67

Обозначим как W множество всех слов над алфавитом $\{a, b\}$. Объясните равенство $W = Seq\{a\} \times Seq(\{b\} \times Seq\{a\})$. Проверьте равенство производящих функций.

Заметим, что $Seq(a) = a^*$. Тогда $Seq\{a\} \times Seq(\{b\} \times Seq\{a\}) = a^*(ba^*)$. Несложно заметить, что искомое верно.

$$Seq\{a\} \times Seq(\{b\} \times Seq\{a\}) \leftrightarrow \frac{1}{1-t}\frac{1}{1-\frac{t}{1-t}} = \frac{1}{1-2t} \leftrightarrow a_n = 2^n$$

68

Обозначим как W^e множество слов над алфавитом $\{a, b\}$, где все отрезки подряд идущих букв a имеют четную длину. Представьте W^e как конструируемый комбинаторный объект. Найдите производящую функцию для W^e.

$$\begin{aligned} Seq\{b\} \times Seq(\{aa\} \times Seq\{b\}) &\leftrightarrow \frac{1}{1-t}\frac{1}{1-t^2\frac{1}{1-t}} \\ &= \frac{1}{1-t-t^2} \end{aligned}$$

69

Обозначим как $W^{(k)}$ множество слов над алфавитом $\{a, b\}$, не содержащих k букв a подряд. Представьте $W^{(k)}$ как конструируемый комбинаторный объект. Найдите производящую функцию для $W^{(k)}$.

$$\begin{aligned} Seq\{b\} \times Seq(\{a\} \times Seq_{<k-1}\{a\} \times \{a\} \times Seq\{b\}) &\leftrightarrow \frac{1}{1-t}\frac{1}{1-t^2\frac{1-t^{k-1}}{1-t}\frac{1}{1-t}} \\ &= \frac{1-t}{1+t^2-2t-t^2+t^{k+1}} \\ &= \frac{1-t}{1-2t+t^{k+1}} \end{aligned}$$

70

Постройте производящую функцию для строк над алфавитом $\{a, b\}$, содержащих заданную строку s длины k как подпоследовательность. Сделайте вывод об асимптотическом количестве таких строк.

$$Seq(\{a,b\} \setminus s_1) \times s_1 \times Seq(\{a,b\} \setminus s_2) \times s_2 \dots Seq(\{a,b\} \setminus s_n) \times s_n \times Seq(\{a,b\})$$

$$\left(\frac{t}{1-t}\right)^k \cdot \frac{1}{1-2t}$$

Асимптотически $\frac{t}{1-t} \sim 1$, поэтому $A \sim \frac{1}{1-2t}$, т.е. количество строк $\sim 2^n$, т.е. асимптотически все строки содержат любую подпоследовательность.

71

Постройте производящую функцию для строк над алфавитом $\{a,b\}$, в которых нет более k подряд идущих букв a или b.

$$Seq_{<k}\{b\} \times Seq(Seq_{1\le,<k}\{a\} \times Seq_{1\le,<k}\{b\}) \times Seq_{<k}\{a\}$$

$$\begin{aligned}\frac{1-t^k}{1-t}\frac{1}{1-\left(\frac{t(1-t^{k-1})}{1-t}\right)^2} &= \frac{(1-t^k)(1-t)}{(1-t)^2-(t-t^k)^2} \\ &= \frac{(1-t^k)(1-t)}{(1-t^k)(1-2t+t^k)} \\ &= \frac{1-t}{1-2t+t^k}\end{aligned}$$

72

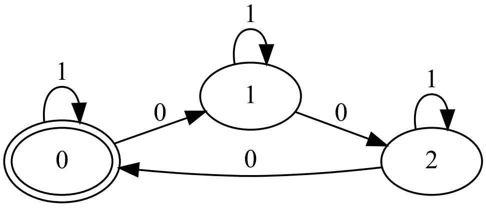
На лекции мы доказали, что если язык регулярный, то производящая функция его слов является рациональной. Докажите или опровергните обратное утверждение: если производящая функция слов языка является рациональной, то язык регулярный.

73

Постройте производящую функцию для строк над алфавитом $\{0,1\}$, в которых число нулей делится на 3.

Построим ДКА:

$$D = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix} \quad \vec{u} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$



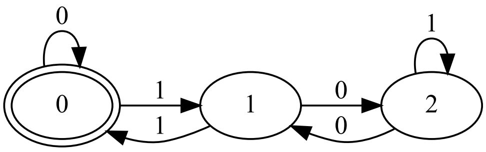
$$
\begin{aligned}
L(t) &= \vec{u}(I - tD)^{-1}\vec{v} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^{1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ 0 & 1-t & -t \\ -t & 0 & 1-t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2t^3 - 3t^2 + 3t - 1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t^2 + 2t - 1 & t^2 - t & -t^2 \\ -t^2 & -t^2 + 2t - 1 & t^2 - t \\ t^2 - t & -t^2 & -t^2 + 2t - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2t^3 - 3t^2 + 3t - 1} \begin{pmatrix} -t^2 + 2t - 1 & t^2 - t & -t^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{-t^2 + 2t - 1}{2t^3 - 3t^2 + 3t - 1}
\end{aligned}
$$

74

Постройте производящую функцию для строк над алфавитом $\{0, 1\}$, задающие числа в двоичной системе счисления, которые делятся на 3.

Построим ДКА:

$$
D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}
$$



$$(I - tD)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right)^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} 1-t & -t & 0 \\ -t & 1 & -t \\ 0 & -1 & 1-t \end{pmatrix}^{-1}$$

$$= \frac{1}{t^2+2t-1} \begin{pmatrix} (1-2t)/(t-1) & -t & t^2/(t-1) \\ -t & t-1 & -t \\ t/(t-1) & -1 & (-t^2-t+1)/(t-1) \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}(I - tD)^{-1}\vec{v} = \frac{1-2t}{(t-1)(t^2+2t-1)}$$

75

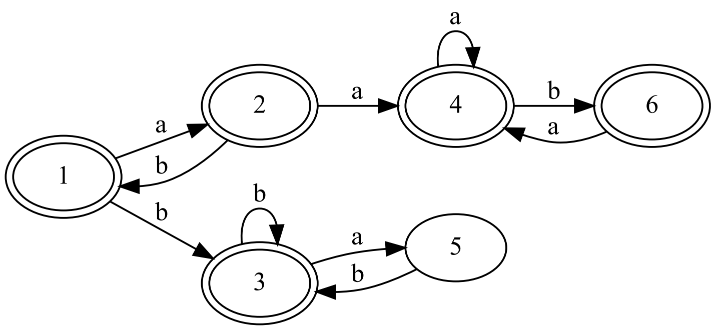
Постройте производящую функцию для строк над алфавитом $\{a, b\}$, удовлетворяющих регулярному выражению $(ab|a)^*|(ab|b)^*$

Построим ДКА:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

76

Найдите производящую функцию для строк, содержащих заданный паттерн p как подстроку.



a_n = число всех строк - число строк, не содержащих p

$$
\begin{aligned}
a_n &= b_n - d_n \\
&= m^n - d_n \\
A &= \frac{1}{1-mt} - \frac{c(t)}{t^k + (1-mt)c(t)} \\
&= \frac{t^k}{(1-mt)(t^k + (1-mt)c(t))}
\end{aligned}
$$

77

Рассмотрим бесконечную случайную строку из 0 и 1. Докажите, что матожидание позиции первого вхождения строки p длины k равно $2^k c(\frac{1}{2})$, где $c(z)$ - автокорреляционный многочлен. Указание: можно использовать формулу $\mathbb{E}X = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P(X > n)$.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}X &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X > n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n-k)}{m^{n-k}} \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{f(n-k)}{m^{n-k}} \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} f(n-k) \cdot t^{n-k}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=k}^{\infty} f(n-k) \cdot t^{n-k} \Big|_{t=\frac{1}{m}} \\
&= F\left(\frac{1}{m}\right) \\
&= F\left(\frac{1}{m}\right) \\
&= \frac{c\left(\frac{1}{m}\right)}{\frac{1}{m^k} + (1-1) \cdot \ldots} \\
&= m^k c\left(\frac{1}{m}\right) \\
&= 2^k c\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

78

Обозначим как P^T множество разбиений на слагаемые, где порядок слагаемых не важен, а слагаемые выбраны из множества T. Осознайте, что $P^T = MSet(Seq_T(Z))$. Найдите производящую функцию для P^T.

Осознание очевидно, т.к. $Seq_T(Z)$ есть множество объектов с весами объектов множества T. Мы можем брать > 1 объект, поэтому $MSet$

$$Seq_T(Z) \leftrightarrow i \in T$$

$$[n]Seq_T(Z) = \begin{cases} 0, & n \notin T \\ 1, & n \in T \end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
MSet(Seq_T(Z)) &= \prod_{n \geq 1}^{+\infty} \frac{1}{(1-z^n)^{[n]Seq_T(Z)}} \\
&= \prod_{n \in T} \frac{1}{1-z^n}
\end{aligned}
$$

79

Постройте производящие функции для разбиений на различные слагаемые и на нечетные слагаемые. Покажите, что они совпадают.

$$
\begin{aligned}
MSet(\mathbb{Z}/_2) &= \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - z^{2n-1}} \\
PSet(Z) &= \prod_{n=1}^{+\infty} (1 + z^n) \\
&= \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{(1 + z^n)(1 - z^n)}{1 - z^n} \\
&= \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - z^{2n}}{1 - z^n} \\
&= \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1 - z^{2n-1}}
\end{aligned}
$$

80

Постройте производящую функцию для разбиений на не больше, чем k положительных слагаемых.

Будем искать число разбиений на слагаемые из $[1, k] \cap \mathbb{Z}$. Заметим, что это то же самое, т.к. если взять m раз слагаемое n, то к сумме добавится $m \cdot n$. Если взять n раз слагаемое m, то произошло то же самое.

Итого получилась задача 78 для $T = [1, k] \cap \mathbb{Z}$. Ответ $\prod_{n=1}^{k} \frac{1}{1-z^n}$

81

Индекс Хирша. Докажите, что $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^n} = \sum\limits_{n\geq 1} \frac{z^{n^2}}{((1-z)\cdots(1-z^n))^2}$.

$$\begin{aligned}\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-z^n} &\stackrel{?}{=} \sum_{n\geq 1} \frac{z^{n^2}}{((1-z)\cdots(1-z^n))^2} \\ &= \sum_{n\geq 1} \left(\prod_{m=1}^{n} \frac{1}{1-z^m} \right)^2 z^{n^2}\end{aligned}$$

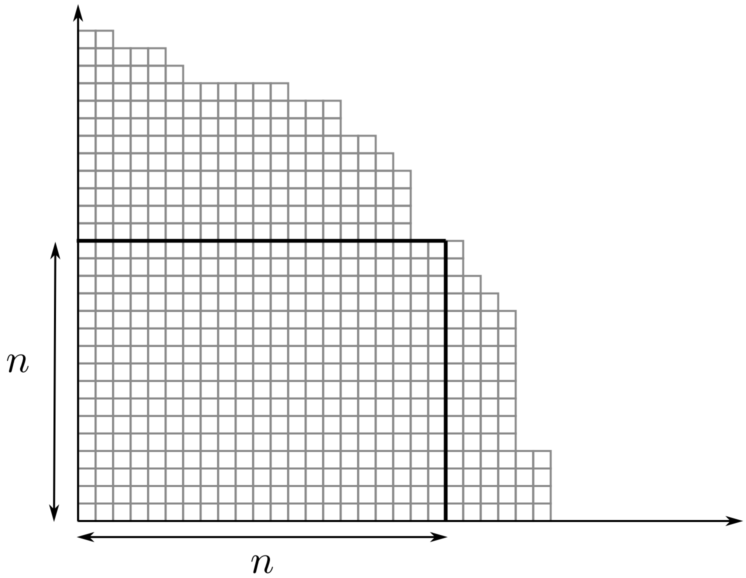


Рис. 1: Геометрическое обоснование искомой формулы