Задачи по спецкурсу “Теория риска” (для филиала в Душанбе)

Проф. Екатерина Вадимовна Булинская

(МГУ имени М.В.Ломоносова)

Задачи

Москва, 11 марта 2025 г.

1. Что такое случайная величина, ее функция распределения, математическое ожидание, дисперсия, характеристическая функция, производящая функция и производящая функция моментов?
2. Сформулировать закон больших чисел, центральную предельную теорему и усиленный закон больших чисел.
3. Как выбрать премию, чтобы вероятность разорения была не больше заданного $\varepsilon > 0$?
4. Доказать, что единственное непрерывное распределение, обладающее отсутствием памяти, т.е.

$$P(X > x + t | X > x) = P(X > t),$$

это показательное распределение. Иначе это свойство называется отсутствием старения или последействия.
5. Пусть $Y = X^{1/\tau}$, тогда при $\tau > 0$ распределение Y называется преобразованным (или трансформированным), при $\tau = -1$ обратным, а при прочих $\tau < 0$ обратным

преобразованным. Найти распределение Y, если X показательно с параметром 1.

6. Найти максимум функции

$F(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} g_i(x_i)$

в области D, имеющей вид $x_1 + \ldots + x_n = c$, $x_i \geqslant 0$, предполагается, что все функции $g_i(x)$ непрерывны.

Так как максимум функции F зависит только от c и n, то можно для $c \geqslant 0$, $n \geqslant 1$ определить последовательность функций

$$f_n(c) = \max_D F(x_1, \ldots, x_n).$$

Тогда нетрудно вывести рекуррентное соотношение

$$f_n(c) = \max_{0 \leqslant x \leqslant c} [g_n(x) + f_{n-1}(c - x)],$$

для $n \geqslant 2$, а $f_1(c) = g_1(c)$.

7. Сумма n независимых показательно распределенных случайных величин с единичным средним имеет функцию

распределения $G(n,x)$.

Для произвольного α неполная гамма-функция $G(\alpha,x)$ также является функцией распределения.

Аналогично с помощью неполной бета-функции $\beta(a,b,x)$ задается стандартное бета-распределение, сосредоточенное на отрезке $[0,1]$.
8. Найти $\max_A \sum_{i=1}^n g(x_i)$, по области $A=\{x_i \geqslant 0, i=\overline{1,n}, x_1+\ldots+x_n=c\}$.

9. Проверить, что $\max_B \prod_{i=1}^n x_i = (a/n)^n$, если $B=\{x_i \geqslant 0, i=\overline{1,n}, x_1+\ldots+x_n=a\}$.

(Указание: ввести функцию $f_n(a)$ и установить, что она удовлетворяет уравнению $f_n(a)=\max_{0\leqslant x\leqslant a} xf_{n-1}(a-x)$)

Показать, что среднее арифметическое не менее среднего геометрического (равенство, когда все слагаемые одинаковы).