Спецкурс “Теория риска” (для филиала в Душанбе)

Проф. Екатерина Вадимовна Булинская

(МГУ имени М.В.Ломоносова)

Лекция 7

Москва, 11 марта 2025 г.

САЛОМ!

План лекции

- Тарифный принцип (полный порядок)
- Нагрузка в явном виде
- Нагрузка в неявном виде
- Обобщенный принцип среднего
- Порядок отношения правдоподобия
- Экспоненциальный порядок

Тарифный принцип

Как было отмечено ранее, премия (страховой взнос) - это та денежная сумма, которую страхователь уплачивает страховщику за освобождение от риска. Во Франции, например, термин премия (prime) употребляется, если страховщик - это акционерная страховая компания (société anonime). Если же речь идет об обществе взаимного страхования (société mutuelle), то говорят о страховом взносе (cotisation). Для краткости далее будем говорить о премии.

Размер премии определяется с помощью некоторого тарифного принципа (premium calculation principle), т.е. некоторого функционала H, который ставит в соответствие риску X действительное число $P = H(X)$, равное размеру требуемой премии. Выбор адекватного принципа подсчета премий - одна из важнейших задач актуарной науки.

Базируясь на законе больших чисел, страхование пришло к так называемому принципу эквивалентности, который предполагает равенство (в среднем) обязательств страховщика и страхователя. Согласно этому принципу размер премии по риску X равен $P = \mathsf{E}X$. Такая премия называется чистой (или нетто) премией.

С помощью ЦПТ может быть установлено, что чистая премия не дает страховщику возможности произвести все возмещения убытков (или их большую часть).

Следовательно, тарифный принцип должен удовлетворять условию $H(X) > \mathsf{E}X$. Считается, что полисодержатели менее склонны к риску, чем страховщики, поэтому готовы заплатить больше, чем средний ожидаемый размер ущерба, чтобы избавиться от неопределенности. Таким образом, к чистой премии прибавляется страховая надбавка или нагрузка безопасности (safety loading).

Размер требуемой нагрузки может задаваться либо в явном виде, либо как решение некоторых уравнений. Подчеркнем, что пока мы не принимаем во внимание административные издержки компании, а также расходы, связанные с продажей полисов, например, комиссионные, получаемые страховыми агентами, которые включаются в окончательную коммерческую премию.

Очевидно, что любой тарифный принцип позволяет вполне упорядочить риски.

Определение

Предпочтительнее тот риск, которому соответствует меньшая премия.

Могут возникать различные случаи в зависимости от способа назначения премии (иначе говоря, от выбора страховой нагрузки).

При этом многие тарифные принципы не сохраняют тот или иной порядок рисков как случайных величин.

Чаще всего риски сравниваются с помощью порядков для случайных величин (например, стохастического $<_{st}$, стоп-лосс $<_{sl}$ или выпуклого $<_{cx}$, т.е. порядка стоп-лосс, усиленного предположением о равенстве средних) при условии, что страховщик получает за них одну и ту же премию.

Эта гипотеза иногда оказывается ограничительной, так как менее благоприятный риск может быть сделан более привлекательным за счет выплаты высокой премии.

Принцип среднего

Expected value principle.

Пусть $\alpha > 0$ - коэффициент страховой нагрузки. Как известно, чистая премия (net premium) определяется как $\mathsf{E}X$. Тогда премия с нагрузкой (или надбавкой) (gross premium) задается следующим образом: $P_X = \mathsf{E}X(1+\alpha)$.

При $\alpha = 0$ мы возвращаемся к упомянутому выше принципу эквивалентности (net premium principle).

Вспомним, что стохастический порядок обладает свойством (1°). Действительно, если $X <_{st} Y$, то

$$EX = \int_0^\infty x dF_X(x) = \int_0^\infty (1 - F_X(t))dt \leq \int_0^\infty (1 - F_Y(t))dt = \mathsf{E}Y.$$

Отсюда очевидным образом получаем $P_X \leq P_Y$, т.е. чем больше риск, тем выше премия.

Принцип дисперсии

Variance principle

Предположим теперь, что страховая нагрузка подсчитывается на основе дисперсии. При этом задано некоторое $\gamma > 0$ так, что премия-брутто равна $P_X = \mathrm{E}X + \gamma \mathrm{D}X$. (Чем больше γ, тем в большей степени величина премии зависит от разброса значений выплат.)

Можно найти такие $X <_{st} Y$, для которых $P_X > P_Y$.

В самом деле, зададим распределения случайных величин X_p, $0 \le p \le 1$, следующим образом $\mathrm{P}(X_p = 0) = p = 1 - \mathrm{P}(X_p = 10/\gamma)$.

Тогда

$$\mathrm{E}X_p = (10/\gamma)(1-p), \quad \mathrm{E}X_p^2 = (100/\gamma^2)(1-p),$$

$$\mathrm{D}X_p = (100/\gamma^2)[(1-p) - (1-p)^2] = (100/\gamma^2)p(1-p).$$

Таким образом,

$$P_X = \mathsf{E}X + \gamma \mathsf{D}X = (10/\gamma)(1-p) + (100/\gamma)p(1-p)$$
$$= 10(1-p)(1+10p)/\gamma.$$

Беря производную по p от P_X, получаем

$$\frac{\partial P_X}{\partial p} = \frac{10}{\gamma}(9-20p) > 0 \text{ при } p < 0,45.$$

Следовательно, с ростом p премия растет, а риск X_p стохастически убывает, что является существенным недостатком этого принципа подсчета премии.

Принцип среднеквадратического отклонения (**Standard deviation principle**)

Здесь премия подсчитывается по формуле

$$P_X = \mathsf{E}X + \beta\sqrt{DX}.$$

Задача. Сохраняется ли стохастический порядок рисков при данном способе подсчета премий?

Голландский принцип

Dutch principle

Этот принцип выглядит следующим образом:

$$H(X) = \mathsf{E}X + \theta \mathsf{E} I_{(\alpha \mathsf{E}X, \infty]}(X), \quad \alpha \geq 1,\ 0 \leq \theta \leq 1.$$

Задача. Проверить, обладает ли этот принцип следующими важными свойствами:

1) масштабная инвариантность $H(aX) = aH(X)$,
2) инвариантность при сдвиге $H(X + b) = H(X) + b$,
3) сохраняет стоп-лосс порядок.

Хотя форма страховой нагрузки описывается в терминах, идущих от перестрахования, имеется достаточно сильное ограничение: относительная нагрузка менее 100%. А на практике в имущественном страховании при тарификации высоких траншей (layer) нагрузка может в несколько раз превышать среднее.

Премия нулевой полезности

Zero utility principle

Премия P_X риска X - это решение уравнения $\mathsf{E}u(P - X) = u(0)$, т.е. она выбирается таким образом, чтобы средняя полезность до и после страхования была одна и та же. Функция полезности предполагается неубывающей.
Пусть имеется два риска $X <_{st} Y$. Как было доказано, найдутся такие $X' \stackrel{d}{=} X$ и $Y' \stackrel{d}{=} Y$, что $\mathsf{P}(X' \le Y') = 1$. Тогда $u(P - Y') <_1 u(P - X')$ для любого P. Поскольку математические ожидания задаются распределением случайных величин, имеем $\mathsf{E}u(P - X) = \mathsf{E}u(P - X') \ge \mathsf{E}u(P - Y') = \mathsf{E}u(P - Y)$. Отсюда в свою очередь вытекает, что $P_X \le P_Y$. Значит, порядок премий совпадает со стохастическим порядком.

При специальном выборе функции полезности, а именно, если она экспоненциальная, можно получить явный вид премии. В самом деле, пусть $u(x) = -exp(-\alpha x)$. Премия удовлетворяет условию $\mathsf{E}\exp\{-\alpha(P - X)\} = 1$, откуда $P_X = (1/\alpha)\ln \mathsf{E}\exp(\alpha X)$. Этот частный случай носит название экспоненциального принципа (exponential principle).

Esscher principle

Введем сначала преобразование Эсшера. Пусть $g_X(h) = \mathrm{E}e^{hX}$ - производящая функция моментов $(-\infty < h < \infty)$. Определим случайную величину X_h, имеющую функцию распределения $F_{X,h}$, задаваемую соотношением $dF_{X,h} = e^{hx} dF_X(x)/g_X(h)$. У нее будет такая же область значений, что и у X, но они будут приниматься с другими вероятностями. При $h = 0$ получается исходное распределение.

Если $h > 0$, отношение $dF_{X,h}(x)/dF_X(x) = e^{hx}/g_X(h)$ растет с ростом x. Значит, начиная с некоторого c отношение станет больше 1, в то время как при меньших значениях x оно будет меньше, так как $F_{X,h}$ и F_X - это функции распределения. По критерию достаточности для стохастического порядка оказывается, что $X <_{st} X_h$ при $h > 0$, а при $h < 0$ порядок обратный.

Премией Эсшера Π_X называется $\mathrm{E}X_h$ при некотором $h > 0$. В силу стохастического возрастания преобразования Эсшера при положительных h оказывается $\Pi_X > \mathrm{E}X$, т.е. в самом деле получается премия с нагрузкой.

Однако этот принцип подсчета премий обладает тем же недостатком, что и принцип дисперсии. Он не сохраняет стохастический порядок, и у большего риска может оказаться меньшая премия.

Задача. Совместное распределение двух рисков X и Y задается следующим образом при некотором $h > 0$: $\mathsf{P}(X = 0, Y = 0) = 1/3$, $\mathsf{P}(X = 0, Y = 2/(3h)) = 1/3$, $\mathsf{P}(X = 3/h, Y = 3/h) = 1/3$. Необходимо проверить, что $X <_{st} Y$, но $\Pi_X > \Pi_Y$.

Этот принцип был введен как Парето-оптимальное решение в модели страхового рынка в случае, когда все его участники имеют экспоненциальные функции полезности и независимые страховые выплаты.

Тот же самый принцип получится, если речь идет о минимизации средних потерь страховщика в предположении, что функция потерь имеет вид

$$L(x, P) = (P - x)^2 \exp(hx).$$

Swiss principle

Премия P является решением уравнения

$$\mathsf{E}f(X-\lambda P)=f((1-\lambda)P),\quad \lambda\in[0,1],$$

здесь $f(x)$ - вещественная дважды дифференцируемая функция с $f'>0$, $f''\geq 0$.

Если положить $\lambda=0$, то получится обобщенный принцип среднего, $P=f^{-1}(\mathsf{E}f(X))$, который подробно будет рассмотрен дальше.

При $\lambda=1$ приходим к принципу нулевой полезности (при этом $u(x)=-f(-x)$).

Взяв $f(x)=x\exp(hx)$, $\lambda=1$, получим принцип Эсшера.

Orlicz principle

Для нахождения P в данном случае надо решить уравнение

$$\mathsf{E}f(XP^{-\delta}) = f(P^{1-\delta}), \quad \delta \in [0,1],$$

функция f непрерывная строго возрастающая. При $\delta = 0$ снова получаем обобщенный принцип среднего.

Обобщенный принцип среднего

Покажем теперь, что наложив определенные условия на поведение функционала H, задающего размер премии, можно получить его явный вид.

Поскольку, основываясь на размере премии, можно упорядочить все риски, естественно предположить, что полученный порядок согласуется со стохастическим порядком. А именно,

- 1) если $X <_{st} Y$, то $H(X) \leq H(Y)$, причем равенство только при $F_X(t) \equiv F_Y(t)$.

(Это требование исключает премию Эсшера или нагрузку с помощью дисперсии.)

Далее, обычно в теории риска издержки страховой компании не принимаются во внимание, т.е. рассматривается та часть премии, которая предназначена для возмещения убытков.

Поэтому естественно предположить, что для вырожденного риска не требуется нагрузка, иначе

- 2) Если $\mathrm{P}(X = c) = 1$, то $H(X) = c$.

Если X и X' - два риска с одинаковыми премиями, то тарифный принцип их не различает. Разумно потребовать, чтобы это свойство сохранялось при смешивании, с любым риском Y.

- 3) Если $H(X) = H(X')$, то

$$H[pF_X + (1-p)F_Y] = H[pF_{X'} + (1-p)F_Y], \forall p \in [0, 1].$$

Теорема

Условия 1) - 3) выполнены тогда и только тогда, когда $H(X) = f^{-1}(\mathrm{E}f(X))$ для некоторой непрерывной возрастающей вещественной функции $f(x)$.

Доказательство. Начнем с проверки более простого утверждения. Пусть $H(X) = f^{-1}(\mathrm{E}f(X))$, покажем, что выполнены условия 1)-3).

Если $X <_{st} Y$ и $F_X \not\equiv F_Y$, то $\mathrm{E}f(X) < \mathrm{E}f(Y)$, а значит, $H(X) < H(Y)$, т.е. первое условие справедливо.

Второе условие очевидно имеет место, так как $H(c) = f^{-1}(\mathrm{E}f(c)) = c$.

Определение H(X) иначе можно представить в виде $f(H(X)) = \mathrm{E}f(X)$. Поэтому для проверки третьего условия достаточно записать следующую цепочку равенств.

$$f(H[pF_X + (1-p)F_Y]) = p\int f(x)dF_X(x) + (1-p)\int f(x)dF_Y(x)$$

$$= p\int f(x)dF_{X'}(x) + (1-p)\int f(x)dF_Y(x) = f(H[pF_{X'} + (1-p)F_Y]).$$

В обратную сторону доказательство проводится в несколько этапов. Сначала рассматриваются вырожденные риски, затем принимающие два значения 0 и a для некоторого $a > 0$. Рассматривая смеси, можно получить распределения с конечным числом n значений на отрезке $[0, a]$. Последний этап - это предельный переход при $a \to \infty$ и $n \to \infty$.

Итак, пусть Θ_s - функция распределения риска, сосредоточенного в точке $s \geq 0$. Положим $\varphi(p) = H[p\Theta_a + (1-p)\Theta_0]$. По свойству 2) имеем $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(1) = a$. Согласно 1) функция $\varphi(p)$ строго возрастает, а ее непрерывность докажем от противного.

В силу возрастания функция $\varphi(p)$ имеет не более счетного числа точек разрыва. Предположим, что p_0 является точкой разрыва и докажем, что тогда и в точке $(p_0 + p)/2$ также будет разрыв для некоторого интервала изменения p, что невозможно.

По свойству 2) имеем $H(\Theta_s) = s$. Возьмем $s = \varphi(q)$, тогда

$$H(\Theta_{\varphi(q)}) = \varphi(q) = H[q\Theta_a + (1-q)\Theta_0].$$

Согласно 3) получим

$$H\left[\frac{1}{2}\Theta_{\varphi(q)} + \frac{1}{2}\Theta_{\varphi(r)}\right] = H\left[\frac{1}{2}(q\Theta_a + (1-q)\Theta_0) + \frac{1}{2}\Theta_{\varphi(r)}\right],$$

применяя второй раз это свойство, имеем

$$H\left[\frac{1}{2}(q\Theta_a + (1-q)\Theta_0) + \frac{1}{2}(r\Theta_a + (1-r)\Theta_0)\right]$$

$$= H\left[\frac{1}{2}(q+r)\Theta_a + (1 - \frac{1}{2}(q+r))\Theta_0\right] = \varphi(\frac{1}{2}(q+r)).$$

Пусть $t = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \varphi(p_0+\varepsilon)$ и $\varphi(p)$ имеет разрыв справа в точке p_0, т.е. $\varphi(p_0) < t$. Смешаем (с весами $1/2$) распределения, сосредоточенные в точках $\varphi(p_0)$ и $\varphi(p)$ для произвольного $p < p_0$, тогда

$$\varphi\left(\frac{1}{2}(p+p_0)\right) = H\left[\frac{1}{2}\Theta_{\varphi(p)} + \frac{1}{2}\Theta_{\varphi(p_0)}\right] \qquad (1)$$

Согласно условию 1) при $p < p_0$ правая часть (1) строго меньше, чем

$$H\left[\frac{1}{2}\Theta_{\varphi(p)} + \frac{1}{2}\Theta_{t}\right] \le H\left[\frac{1}{2}\Theta_{\varphi(p)} + \frac{1}{2}\Theta_{\varphi(p_0+\varepsilon)}\right] = \varphi\left(\frac{1}{2}(p+p_0+\varepsilon)\right),$$

т.е. в точке $(p+p_0)/2$ у φ имеется разрыв. Аналогично показывается, что не может быть разрыва слева.

Так как φ непрерывна и возрастает, у нее есть обратная функция $f(u) = \varphi^{-1}(u)$, которая тоже возрастает и непрерывна на $[0, a]$. Пусть $u = \varphi(t)$, т.е. $t = f(u)$, тогда

$$H(\Theta_u) = u = H[t\Theta_a + (1-t)\Theta_0] = H[(1 - f(u))\Theta_0 + f(u)\Theta_a].$$

В силу 3), если $H(X) = H(X')$ и $H(Y) = H(Y')$, то $H[tF_X + (1-t)F_Y] = H[tF_{X'} + (1-t)F_{Y'}]$.

Используя этот результат, легко доказать, что если $H(F_j) = H(G_j)$, $j \geq 1$, и $p_j \geq 0$, $\sum_j p_j = 1$, то $H(\sum_j p_j F_j) = H(\sum_j p_j G_j)$.

Поскольку любое дискретное распределение F_X, сосредоточенное на $[0, a]$, можно записать в виде $F_X(x) = \sum_j p_j \Theta_{c_j}(x)$, то

$$H(F_X) = H[\sum_j p_j((1 - f(c_j))\Theta_0 + f(c_j)\Theta_a)]$$

$$= H[(1 - \sum_j p_j f(c_j))\Theta_0 + \sum_j p_j f(c_j)\Theta_a] = \varphi(\sum_j p_j f(c_j))$$

$$= f^{-1}(\sum_j p_j f(c_j)) = f^{-1}(\mathsf{E} f(X)).$$

Переход от дискретных распределений к непрерывным предлагается провести в виде упражнения. □

Еще одно полезное требование - аддитивность. А именно,

- 4) если риски X и Y независимы, то $H(X+Y) = H(X) + H(Y)$.

При добавлении этого предположения функция f из доказанной теоремы может быть экспоненциальной или линейной.

Теорема

Условия 1) - 4) выполнены тогда и только тогда, когда функция f в обобщенном принципе среднего имеет вид $f(x) = \exp(\alpha x)$ для некоторого $\alpha > 0$ или $f(x) = x$.

Доказательство. Если $f(x) = x$, то $H(X + Y) = H(X) + H(Y)$ для любых рисков X и Y, а не только независимых. Пусть теперь $f(x) = \exp(\alpha x)$, тогда $\exp(\alpha H(X)) = \mathrm{E} \exp(\alpha X)$, откуда $H(X) = (1/\alpha) \ln \mathrm{E} \exp(\alpha X)$. Если X и Y независимы, то

$$H(X + Y) = \alpha^{-1} \ln \mathrm{E} \exp(\alpha(X + Y))$$

$$= \alpha^{-1} \ln \mathrm{E}(\exp(\alpha X) \cdot \exp(\alpha Y)) = H(X) + H(Y).$$

Перейдем к противоположному утверждению. Для простоты будем предполагать дополнительно, что рассматриваемые далее функции дважды дифференцируемы. Из предположений 2) и 4) следует инвариантность при сдвиге, иначе говоря, $H(X + c) = H(X) + c$ для любой константы c.

Пусть X_q - это бернуллиевская случайная величина, иначе говоря, $\mathsf{P}(X_q = 1) = q = 1 - \mathsf{P}(X_q = 0)$. Обозначим $g(q) = H(X_q)$, тогда $g(0) = 0$ и $g(q) = f^{-1}(\mathsf{E}f(X_q))$. В силу инвариантности при сдвиге для любой константы c

$$f(g(q) + c) = f(H(X_q + c)) = f(f^{-1}(\mathsf{E}f(X_q + c)))$$

$$= \mathsf{E}f(X_q + c) = qf(1 + c) + (1 - q)f(c).$$

Продифференцируем обе части по q и рассмотрим правую производную в нуле ($q = 0$).

$$g'(q)f'(g(q) + c))|_{q=0} = g'(0)f'(c) = f(1 + c) - f(c).$$

Отсюда вытекает, что $g'(0) > 0$. Продифференцировав еще раз, имеем

$$g''(q)f'(g(q) + c) + (g'(q))^2 f''(g(q) + c) = 0.$$

Положив $q = 0$, придем к равенству

$$g''(0)f'(c) + (g'(0))^2 f''(c) = 0,$$

т.е. справедливо дифференциальное уравнение, которое удобно переписать в виде

$$\frac{f''(c)}{f'(c)} = -\frac{g''(0)}{(g'(0))^2},$$

где правая часть не зависит от c. Обозначив ее через α, нетрудно проверить, что решениями уравнения являются $f(x) = x$ (при $\alpha = 0$) или же $f(x) = \exp(\alpha x)$ (при $\alpha \neq 0$). $\square$

Таким образом, добавление аддитивности ведет к экспоненциальной функции f или, что то же самое, к экспоненциальной полезности.

Как известно, α представляет собой коэффициент неприятия риска, но не существует процедуры для его определения. Однако величину α можно задать, добавив еще одно условие:

- 5) вероятность разорения не превосходит некоторое заданное (малое) число $\varepsilon > 0$.

Теорема

Если справедливы предположения 1) - 5), то премия за риск Y

$$H(Y) = \frac{1}{\alpha}\ln \mathsf{E} e^{\alpha Y} \quad c \quad \alpha = \frac{1}{u}\ln\frac{1}{\varepsilon},$$

где, u *- это начальный капитал.*

Доказательство. Как было установлено, при выполнении условий 1) - 4) премия подсчитывается с помощью экспоненциального принципа, иными словами,

$$H(Y) = \frac{1}{\alpha}\ln g_Y(\alpha).$$

При рассмотрении коллективной модели риска в качестве Y мы выбираем $S(1)$, суммарный размер требований за единицу времени, имеющий производящую функцию моментов $g_{S(1)}(t) = \exp\{\lambda(g_X(t) - 1)\}$. (Здесь X обозначает размер отдельного требования.)

Следовательно, экспоненциальная премия (с параметром α) для $S(1)$ равна

$$H_\alpha[S(1)] = \frac{\lambda}{\alpha}(g_X(\alpha) - 1).$$

С другой стороны, выражая $a = H_\alpha[S(1)]$ из уравнения для характеристического показателя R, получим

$$\frac{1}{\alpha}(g_X(\alpha) - 1) = \frac{1}{R}(g_X(R) - 1).$$

Таким образом, отсюда вытекает $\alpha = R$. Наконец, используя неравенство Лундберга для вероятности разорения, положим $e^{-Ru} = \varepsilon$, что эквивалентно утверждению теоремы. $\square$

Порядок отношения правдоподобия

Определение

Если $dF_X(x)dF_Y(y) \geq dF_X(y)dF_Y(x)$ *при* $0 \leq x < y$ *(иначе говоря, отношение правдоподобия* $dF_X(x)/dF_Y(x)$ *не возрастает по* x*), то* $X <_{LR} Y$.

Лемма

Порядок $<_{LR}$ *сильнее стохастического порядка.*

Доказательство. Так как отношение правдоподобия не возрастает и $\int_0^\infty dF_X(x) = \int_0^\infty dF_Y(x) = 1$, то сначала оно больше, а потом меньше единицы. Значит, выполнен критерий пересечений для стохастического порядка. □

Взвешивание

Пусть $\mathcal{L}$ - это множество неотрицательных случайных величин, у которых математические ожидания существуют и положительны.

Операция взвешивания - это рассмотрение вместо исходной случайной величины X новой случайной величины X_g, для которой

$$\mathsf{P}(X_g \leq x) = \int_0^x g(y) dF_X(y)/\mathsf{E}g(X).$$

Предполагается, что весовая функция $g(x)$ неотрицательна, измерима и $\mathsf{E}g(X) < \infty$.

Заметим, что если $X \in \mathcal{L}$, то для того, чтобы $X_g \in \mathcal{L}$, надо также предположить, что $0 < \mathsf{E}(Xg(X)) < \infty$.

Покажем, что операция взвешивания (с весовой функцией g) сохраняет порядок $<_{LR}$.

Теорема

Пусть $X <_{LR} Y$, а функция g такова, что $X_g, Y_g \in \mathcal{L}$, тогда $X_g <_{LR} Y_g$ и $\mathsf{E}X_g \leq \mathsf{E}Y_g$.

Доказательство. Заметим, что

$$dF_{X_g}(x) = g(x)dF_X(x)/\mathsf{E}g(X),$$

$$dF_{Y_g}(x) = g(x)dF_Y(x)/\mathsf{E}g(Y).$$

Следовательно,

$$dF_{X_g}(x)/dF_{Y_g}(x) = c(dF_X(x)/dF_Y(x)),$$

где $c = \mathsf{E}g(Y)/\mathsf{E}g(X)$.

Таким образом, из $X <_{LR} Y$ следует $X_g <_{LR} Y_g$.

А поскольку в силу только что доказанной леммы отсюда вытекает $X_g <_{st} Y_g$, значит, верно и второе утверждение теоремы. $\square$

Преобразование Эсшера

Специальные виды взвешивания используются при подсчете премий. В частности, выбор $g(x) = e^{hx}$, $h > 0$, дает премию Эсшера.

Замечание

Для $Y = X_{(h)}$ (преобразование Эсшера от X) мы имеем $dF_X(x)/dF_Y(x) = e^{-hx}\mathrm{E}e^{hX}$ при $h > 0$. Эта функция убывает по x, следовательно, $X <_{LR} X_{(h)}$ при $h > 0$.

Это позволяет проверить, что премия Эсшера включает нагрузку.

Экспоненциальный порядок

Теперь рассмотрим порядок, который слабее порядка стоп-лосс любой степени.

Определение

Экспоненциальный порядок $<_e$ определяется как решение, принимаемое всеми лицами, имеющими экспоненциальную функцию полезности.

Иными словами, для $u_\alpha(x) = -e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$, выполнено $\mathsf{E}u_\alpha(-X) \geq \mathsf{E}u_\alpha(-Y)$.

Лемма

При любом n порядок $<_{(n)}$ сильнее $<_e$.

Доказательство очевидно, так как $u_\alpha(x)$ удовлетворяет условиям перемены знака $(-1)^{k-1}u^{(k)} \geq 0$ при любом k, т.е. выполнены требования теоремы о порядке стоп-лосс степени n. $\square$

Задача. Как меняется в смысле порядка $<_e$ семейство показательных распределений при росте параметра?

Иначе определение экспоненциального порядка выглядит так

Определение

Если для любого $\alpha > 0$ выполнено $\mathsf{E}e^{\alpha X} \le \mathsf{E}e^{\alpha Y}$, то говорят, что $X <_e Y$.

Вспомним, что $\mathsf{E}e^{\alpha X} = g_X(\alpha)$. Таким образом, мы имеем неравенство $g_X(\alpha) \le g_Y(\alpha)$, связывающее производящие функции моментов случайных величин X и Y, если $X <_e Y$.

Лемма

Если использовать премию нулевой полезности с экспоненциальной функцией полезности $u_\alpha(x)$, $\alpha > 0$, то меньшая премия при всех таких функциях эквивалентна наличию экспоненциального порядка.

Доказательство. Действительно, $\mathsf{E}u_\alpha(P - X) = u_\alpha(0)$ дает $\mathsf{E}e^{\alpha X} = e^{\alpha P}$, т.е. $P = \alpha^{-1} \ln g_X(\alpha)$. Если $P(X, \alpha) \le P(Y, \alpha)$ при всех $\alpha > 0$, то $g_X(\alpha) \le g_Y(\alpha)$, что и значит $X <_e Y$. Обратное очевидно. $\square$

Величина $\alpha = -u''(x)/u'(x)$ - это коэффициент неприятия риска. Так как α - постоянная, то отношение к риску не зависит от величины капитала или размера портфеля страховой компании.

Лемма

Равномерно меньшая премия Эсшера (при любом $h > 0$) означает наличие экспоненциального порядка.

Доказательство. Премия Эсшера $\Pi(X, h) = \mathsf{E}(Xe^{hX})/g_X(h)$, т.е. математическое ожидание преобразования Эсшера случайной величины X, иначе может быть записана как $g'_X(h)/g_X(h)$.
Пусть $\Pi(X, h) \le \Pi(Y, h)$ при любом $h > 0$, тогда $g'_X(h)/g_X(h) \le g'_Y(h)/g_Y(h)$, откуда следует $g'_X(h)g_Y(h) - g'_Y(h)g_X(h) \le 0$, а значит, $g_X(h)/g_Y(h)$ убывает по h при $h > 0$. Но $g_X(0) = g_Y(0) = 1$, следовательно, $g_X(h) \le g_Y(h)$ при всех $h > 0$, что и означает экспоненциальный порядок. $\square$

Задача. Верно ли обратное утверждение?

Итак, мы имеем следующие соотношения между изученными выше порядками (предполагается, что $n < m$):

$$<_{LR} \;\Rightarrow\; <_{st} \;\Rightarrow\; <_{sl} \;\Rightarrow\; <_{(n)} \;\Rightarrow\; <_{(m)} \;\Rightarrow\; <_{e}\,.$$

Экспоненциальный порядок не является полным порядком.
Пример: X имеет экспоненциальное распределение с параметром 1, а Y - это смесь двух распределений, сосредоточенного в нуле и экспоненциального с параметром $1/2$, веса равны соответственно $2/3$ и $1/3$.