frac{h_r}{2} r_{N_r} k_2(r_{N_r}, z_{j+\frac{1}{2}})\frac{v_{N_r,j+1}-v_{N_r,j}}{h_z} - \frac{h_r}{2} r_{N_r} k_2(r_{N_r}, z_{j-\frac{1}{2}})\frac{v_{N_r,j}-v_{N_r,j-1}}{h_z}\right] = \frac{h_r}{2} r_{N_r} h_z f_{N_r,j}$$

2.1.3 На нижней границе

Проинтегрируем наше уравнение $j=0$ и i внутри промежутка

$$-\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right] drdz = \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)drdz$$

Получаем:

$$-\left[\int\limits_{z_i}^{z_{i+\frac{1}{2}}} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_{i+\frac{1}{2}}} dz - \int\limits_{z_i}^{z_{i+\frac{1}{2}}} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_{i-\frac{1}{2}}} dz\right.$$

$$\left.+\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\bigg|_{z=z_{j+\frac{1}{2}}} dr - \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\bigg|_{z=z_j} dr\right] = \int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_{i+\frac{1}{2}}}\int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)drdz$$

Имеем граничное условие:

$$k_2 \frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \chi_3 \left. u \right|_{z=0} - \varphi_3(r)$$

Получаем разностную схему:

$$-\left[\hbar_j r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}}, z_j) \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_r} - \hbar_j r_{i-\frac{1}{2}} k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z_j) \frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_r} \right.$$
$$\left. + \hbar_i r_i k_2(r_i, z_{j+\frac{1}{2}}) \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_z} - \hbar_i (\chi_3 v_i - \varphi_3(r)) \right] = \hbar_i \hbar_j r_i f_{i,j}$$

Перейдём к частному:

$$-\left[\frac{h_z}{2} r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}}, z_0) \frac{v_{i+1,0} - v_{i,0}}{h_r} - \frac{h_z}{2} r_{i-\frac{1}{2}} k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z_0) \frac{v_{i,0} - v_{i-1,0}}{h_r} \right.$$
$$\left. + h_r r_i k_2(r_i, z_{\frac{1}{2}}) \frac{v_{i,1} - v_{i,0}}{h_z} - h_r (\chi_3 v_{i,0} - \varphi_3(r)) \right] = h_r \frac{h_z}{2} r_i f_{i,0}$$

2.1.4 На верхней границе

Имеем граничное условие:

$$\left. u \right|_{z=L} = \varphi_r(r)$$

$$v_{i,N_z} = \varphi(r_i)$$

2.1.5 Левый-нижний угол

Проинтегрируем наше уравнение в $i = 0$ и $j = 0$ внутри промежутка

$$-\int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} \left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r k_1(r,z) \frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r k_2(r,z) \frac{\partial u}{\partial v}\right)\right] dr dz = \int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} r f(r,z) dr dz$$

Получаем:

$$-\left[\int\limits_{z_i}^{z_{i+\frac{1}{2}}} r k_1(r,z) \frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_{i+\frac{1}{2}}} dz - \int\limits_{z_i}^{z_{i+\frac{1}{2}}} r k_1(r,z) \frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_i} dz \right.$$
$$\left. + \int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} r k_2(r,z) \frac{\partial u}{\partial v}\bigg|_{z=z_{j+\frac{1}{2}}} dr - \int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} r k_2(r,z) \frac{\partial u}{\partial v}\bigg|_{z=z_j} dr \right] = \int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} \int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} r f(r,z) dr dz$$

Имеем граничное условие:

$$u|_{r=0} \text{ – ограничено, т. е } \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=0} = 0$$

$$\int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rfdr \approx f_i \int\limits_{r_i}^{r_{i+\frac{1}{2}}} rdr = f_i \frac{r_{i+\frac{1}{2}}^2}{2} = h_r f_i \frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{2}, \quad i = 0, \quad r_i = 0, r_{i+\frac{1}{2}} = \frac{h_r}{2}$$

Также:

$$k_2 \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \chi_3 \; u|_{z=0} - \varphi_3(r)$$

Получаем:

$$-\Bigg[\hbar_j r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}}, z_j) \frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_r} - 0$$
$$+ \hbar_i r_{i+\frac{1}{2}} k_2(r_i, z_{j+\frac{1}{2}}) \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_z} - \hbar_i(\chi_3 \; u|_{z=0} - \varphi_3(r))\Bigg] = \hbar_i \hbar_j r_i f_{i,j}$$

Перейдём к частному:

$$-\Bigg[\frac{h_z}{2} r_{\frac{1}{2}} k_1(r_{\frac{1}{2}}, z_0) \frac{v_{1,0} - v_{0,0}}{h_r} - 0$$
$$+ \frac{h_r}{2} r_{\frac{1}{2}} k_2(r_0, z_{\frac{1}{2}}) \frac{v_{0,1} - v_{0,0}}{h_z} - \frac{h_r}{2}(\chi_3 v_{0,0} - \varphi_3(r))\Bigg] = \frac{h_r}{2}\frac{h_z}{2} r_i f_{i,j}$$

2.1.6 Левый-верхний угол

При $i = 0$ и $z = N_z$ имеем граничное условие:
Имеем граничное условие:

$$u|_{z=L} = \varphi_r(r)$$

$$v_{0,N_z} = \varphi(r_0)$$

2.1.7 Правый-верхний угол

При $i = N_r$ и $z = N_z$ имеем граничное условие:
Имеем граничное условие:

$$u|_{z=L} = \varphi_r(r)$$

$$v_{N_r,N_z} = \varphi(r_{N_r})$$

2.1.8 Правый-нижний угол

Проинегрируем наше уравнение в $i = N_r$ и $j = 0$:

$$-\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i}\int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\right)\right]=\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i}\int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)$$

Получаем:

$$-\left[\int\limits_{z_i}^{z_{i+\frac{1}{2}}} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_i}dz-\int\limits_{z_i}^{z_{i+\frac{1}{2}}} rk_1(r,z)\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=r_{i-\frac{1}{2}}}dz\right.$$
$$\left.+\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\bigg|_{z=z_{j+\frac{1}{2}}}dr-\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i} rk_2(r,z)\frac{\partial u}{\partial v}\bigg|_{z=z_j}dr\right]=\int\limits_{r_{i-\frac{1}{2}}}^{r_i}\int\limits_{z_j}^{z_{j+\frac{1}{2}}} rf(r,z)drdz$$

Имеем граничные условия:

$$-k_1\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=R}=\chi_2\ u\big|_{r=R}-\varphi_2(z)$$
$$k_2\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_{z=0}=\chi_3\ u\big|_{z=0}-\varphi_3(r)$$

Получаем разностную схему:

$$-\left[-\hbar_j(\chi_2\ u|_{r=R}-\varphi_2(z))-\hbar_j r_{i-\frac{1}{2}}k_1(r_{i-\frac{1}{2}},z_j)\frac{v_{i,j}-v_{i-1,j}}{h_r}\right.$$
$$\left.+\hbar_i r_i k_2(r_i,z_{j+\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j+1}-v_{i,j}}{h_z}-\hbar_i(\chi_3 v_i-\varphi_3(r))\right]=\hbar_i\hbar_j r_i f_{i,j}$$

Перейдём к частному

$$-\left[-\frac{h_z}{2}(\chi_2 v_{N_r,0}-\varphi_2(z))-\frac{h_z}{2}r_{N_r-\frac{1}{2}}k_1(r_{N_r-\frac{1}{2}},z_0)\frac{v_{N_r,0}-v_{N_r-1,0}}{h_r}\right.$$
$$\left.+\frac{h_r}{2}r_{N_r}k_2(r_{N_r},z_{\frac{1}{2}})\frac{v_{N_r,1}-v_{N_r,0}}{h_z}-\frac{h_r}{2}(\chi_3 v_{N_r,0}-\varphi_3(r))\right]=\frac{h_r}{2}\frac{h_z}{2}r_{N_r}f_{N_r,0}$$

2.2 Запись СЛАУ

Перейдём к одноиндексной записи

$$m = j(N_r + 1) + i$$

Индексы изменяются в следующих границах:

$$0 \le i \le N_r$$

$$0 \le j \le N_z$$

Тогда имеем:

$$0 \le m < (N_r + 1)(N_y + 1)$$

2.2.1 Запись для внутренних точек

Перепишем наше уравнение с использованием нового индеса для $i \in (0, N_r)$ и $j \in (0, N_z)$:

$$-\left[h_z r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}}, z_j)\frac{v_{i+1,j} - v_{i,j}}{h_r} - h_z r_{i-\frac{1}{2}} k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z_j)\frac{v_{i,j} - v_{i-1,j}}{h_r}\right.$$
$$\left.+ h_r r_i k_2(r_i, z_{j+\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j+1} - v_{i,j}}{h_z} - h_r r_i k_2(r_i, z_{j-\frac{1}{2}})\frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{h_z}\right] = h_r h_z r_i f_{i,j}$$

$$-\frac{h_r}{h_z} r_i k_2(r_i, z_{j-\frac{1}{2}}) v_{i,j-1} - \frac{h_r}{h_z} r_{i-\frac{1}{2}} k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z_j) v_{i-1,j} +$$
$$+ \left[\frac{h_z}{h_r} r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}}, z_j) + \frac{h_z}{h_r} r_{i-\frac{1}{2}} k_1(r_{i-\frac{1}{2}}, z_j) + \frac{h_r}{h_z} r_i k_2(r_i, z_{j+\frac{1}{2}}) + \frac{h_r}{h_z} r_i k_2(r_i, z_{j-\frac{1}{2}})\right] v_{i,j}$$
$$- \frac{h_z}{h_r} r_{i+\frac{1}{2}} k_1(r_{i+\frac{1}{2}}, z_j) v_{i+1,j} - \frac{h_r}{h_z} r_i k_2(r_i, z_{j+\frac{1}{2}}) v_{i,j+\frac{1}{2}} = h_r h_z r_i f_{i,j}$$

2.2.2 Запись для левой границы

Перепишем наше уравнение с использованием нового индекса для $i = 0$ и $j \in (0, N_z)$:

$$-\left[h_z r_{\frac{1}{2}} k_1(r_{\frac{1}{2}}, z_j)\frac{v_{1,j} - v_{0,j}}{h_r} - 0\right.$$
$$\left.+ \frac{h_r}{2}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} k_2(r_0, z_{j+\frac{1}{2}})\frac{v_{0,j+1} - v_{0,j}}{h_z} - \frac{h_r}{2}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} k_2(r_0, z_{j-\frac{1}{2}})\frac{v_{0,j} - v_{0,j-1}}{h_z}\right] = \frac{h_r}{2}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2} h_z f_{0,j}$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{h_r}{2h_z}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2}k_2(r_0,z_{j-\frac{1}{2}})v_{0,j-1}+\\
&+\left[\frac{h_z}{h_r}r_{\frac{1}{2}}k_1(r_{\frac{1}{2}},z_j)+\frac{h_r}{2h_z}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2}k_2(r_0,z_{j+\frac{1}{2}})+\frac{h_r}{2h_z}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2}k_2(r_0,z_{j-\frac{1}{2}})\right]v_{0,j}\\
&-\frac{h_z}{h_r}r_{\frac{1}{2}}k_1(r_{\frac{1}{2}},z_j)v_{1,j}-\frac{h_r}{2h_z}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2}k_2(r_0,z_{j+\frac{1}{2}})v_{0,j+1}=\frac{h_r}{2}\frac{r_{\frac{1}{2}}}{2}h_zf_{0,j}
\end{aligned}
$$

2.2.3 Запись для правой границы

Перепишем наше уравнение с использованием нового индекса для $i = N_r$ и $j \in (0, N_z)$:

$$
\begin{aligned}
&-\left[-h_z(\chi_2 v_{N_r}-\varphi_2(z))-h_z r_{N_r-\frac{1}{2}}k_1(r_{N_r-\frac{1}{2}},z_j)\frac{v_{N_r,j}-v_{N_r-1,j}}{h_r}\right.\\
&\left.+\frac{h_r}{2}r_{N_r}k_2(r_{N_r},z_{j+\frac{1}{2}})\frac{v_{N_r,j+1}-v_{N_r,j}}{h_z}-\frac{h_r}{2}r_{N_r}k_2(r_{N_r},z_{j-\frac{1}{2}})\frac{v_{N_r,j}-v_{N_r,j-1}}{h_z}\right]=\frac{h_r}{2}r_{N_r}h_zf_{N_r,j}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{h_r}{2h_z}r_{N_r}k_2(r_{N_r},z_{j-\frac{1}{2}})v_{N_r,j-1}-\frac{h_z}{h_r}r_{N_r-\frac{1}{2}}k_1(r_{N_r-\frac{1}{2}},z_j)v_{N_r-1,j}\\
&+\left[h_z\chi_2+\frac{h_z}{h_r}r_{N_r-\frac{1}{2}}k_1(r_{N_r-\frac{1}{2}},z_j)+\frac{h_r}{2h_z}r_{N_r}k_2(r_{N_r,z_{j+\frac{1}{2}}})+\frac{h_r}{2h_z}r_{N_r}k_2(r_{N_r},z_{j-\frac{1}{2}})\right]v_{N_r,j}\\
&-\frac{h_r}{2h_z}r_{N_r}k_2(r_{N_r},z_{j+\frac{1}{2}})v_{N_r,j+1}=\frac{h_r}{2}r_{N_r}h_zf_{N_r,j}+h_z\phi_2(z)
\end{aligned}
$$

2.2.4 Запись для нижней границы

2.2.5 Запись для верхней границы

Перепишем наше уравнение с использованием нового индекса для $i \in (0, N_r)$ и $j = N_z$:

$$v_{i,N_z} = \varphi(r_i)$$

Перейдём к новым обозначениям:

$$c_m w_m = \varphi_m$$

где:

$$c_m = 1, \quad \varphi_m = \varphi_2(r_i)$$

2.2.6 Запись для левой нижней граничной точки

2.2.7 Запись для правой нижней граничной точки

3 Заключение