“Теория риска” (для филиала в Душанбе)

Проф. Екатерина Вадимовна Булинская

(МГУ имени М.В.Ломоносова)

Лекция 2

Москва, 18 февраля 2025 г.

ДОБРЫЙ ДЕНЬ!

Динамическое программирование

Важным методом нахождения оптимальных управлений является метод динамического программирования. Известно, что во многих областях принятия решений бывает удобно не сразу принимать решение на весь период деятельности, а производить это многократно, или постепенно шаг за шагом. В математической статистике при рассмотрении задачи различения двух гипотез А.Вальдом был предложен так называемый последовательный анализ. Если говорить наглядно, то после каждого испытания решается, принять ли одну из конкурирующих гипотез (и какую) или продолжать наблюдения (А.Вальд. Последовательный анализ. 1960. ФМГИЗ). Но наиболее полно методы принятия пошаговых решений были разработаны Р.Беллманом (см. его книгу Динамическое программирование, МИР, 1960).

Динамическое программирование

Одним из основных направлений применения этих методов являлась экономика. Предметом динамического программирования является изучение многошаговых решений в том или ином смысле оптимальных. Классические методы нахождения экстремумов функций многих переменных часто оказываются неприменимы из-за большого числа параметров, от которых зависит решение. Лежащий в основе динамического программирования принцип оптимальности часто может быть реализован в виде такого функционального уравнения, решение которого может быть получено легче (часто с помощью вычислительной математики), чем решение соответствующих уравнений, возникающих при поиске экстремумов функций многих переменных.

Динамическое программирование

Оптимизационные задачи возникают почти во всех областях науки, техники и хозяйственной деятельности. С ними приходится иметь дело в промышленности, в организации производства и развитии технологий, экономическом планировании, а также в физике, биологии и военном деле. Это значит, что область применения динамического программирования очень широка. Но подобно математической физике динамическое программирование является частью математики, а не тех наук, где оно может с успехом использоваться. При этом вопрос о применимости динамического программирования в каждом отдельном случае должен решаться отдельно.

Многошаговый процесс распределения

Для лучшего понимания метода начнем с рассмотрения примера.

Итак, пусть у нас имеется количество x некоторого ресурса, которое можно разделить на две неотрицательные части y и $x - y$, при этом возникнут доходы соответственно $g(y)$ и $h(x - y)$ от первой и второй части.

Желание выполнить это разделение так, чтобы получить максимальный возможный доход, приводит нас к задаче максимизации функции

$$R_1(x, y) = g(y) + h(x - y)$$

по всем $y \in [0, x]$. Мы будем предполагать, что функции g и h непрерывны при всех конечных $x \geqslant 0$, так что интересующий нас максимум существует.

Многошаговый процесс распределения

Рассмотрим теперь двухшаговый процесс. Предположим, что при получении дохода $g(y)$ имевшееся количество ресурсов уменьшается и остается ay, где a – некоторая константа, $0 \leqslant a < 1$. Точно также количество $x - y$ превращается в $b(x - y)$, где b – это постоянная, $0 \leqslant b < 1$. Затем продолжим процесс с получившимся остатком

$$ay + b(x - y) = x_1 = y_1 + (x_1 - y_1),$$

где $0 \leqslant y_1 \leqslant x_1$. В результате этого нового распределения на втором шаге мы получим доход $g(y_1) + h(x_1 - y_1)$. Полный доход от двухшагового процесса равен

$$R_2(x, y, y_1) = g(y) + h(x - y) + g(y_1) + h(x_1 - y_1).$$

Многошаговый процесс распределения

Максимальный доход в двухшаговом процессе получается путем максимизации этой функции по области
$0 \leqslant y \leqslant x, \quad 0 \leqslant y_1 \leqslant x_1.$

Обратимся к N-шаговому процессу, где аналогичная процедура повторяется N раз. Тогда получим доход
$R_N(x, y, y_1, \ldots y_{N-1}) = g(y) + h(x-y) + g(y_1) + h(x_1 - y_1) + \ldots + g(y_{N-1}) + h(x_{N-1} - y_{N-1})$, где величины, подлежащие разделению после первого, второго,$\ldots, N-1$ шагов определяются соотношениями
$x_1 = ay + b(x-y)$, $0 \leqslant y \leqslant x$,
$x_2 = ay_1 + b(x_1 - y_1)$, $0 \leqslant y_1 \leqslant x_1$,
$\ldots\ldots\ldots$
$x_{N-1} = ay_{N-2} + b(x_{N-2} - y_{N-2})$, $0 \leqslant y_{N-2} \leqslant x_{N-2}$,
$0 \leqslant y_{N-1} \leqslant x_{N-1}$.

Многошаговый процесс распределения

Окончательный максимальный доход от рассматриваемой процедуры будет получаться путем максимизации функции R_N по выписанной области изменения аргументов. Казалось бы естественно воспользоваться методами классического анализа для решения данной задачи. Если абсолютный максимум достигается внутри рассматриваемой области, т.е. для всех $i = \overline{0, N-1}$ имеют место неравенства $0 < y_i < 1$, $y_0 = y$, а функции g и h дифференцируемы, то должна выполняться следующая система уравнений

$$g'(y_{N-1}) + h'(x_{N-1} - y_{N-1}) = 0,$$
$$g'(y_{N-2}) + h'(x_{N-2} - y_{N-2}) + (a-b)h'(x_{N-1} - y_{N-1}) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$g'(y) + h'(x-y) + (a-b)h'(x_1 - y_1) + \ldots = 0.$$

Многошаговый процесс распределения

Однако, если мы не знаем, выполняются ли эти условия или нет, и нас интересует не относительный максимум, а абсолютный, то надо испытать на экстремальность также и граничные значения $y_i = 0$, $y_i = x_i$, а также и все комбинации внутренних максимумов и граничных значений. Кроме того, в случае неединственности решения системы выписанных уравнений надо проверить большое число условий, обеспечивающих именно абсолютный максимум, а не минимум или относительный минимум. Таким образом, для задач большой размерности, т.е. с большим числом шагов, необходима некоторая процедура, обеспечивающая доведение до конца процедуры поиска решения.

Многошаговый процесс распределения

Допустим, мы убедились, что не в состоянии это сделать, и хотим найти решение численно. Можно попытаться определить максимум тривиальным образом, т.е. подсчитать значения функции в некоторой сети точек и найти наибольшее. Для примера пусть у нас рассматривается 10-шаговый процесс. Мы рассматриваем $R_{10} = R(y, y_1, \ldots, y_9)$ в 10^{10} точках, полученных делением на равные части отрезков $0 \leqslant y_i \leqslant x_i$, $i = 0, \ldots, 9$. Если на подсчет значений в одной точке тратится одна секунда, то на все значения уйдет 2,77 миллиона часов, а если 10^{-6} секунды (микросекунда), то 2,77 часа. Если же мы захотим рассмотреть 20-шаговый процесс, то количество операций возрастет в 10^{10}, так как $10^{20} = 10^{10} \times 10^{10}$.

Многошаговый процесс распределения

Конечно, это грубые прикидки, имеются современные быстродействующие вычислительные машины.

Но надо учитывать следующее: если мы заинтересованы в проведении подобных расчетов, то они нам будут нужны не только для одного фиксированного x, а для целой области его изменения.

Также надо знать, что получается для наборов значений a и b и для некоторых классов функций g и h.

Иначе говоря, надо провести анализ чувствительности решения к изменениям параметров, тем самым проверив устойчивость решения.

Многошаговый процесс распределения

Отметим, что рассмотренный пример – это очень упрощенный вариант реальной задачи распределения ресурсов, на самом деле может быть не один вид ресурса, а несколько, кроме того, число отраслей, куда могут производиться вложения, может быть значительно больше двух. Это приведет к экспоненциальному росту объема вычислений. Кроме того, надо помнить, что при рассмотрении экономических задач, как впрочем физических, биологических и многих других, важно не получение конкретных чисел, которые в силу влияния многих факторов могут быть не точными. Исследователь в первую очередь заинтересован в исследовании структуры решения и получении алгоритмов, позволяющих принимать правильные решения.

Конечно, в рассмотренной нами задаче хорошо было бы получить конкретную точку $(y, y_1, \ldots, y_{N-1})$, для которой достигается максимум. Но для лица, производящего распределение ресурсов, на каждом шаге важно знать, сколько у него в данный момент этих ресурсов и какое число шагов остается до окончания данной процедуры.

Таким образом, хотя речь идет о многошаговом процессе, каждый раз у нас возникает одномерная задача выбора числа y из отрезка $[0, x]$. Итак, мы приходим к составлению функционального уравнения, которое позволит избежать нам сложностей, связанных с многомерностью.

Метод функциональных уравнений

Поскольку максимум полного дохода от N-шагового процесса зависит только от N и начального ресурса x, обозначим его $f_N(x)$. Тогда

$$f_N(x) = \max_{y,y_i} R_N(x, y, y_1, \dots, y_{N-1}), \quad N = 2, 3, \dots,$$

$$f_1(x) = \max_{0 \leqslant y \leqslant x} [g(y) + h(x - y)]. \tag{1}$$

Наша ближайшая цель выразить $f_2(\cdot)$ через $f_1(\cdot)$. Ясно, что двухшаговый доход состоит из полученного на первом шаге дохода плюс доход от второго шага, где для распределения имеется ресурс $ax + b(x - y)$. Поэтому для получения максимального дохода за 2 шага, каков бы ни был выбор на первом шаге y, оставшееся количество $ax + b(x - y)$ должно быть использовано оптимальным образом. Это простое замечание служит ключом ко всему дальнейшему математическому аппарату.

Метод функциональных уравнений

Если величина y_1 выбрана оптимально, то получившийся на втором шаге доход равен $f_1(ay + b(x - y))$. Следовательно, при выборе y на первом шаге наилучший доход равен $g(y) + h(x - y) + f_1(ay + b(x - y))$. Так как y надо выбрать так, чтобы это выражение было максимальным, получаем рекуррентное соотношение для функций f_2 и f_1

$$f_2(x) = \max_{0 \leqslant y \leqslant x} [g(y) + h(x - y) + f_1(ay + b(x - y))].$$

Аналогичные рассуждения приводят к основному рекуррентному соотношению, которое будет справедливо и для $N = 1$, если положить $f_0(x) \equiv 0$.

$$f_N(x) = \max_{0 \leqslant y \leqslant x} [g(y) + h(x - y) + f_{N-1}(ay + b(x - y))]. \quad (2)$$

Отправляясь от $f_1(x)$, задаваемой (1), получаем затем последовательно $f_2(x)$, $f_3(x)$ и т.д. При этом на каждом шаге мы вычисляем не только $f_k(x)$, но и $y_k(x)$, дающее оптимальное распределение, когда предстоит процесс длины k при начальном ресурсе x.

Тогда при фиксированных x и N оптимальное распределение будет иметь вид $(\bar{y}, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_{N-1})$, где
$\bar{y} = y_N(x)$,
$\bar{y}_1 = y_{N-1}(a\bar{y} + b(x - \bar{y}))$,
$\bar{y}_2 = y_{N-2}(a\bar{y}_1 + b(x_1 - \bar{y}_1))$,
$\ldots\ldots\ldots$
$\bar{y}_{N-1} = y_1(a\bar{y}_{N-2} + b(x_{N-2} - \bar{y}_{N-2}))$,

иначе говоря, задача решается от конца к началу.

Бесконечношаговый процесс

Если число шагов N велико, то естественно рассмотреть в качестве приближения бесконечношаговый процесс. Хотя в реальности такого процесса не существует, но с математической точки зрения он привлекателен, прежде всего тем, что вместо системы рекуррентных соотношений (2) надо рассматривать всего одно функциональное уравнение

$$f(x) = \max_{0 \leqslant y \leqslant x} [g(y) + h(x-y) + f(ay + b(x-y))], \qquad (3)$$

которому удовлетворяет функция $f(x)$, дающая полный доход. Одновременно получается правило распределения ресурсов $y(x)$.

Однако при этом мы сталкиваемся с рядом дополнительных трудностей.

Прежде всего неясно, будет ли существовать максимум в этом уравнении или надо брать супремум. Это означает, что может не существовать оптимальной политики распределения, обеспечивающей полный доход $f(x)$.

Кроме того, для исследования свойств бесконечного процесса надо знать, что уравнение не имеет посторонних решений. Значит, нам придется доказать теорему существования и единственности решения.

Теорема

Предположим, что

1. $g(x)$ *и* $h(x)$ *непрерывные функции* x *при всех* $x \geqslant 0$, $g(0) = h(0) = 0$.

2. $0 \leqslant a < 1$, $0 \leqslant b < 1$.

3. Если $m(x) = \max_{0 \leqslant y \leqslant x} \max(|g(y)|, |h(y)|)$, $c = \max(a, b)$, *то* $\sum_{n=0}^{\infty} m(c^n x) < \infty$ *для всех* $x \geqslant 0$.

Тогда существует единственное решение уравнения (3) *непрерывное при* $x = 0$ *и обращающееся в этой точке в 0. Полученное решение является непрерывной функцией* x.

Доказательство

Для упрощения записи положим

$$T(f, y) = g(y) + h(x - y) + f(ay + b(x - y)).$$

Тогда основное рекуррентное соотношение запишется так

$$f_{N+1}(x) = \max_{0 \leqslant y \leqslant x} T(f_N, y).$$

Воспользуемся далее методом последовательных приближений.

Согласно сделанным предположениям о непрерывности $g(x)$ и $h(x)$ функция $f_1(x)$ также непрерывна при всех $x \geqslant 0$. А тогда по индукции получаем, что любая функция последовательности $\{f_N(x)\}$ также непрерывна. Однако отсюда не следует, что максимизирующее значение $y(x)$ также является непрерывной функцией x.

Доказательство

Обозначим $y_N(x)$ то значение y, при котором достигается максимум в выражении (2). Если значение, дающее максимум не единственно, то можно взять любое из возможных. Тогда получаются следующие соотношения

$$f_{N+1}(x) = T(f_N, y_N), \quad f_{N+2}(x) = T(f_{N+1}, y_{N+1}).$$

Поскольку y_N обеспечивает максимум в соответствующем уравнении, можно записать такие неравенства

$$f_{N+1}(x) = T(f_N, y_N) \geqslant T(f_N, y_{N+1}),$$

$$f_{N+2}(x) = T(f_{N+1}, y_{N+1}) \geqslant T(f_{N+1}, y_N).$$

Доказательство

Далее, полученные неравенства приводят к следующей цепочке соотношений

$$T(f_N, y_{N+1}) - T(f_{N+1}, y_{N+1}) \leqslant f_{N+1}(x) - f_{N+2}(x) \leqslant$$

$$\leqslant T(f_N, y_N) - T(f_{N+1}, y_N).$$

Комбинируя эти неравенства, получаем важную оценку

$$|f_{N+1}(x) - f_{N+2}(x)| \leqslant \max[|T(f_N, y_{N+1}) - T(f_{N+1}, y_{N+1})|,$$

$$|T(f_N, y_N) - T(f_{N+1}, y_N)|]$$

Доказательство

Возвращаясь к определению $T(f, y)$, получаем

$$|T(f_N, y_N) - T(f_{N+1}, y_N)| =$$

$$= |f_N(ay_N + b(x - y_N)) - f_{N+1}(ay_N + b(x - y_N))|.$$

Теперь введем

$$u_N(x) = \max_{0 \leqslant z \leqslant x} |f_N(z) - f_{N+1}(z)|, \quad N = 1, 2, \ldots .$$

Так как $ay + b(x - y) \leqslant cx$ для всех $y \in [0, x]$, верно соотношение

$$u_{N+1}(x) \leqslant u_N(cx).$$

Доказательство

Остается оценить $u_1(x)$. Обратившись к соотношениям, задающим $f_1(x)$ и $f_2(x)$, видим, что

$$|f_1(x) - f_2(x)| \leqslant \max[|f_1(ay_1 + b(x - y_1))|, |f_1(ay_2 + b(x - y_2))|]$$
$$\leqslant m(cx),$$

при этом использовано определение $m(x)$, данное в условиях теоремы. Таким образом, ясно, что $u_1(x) \leqslant m(cx)$, следовательно, $u_N(x) \leqslant m(c^N x)$. Из предположения относительно $m(x)$ вытекает, что ряд $\sum_{N=1}^{\infty} u_N(x)$ сходится при всех x (при этом равномерно в каждом конечном интервале.) Поэтому предельная функция $f(x) = \lim_{N\to\infty} f_N(x)$ существует и непрерывна при всех значениях x. А в силу равномерной сходимости предельная функция является решением функционального уравнения (3).

Доказательство

Осталось доказать единственность решения рассматриваемого функционального уравнения. Обозначим $F(x)$ – другое решение уравнения, которое существует при всех x и непрерывно при $x = 0$, причем $F(0) = 0$. Пусть $y = y(x)$ – это то значение y, при котором достигается максимум в уравнении $f(x) = \max_{0 \leqslant y \leqslant x} T(f, y)$, а $w = w(x)$ играет ту же роль в уравнении $F(x) = \max_{0 \leqslant w \leqslant x} T(F, w)$. Тогда из тех же соображений, что при доказательстве существования, получаем 2 неравенства

$$f(x) = T(f, y) \geqslant T(f, w), \quad F(x) = T(F, w) \geqslant T(F, y),$$

а это, как и раньше, приводит к следующей оценке

Доказательство

$$|f(x)-F(x)| \leqslant \max[|T(f,y)-T(F,y)|, |T(f,w)-T(F,w)|] \leqslant$$

$$\leqslant \max[|f(ay+b(x-y))-F(ay+b(x-y))|,$$
$$|f(aw+b(x-w))-F(aw+b(x-w))|]. (A)$$

Теперь положим

$$u(x) = \max_{0\leqslant x\leqslant x} |f(z)-F(z)|.$$

так как функция $f(x)$ непрерывна при всех $x \geqslant 0$, а $F(x)$ по предположению непрерывна при $x=0$, то отсюда следует, что $u(x)$ также непрерывна при $x=0$ и обращается в этой точке в нуль.

Доказательство

Из полученного неравенства (A) вытекает

$$u(x) \leqslant u(cx),$$

откуда, итерируя, находим, что

$$u(x) \leqslant u(c^N x),$$

для всех $N \geqslant 1$. Так как $u(x)$ непрерывна при $x = 0$ и $u(0) = 0$, то при $N \to \infty$ получаем $u(x) \leqslant 0$ и, следовательно $F(x) = f(x)$. Тем самым доказательство теоремы завершено. $\square$

Использованный метод может быть применен при доказательстве следующего результата

Теорема

Пусть функция $f_0(x)$ удовлетворяет следующим условиям: а) функция $f_0(x)$ непрерывна при $x \geqslant 0$. б) $f_0(0) = 0$. Если выполнены все условия доказанной теоремы, то последовательность функций, определенная рекуррентным соотношением

$$f_{N+1}(x) = \max_{0 \leqslant y \leqslant x} T(f_N, y)$$

сходится равномерно в любом конечном интервале к решению $f(x)$, которое было определено ранее.

Многомерная задача максимизации

Найти максимум функции
$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n g_i(x_i)$
в области D, имеющей вид $x_1 + \ldots + x_n = c$, $x_i \geqslant 0$, предполагается, что все функции $g_i(x)$ непрерывны.

Так как максимум функции F зависит только от c и n, то можно для $c \geqslant 0$, $n \geqslant 1$ определить последовательность функций

$$f_n(c) = \max_D F(x_1, \ldots, x_n).$$

Тогда нетрудно вывести рекуррентное соотношение

$$f_n(c) = \max_{0 \leqslant x \leqslant c} [g_n(x) + f_{n-1}(c - x)],$$

для $n \geqslant 2$, а $f_1(c) = g_1(c)$.

Задачи

1) Найти $\max_A \sum_{i=1}^n g(x_i)$, по области
$A = \{x_i \geqslant 0, i = \overline{1, n}, x_1 + \ldots + x_n = c\}$.

2) Проверить, что $\max_B \prod_{i=1}^n x_i = (a/n)^n$, если
$B = \{x_i \geqslant 0, i = \overline{1, n}, x_1 + \ldots + x_n = a\}$.
(Указание: ввести функцию $f_n(a)$ и установить, что она удовлетворяет уравнению $f_n(a) = \max_{0 \leqslant x \leqslant a} x f_{n-1}(a - x)$)

Показать, что среднее арифметическое не менее среднего геометрического (равенство, когда все слагаемые одинаковы).

Стохастический процесс распределения

Для рассмотренного нами многошагового процесса характерно то, что результат любого решения однозначно определялся выбором решения. Такие процессы называются детерминированными. Но для большинства практически интересных процессов это не так. Перейдем к рассмотрению того случая, когда результат решения есть задание некоторого распределения исходов в смысле теории вероятностей. Такие процессы назовем стохастическими. С математической точки зрения стохастические процессы приводят к целому ряду увлекательных проблем и проливают неожиданный свет на многие процессы, которые на первый взгляд являются детерминированными. Такие процессы характерны для экономики, физики, техники и биологии.

Стохастический процесс распределения

Основной задачей, которая стоит перед нами, является определение того, что мы понимаем под оптимальным решением в условиях неопределенности его результатов. Ясен лишь тот факт, на который часто не обращают внимания, что в действительности недостаточность контроля над процессом не позволяет гарантировать получение максимального дохода.

С другой стороны, несмотря на имеющуюся неопределенность, должны существовать какие-то средства для сравнения поведений с учетом возможных флуктуаций результатов. Основной трудностью в приложениях является не то, что трудно найти такую меру, а то, что она не единственна.

Общая идея, совершенно единодушно принимаемая всеми, состоит в использовании некой средней характеристики возможных результатов в роли меры качества поведения. Именно при выборе этой характеристики и возникают трудности.

Стохастический процесс распределения

Первой такой характеристикой (критерием), которая будет применяться, является обычное среднее, т.е. математическое ожидание. В силу своей линейности математическое ожидание обладает важным свойством инвариантности, которое сильно упрощает функциональные уравнения, описывающие процесс. В частности, оказывается, что принимаемые решения зависят только от состояния в данный момент, а не от предыстории системы.

В качестве второго, реже применяемого критерия, может рассматриваться вероятность достижения некоторого заданного уровня дохода. Этот критерий также обладает некоторым свойством инвариантности.

Стохастический процесс распределения

Рассмотрим стохастический вариант изученного нами простого процесса распределения. Будем теперь предполагать, что с вероятностью p_i, $i = 1, 2$, будет получен доход $g_i(y) + h_i(x - y)$, а для следующего распределения останется $a_i y + b_i(x - y)$.

Определим $f_N(x)$ как математическое ожидание полного дохода, который получится от N-шагового процесса распределения исходного количества x, если придерживаться оптимального распределения. Тогда получим уравнения

$$f_1(x) = \max_{0 \leqslant y \leqslant x} [p_1(g_1(y) + h_1(x - y)) + p_2(g_2(y) + h_2(x - y))],$$

а при $N \geqslant 1$

Стохастический процесс распределения

$$f_{N+1}(x) = \max_{0 \leqslant y \leqslant x} [(p_1(g_1(y) + h_1(x-y) + f_N(a_1 y + b_1(x-y))+$$

$$+p_2(g_2(y) + h_2(x-y) + f_N(a_2 y + b_2(x-y))].$$

Эти уравнения имеют ту же природу, что и полученные в детерминированном случае. Употребляя математическое ожидание как меру качества поведения, мы тем самым устраняем стохастические черты процесса, по крайней мере, настолько, чтобы провести анализ решения.

Пусть имеется два прииска A и B, а также одна машина для добычи, которая может выйти из строя. Первоначально на прииске A имеется количество золота x, а на B количество y. Машина при работе на прииске A с вероятностью p_1 добудет долю имеющегося там золота r_1 и не выйдет из строя, а с вероятностью $1 - p_1$ не добудет ничего и выйдет из строя. Для прииска B соответствующие величины равны p_2 и r_2.
Начнем работу с некоторого прииска. Если машина не выйдет из строя, то снова надо решить, где ее использовать. И так действуем до тех пор пока машина не сломается. Вопрос, как выбрать последовательность приисков, чтобы максимизировать среднюю величину добытого золота?

Стохастический процесс золотодобычи

Снова применим метод функциональных уравнений. Пусть $f_N(x, y)$ - ожидаемое количество золота, которое может быть добыто, если на одном прииске имеется количество золота x, а на другом y, применяется оптимальное поведение, но процесс не может иметь больше N шагов. Нетрудно понять, что

$$f_1(x, y) = \max[p_1 r_1 x, p_2 r_2 y],$$

$$f_N(x, y) = \max[p_1(r_1 x + f_{N-1}(x(1 - r_1), y), \\ p_2(r_2 y + f_{N-1}(x, y(1 - r_2)))].$$

Стохастический процесс золотодобычи

При переходе к бесконечношаговому процессу можно доказать теорему существования и единственности

Теорема

Пусть

$$a)\ |p_1|, |p_2| < 1,$$

$$b)\ 0 \leqslant r_1, r_2 < 1,$$

тогда существует единственное решение соответствующего функционального уравнения, ограниченное в любом прямоугольнике $0 \leqslant x \leqslant \bar{X}$, $0 \leqslant y \leqslant \bar{Y}$. *Это решение* $f(x, y)$ *непрерывно в любой ограниченной части области* $x, y \geqslant 0$.