

58. Вычислить:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\operatorname{arctg}(2-x) + \sin(x-2)^2}{x^2-4}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{1+x^2+x^3}-1}{\ln \cos x};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(\sqrt[3]{1+3x}-1) + \sin^3 x}{1-\sqrt{1+x^3}};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin 2x - 2 \operatorname{tg} x)^2 + (1 - \cos 2x)^3}{\operatorname{tg}^7 6x + \sin^6 x}.$$

59. Пусть $\lim_{t \rightarrow t_0} \varphi(t) = a$, причем $\varphi(t) \neq a$ при $t \neq t_0$ в некоторой окрестности точки t_0 . Доказать, что:

- 1) если $f(x) = o(g(x))$ при $x \rightarrow x_0$, то $f(\varphi(t)) = o(g(\varphi(t)))$ при $t \rightarrow t_0$;
- 2) если $f(x) = O(g(x))$ при $x \rightarrow x_0$, то $f(\varphi(t)) = O(g(\varphi(t)))$ при $t \rightarrow t_0$.

60. Найти $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $x \in R$, если

$$f(x) = \begin{cases} 1/q & \text{при } x = p/q, \\ 0 & \text{при } x \text{ иррациональном,} \end{cases}$$

где p и q — взаимно простые целые числа.

61. Пусть $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ и $\lim_{t \rightarrow t_0} g(t) = x_0$. Следует ли отсюда, что $\lim_{t \rightarrow t_0} f(g(t)) = a$?

62. Доказать, что если функция $f(x)$, $x \in (x_0; +\infty)$, ограничена в каждом интервале $(x_0; x_1)$ и существует конечный или бесконечный

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

то

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{1}{n+1} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x+1) - f(x)}{x^n}.$$

63. Найти $\overline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$ и $\underline{\lim}_{x \rightarrow x_0} f(x)$, если:

- 1) $f(x) = e^{\cos(1/x^2)}$; 2) $f(x) = \frac{1}{x^2} \sin^2 \frac{1}{x}$; 3) $f(x) = \operatorname{arctg}(\frac{1}{x})$;
- 4) $f(x) = \sqrt{1/x^2 - 1/x} - 1/x$.

64. Найти $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x)$ и $\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} f(x)$ если:

- 1) $f(x) = \frac{\pi}{2} \cos^2 x + \operatorname{arctg} x$; 2) $f(x) = \frac{1+x+6x^2}{1-x+2x^2} \sin x^2$;
- 3) $f(x) = (\sqrt{4x^2 + x + 1} - \sqrt{4x^2 - x + 1})(1 + \cos 2x)$;
- 4) $f(x) = (1 + \cos^2 x)^{1/\cos^2 x}$.

65. Доказать, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (\cos x + \sin \sqrt{2x}) = 2$$