ЗАДАЧИ ПО ТЕОРИИ РИСКА

1. Что такое случайная величина, её функция распределения, математическое ожидание, дисперсия, характеристическая функция, производящая функция и производящая функция моментов?

Случайная величина (СВ) — это измеримая функция $X : \Omega \to \mathbb{R}$, заданная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, где:

- Ω — пространство элементарных исходов
- $\mathscr{F}$ — σ-алгебра событий
- $\mathbb{P}$ — вероятностная мера

Функция распределения

Функция распределения $F_X(x)$ СВ X определяется как:

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Свойства:

1. Монотонно неубывающая: $x_1 < x_2 \Rightarrow F(x_1) \leq F(x_2)$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1$
3. Правосторонне непрерывна: $\lim\limits_{x \to x_0^+} F(x) = F(x_0)$

Математическое ожидание

Для дискретной СВ:

$$\mathbb{E}X = \sum_i x_i p_i$$

Для абсолютно непрерывной СВ с плотностью $f_X(x)$:

$$\mathbb{E}X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

Дисперсия

Мера разброса значений вокруг среднего:

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2$$

Характеристическая функция

Комплекснозначная функция:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} dF_X(x)$$

---

2. Сформулировать закон больших чисел, центральную предельную теорему и усиленный закон больших чисел.

Закон больших чисел (ЗБЧ)

Пусть $\{X_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин с $\mathbb{E}|X_1| < \infty$. Тогда:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{P} \mathbb{E}X_1$$

где $\xrightarrow{P}$ означает сходимость по вероятности.

Усиленный закон больших чисел (УЗБЧ)

При тех же условиях, если $\mathbb{E}|X_1| < \infty$, то:

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\text{п.н.}} \mathbb{E}X_1$$

где $\xrightarrow{\text{п.н.}}$ означает сходимость почти наверное.

Центральная предельная теорема (ЦПТ)

Если $\{X_n\}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин с $0 < \sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1) < \infty$, то:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} X_k - n\mathbb{E}X_1}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

где $\xrightarrow{d}$ означает сходимость по распределению к стандартному нормальному закону.

---

3. Как выбрать премию, чтобы вероятность разорения была не больше заданного $\varepsilon > 0$?

Пусть:

- u — начальный капитал страховой компании
- c — страховая премия (доход на единицу времени)
- $\{X_i\}$ — независимые одинаково распределённые убытки
- $N(t)$ — процесс страховых случаев

Процесс капитала:

$$R(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$$

Для экспоненциальных убытков $X_i \sim Exp(\lambda)$ и пуассоновского процесса $N(t) \sim Pois(\lambda t)$, вероятность разорения:

$$\psi(u) \approx e^{-Ru}$$

где R — коэффициент Лундберга, решение:

$$\mathbb{E}[e^{-RX}] = \frac{\lambda}{\lambda + Rc}$$

Чтобы $\psi(u) \leq \varepsilon$, необходимо:

$$c \geq \frac{\lambda}{R} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) - \frac{u}{t}$$

---

4. Доказать, что единственное непрерывное распределение, обладающее отсутствием памяти, это показательное распределение.

Свойство отсутствия памяти:

$$P(X > x + t | X > x) = P(X > t), \quad \forall x, t > 0$$

Доказательство: Обозначим $\overline{F}(x) = P(X > x)$. Условие эквивалентно:

$$\overline{F}(x + t) = \overline{F}(x)\overline{F}(t)$$

Единственное непрерывное решение этого функционального уравнения:

$$\overline{F}(x) = e^{-\lambda x}, \quad \lambda > 0$$

Таким образом:

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

что соответствует показательному распределению.

---

5. Преобразование случайной величины $Y = X^{1/\tau}$

Пусть $X \sim \text{Exp}(1)$ с плотностью $f_X(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$. Рассмотрим преобразование:

$$Y = X^{1/\tau}, \quad \tau \neq 0$$

Случаи преобразования:

- При $\tau > 0$: **Распределение Вейбулла**
  Плотность Y:
  $$f_Y(y) = \tau y^{\tau-1} e^{-y^\tau}, \quad y > 0$$
- При $\tau = -1$: **Обратное экспоненциальное**
  Плотность Y:
  $$f_Y(y) = \frac{1}{y^2} e^{-1/y}, \quad y > 0$$
- При $\tau < 0$ ($\tau \neq -1$): **Обратно-преобразованное**
  Плотность Y:
  $$f_Y(y) = |\tau| y^{\tau-1} e^{-y^\tau}, \quad y > 0$$

---

6. Максимизация суммы функций на симплексе

Дана задача:

$$\max_{\substack{x_i \geq 0 \\ \sum x_i = c}} \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$$

Рекуррентное решение:

Введём функции:

$$f_n(c) = \max \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i), \quad f_1(c) = g_1(c)$$

Для $n \geq 2$:

$$f_n(c) = \max_{0 \leq x \leq c} [g_n(x) + f_{n-1}(c - x)]$$

Алгоритм: Последовательно вычисляем $f_k(c)$ для $k = 1, \ldots, n$ методом динамического программирования.

---

7. Сумма экспоненциальных величин и гамма-распределение

Если $X_i \sim \mathrm{Exp}(1)$ независимы, то их сумма:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, 1)$$

Функция распределения:

$$G(n, x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x t^{n-1} e^{-t} dt$$

Для произвольного $\alpha > 0$:

$$G(\alpha, x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t} dt$$

Аналогично для бета-распределения:

$$\beta(a, b, x) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1} dt$$

---

8. Оптимизация суммы одинаковых функций

Дана задача:

$$\max_{\substack{x_i \geq 0 \\ \sum x_i = c}} \sum_{i=1}^{n} g(x_i)$$

Решение:

- Если $g(x)$ **вогнута**: максимум при $x_i = c/n$ для всех i
- Если $g(x)$ **выпукла**: максимум в вершине симплекса (например, $x_1 = c$, остальные $x_i = 0$)

---

9. Максимум произведения и неравенство средних

Задача:

Доказать, что:

$$\max_{\substack{x_i \geq 0 \\ \sum x_i = a}} \prod_{i=1}^{n} x_i = \left(\frac{a}{n}\right)^n$$

Доказательство:

Введём $f_n(a) = \max \prod_{i=1}^{n} x_i$. Рекуррентное соотношение:

$$f_n(a) = \max_{0 \leq x \leq a} x \cdot f_{n-1}(a - x)$$

База: $f_1(a) = a$. По индукции:

$$f_n(a) = \left(\frac{a}{n}\right)^n \quad \text{(достигается при } x_i = a/n\text{)}$$

Следствие (неравенство Коши):

$$\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdots x_n}$$

Равенство $\Leftrightarrow x_1 = \cdots = x_n$.