

Условие

Пусть в дереве для каждого узла высота его детей отличается не более чем в два раза. Правда ли, что высота такого дерева $O(\log n)$?

Решение

Рассмотрим дерево, которое состоит из бамбуков глубины $\frac{n}{2^i}$, где к корню i -того бамбука подвешен $(i + 1)$ -й бамбук:

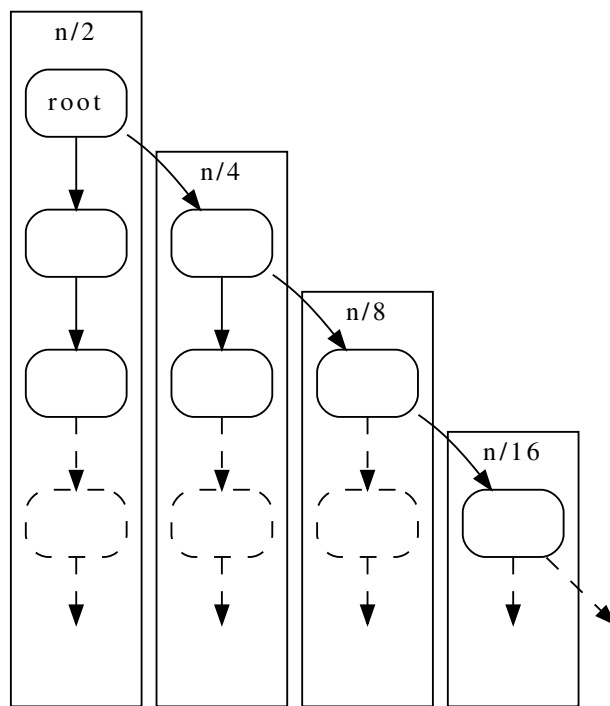


Рис. 1: Числа над каждым из бамбуков — его длина, пунктирные стрелки — продолжение дерева

Оба ребенка есть только в корнях бамбуков. В i -том корне у левого ребенка высота $\frac{n}{2^i}$, у правого $\frac{n}{2^{i+1}}$. Таким образом, рассматриваемое дерево подходит в условие. Высота этого дерева \geq высота первого бамбука $= \frac{n}{2} \neq O(\log n)$. Итого, найдено дерево, подходящее в условие, в котором высота $\neq O(\log n) \Rightarrow$ ответ — нет.