Условие

Покажите, что если убрать требование о целочисленности кососимметрического потока, то ее можно решать, построив обычный поток, после чего перестроив его в кососимметрический поток такого же размера.

Решение

Рассмотрим кососимметрический граф G, в котором мы построили *обычный* максимальный поток f значения F. Единственное, что ему не хватает для кососимметричности — выполнение условия $f_{uv'} = f_{vu'}$. Если мы построим поток значения F, выполняющий это условие, то он будет максимальным, т.к. потока значения $> F$ нет.

Построим поток f', где $f'_{uv'} = f'_{vu'} = \dfrac{f_{uv'} + f_{vu'}}{2}$. Условие кососимметричности выполнено, докажем, что это всё ещё поток.

Рассмотрим вершину v. При переходе $f \to f'$ в вершине v разность входящего и выходящего потока изменилась на:

$$\begin{aligned}
\Delta v &= \sum_{u:\exists uv\in E}\left(\frac{f_{uv}+f_{u'v'}}{2} - f_{uv}\right) - \sum_{w:\exists vw\in E}\left(\frac{f_{vw}+f_{v'w'}}{2} - f_{vw}\right) \\
&= \sum_{u:\exists uv\in E}\frac{f_{u'v'}-f_{uv}}{2} + \sum_{w:\exists vw\in E}\frac{f_{vw}-f_{v'w'}}{2} \\
&= \sum_{u,w}\frac{f_{u'v'}-f_{v'w'}}{2} - \sum_{u,w}\frac{f_{uv}-f_{vw}}{2} \\
&= \frac{1}{2}\mathfrak{F}(v') - \frac{1}{2}\mathfrak{F}(v) \\
&= 0
\end{aligned}$$

, где $\mathfrak{F}(a)$ обозначает разность входящего и выходящего потока в вершине a в оригинальном потоке, т.е. 0.

Рис. 1: ~~Косо~~симметричный кот