185

Вещественное число α называется вычислимым, если существует вычислимая функция a, которая по любому рациональному $\varepsilon > 0$ даёт рациональное приближение к α с ошибкой не более ε, то есть $|\alpha - a(\varepsilon)| \leq \varepsilon$ для любого рационального $\varepsilon > 0$. Докажите, что число α вычислимо тогда и только тогда, когда множество рациональных чисел, меньших α, разрешимо.

$\Rightarrow$
```
decider(b):
    for eps in 1..inf.map { exp(-it) }:
        if a(eps) != b.cutoff(eps):
            return a(eps) > b
```

$\Leftarrow$ Бинпоиск

186

Докажите, что число α вычислимо тогда и только тогда, когда последовательность знаков представляющей его десятичной (или двоичной) дроби вычислима. Последовательность называется вычислимой, если существует программа, которая по номеру i выдает соответствующий элемент последовательности a_i.

$\Rightarrow$ $\varepsilon 10^{-i}$

$\Leftarrow$ аналогично

187

Докажите, что число α вычислимо тогда и только тогда, когда существует вычислимая последовательность рациональных чисел, вычислимо сходящаяся к α (последнее означает, что можно алгоритмически указать N по ε в стандартном ε-N-определении сходимости.)

Ну очевидно же

188

Покажите, что сумма, произведение, разность и частное вычислимых вещественных чисел вычислимы.

Можно перейти к подпредельным последовательностям.

189

Покажите, что корень многочлена с вычислимыми коэффициентами вычислим.

Запустим алгоритм нахождения корней полинома.

190

Сформулируйте и докажите утверждение о том, что предел вычислимо сходящейся последовательности вычислимых вещественных чисел вычислим.

Дана последовательность $\{a_i\}$, пусть её предел a. Покажем, что $a \in \mathcal{E}$.

```
a(eps):
    return a_i(N(eps))
```

191

Вещественное число α называют перечислимым снизу, если множество всех рациональных чисел, меньших α, перечислимо. (Перечислимость сверху определяется аналогично.) Докажите, что число α перечислимо снизу тогда и только тогда, когда оно является пределом некоторой вычислимой возрастающей последовательности рациональных чисел.

Соуфивается

192

Докажите, что действительное число вычислимо тогда и только тогда, когда оно перечислимо снизу и сверху.

Соуфивается

193

Докажите, что множество функций-приближений для рациональных вычислимых чисел α является неразрешимым. Указание: вспомните теорему о рекурсии.

Пусть дан `decider`.

```
f(eps):
    if decider(f):
        return 1 / eps
```

```
    else:
        return 0
```

Если `decider(f)`, то `f` не выдает аппроксимацию никакого числа. Иначе `f` выдает аппроксимацию 0.

194

Покажите, что существуют перечислимые снизу, но не вычислимые числа. Указание: рассмотрим сумму ряда $\sum 2^{-k}$ по k из какого-либо множества P.

Соуфивается

195

Приведите пример невычислимого предела сходящейся (но не вычислимо) последовательности вычислимых чисел

Последовательность — частичные суммы из 194.

196

Приведите пример невычислимого предела вычислимо сходящейся (но не вычислимой) последовательности вычислимых чисел

195 но для $2^{-BB(i)}$. Невычислимость предела очевидна, как и вычислимость произвольного элемента последовательности. Т.к. функция Аккермана вычислима, BB растёт быстрее оной, т.е. $BB(i) > A(i,i)$. Там возникает небольшая несостыковка для начальных значений, проще сказать $BB(2i+1) > A(i-1,i-1)$. Тогда $a_{2i+1} < 2^{-A(i-1,i-1)}$, а следовательно $\sum_{j=2i+1}^{+\infty} a_{2i+1} < 2 \cdot 2^{-A(i-1,i-1)}$ и тогда для ε можно выдать $N = \min\{i : 2 \cdot 2^{-A(i-1,i-1)}\}$, что вычислимо за конечное время.

197

Множество A называется эффективно бесконечным, если существует всюду определенная вычислимая функция f, которая по числу n выводит n различных элементов множества A. Докажите, что если множество A содержит бесконечное перечислимое подмножество, то оно эффективно бесконечно.

```
f(n):
    enumerator().limit(n)
```

198

Докажите, что если множество A эффективно бесконечно, то оно содержит бесконечное перечислимое подмножество.

```
enumerator():
    for i in 1..n:
        f(i)
```

199

Обозначим как $L(p)$ множество слов, которые допускается программой p. Множество A называется эффективно неперечислимым, если существует всюду определенная вычислимая функция f, которая по программе p указывает слово x, такое что $x \in L(p) \oplus A$. Докажите, что дополнение к диагонали универсального множества $\overline{D}$, где $D = \{p | \langle p, p \rangle \in U\}$, является эффективно неперечислимым.

$f(p)$ выдает слово x, такое что либо $p(x) = 1$ и при этом $x \in D \Leftrightarrow x(x) = 1$, либо ни одно из этого. $f(p) = p$.

200

Докажите, что дополнение к универсальному множеству $\overline{U}$ является эффективно неперечислимым.

$f(p)$ выдает слово $\langle a, b \rangle$, такое что либо $p(\langle a, b \rangle) = 1$ и при этом $\langle a, b \rangle \in U \Leftrightarrow a(b) = 1$, либо ни одно из этого.

```
a(b):
    return p((a, b))

f(p):
    return (a, b)
```

201

Докажите, что любое эффективно неперечислимое множество является эффективно бесконечным.

```
gen(n):
    xs = {}
    for i in 1..n:
        xs += f(xs::contains)
    print xs
```

Сначала xs пустой, следовательно $L(p) = \varnothing \Rightarrow f$ выдает элемент A. На следующей итерации f не может выдать тот же самый элемент, т.к. он $\in L(p)$. Кроме того, $L(p) \subset A$, следовательно f не выдаст элемента $L(p)$. Остается выдать новый элемент A.

202

Множество называется иммунным, если оно бесконечно, но не содержит бесконечных перечислимых подмножеств. Перечислимое множество называется простым, если дополнение к нему иммунно. Докажите, что существует простое множество.

Простое множество — множество, которое пересекается со всеми бесконечными перечислимыми множествами и дополнение которого конечно.

Рассмотрим $\{\langle x, y\rangle \mid y \in W_x, y > 2x\}$, где W_x есть образ x как программы. Множество, очевидно, перечислимо. Упорядочим его каким-либо образом и возьмём для каждого x его первое вхождение вида $\langle x, y\rangle$, сохранив все такие y в множество $\mathfrak{C}$. Перечислимость сохраняется. По построению $\forall k$ из множества $\overline{1, 2k}$ в $\mathfrak{C}$ входит не больше чем k чисел, следовательно множество с дырками и его дополнение бесконечно. Докажем условие про пересечение.

Рассмотрим бесконечное перечислимое множество A. Пусть оно перечисляется некоторым x. В силу бесконечности A в нём есть числа $> 2x$, кроме того в $\mathfrak{C}$ тоже есть такие числа по построению. Таким образом, в C лежало $\langle x, y\rangle$ для $y > 2x$ и минимальное такое y лежит в $\mathfrak{C}$, следовательно $A \cap \mathfrak{C} \neq \varnothing$.

203

Докажите, что множество является иммунным тогда и только тогда, когда оно не содержит бесконечных разрешимых подмножеств.

В одну сторону очевидно, т.к. определение выполнено.