148

Докажите, что если A неперечислимо и $A \leq_m B$, то B неперечислимо.

Пусть B перечислимо. Тогда B полуразрешим и есть полуразрешитель p. $p \circ f$ есть полуразрешитель для A — противоречие.

149

Пусть A перечислимо и $\mathbb{N} \setminus A \leq_m A$. Что можно сказать про A?

A перечислимо $\Rightarrow \mathbb{N} \setminus A$ перечислимо $\Rightarrow A$ разрешимо.

150

Пусть A перечислимо и $A \leq_m \mathbb{N} \setminus A$. Что можно сказать про A?

Кажется, ничего, т.к. его дополнение может быть не перечислимым, а следовательно он может быть не разрешимым.

151

Пусть дана функция $f : A \to \mathbb{N}$. Ее продолжением на множество $B \supset A$ называется функция $g : B \to \mathbb{N}$, что если $x \in A$, то $g(x) = f(x)$. Докажите, что существует вычислимая функция f, у которой не существует всюду определенного вычислимого продолжения.

$\exists \mathcal{F} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N} : \forall$ вычислимой f $\exists k \in \mathbb{N} : f(\circ) = \mathcal{F}(k, \circ)$ — очевидно, т.к. можно рассмотреть какую-либо модель вычислений *(машины Тьюринга или ваш любимый язык программирования)*, найти для f программу p и закодировать её как число $n \in \mathbb{N}$. Несложно заметить, что $\mathcal{F}$ вычислима, но не тотальна, т.е. $\mathcal{F} : \mathfrak{N} \subset \mathbb{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Искомая функция $f : \mathfrak{N} \to \mathbb{N} \to \mathbb{N} : n \mapsto \mathcal{F}(n, n) + 42$. Почему она не продолжима до вычислимой? Пусть её продолжает g. Ей соответствует некоторый индекс k_g, такой что $\mathcal{F}(k_g, n) = g(n)$. В силу этого $\mathcal{F}$ определена на $(k_g, n) \ \ \forall n$. Но на $\mathfrak{N}$ g есть f, т.е. $\mathcal{F}(k_g, n) = f(n) = \mathcal{F}(n, n) + 42$. Подставим $n = k_g$, тогда $\mathcal{F}(n, n) = \mathcal{F}(n, n) + 42$ — противоречие.

152

Два перечислимых множества A и B, где $A \cap B = \varnothing$ называются неотделимыми, если не существует разрешимых множеств X и Y, таких что $A \subset X$, $B \subset Y$, $X \cap Y = \varnothing$.

Покажите, что существуют неотделимые множества. Указание: рассмотрите множества пар $\langle p, x\rangle$, где p - программа, возвращающая целое число, для некоторого условия.

Рассмотрим функцию как из предыдущего номера, но $n \mapsto !\mathcal{F}(n,n)$. По аналогичному утверждению f не имеет вычислимого продолжения. Тогда пусть $A = \{n \mid f(n) = 0\}$ и $B = \{n \mid f(n) = 1\}$. Предположим, что $\exists X, Y$. Но характеристическая функция X есть вычислимое продолжение f — противоречие.

153

Обобщите определение неотделимых множеств на счетное семейство множеств. Докажите, что существует счетное семейство неотделимых множеств.

То же самое, но не делать !, т.е. $A_i = \{n \mid f(n) = i\}$, $f : n \mapsto \mathcal{F}(n,n) + 1$

$\{A_i\}_{i=1}^{+\infty}$ — неотделимы, если $\forall i \quad A_i$ перечислимо $\exists! \{B_i\} : \forall i \quad A_i \subset B_i, B_i$ разрешимо $\bigcap B_i = \varnothing$

154

Докажите, что множество программ, допускающих заданное конечное множество слов $x_1, \ldots, x_n$, перечислимо, но не разрешимо.

154.1 Перечислимо

```
for t in ℕ:
    for prog in ℕ/_t:
        for x in xs:
            if prog(x, tl=t) == 1:
                print(prog)
```

Если подразумевается, что ещё не допускаются никакие другие слова, то нужно добавить:

```
        for w in (∑* \ xs) /_t:
            if prog(x, tl=t) != 1:
                print(prog)
```

154.2 Не разрешимо

Пусть есть разрешитель P. Тогда построим следующую программу:

```
f(x):
    return P(f) ^ x ∈ {x_i}
```

По классическому аргументу Тьюринга получаем противоречие.

155

Докажите, что множество программ, допускающих бесконечное множество слов не разрешимо.

Пусть есть разрешитель P. Тогда построим следующую программу:

```
f(x):
    return !P(f)
```

Если $P(f) = 1$, то $f \equiv 0$, а следовательно не допускает никакие слова, следовательно не допускает бесконечное множество слов. Если $P(f) = 0$, то f допускает все слова, а их бесконечно.

156

Докажите, что множество программ, зависающих на любом входе, не разрешимо.

Пусть есть разрешитель P. Тогда построим следующую программу:

```
f(x):
    if P(f)
        return 1;
    else
        while (true);
```

Противоречие.

157

Докажите, что множество программ, останавливающихся на своём собственном исходном коде, перечислимо, но не разрешимо.

157.1 Перечислимо

```
for t in ℕ:
    for prog in ℕ/t:
        if prog(prog, tl=t) != ⊥:
            print(prog)
```

157.2 Не разрешимо

```
f(x):
    if P(f)
        return 1;
    else
        while (true);
```

158

Покажите, что следующие три свойства множества X равносильны: (1) X можно представить в виде $A \setminus B$, где A — перечислимое множество, а B — его перечислимое подмножество; (2) X можно представить в виде $A \setminus B$, где A и B — перечислимые множества; (3) X можно представить в виде симметрической разности двух перечислимых множеств.

159

Покажите, что множество X можно представить в виде $A \setminus (B \setminus C)$, где $A \supset B \supset C$ — перечислимые множества, если и только если его можно представить в виде симметрической разности трёх перечислимых множеств.

160

Покажите, что существует множество, которое можно представить в виде симметрической разности трёх перечислимых множеств, но нельзя представить в виде симметрической разности двух перечислимых множеств

161

Язык ограниченной задачи останова (bounded halting) $BH = \{(p,t)|p$ завершается на пустом входе за t шагов $\}$. Докажите, что BH разрешим.

```
D(p, t):
    return p(tl=t).halts()
```

162

Докажите, что существует разрешимое множество пар, проекция которого на одну из осей не является разрешимой.

Это BH, т.к. проекция на первую ость есть $HALT$ — программы, которые завершаются на пустом входе за произвольное конечное число шагов.

163

Докажите, что существует разрешимое множество пар, проекция которого на каждую из осей не является разрешимой.

164

Некоторое множество S натуральных чисел разрешимо. Разложим все числа из S на простые множители и составим множество D всех простых чисел, встречающихся в этих разложениях. Можно ли утверждать, что множество D перечислимо?

```
listD():
    for s in listS():
        print(s.factorize())
```

165

Некоторое множество S натуральных чисел разрешимо. Разложим все числа из S на простые множители и составим множество D всех простых чисел, встречающихся в этих разложениях. Можно ли утверждать, что множество D разрешимо?

Нет. Пусть p_k — k-тое простое число. Пусть a_i есть произведение всех p_k таких, что $k < i$ и k, интерпретированное как программа, на пустом вводе останавливается за i шагов. Очевидно функция $i \mapsto a_i$ вычислима по определению. Кроме того, она возрастающая, следовательно её образ разрешим. Пусть S есть образ $i \mapsto a_i$. Определить, лежит ли число $p_d \in D$ эквивалентно $HALT$, т.к. $p_d \in D \Leftrightarrow \exists i : d.halts(tl = i) \Leftrightarrow d.halts()$

166

Множество $A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ разрешимо. Можно ли утверждать, что множество «нижних точек» множества A, то есть множество $B = \{\langle x, y\rangle | (\langle x, y\rangle \in A)$ и $(\langle x, z\rangle \notin A$ для всех $z < y)\}$ является разрешимым?

```
B(x, y):
    if not A(x, y):
        return False
    for z in 0..y-1:
        if A(x, z):
```

```
        return False
    return True
```

Всегда останавливается, т.к. $A(x, y)$ всегда останавливается.

167

В предыдущем задании можно ли утверждать, что B перечислимо, если A перечислимо?