МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

Е.В.БУЛИНСКАЯ

ТЕОРИЯ РИСКА И ПЕРЕСТРАХОВАНИЕ

ЧАСТЬ 1

УПОРЯДОЧИВАНИЕ РИСКОВ

М о с к в а 2001 год

Булинская Е.В.

Теория риска и перестрахование
Часть 1. Упорядочивание рисков

Учебное пособие. — Издательство механико-математического факультета МГУ, Москва, 2001 г. — 119 стр.

Настоящее пособие представляет собой первую часть курса лекций "Актуарная математика дополненную задачами и материалом для углубленного самостоятельного изучения предмета.

Раздел 1 (Введение) содержит необходимые определения, касающиеся страхования и перестрахования. Раздел 2 посвящен частичному, а раздел 3 полному порядку рисков. Наряду с классическими методами сравнения рисков, ставшими повседневным орудием актуариев, рассматриваются результаты недавних научных исследований.

Для студентов и аспирантов математических факультетов университетов, специализирующихся в области теории вероятностей и математической статистики, а также актуарной и финансовой математики.

Рецензенты

Кафедра математической статистики и эконометрики
Тверского государственного университета

Доктор физико-математических наук, профессор *В.Ю.Королев*,
Доктор физико-математических наук *С.Я.Шоргин*

© (2001) Е.В. Булинская.

Содержание

Предисловие

Настоящее учебное пособие "Теория риска и перестрахование"написано на основе лекций по актуарной математике, читавшихся автором на механико-математическом факультете МГУ ежегодно, начиная с 1996 года.

В публикуемой первой части, посвященной упорядочиванию рисков, излагаются основные методы сравнения рисков, ставшие орудием повседневной деятельности актуариев. Обязательная часть дополнена задачами и материалом для углубленного самостоятельного изучения.

В подготовленой к печати второй части рассматриваются индивидуальная и коллективная модели риска и производится их сравнение с помощью (введенных в первой части) порядков случайных величин. Основное внимание уделяется вопросам перестрахованию. В частности, дается подробная классификация видов перестрахования и описаны его механизмы, финансовые и экономические условия, программы перестрахования, а также выбор оптимального договора перестрахования как с точки зрения цедента (страховщика), так и с точки зрения перестраховщика.

В третьей части планируется сосредоточиться на теории достоверности и методах определения резервов страховой компании. Таким образом все три упомянутые части пособия представляют достаточно полное изложение математических основ страхования и перестрахования.

Автор выражает искреннюю благодарность за полезные обсуждения рецензентам этой книги д.ф.-м.н. профессору В.Ю.Королеву и д.ф.-м.н. С.Я.Шоргину, а также заведующему кафедрой математической статистики и эконометрики Тверского государственного университета д.ф.-м.н. профессору Ю.С.Хохлову и заведующему лабораторией вычислительных средств мех-мат. факультета МГУ Е.В.Чепурину.

Автор глубоко признателен заведующему кафедрой теории вероятностей члену-корреспонденту РАН А.Н.Ширяеву, выдвинувшему идею написания настоящей монографии, и сотрудникам кафедры за постоянную дружескую поддержку.

1 Введение

1.1 Немного истории

Вторая часть трехсеместрового курса "Актуарная математика"носит название "Перестрахование и теория риска".

В этом году исполнилось 8 лет с того момента, как актуарное образование было введено на механико-математическом факультете МГУ. А именно, в феврале 1993 года началось обучение по специальности математика, прикладная математика с экономическим уклоном.

Идея создания новой специализации принадлежала ныне покойному академику Б.В.Гнеденко, в то время бывшему заведующим кафедрой теории вероятностей. Он отчетливо понимал, что экономические изменения, произошедшие в России и других странах бывшего Советского Союза, создали потребность в специалистах по страхованию и менеджменту финансовых рисков. А это является неотъемлемой частью профессии "актуарий".

Слово *актуарий* в энциклопедическом словаре Брокгауза и Ефрона за 1901 год определяется как *регистратор*, должность, введенная в 1720 году Петром I в "Положении о коллегиях". В Древнем Риме это были писцы судейских актов, а также военные, занятые поставками. Позднее это слово стало означать лицо, занимающееся математическими расчетами в страховой компании.

В истории актуарного дела можно отметить три периода. Первый — *детерминистический*, связанный с таблицами смертности, составленными в 1693 году Эдмундом Галлеем, в честь которого названа комета, и идеями о максимальной полезности, восходящими к Даниилу Бернулли. Второй период, *стохастический*, связан с использованием вероятностных методов при расчетах, в частности, применением закона больших чисел и центральной предельной теоремы. Важнейшее достижение этого периода — создание теории коллективного риска, благодаря работам Ф.Лундберга и Г.Крамера. Наконец, третий, *современный* период, характеризуется применением теории мартингалов, стохастического исчисления, новейших достижений математической статистики и многих других математических средств.

Более подробно об истории актуарного дела написано в [4], где опубликована речь чл.-корр. РАН зав. кафедрой теории вероятностей механико-математического факультета МГУ, президента Международного Финансового Общества Башелье, первого президента Российского Актуарного Общества А.Н.Ширяева 14 сентября 1994 года, в день основания Российского Актуарного Общества. Необходимо отметить вклад А.Н.Ширяева в развитие актуарного образования, в частности, в организацию в 1996 году новой специализации, актуарно-финансовый аналитик.

Уже сказанное выше позволяет понять, почему новая специализация была создана именно на механико-математическом факультете. Другим аргументом в пользу этого может служить тот факт, что в октябре 1997 года Нобелевская премия по экономике была присуждена М.Шоулсу и Р.Мертону за их работы по теории опционов. Начало этому направлению исследований было положено в 1973 году, когда почти одновременно появились работы Блека-Шоулса и Мертона. (Вклад скончавшегося Блека по правилам Нобелевского комитета не мог быть принят во внимание). Дальнейшее развитие эта теория нашла в работах А.Н.Ширяева и его научной школы.

В настоящее время характерна тесная связь между актуарной и финансовой математикой. Существует глубокое внутреннее сходство между страхованием и хеджированием. Многие банки занимаются страховой деятельностью. В этой связи может быть интересным, что в России впервые страхование (от пожара) было введено в 1786 году в связи с созданием заемного банка. Разрешалось давать деньги под залог здания, если только оно было застраховано в этом банке, и занималась таким страхованием специальная Страховая Экспедиция. С другой стороны, с 1992 на Чикагской бирже появились специальные фьючерсные контракты на перестрахование от катастроф.

1.2 Страхование и перестрахование

В наше время *перестрахование* является необходимым условием обеспечения финансовой устойчивости страховых операций и нормальной деятельности любой страховой компании, независимо от размеров ее капитала. (По-английски перестрахование — reinsurance, по-французски — réassurance, по-немецки —

Rückversicherung.)

Если сказать кратко, *перестрахование — это страхование страховщиков*.

Для того, чтобы понять причины, по которым необходимо перестрахование, вспомним, что такое страхование, и каковы основные принципы организации страхового дела.

В современном обществе *страхование* является универсальным средством защиты всех форм собственности, доходов и других интересов предприятий и организаций, арендаторов, фермеров, отдельных граждан, т.е. юридических и физических лиц.

Приведем одно из определений страхования.

Определение 1 Страхование — это операция, посредством которой одна из сторон (*страхователь*), внося определенную сумму денег (*премию* или страховой взнос), обеспечивает себе или третьему лицу (*выгодоприобретателю*) при осуществлении *риска* (т.е. наступлении страхового случая) выплату возмещения другой стороной (*страховщиком*), принимающим на себя целый ансамбль рисков, которые он компенсирует в соответствии с законами теории вероятностей.

Таким образом, речь идет о структуре вида

СТРАХОВЩИК выплаты
↑ ↓
премии СТРАХОВАТЕЛИ

порождающей 2 денежных потока:

1. премии, вносимые страхователями,

2. выплаты страховщика (страховые суммы или возмещение убытков).

Страховая компания заключает контракты со страхователями, уточняющие все детали, касающиеся этих денежных потоков, иначе говоря, продает *страховые полисы*. Поэтому клиенты страховой компании часто называются *полисодержателями*. Есть еще одно понятие — *застрахованный*.

Иногда страхователь, застрахованный и выгодоприобретатель — это одно и то же лицо. Например, вы страхуете свою квартиру от пожара или автомобиль от угона. Если же вы страхуете свою жизнь, то вы страхователь и застрахованный, но деньги после вашей смерти получит тот, в чью пользу вы застраховали жизнь, т.е. выгодоприобретатель. Возможно, что страхователь, застрахованный и выгодоприобретатель — это три различных лица, например, когда работодатель страхует жизнь своего служащего в пользу его семьи. Если же работодатель страхует служащего на случай его болезни, этот служащий одновременно и застрахованный и выгодоприобретатель.

Итак, резюмируя, видим, что *страхователь* — это то лицо, которое обязуется вносить премии, *выгодоприобретатель* — тот, кто получает выплаты от страховщика, а *застрахованный* — это тот, кто подвергается риску, иначе говоря, с ним связаны *страховые события* или случаи.

Даже если все эти три понятия сосредоточены в одном лице (по каждому из контрактов), у страховой компании много полисодержателей, при этом она собирает премии со всех, а выплачивает деньги только некоторым. Таким образом, при страховании возникают денежные перераспределительные отношения, обусловленные наличием *страхового риска*.

1.3 Что такое риск?

Слово *риск* в страховании употребляется в различных смыслах. Так, оно может

- означать застрахованный объект,
- употребляться для обозначения части имущества, не охваченной страхованием, т.е. оставшейся на риске страхователя,
- использоваться в тарификации, где говорят, например, об индустриальных рисках, сельскохозяйственных, рисках частных лиц и т.д. Тем самым застрахованные объекты классифицируются по их страховой оценке (крупный, средний, мелкий риск) и вероятности ущерба (более или менее опасные риски).

- наконец, пониматься как *событие, наступление которого наносит ущерб*, поэтому от него хотят защититься, страхуясь.

Именно последнее понимание риска интересно с теоретической точки зрения, поэтому далее мы и будем говорить о нем. В основном речь будет идти о так называемом *физическом* риске, т.е. "источником риска и вызываемых им потерь являются такие случайности как землетрясения, экономические циклы, погода, различные природные явления и т.п., затрагивающие или могущие затронуть всех членов сообщества"(см. [4]). Существуют еще и такие понятия как *спекулятивный* и *моральный* риск. Первый из них связан с игрой на бирже или в казино, когда возможен не только проигрыш, т.е. материальный ущерб, но и выигрыш. А второй относится к случаю недобросовестного или нечестного поведения, наносящего тем самым ущерб.

Понятие морального риска обычно связано со страхованием. Хотя трудно дать удовлетворительное и достаточно общее определение, легко наглядно объяснить, в чем же заключается моральный риск. Приведем два примера. Известно, что люди чаще пользуются услугами медицинских учреждений, если соответствующие издержки полностью или частично покрываются медицинским страхованием. С другой стороны, при страховании помещения от пожара страховая сумма, превышающая его реальную стоимость, может явиться причиной поджога или, по меньшей мере, халатности, ведущей к пожару.

Таким образом, как отмечал К.Эрроу (см. [8] или [9]), *страховой полис может менять поведение застрахованного*, а тем самым и вероятности, на которых базируются расчеты страховых компаний. Однако моральный риск не обязательно является "продуктом криминального мышления как это нередко утверждают страховщики. Отсутствие огнетушителей на фабрике может быть вызвано просто легкомыслием. Хуже, если владелец пообещал, что на фабрике будет достаточное число огнетушителей. Но речь идет о мошенничестве лишь в том случае, когда такое обещание было дано в обмен на снижение премии при страховании от пожара. Вообще, если застрахованный получает выгоду, нарушая страховой контракт, имеет место моральный риск. Мы вернемся к этому вопросу в разделе 3.1.5, где будет рассмотрено использование теории игр для определения "цены"морального риска.

1.4 Риск, подлежащий страхованию

Любой ли физический риск подлежит страхованию? Нет, для этого должны выполняться следующие три условия.

- Речь может идти лишь о *будущем* событии. Нельзя застраховать сгоревший дом или разбившийся самолет.

- Событие должно быть *случайным.* Это означат, что заранее неизвестно, наступит ли рассматриваемое событие или вообще не наступит (например, кража автомобиля, наезд на пешехода, заболевание и т.д.), либо неизвестен лишь момент его наступления, хотя достоверно, что рано или поздно оно должно наступить (смерть застрахованного).

- Наконец, осуществление события *не должно полностью зависеть от воли застрахованного.* Именно поэтому страховые компании имеют специальных экспертов, которые должны проверить, не является ли пожар, кстати возникший у фирмы, испытывающей финансовые затруднения, просто напросто поджогом, а загадочная смерть самоубийством. В таких случаях компания отказывается производить выплаты. Заметим, что в последнее время выплаты в случае самоубийства стали производиться некоторыми компаниями, если оно произошло через год или два после заключения контракта (поскольку при страховании жизни необходимо пройти тщательный медицинский контроль).

1.5 Виды страхования

Возвращаясь к вопросу о случайности риска, подлежащего страхованию, уместно отметить, что тут кроется разделение всей страховой индустрии на две части: страхование жизни и страхование не жизни, соответственно, по-английски – Life insurance и Non-life insurance (иначе иногда говорят General insurance), по-французски — Assurance-vie и Assurance non-vie.

Страхование жизни в чем-то проще с математической точки зрения, так как вся случайность сосредоточена в моменте наступления события. Поэтому знание основ теории вероятностей (свойства вероятностей событий и математических ожиданий случайных величин) часто оказывается достаточно для большинства расчетов, касающихся определения размеров премий, которые надо собрать с клиентов, или резервов, которыми должна обладать страховая компания, поскольку размеры ее выплат оговорены заранее.

С другой стороны, если речь идет о страховании не жизни, т.е. об имущественном страховании, страховании гражданской ответственности или медицинском страховании, тут неизвестен не только момент, когда придется производить выплату, но и ее размер. Более того, может быть, придется платить неоднократно в течение срока действия полиса. Так будет при страховании гражданской ответственности водителя автотранспорта (которое во многих странах является обязательным) — сколько бы раз вы ни повредили чужой автомобиль и независимо от суммы нанесенного ущерба, вашей страховой компании придется платить (конечно, если происшествий будет много, то на следующий год вам будет увеличена премия). Можно также подчеркнуть, что такая ситуация с выплатами является одной из причин необходимости перестрахования.

Для исследования проблем, возникающих в страховании не жизни (или иначе, общем страховании), нужен гораздо более сложный математический аппарат. Хотя и здесь существуют задачи, которые решаются достаточно просто.

В чем еще состоит различие этих двух ветвей страхования? В первом случае контракты в основном долгосрочные (если речь идет о пожизненном страховании, то продолжительность до 50 лет), во втором контракты заключаются в основном на год. Что касается краткосрочных контрактов страхования жизни, то с ними ситуация очень похожа на то, что происходит в страховании не жизни.

С математической точки зрения момент наступления события в одном случае оказывается собственной случайной величиной (так как событие обязательно рано или поздно произойдет), в другом случае речь идет о несобственной случайной величине (так как событие может и не произойти). Далее, в страховании жизни размер выплаты детерминированный (страховая сумма), неясно заранее лишь, когда придется платить. А в страховании не жизни число выплат (страховых событий) случайно, равно как и размеры отдельных выплат.

Отличаются также и принципы функционирования: в первом случае — это капитализация или накопление, во втором — распределение. Таким образом, в страховании жизни премии, собранные по данному контракту, накапливаются, чтобы к моменту выплаты иметь нужную сумму, в страховании не жизни премии, собранные с одних клиентов, могут идти на выплату возмещений другим (т.е. перераспределяются). Вот здесь и кроется причина законодательного разделения указанных двух типов деятельности (во многих странах, например, во Франции, одна и та же компания не может заниматься как страхованием жизни, так и не жизни), иначе интересы клиентов, застраховавших жизнь, могли бы быть принесены в жертву необходимости выплачивать имущественные претензии.

Наконец, источники риска в страховании жизни — это смертность и процентная ставка, а в страховании не жизни — это процесс поступления *требований на выплату возмещений*, иначе, *исков* или претензий (claims process).

1.6 Основные принципы организации страхового дела

Теперь можно сформулировать *основные принципы организации страхового дела.*

1. *Страховщик должен иметь как можно больше контрактов*, так как в соответствии с законом больших чисел это облегчает взаимную компенсацию рисков на замкнутую совокупность участников страхования.

   Напомним, что усиленный закон больших чисел для последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин с конечным математическим ожиданием $\mathrm{E}X$ означает $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i \to \mathrm{E}X$ почти наверное при $n \to \infty$. При этом чем больше n, тем лучше приближение левой части правой. С точки зрения страховщика $\mathrm{E}X$ означает чистую или нетто-премию (по-английски net premium, по-французски prime pure), в то время как нагруженная премия (или премия с нагрузкой) называется gross premium, соответственно, prime brutte.

Поскольку портфель страховой компании постоянно уменьшается — истекает срок контрактов, они могут расторгаться до истечения срока, риск может исчезнуть и т.д., то необходимо постоянно "вести воспроизводство т.е. *заключать новые контракты*. Заметим заодно, что страховое дело отличается от деятельности любого другого предприятия тем, что для него характерен так называемый *инверсионный производственный цикл*. Это означает, что здесь плата (премия) берется до того, как "продукт произведен в то время как обычно продукт сначала производится, устанавливается его цена, а уж потом он продается.

2. Для облегчения компенсации рисков портфель должен быть *однородным*, т.е. риски должны иметь одинаковую вероятность осуществления и вести к одинаковым убыткам. Следовательно, страховая компания должна проводить *селекцию* или отбор рисков.

   - Селекция требует, чтобы компания отказывалась страховать риски наступление которых почти достоверно (например, пока владелец дома не примет должных мер, таких как установка сигнализации, его дом не будет застрахован от кражи). При страховании жизни необходимо пройти медицинское обследование, чтобы установить, что человек обладает достаточно хорошим здоровьем и компании не придется через неделю выплачивать огромную сумму.

   - Каждый риск относится к определенной тарифной группе, характеризующейся некоторым набором признаков (например, деревянный дом и каменный будут в различных группах, причем страховка первого от пожара будет значительно дороже, чем второго). Для более опасных рисков из одного и того же класса предлагается повышенный тариф (например, страхование жизни лица с повышенным кровяным давлением).

Как мы видим, принципы 1) и 2) предъявляют противоположные требования к портфелю страховой компании.

3. Необходимо добиваться, чтобы *все риски не осуществлялись одновременно*, иначе выплата возмещений (даже маленьких в каждом отдельном случае) может оказаться невозможной, например, при страховании от града урожая всех хозяйств в данном районе.

4. *Не надо страховать слишком большие риски*, чтобы наступление одного страхового случая не требовало такого возмещения, которое не может быть компенсировано собранными премиями (т.е. не надо страховать от пожара большие здания типа замка или небоскреба).

Таким образом, принципы 3) и 4) также ведут к сокращению возможностей увеличения портфеля. Однако на практике страховщик, заинтересованный в росте своего портфеля, возьмется за страхование большого риска, разделив его с другими страховщиками.

1.7 Методы перераспределения риска

Существуют два метода перераспределения риска — *сострахование* и *перестрахование*. Интересно сразу отметить, что хотя с экономической и юридической точки зрения эти два подхода отличаются, математические расчеты для сострахования и так называемого квотного перестрахования во многом совпадают.

Определение 2 *Сострахование* означает пропорциональное разделение одного и того же риска между несколькими страховщиками.

Иначе говоря, принимая на свою ответственность определенный процент риска (долю или *квоту*), каждый страховщик получает тот же процент премии, взамен в случае возникновения ущерба (наступления страхового события) он обязан выплатить такую же долю возмещения. Соответствующая схема:

$$\begin{array}{ccccccc} \boxed{\text{A}} & \boxed{\text{B}} & \dots & \boxed{\text{D}} & \boxed{\text{G}} & \leftarrow & \text{состраховщики} \\ \searrow & \searrow & & \swarrow & \swarrow & & \\ & & \boxed{\text{Р И С К}} & & & \leftarrow & \text{страхователь} \end{array}$$

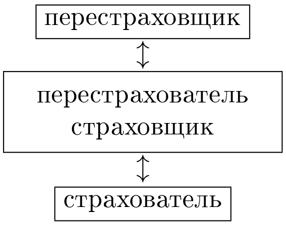
С юридической точки зрения *каждый из страховщиков несет ответственность* только *за свою квоту*. Хотя *полисодержатель* знает всех состраховщиков и дал согласие на участие в гарантировании его риска, он *не заключает контракт с каждым из них в отдельности*. Составляется единый полис, где в специальном дополнении указываются все состраховщики и их квоты. Там же указывается один из состраховщиков, с которым непосредственно будет иметь дело полисодержатель (и которого он называет своим страховщиком). Обычно это тот страховщик, к которому первоначально обратился клиент с предложением о страховании его риска, не обязательно при этом, чтобы этот страховщик взял наибольшую квоту. Но он оценил размер премии, пригласил состраховщиков, собирает премии и распределяет их. Квота каждого из состраховщиков зависит от его финансового положения. В частности, она определяется *потолком гарантий*, или максимальной страховой суммой, которую страховщик готов выплатить по данному виду риска. Для очень больших рисков число состраховщиков может исчисляться десятками, а иногда и сотнями.

Перестрахование — это более сложный метод разделения или перераспределения рисков. Можно дать следующее определение.

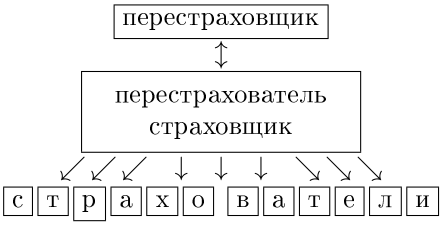
Определение 3 *Перестрахование* — это операция, посредством которой одна сторона (*перестрахователь*), выплачивая некоторую сумму (*премию перестрахования*) другой стороне (*перестраховщику*), передает ей тем самым часть принятого на гарантию риска, т.е. обеспечивает выплату ею определенной части возникающего ущерба.

Таким образом, это действительно *страхование страховщиков.* Схема здесь выглядит следующим образом:

Если речь идет об отдельном риске



Если речь идет о нескольких рисках

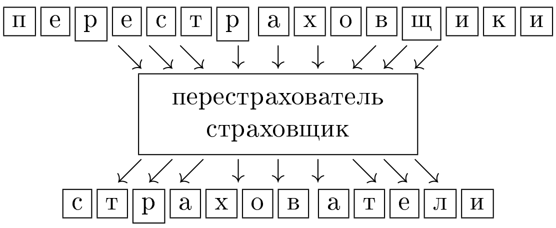


Перестрахователь иначе называется *цедентом, передающей компанией* или *непосредственным страховщиком. Перестраховщик*, или *перестраховая компания*, называется *цессионером.*

С юридической точки зрения *всю ответственность перед страхователем несет непосредственный страховщик.* Страхователь вообще ничего не знает о перестраховании. Оно как бы осуществляется во вторую очередь (или на втором уровне).

Таким образом, последствия от разорения сострахователя и перестраховщика будут различными. Пусть имеются два сострахователя A и B, причем доля A равна θ. Если разорен сострахователь B, сострахователь A платит лишь свою долю возмещения θ, остальной ущерб приходится на долю страхователя. Предположим теперь, что речь идет о пропорциональном перестраховании, когда страховщик A оставляет себе долю θ, а остальной риск передает перестраховщику B. Если перестраховщик B разорен, то A должен выплачивать весь ущерб *полностью.* В этом и состоит различие двух схем, в каждой из которых первоначально предполагалось, что A получает долю θ премий и выплачивает такую же долю ущерба.

Приведенная схема наиболее простая — один страховщик и один перестраховщик. Но, как мы увидим дальше, чаще всего используется так называемая *программа перестрахования*.



Если речь идет о пропорциональном перестраховании, то верхний этаж этой схемы — это в точности то же самое, что сострахование. При непропорциональном перестраховании ситуация будет более сложная.

В реальной жизни все обстоит еще более сложно и запутанно. Очевидно, что каждый перестраховщик имеет не одного перестрахователя, а целый ряд. Более того, перестраховщики в свою очередь также могут частично передавать риски в перестрахование. Такую операцию называют *ретроцессией*, перестраховщика, передающего риск, — *ретроцедентом*, а принимающего — *ретроцессионером*.

Значит, у нас возникает многоуровневая иерархическая система: на нижнем этаже — страхователи, на следующем — страховщики (они же цеденты), далее идут перестраховщики. Положение усложняется еще тем, что, с одной стороны, существуют специальные компании, занимающиеся исключительно перестрахованием, а с другой стороны, и обычные страховые компании могут выступать в роли перестраховщиков. В результате одна и та же компания является одновременно и перестрахователем, и перестраховщиком. Существует такой термин *ресипросити* или взаимность, он описывает практику, согласно которой одна компания размещает свои перестраховочные договоры против адекватной взаимности со стороны другой компании (происходит как бы обмен клиентами). В результате большой риск оказывается разбитым на мелкие риски, которые довольно трудно подсчитать.

Полезно также знать, что понятия gross и net premium часто употребляются в перестраховании в совсем ином смысле, чем в страховании. Так gross (брутто) будет означать размер риска (или собранные премии) целиком, т.е. без учета перестрахования. Тогда как net (нетто) будет относиться к тому, что остается после передачи части риска (а значит, и премий) в перестрахование. Таким образом, могут появляться выражения типа net net premium, т.е. чистая премия, остающаяся у страховщика после передачи риска в перестрахование.

Цель каждого страховщика — не разориться, т.е. добиться такого ведения дела, когда производятся все выплаты, ну и, конечно, по возможности имеется прибыль (в основном это важно для акционерных обществ, которые должны выплачивать дивиденды). Страховщик может принять следующие меры:

- включить в премии специальные нагрузки,
- увеличить собственные фонды,
- ограничить андеррайтинг, т.е. заключение контрактов,
- использовать сострахование
- и, наконец, обратиться к перестрахованию.

1.8 Причины, по которым необходимо перестрахование

.

Несмотря на все принимаемые страховыми компаниями предосторожности (такие как стремление создать однородный портфель, тщательный отбор рисков для обеспечения изолированности объектов страхования друг от друга и применение сострахования) им не удается создать полностью сбалансированный портфель. А значит, совокупность страхователей подвергается угрозе невыплаты возмещений возникающего ущерба, несмотря на использование новейших математических методов и имеющиеся в распоряжении компании статистические данные.

В самом деле, поскольку условиями контрактов обычно покрываются различные опасности, которым застрахованные объекты подвергаются одновременно при наступлении землетрясений, наводнений, ураганов и других стихийных бедствий, то возникающие при этом требования на возмещение даже малых ущербов могут составить значительную сумму, и компания может разориться. Нужна защита от катастроф, как и от отдельных значительных рисков. Это может дать перестрахование.

Таким образом, *перестрахование служит для стабилизации баланса страховой компании* на уровне *счетов расходов–доходов*, когда *тариф известен и был выбран адекватно*, т.е. по расчетам премий должно было хватить на выплату возмещений. Как известно, чистая премия, или премия риска, равняется математическому ожиданию размера ущерба, а тариф получается путем добавки к ней соответствующей нагрузки. Ущерб S равен сумме случайного числа N случайных слагаемых $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$, где N — это число происшествий, а X_i — это размер ущерба от i-го происшествия. При этом предполагается, что X_i — независимые одинаково распределенные случайные величины, не зависящие от N. Согласно тождеству Вальда $\mathrm{E}S = \mathrm{E}N \cdot \mathrm{E}X_1$. Значит, отклонение в частоте происшествий или в цене происшествия (или размере возмещения) может привести к недостаточности премий.

Например, за последние 10 лет в России, как впрочем и во Франции и в некоторых других европейских странах, выросло число краж автомобилей. А это существенно для страхового рынка, так как 15% страхования не жизни приходится на долю страхования автомобилей.

С другой стороны, перестрахование будет особенно полезно для новой отрасли страхования или новой компании, т.е. когда *тариф неизвестен*. У компании нет в начале работы своей статистики. И перестраховщик будет полезен не только тем, что разделит риск, но также будет участвовать в разработке тарифов и составлении условий контрактов, в тщательном изучении рисков. Здесь у перестраховщика имеется большой опыт и знание условий не только на отдельном страховом рынке.

В наше время происходит резкая концентрация материальных ценностей (дорогостоящие космические объекты, гигантские заводы, новейшие самолеты или морские суда и т.д.). Ни одна страховая компания не может принять на гарантию подобные риски, не имея перестраховочного обеспечения сверх той суммы, которую она может держать на своей ответственности. При этом часто риски через каналы перестрахования передаются за границу, т.е. *перестрахование носит интернациональный характер.*

Кроме того, перестрахование *улучшает экономические показатели*, такие как *уровень платежеспособности* (иногда его называют предел или маржа платежеспособности). Как известно, в простейшем случае он определяется как (выраженное в процентах) отношение собственных фондов F к размеру собранных премий P, т.е. $r = (F/P) \cdot 100\%$. В целях предосторожности требуется $r \geq 16\%$. Например, во Франции невыполнение этого условия ведет к потере лицензии страховой компанией. Как перестрахование может улучшить этот показатель? Пусть $P = 10^9$\$, а $F = 10^8$\$, тогда $r = 10\%$. Если передать половину риска в перестрахование, то перестраховщик возьмет себе половину премий (ну, конечно, он также оплатит и половину возмещений). Значит, после перестрахования $r = 20\%$, т.е. собственные фонды остались прежними, а лицензия сохранится. Конечно, это был простой схематический пример, так как на самом деле существуют специальные дополнительные правила подсчета платежеспособности, предотвращающие передачу очень большой доли риска в перестрахование, чтобы страховщик не превратился просто в посредника.

2 Частичный порядок рисков

2.1 Сравнение рисков — одна из главных задач актуариев

Одна из главных задач актуария — сравнивать привлекательность различных рисков. Это важно, например, для того чтобы заменять реальную сложную ситуацию простой, но более рискованной для принятия "консервативного т.е. более осторожного решения. В качестве решения можно рассматривать назначение премии или определение размера резервов, использование перестрахования, проведение инвестиций и т.д.

Существует несколько причин предпочесть более простую модель. Одна из них — невозможность проведения вычислений, необходимых для сложной модели, не говоря об исследовании ее устойчивости. Другая причина — отсутствие достоверной информации о параметрах модели. В таком случае разумно принять решение, основываясь на наиболее рискованной модели, совместимой с имеющимся ограниченным объемом информации.

2.2 Общие сведения о порядках

С точки зрения математика, риск, *подлежащий страхованию*, — это некоторая неотрицательная случайная величина (с конечным математическим ожиданием). Будем обозначать случайные величины $X, Y, \ldots$. Во многих вероятностных рассмотрениях не различают случайные величины, совпадающие с вероятностью 1. Мы также будем придерживаться этого предположения.

Интерес актуариев к математическим методам упорядочивания рисков привлекли работы [10],[12],[17]. В течение двух последних десятилетий велись многочисленные исследования с целью получить условия, при которых различные лица, принимающие решения и имеющие различные предпочтения, делают одинаковый выбор в аналогичных ситуациях, связанных с неопределенностью.

Ниже излагаются как основные методы сравнения рисков, ставшие уже классическим орудием повседневной деятельности актуариев (см., например, [18] и [25]), так и некоторые результаты недавних исследований.

2.2.1 Порядок с вероятностью 1

Введем один из возможных способов упорядочивания случайных величин, а именно, *порядок с вероятностью* 1. Обозначим его $X <_1 Y$, такая запись показывает, что $\mathrm{P}(X \le Y) = 1$. Очевидно, что не все случайные величины удастся таким образом упорядочить, потому что не обязательно либо $X \le Y$, либо $Y \le X$ с вероятностью 1, т.е. не все случайные величины сравнимы. Следовательно, речь идет о *частичном* порядке.

Какими свойствами обладает порядок с вероятностью 1?

- *Транзитивность*: из $X <_1 Y$ и $Y <_1 Z$ следует $X <_1 Z$.
- *Рефлексивность*: $X <_1 X$.
- *Антисимметричность*: из $X <_1 Y$ и $Y <_1 X$ следует $X = Y$.

При других способах упорядочивания последнее свойство (антисимметричность) не выполняется, т.е. на самом деле речь идет о *предпорядке*. Накладывается менее строгое ограничение, а именно, вместо $X = Y$ требуется лишь $X \stackrel{d}{=} Y$ (символ $\stackrel{d}{=}$, как обычно, указывает, что совпадают распределения X и Y). Таким образом, *устанавливается порядок не самих случайных величин, а их функций распределения*. Далее будет предполагаться, что запись $X \prec Y$ означает $F_X \prec F_Y$, где $F_X(x) = \mathrm{P}(X \le x)$ и $F_Y(x) = \mathrm{P}(Y \le x)$ соответственно функции распределения случайных величин X и Y.

2.2.2 Частичный и полный порядок

Обозначим через $\mathcal{B}$ множество всех функций распределения.

Определение 4 С математической точки зрения *частичный порядок*, заданный на подмножестве $\mathcal{B}_\prec \subseteq \mathcal{B}$, — это бинарное отношение $\prec$ со свойствами

- Транзитивность*: из* $F_1 \prec F_2$ *и* $F_2 \prec F_3$ *следует* $F_1 \prec F_3$.

- Рефлексивность*:* $F \prec F$*.*

- Антисимметричность*: из* $F_1 \prec F_2$ *и* $F_2 \prec F_1$ *следует* $F_1 = F_2$*.*

Для упрощения записи мы используем знак $\prec$ для обозначения частичного порядка, хотя более соответствующим свойству рефлексивности был бы знак $\preceq$.

Определение 5 Множество функций распределения *вполне упорядочено*, если можно сравнить любую пару функций распределения, т.е. выполнено дополнительное свойство

- Полнота*: либо* $F_1 \prec F_2$*, либо* $F_2 \prec F_1$*, либо и то, и другое.*

Задача 1 Пусть $\prec_b$ — полный порядок всех рисков для лица b из некоторого множества B лиц, принимающих решения. Определим бинарное отношение $\prec_a$ на множестве рисков следующим образом:

$$X \prec_a Y \text{ тогда и только тогда,}$$
$$\text{когда } X \prec_b Y \text{ для всех } b \in B.$$

Доказать, что $\prec_a$ — это частичный порядок (*отражающий предпочтение всех лиц из множества* B).

2.2.3 Некоторые свойства отношений порядка

Для приложений бывают важны следующие свойства отношений порядка для функций распределения (из подмножества $\mathcal{B}_\prec \subseteq \mathcal{B}$):

- 1°. Для F_1, $F_2 \in \mathcal{B}_\prec$ с математическими ожиданиями соответственно m_1 и m_2 из $F_1 \prec F_2$ следует $m_1 \leq m_2$.

- 2°. Для вещественных a и b неравенство $a \leq b$ эквивалентно соотношению $\Theta_a \prec \Theta_b$.

Здесь $\Theta_a(x)$ — это функция распределения константы a, т.е. $\Theta_a(x) = 0$ при $x < a$ и $\Theta_a(x) = 1$ при $x \geq a$.

- 3°. Для F_1, F_2, $G \in \mathcal{B}_\prec$ таких, что $F_k * G \in \mathcal{B}_\prec$, $k = 1, 2$, из $F_1 \prec F_2$ следует $F_1 * G \prec F_2 * G$.

- 4°. Для любого вещественного $c > 0$ из $F_1 \prec F_2$, при $F_1,\ F_2 \in \mathcal{B}_\prec$, следует $F_1^c, F_2^c \in \mathcal{B}_\prec$ и $F_1^c \prec F_2^c$. Здесь обозначено $F_k^c(x) = F_k(x/c)$, $k = 1, 2$.

Иначе свойство 4° в терминах соответствующих случайных величин можно записать так: если $X_1 \prec X_2$, то $cX_1 \prec cX_2$ при $c > 0$. Это свойство называется *масштабной инвариантностью.*

- 5°. Для F_n, G_n, F, $G \in \mathcal{B}_\prec$ таких, что $F_n \xrightarrow{d} F$ и $G_n \xrightarrow{d} G$ при $n \to \infty$, из $F_n \prec G_n$, $n = 1, 2, \ldots$ следует $F \prec G$.

Знак $\xrightarrow{d}$ употребляется для обозначения слабой сходимости, т.е $F_n(x) \to F(x)$ при $n \to \infty$ в точках непрерывности предельной функции F. В терминах соответствующих случайных величин слабая сходимость означает $\mathrm{E}f(X_n) \to \mathrm{E}f(X)$ для любой непрерывной ограниченной вещественной функции f.

Большинство рассматриваемых на практике отношений порядка обладает свойством 1°. Кроме того, свойства $1^\circ - 5^\circ$ не являются независимыми.

Теорема 1 *Если отношение порядка $\prec$ для функций распределения обладает свойствами $2^\circ - 5^\circ$, то оно обладает также и свойством 1°, при условии, что из $F \in \mathcal{B}_\prec$ следует $F^{n*} \in \mathcal{B}_\prec$, $n = 1, 2, \ldots$.*

Доказательство. Пусть F и G — два произвольных сравнимых относительно $\prec$ элемента из $\mathcal{B}_\prec$ с математическими ожиданиями соответственно m_F и m_G, а $\{X_n\}$ и $\{Y_n\}$ — две последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин с функциями распределения соответственно F и G. Согласно закону больших чисел

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{p} m_F, \qquad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{p} m_G, \quad \text{при } n \to \infty,$$

где $\xrightarrow{p}$ означает сходимость по вероятности. Поскольку из сходимости по вероятности следует слабая сходимость, функции распределения F_n и G_n соответственно средних арифметических

$n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$ и $n^{-1}\sum_{i=1}^n Y_i$ слабо сходятся к Θ_{m_F} и к Θ_{m_G}. В силу свойств 3° и 4° для любого n имеем также $F_n \prec G_n$, а из 5° следует $\Theta_{m_F} \prec \Theta_{m_G}$, откуда с помощью 2° приходим к нужному неравенству $m_F \le m_G$, т.е. к 1°. ■

2.2.4 Классы функций, порождающие порядок

Многие отношения порядка определяются или могут быть определены как порожденные некоторым классом функций.

Определение 6 Пусть $\mathcal{F}_\prec$ — некоторое множество вещественных функций. Отношение порядка $\prec$ порождено множеством $\mathcal{F}_\prec$, если $F_1 \prec F_2$ эквивалентно выполнению неравенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dF_1(x) \le \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dF_2(x) \tag{1}$$

для всех $f \in \mathcal{F}_\prec$, для которых интегралы существуют.

Заметим, что говоря о соответствующих случайных величинах X_1 и X_2, имеющих функции распределения F_1 и F_2, вместо интегралов в (1) можно записать

$$\mathrm{E}f(X_1) \le \mathrm{E}f(X_2).$$

Свойства класса $\mathcal{F}_\prec$ связаны со свойствами соответствующего отношения порядка.

Определение 7 Множество $\mathcal{G}$ вещественных функций на $\mathbb{R}$ (соотв. на $\mathbb{R}^+$) называется *инвариантным относительно сдвигов*, если для всех $a \in \mathbb{R}$ (соотв. $a \in \mathbb{R}^+$) одновременно с f множеству $\mathcal{G}$ также принадлежат и f_a, где $f_a(x) = f(x+a)$.

Теорема 2 *Пусть отношение порядка порождено инвариантным относительно сдвига множеством* $\mathcal{F}_\prec$. *Тогда оно обладает свойством* 3°.

Доказательство. При любых F_k, $k = 1, 2$, и G из $\mathcal{B}_\prec$, для которых интегралы существуют, имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,d(F_k * G)(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)\,dF_k(x)\,dG(y).$$

Это равенство представляет собой две различные формы записи $\mathrm{E}f(X_k + Y)$, где X_k и Y независимы и имеют функции распределения F_k и G.

Если $f \in \mathcal{F}_{\prec}$, то для всех y

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)\,dF_1(x) \le \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)\,dF_2(x),$$

значит,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,d(F_1 * G) \le \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,d(F_2 * G)(x),$$

т.е. $F_k * G \in \mathcal{B}_{\prec}$, $k = 1, 2$, а также $F_1 * G \prec F_2 * G$. ■

Обозначим $\mathcal{R}_{\prec}$ — множество вещественных функций f, для которых

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dF_1(t) \le \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dF_2(t) \tag{2}$$

при всех F_1, $F_2 \in \mathcal{B}_{\prec}$ таких, что $F_1 \prec F_2$ и выписанные интегралы существуют.

Это множество, вообще говоря, шире $\mathcal{F}_{\prec}$, и его можно назвать множеством всех $\prec$-*монотонных* функций.

Пусть $\mathcal{F}_{\prec}$ — это некоторое семейство функций f_α, $\alpha \in A$, $A \subseteq \mathbb{R}$, и пусть μ_f — некоторая мера на A, а c_f — некоторая постоянная.

Определим класс $\mathcal{H}_{\prec}$ функций вида

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(t)\,d\mu_f(\alpha) + c_f.$$

Теорема 3 *Справедливо соотношение* $\mathcal{H}_{\prec} \subseteq \mathcal{R}_{\prec}$.

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{H}_{\prec}$ и F_1, $F_2 \in \mathcal{B}_{\prec}$, причем интегралы $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dF_k(t)$, $k = 1, 2$, существуют. Тогда

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dF_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(t)\,d\mu_f(\alpha) + c_f\right] dF_k(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(t)\,dF_k(t)\,d\mu_f(\alpha) + c_f.$$

Но если $F_1 \prec F_2$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(t)\,dF_1(t) \leq \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(t)\,dF_2(t),$$

следовательно, верно и неравенство (2), определяющее $\mathcal{R}_\prec$. ■

2.2.5 Функции полезности

Упорядочивание рисков, часто применяемое в страховании, может производиться в рамках *теории ожидаемой полезности* (expected utility theory), развитой Дж. фон Нейманом и О.Моргенштерном в [1]. (О дальнейших исследованиях в этом направлении см. также [2].)

Основную роль в этой теории играет понятие *функции полезности*, введенное Д.Бернулли. Предполагается, что "полезность"детерминированного дохода x описывается некоторой функцией $u(x)$. Найти явный вид этой функции не удается, но можно установить некоторые ее свойства. Например, она должна быть непрерывной и *неубывающей* (чем больше доход, тем лучше). Случайный доход X естественно оценивать по его ожидаемой полезности $\mathrm{E}u(X)$.

Заметим, что сравнение рисков производится *в предположении, что за них вносится одна и та же премия*, потому что если будет внесена бо́льшая премия, то непривлекательный риск может стать привлекательным. Таким образом, предполагается, что функция полезности $u(y)$ включает премию в текущий капитал y, при этом полезность потери x равна $u(-x)$.

Следовательно, можно дать следующее определение.

Определение 8 Говорят, что риск X предпочтительнее риска Y, если $\mathrm{E}u(-X) \geq \mathrm{E}u(-Y)$ для любой функции полезности u, принадлежащей некоторому классу $\mathcal{K}$.

Разные люди упорядочивают риски по-разному, но если взять те пары рисков, которые все лица, имеющие неубывающую функцию полезности, сравнили одинаковым образом, то получится (см. задачу 1) частичный порядок на множестве рисков. Этот порядок, называемый *стохастическим*, основывается лишь на распределениях случайных величин.

Накладывая на функцию полезности дополнительные ограничения, мы получим более слабый порядок. Например, можно предположить, что функция u является *вогнутой* (по мере того, как капитал растет, приращение капитала играет все меньшую роль). Это будет означать, что лицо, принимающее решения *не склонно к риску*. Оно предпочтет фиксированный риск случайному с тем же средним. Возникающий порядок будет носить название *стоп-лосс* (stop-loss) и будет также рассмотрен немного дальше.

Если предположить, что человек не склонен к риску, причем его *решения не зависят от имеющегося капитала*, то это будет означать использование экспоненциальной или линейной функции полезности.

Наиболее часто встречающиеся функции полезности:

линейная	$u(x) = x$,
квадратическая	$u(x) = -(b-x)^2$,
логарифмическая	$u(x) = \ln(\alpha + x)$,
экспоненциальная	$u(x) = -\alpha e^{-\alpha x}$.

Естественно, что рассматриваются лишь те значения x, при которых эти функции определены и не убывают. Так, для квадратической функции b является точкой насыщения, а при бо́льших x полезность не меняется. Очевидно, что любое линейное преобразование функции полезности ведет к тем же самым решениям. Поэтому часто выбирают в классе эквивалентных функций ту, для которой $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$. *Коэффициент неприятия риска* $a(x)$ определяется как $a(x) = -u''(x)/u'(x)$.

Задача 2 Можно ли все вышеуказанные функции полезности представить в виде

$$u(x; \alpha, \beta) = (\alpha + \beta x)^{1-1/\beta}/(\beta - 1)$$

с $\alpha + \beta x > 0$, $\beta \neq 0$, $\beta \neq 1$ или как их предел при $\beta \to 0$, $\beta \to 1$? Найти соответствующее значение $a(x)$.

Замечание 1 Теория полезности (см., например, [15]) может быть построена аксиоматически. Пусть знак $\succ$ означает строгое предпочтение, а знак $\sim$ безразличие, и как всегда F_X — это функция распределения X. Введем следующие пять аксиом:

$EU1$. Если $F_X \equiv F_Y$, то $X \sim Y$.

$EU2$. Отношение $\succeq$ является порядком.

$EU3$. Порядок $\succeq$ непрерывен в топологии слабой сходимости.

$EU4$. Он сохраняет стохастическое доминирование.

$EU5$. Порядок сохраняется при смешивании, т.е. если $F_X \succeq F_Y$, то $(1-p)F_X + pF_Z \succeq (1-p)F_Y + pF_Z$ для любого $p \in [0,1]$.

Из этих аксиом вытекает существование функции полезности u такой, что $X \succeq Y$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{E}u(X) \geq \mathrm{E}u(Y)$.

Отметим также, что ожидаемая полезность используется для подсчета премий.

2.2.6 Анализ средних-дисперсий

Наиболее простыми мерами "опасности"риска X могут служить такие его скалярные характеристики как математическое ожидание $\mathrm{E}X$, дисперсия $\mathrm{D}X$ или стандартное отклонение $\sqrt{\mathrm{D}X}$.

Например, в финансовой математике широко распространена так называемая Capital Asset Pricing Model (CAPM), основанная на анализе средних и дисперсий (mean-variance analysis). В ней предполагается, что риск с меньшим средним всегда предпочтительнее, а в случае равенства средних лучше тот, который имеет меньшую дисперсию.

Как упоминалось в разделе 2.2.3, все практически важные порядки случайных величин обладают свойством 1°, т.е. меньшему риску соответствует меньшее среднее. Далее мы также увидим, что *при равенстве средних* порядок дисперсий также чаще всего сохраняется.

Замечание 2 В экономике страхования (см., например, [26]) часто используется такая относительная мера изменчивости как *коэффициент вариации*

$$\mathrm{CV}(X) = \sqrt{\mathrm{D}X}/\mathrm{E}X.$$

Однако использование коэффициента вариации в качестве меры опасности риска *может вводить в заблуждение.*

В самом деле, в коллективной теории риска (как будет объяснено в разделе 4) суммарный риск страховщика равен сумме случайного числа случайных слагаемых $X = \sum_{i=1}^{N} Y_i$, где N — это число страховых случаев, а Y_i — размер i-го возмещения. Предполагается, что случайная величина N не зависит от последовательности $\{Y_i\}_{i\geq 1}$, состоящей из независимых одинаково распределенных случайных величин.

Рассмотрим две случайные суммы с указанными свойствами

$$X_1 = \sum_{i=1}^{N_1} Y_i \quad \text{и} \quad X_2 = \sum_{i=1}^{N_2} Z_i,$$

где

$$\begin{array}{lll} N_1 \sim NB(10, 9/10), & Y \sim Exp(a), & a > 0, \\ N_2 \sim NB(1, 1/10), & Z \sim Par(a', 8/3), & a' > 0. \end{array}$$

Задача 3 Проверить, что

$$\begin{gathered} \mathrm{CV}(N_1) = 1 < \sqrt{10/9} = \mathrm{CV}(N_2) \\ \mathrm{CV}(Y) = 1 < 2 = \mathrm{CV}(Z), \end{gathered}$$

но

$$\mathrm{CV}(X_1) = \sqrt{19/10} > \sqrt{14/9} = \mathrm{CV}(X_2).$$

Таким образом, коэффициент вариации и для числа происшествий, и для размера возмещений в первом случае меньше, чем во втором, но коэффициент вариации суммарного ущерба в первом случае больше, чем во втором.

2.3 Стохастический порядок

Одно из возможных определений стохастического порядка выглядит следующим образом.

Определение 9 Назовем функцию распределения F_1 *стохастически меньшей* или *стохастически предшествующей*) функции распределения F_2 ($F_1 <_{st} F_2$), если для любого t выполняется неравенство

$$F_1(t) \geq F_2(t). \tag{3}$$

Как было указано ранее, для случайных величин X_k, $k = 1, 2$, (с функциями распределения F_k) мы будем записывать $X_1 <_{st}$

X_2, тогда и только тогда, когда $F_1 <_{st} F_2$, т.е. выполнено (3). Если записать неравенство (3) в эквивалентной форме

$$\mathrm{P}(X_1 > t) \le \mathrm{P}(X_2 > t)$$

$$\text{или, что то же самое, } \bar{F}_1(t) \le \bar{F}_2(t), \tag{4}$$

где $\bar{F}_k(t) = 1 - F_k(t)$, $k = 1, 2$, станет ясно происхождение названия X_1 стохастически меньше X_2.

Очевидно, что $<_{st}$ — это отношение (частичного) порядка, определенное на множестве случайных величин с любыми значениями, а не только рисков. Заметим, что в различных книгах и статьях могут использоваться другие обозначения для этого же отношения порядка. Так например, в книге [5] используется обозначение $\stackrel{(1)}{\le}$, другие встречающиеся обозначения $\le_d$, $\stackrel{d}{\le}$, $\le_p$.

2.3.1 Связь с порядком $<_1$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4 *Если $F_1 <_{st} F_2$, то найдутся случайные величины X_1 и X_2, определенные на одном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ такие, что $X_1(\omega) \le X_2(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$ и $\mathrm{P}(X_k \le t) = F_k(t)$, $k = 1, 2$.*

Доказательство. Пусть $\Omega = [0, 1]$ и $\mathcal{A}$ — σ-алгебра борелевских множеств отрезка $[0, 1]$, а $\mathrm{P} = l$, т.е. мера Лебега. Положим $X_k(\omega) = F_k^{-1}(\omega)$. Обратная функция определяется следующим образом

$$F^{-1}(\omega) = \inf\{t : F(t) > \omega\}.$$

В силу (3) имеем $F_1^{-1}(\omega) \le F_2^{-1}(\omega)$. Тем самым доказательство закончено, поскольку

$$\mathrm{P}(X_k \le x) = l(\omega : F_k^{-1}(\omega) \le x) = F_k(x). \blacksquare$$

Иначе говоря, мы доказали, что если $X_1 <_{st} X_2$, то существуют такие $X'_k \stackrel{d}{=} X_k$ (стохастически эквивалентные, т.е. имеющие те же функции распределения $F_{X_k}(t) = F_{X'_k}(t)$), для которых верно $\mathrm{P}(X'_1 \le X'_2) = 1$.

Нетрудно проверить, что из упорядоченности с вероятностью 1 следует стохастическая упорядоченность (т.е. порядок $<_1$ сильнее, чем $<_{st}$). Это вытекает из несколько более общего результата.

Лемма 1 *Из* $X_1 <_1 X_2$ *и* $X_2' \stackrel{d}{=} X_2$, *следует* $X_1 <_{st} X_2'$.

Доказательство. Так как у X_2 и X_2' одинаковые функции распределения, то необходимое утверждение получается из цепочки очевидных равенств и неравенства:

$$F_2(t) = \mathrm{P}(X_2' \le t) = \mathrm{P}(X_2 \le t) \le \mathrm{P}(X_1 \le t) = F_1(t). \blacksquare$$

Задача 4 Верно ли обратное утверждение, т.е. предположим, что $X_1 <_{st} X_2$, можно ли найти такую случайную величину X_2', чтобы $X_1 <_1 X_2'$ и $X_2 \stackrel{d}{=} X_2'$?

2.3.2 Свойства стохастического порядка

Переписывая (4) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Theta_x(t)\, dF_1(t) \le \int_{-\infty}^{\infty} \Theta_x(t)\, dF_2(t) \qquad \text{для любого} \quad x,$$

нетрудно понять, что отношение порядка $<_{st}$ *порождается семейством* $\mathcal{F}_{st} = \{\Theta_x(t)\}_{x\in\mathbb{R}}$, которое *инвариантно относительно сдвигов.*

Следствие 1 *Отношение* $<_{st}$ *обладает свойством* 3°.

Задача 5 Доказать это свойство непосредственно, пользуясь определением свертки. Будут ли выполнены свойства $1^\circ, 2^\circ, 4^\circ$ для стохастического порядка?

Теперь покажем, что для стохастического порядка справедливо свойство 5°.

Теорема 5 *Пусть* $F_{1,n} \stackrel{d}{\to} F_1$, $F_{2,n} \stackrel{d}{\to} F_2$ *при* $n \to \infty$. *Если* $F_{1,n} <_{st} F_{2,n}$, $n \ge 1$, *то* $F_1 <_{st} F_2$.

Доказательство. В точках непрерывности обеих функций F_1 и F_2 выполнено неравенство $F_1(x) \geq F_2(x)$. Если бы в точке разрыва выполнялось противоположное неравенство $F_1(y) < F_2(y)$, то в силу непрерывности функций распределения справа существовал бы интервал, где также справедливо это неравенство. Но в интервале всегда найдутся точки непрерывности, что приводит к противоречию. ■

Продолжая рассмотрение стохастического порядка $<_{st}$, докажем следующее достаточное условие, где $dF_X(x)$ означает $\mathrm{P}(X = x)$ для дискретных распределений и $f_X(x)dx$ для абсолютно непрерывных с плотностью $f_X(x)$.

Теорема 6 *Пусть существует такое* c, *что* $dF_X(x) \geq dF_Y(x)$ *при* $x < c$ *и* $dF_X(x) \leq dF_Y(x)$ *при* $x > c$, *тогда* $X <_{st} Y$.

Доказательство. Очевидно, при $y < c$

$$F_X(y) = \int_{-\infty}^{y} dF_X(x) \geq \int_{-\infty}^{y} dF_Y(x) = F_Y(y),$$

в то время как при $y > c$ справедливо следующее неравенство

$$\mathrm{P}(X > y) = 1 - F_X(y) = \int_{y}^{\infty} dF_X(x) \leq$$

$$\leq \int_{y}^{\infty} dF_Y(x) = 1 - F_Y(y) = \mathrm{P}(Y > y).$$

А это значит, что выполняется определение стохастического доминирования X случайной величиной Y. ■

Пользуясь этой теоремой нетрудно решить следующие задачи.

Задача 6 Случайные величины X_k, $k = 1, 2$, имеют показательное распределение с параметрами λ_k. Если $X_1 <_{st} X_2$, что можно сказать о параметрах?

Задача 7 Случайные величины N_1 и N_2 имеют распределение Пуассона с параметрами μ_1 и μ_2. Как упорядочены эти величины, если $\mu_1 < \mu_2$?

Задача 8 Распределения Эрланга (Γ-распределения с натуральным параметром формы r и произвольным λ) стохастически растут по r и убывают по λ.

Задача 9 Как можно упорядочить нормальные распределения с параметрами a и σ^2?

Задача 10 Проверить, что биномиальные распределения с параметрами n и p растут стохастически по p при фиксированном n и стохастически растут по n при фиксированном p.

Задача 11 Сохраняется ли стохастический порядок при суммировании случайного числа случайных слагаемых? Более точно, пусть $N_1 <_{st} N_2$ и $X_k <_{st} Y_k$, $k \geq 1$. В предположении, что последовательности $\{X_k\}$, $\{Y_k\}$ состоят из независимых случайных величин, а N_1 не зависит от последовательности $\{X_k\}$, N_2 не зависит от $\{Y_k\}$, будет ли $\sum_{i=1}^{N_1} X_i <_{st} \sum_{i=1}^{N_2} Y_i$?

2.3.3 Эквивалентные определения

Обозначим $\mathcal{K}_1(\mathbb{R})$ множество монотонно неубывающих вещественных функций.

Теорема 7 1. *Пусть $f \in \mathcal{K}_1(\mathbb{R})$ и соответствующие интегралы существуют. Тогда, если $F_1 <_{st} F_2$, то*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dF_1(t) \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dF_2(t). \tag{5}$$

2. *Обратно, если F_1 и F_2 таковы, что (5) верно для всех $f \in \mathcal{K}_1(\mathbb{R})$, для которых интегралы существуют, то $F_1 <_{st} F_2$.*

3. *Любая вещественная функция f такая, что (5) верно для всех $F_1 <_{st} F_2$ является монотонно неубывающей (т.е. $f \in \mathcal{K}_1(\mathbb{R})$).*

Доказательство. 1. Пусть $F_1 <_{st} F_2$ и f удовлетворяет условиям теоремы, т.е. $f \in \mathcal{K}_1(\mathbb{R})$ и существуют соответствующие интегралы. Согласно теореме 4 найдутся случайные величины X_1 и

X_2, имеющие соответственно функции распределения F_1 и F_2, такие, что $\mathrm{P}(X_1 \leq X_2) = 1$. Следовательно, $\mathrm{P}(f(X_1) \leq f(X_2)) = 1$ и $\mathrm{E}f(X_1) \leq \mathrm{E}f(X_2)$. А это и есть неравенство (5), поскольку

$$\mathrm{E}f(X_k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dF_k(t), \quad k = 1, 2.$$

2. Справедливость второго утверждения очевидна. В самом деле, $\Theta_x \in \mathcal{K}_1(\mathbb{R})$ для любого x. Соответствующие интегралы существуют, так как

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Theta_x(t)\, dF_k(t) = \bar{F}_k(x),$$

при этом неравенство (5) превращается в определение стохастического порядка (4).

3. Для проверки последнего утверждения достаточно рассмотреть одноточечные распределения Θ_{x_k}, $k = 1, 2$, с $x_1 \leq x_2$. Воспользовавшись тем, что $\Theta_{x_1} <_{st} \Theta_{x_2}$, а

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, d\Theta_{x_k}(t) = f(x_k),$$

получим $f \in \mathcal{K}_1(\mathbb{R})$. ■

Следствие 2 *Для неотрицательных случайных величин (рисков) X_k, $k = 1, 2$, таких, что $X_1 <_{st} X_2$ справедливы неравенства*

$$\mathrm{E}X_1^r \leq \mathrm{E}X_2^r, \quad 0 \leq r < \infty, \qquad \mathrm{E}X_1^r \geq \mathrm{E}X_2^r, \quad r < 0,$$

если соответствующие математические ожидания существуют.

Задача 12 Объяснить, почему теорему 7 можно переформулировать следующим образом

$$\mathcal{K}_1(\mathbb{R}) = \mathcal{R}_{st} = \mathcal{H}_{st}.$$

Лемма 2 *Порядок на основе ожидаемой полезности (с неубывающей функцией полезности) эквивалентен стохастическому порядку.*

Доказательство. Введем функцию $f(t) = -u(-t)$, тогда если $u \in \mathcal{K}_1(\mathbb{R})$, то и $f \in \mathcal{K}_1(\mathbb{R})$. Следовательно, из $X <_{st} Y$ вытекает $\mathrm{E}f(X) \leq \mathrm{E}f(Y)$ или же $-\mathrm{E}u(-X) \leq -\mathrm{E}u(-Y)$, что означает большую ожидаемую полезность, т.е. предпочтительность риска X.

Обратное утверждение получается совершенно аналогично, так как любой $f \in \mathcal{K}_1(\mathbb{R})$ соответствует функция полезности $u(t) = -f(-t)$, принадлежащая тому же классу неубывающих функций. ■

Итак, мы установили, что существуют следующие *эквивалентные определения* стохастического доминирования $X_1 <_{st} X_2$ или $(F_1 <_{st} X_2)$:

- для любого t либо $F_1(t) \geq F_2(t)$, либо $\bar{F}_1(t) \leq \bar{F}_2(t)$ или же иначе то же самое можно записать

$$\mathrm{P}(X_1 > t) \leq \mathrm{P}(X_2 > t).$$

Поскольку стохастический порядок порождается классом $\mathcal{F}_{st}$ функций распределения констант $\Theta_x(t)$, еще один способ записи выглядит следующим образом

$$\mathrm{E}\Theta_x(X_1) \leq \mathrm{E}\Theta_x(X_2).$$

- Для любой $f \in \mathcal{K}_1(\mathbb{R})$, т.е. монотонно неубывающей, для которой существуют соответствующие интегралы, справедливо неравенство

$$\int_{-\infty}^{-\infty} f(t)\, dF_1(t) \leq \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dF_2(t)$$

(В терминах случайных величин это записывается так: $\mathrm{E}f(X_1) \leq \mathrm{E}f(X_2)$.)

- Еще одно (эквивалентное стохастическому порядку) определение упорядочивания рисков, особенно интересное для страхования, может производиться на основе *ожидаемой полезности.* А именно, риск X предпочтительнее риска Y, если $\mathrm{E}u(-X) \geq \mathrm{E}u(-Y)$ для любой неубывающей функции полезности u.

2.4 Порядок стоп-лосс

2.4.1 Эквивалентные определения

Далее будет рассматриваться более слабый порядок по сравнению со стохастическим доминированием. Это так называемый *стоп-лосс порядок* (stop-loss), который будет обозначаться $<_{sl}$ и может быть определен различными эквивалентными способами. (Иногда его называют также стохастическим порядком второй степени — second degree stochastic order.)

Определение 10 Говорят, что $X_1 <_{sl} X_2$, точнее, X_1 предпочтительнее X_2 в смысле порядка стоп-лосс (первой степени), если $\mathrm{E}(X_1 - d)^+ \le \mathrm{E}(X_2 - d)^+$ для любого d.

Почему возникло такое название? Если X — суммарный убыток страховой компании за определенный срок (обычно за год), а d — приоритет (или уровень собственного удержания) договора перестрахования стоп-лосс, то выплата перестраховщика (в предположении, что ответственность перестраховщика неограничена) равна $(X - d)^+$, соответственно $\mathrm{E}(X - d)^+$ — чистая премия. В страховании d интерпретируется как франшиза.

Нетрудно понять, что выписанное выше условие задает в самом деле частичный порядок. Свойства транзитивности и рефлексивности очевидны. Что касается антисимметричности, путем интегрирования по частям нетрудно получить (для $k = 1, 2$)

$$\mathrm{E}(X_k - d)^+ = \int_d^\infty (x - d)\, dF_k(x) = \int_d^\infty (1 - F_k(x))\, dx, \qquad (6)$$

следовательно, при $X_1 <_{sl} X_2$ и $X_2 <_{sl} X_1$, сразу же получаем

$$\int_d^\infty \bar{F}_1(t)\, dt = \int_d^\infty \bar{F}_2(t)\, dt. \qquad (7)$$

Откуда в свою очередь выводится (с помощью дифференцирования), что $F_1 = F_2$. Напомним, что как и в случае стохастического порядка, упорядочивание случайных величин означает упорядочивание соответствующих функций распределения.

Стоп-лосс порядок говорит о том, что предпочтительнее распределения с более легкими хвостами.

Лемма 3 *Из* $X <_{st} Y$ *следует* $X <_{sl} Y$.

Доказательство вытекает из соотношений (4) и (6). ■

Лемма 4 *Утверждение* $X <_{sl} Y$ *эквивалентно тому, что* $\mathrm{E}\max(d, X) \leq \mathrm{E}\max(d, Y)$ *для любого* d.

Доказательство очевидным образом следует из равенства

$$\mathrm{E}\max(X_k, d) = d + \int_d^{\infty} (1 - F_k(t))\, dt. \blacksquare \tag{8}$$

Задача 13 Если $\mathrm{E}X = m$, то $m <_{sl} X$.

- **Порядок всех лиц, не склонных к риску**

Определение 11 Риск X считается *предпочтительнее* риска Y, если у него бóльшая ожидаемая полезность $\mathrm{E}u(-X) \geq \mathrm{E}u(-Y)$ для любой неубывающей вогнутой функции полезности.

Это записывается $X <_{ra} Y$. Сокращение ra получено как первые буквы слов risk averse (несклонный к риску).

- **Выпуклое возрастающее упорядочивание**

Рассмотрим подкласс $\mathcal{K}_2(\mathbb{R})$ класса $\mathcal{K}_1(\mathbb{R})$, состоящий из выпуклых неубывающих функций.

Определение 12 Риск X *предпочтительнее* риска Y, иначе $X <_{icx} Y$, если для любой $f \in \mathcal{K}_2(\mathbb{R})$ выполнено неравенство $\mathrm{E}f(X) \leq \mathrm{E}f(Y)$.

Лемма 5 *Определения* 11 *и* 12 *приводят к одному и тому же порядку.*

Доказательство дословно повторяет рассуждения леммы 2 с заменой класса $\mathcal{K}_1$ на $\mathcal{K}_2$. ■

- **Порядок, связанный с изменчивостью**

Предпочтительнее потери, не включающие элементов игры, благоприятной или в худшем случае справедливой, т.е. обладающие меньшей изменчивостью (variability).

Определение 13 Говорят, $X <_v Y$, если существует такая случайная величина Z, что $X + Z \stackrel{d}{=} Y$ и $\mathrm{E}(Z|X) \geq 0$ с вероятностью 1.

Задача 14 Верно ли, что $\mathrm{D}Y \geq \mathrm{D}X$, если $Y\ _v > X$?

Ограничимся пока определением 10 порядка $<_{sl}$ и докажем следующую лемму.

Лемма 6 *Пусть* $X_1 <_{sl} X_2$ *и* $\mathrm{E}X_1 = \mathrm{E}X_2$, *тогда* $-X_1 <_{sl} -X_2$.

Доказательство. Перепишем равенство

$$\mathrm{E}\min(X_k, d) + \mathrm{E}\max(X_k, d) = m + d, \tag{9}$$

справедливое при всех d и $\mathrm{E}X_k = m$, в виде

$$\mathrm{E}\max(-X_k, d) = \mathrm{E}\max(X_k, -d) + d - m. \tag{10}$$

Тогда необходимое утверждение вытекает из (10) и леммы 4. ■

Теперь нетрудно установить следующий результат.

Теорема 8 1. *Пусть* $F_1 <_{sl} F_2$ *и* $f \in \mathcal{K}_2(\mathbb{R})$, *тогда*

$$\mathrm{E}f(X_1) \leq \mathrm{E}f(X_2) \tag{11}$$

(при условии, что рассматриваемые математические ожидания существуют, а F_k *— функция распределения* X_k, $k = 1, 2$*).*

2. *Если* $\mathrm{E}X_1 = \mathrm{E}X_2$, *тогда утверждение пункта* 1 *справедливо для* любой *выпуклой функции* f.

3. *Если* (11) *выполнено для всех* $f \in \mathcal{K}_2(\mathbb{R})$, *для которых существуют математические ожидания, то* $F_1 <_{sl} F_2$.

4. *Если для некоторой функции* f *соотношение* (11) *справедливо для любых* $F_1 <_{sl} F_2$ *таких, что соответствующие средние существуют, то* $f \in \mathcal{K}_2(\mathbb{R})$.

Доказательство. 1. Пусть $F_1 <_{sl} F_2$, $f \in \mathcal{K}_2(\mathbb{R})$ и соответствующие интегралы существуют. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $K(\varepsilon) > -\infty$, что

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dF_k(t) - \int_{-\infty}^{\infty} \max(K(\varepsilon), f(t))\, dF_k(t) \right| < \varepsilon.$$

Значит, достаточно рассмотреть лишь те $f \in \mathcal{K}_2(\mathbb{R})$, для которых существует $\lim\limits_{t \to -\infty} f(t) = 0$. Такую функцию можно представить в виде

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(x)\,dx,$$

где g — монотонно неубывающая функция, равная нулю на $-\infty$. Преобразуем функцию f следующим образом

$$f(t) = \int_{-\infty}^{t} g(x)\,dx = \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{x} dg(u)\,dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{\infty} \Theta_u(x)\,dg(u)\,dx.$$

Меняя порядок интегрирования, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{t} \Theta_u(x)\,dx\,dg(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e_u(t)\,dg(u).$$

Теперь, при $k = 1, 2$,

$$\mathrm{E}f(X_k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dF_k(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e_u(t)\,dg(u)\,dF_k(t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e_u(t)\,dF_k(t)\,dg(u).$$

Но поскольку порядок $<_{sl}$ порождается классом $\mathcal{F}_{sl} = \{e_u(t)\}_{u \in \mathbb{R}}$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} e_u(t)\,dF_1(t) \le \int_{-\infty}^{\infty} e_u(t)\,dF_2(t),$$

т.е. соотношение (11) справедливо.

2. Пусть $\mathrm{E}X_1 = \mathrm{E}X_2$, а f выпуклая, но необязательно монотонно неубывающая. Ограничимся функциями, у которых точная нижняя грань равна 0 и достигается в некоторой точке t_0 (возможно, $t_0 = \pm\infty$). Представим f в виде $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, где $f_1(t) = 0$ при $t < t_0$ и $f_1(t) = f(t)$ при $t \ge t_0$, а $f_2(t) = f(t)$ при $t < t_0$ и $f_2(t) = 0$ при $t \ge t_0$.

Ясно, что $f_1(t)$ — выпуклая монотонно неубывающая, а $f_2(t)$ — выпуклая монотонно невозрастающая функция (если $t_0 = +\infty$, то $f_1(t) \equiv 0$, если $t_0 = -\infty$, то $f_2(t) \equiv 0$).

Согласно предыдущему пункту

$$\mathrm{E}f_1(X_1) \le \mathrm{E}f_1(X_2). \tag{12}$$

Для функции f_2 аналогичное неравенство получим с помощью леммы 6. Обозначим $\tilde{f}_2(t) = f_2(-t)$, тогда $\mathrm{E}f_2(X_k) = \mathrm{E}\tilde{f}_2(-X_k)$.

Поскольку функция $\tilde{f}_2(t)$ — выпуклая неубывающая, а $-X_1 <_{sl} -X_2$, по доказанному

$$\mathrm{E}f_2(X_1) \le \mathrm{E}f_2(X_2). \tag{13}$$

Суммируя (12) и (13), получим нужное соотношение (11) для функции f.

3. Этот пункт очевиден, так как $e_x(t) = (t-x)^+$ выпуклая неубывающая функция. В самом деле, поскольку $\mathrm{E}f(X_1) \le \mathrm{E}f(X_2)$ для любой $f \in \mathcal{K}_2(\mathbb{R})$, то это же верно и для e_x, т.е. выполнено определение стоп-лосс порядка.

4. Последнее утверждение доказывается использованием распределений, сосредоточенных в одной и двух точках. В частности, для доказательства выпуклости достаточно взять $F_1 = \Theta_x$, а $F_2 = \lambda\Theta_{x_1} + (1-\lambda)\Theta_{x_2}$, где $x = \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, $(0 < \lambda < 1)$. ■

Замечание 3 Утверждение этой теоремы является обобщением неравенства Йенсена, согласно которому для любой выпуклой функции f верно $f(\mathrm{E}X) \le \mathrm{E}f(X)$. Последнее неравенство сразу же вытекает из того, что $\mathrm{E}X <_{sl} X$.

Следствие 3 *Для неотрицательных случайных величин X_1 и X_2, таких, что $X_1 <_{sl} X_2$, имеем $\mathrm{E}X_1^r \le \mathrm{E}X_2^r$ при $r \ge 1$, если рассматриваемые моменты существуют.*

Теорема 9 *Все четыре определения* 10–13 *порядка эквивалентны.*

Доказательство. Эквивалентность $<_{sl}$ и $<_{icx}$ доказана в теореме 8. Что касается эквивалентности $<_{ra}$ и $<_{icx}$, то она установлена в лемме 5.

Также легко проверить, что из $<_v$ следует $<_{sl}$. Пусть $X <_v Y$, т.е. существует такая случайная величина Z, что $\mathrm{E}(Z|X) \geq 0$ п.н. и $Y \stackrel{d}{=} X + Z$. Применим неравенство Йенсена для условных математических ожиданий (при условии X) к выпуклой неубывающей функции $f(t) = [t - (d - x)]^+$. Тогда

$$\mathrm{E}(Y - d)^+ = \mathrm{E}(X + Z - d)^+ = \mathrm{E}\{\mathrm{E}[(X + Z - d)^+ | X]\} \geq$$

$$\geq \mathrm{E}(X + \mathrm{E}(Z|X) - d)^+ \geq \mathrm{E}(X - d)^+,$$

т.е. оказывается в самом деле $X <_{sl} Y$.

Относительно обратного утверждения, необходимо заметить, что доказав его для дискретных случайных величин, можно предельным переходом установить тот же факт и для непрерывных распределений. В свою очередь, для дискретных надо начать с двухточечных распределений, а потом брать их смеси. ■

2.4.2 Достаточные условия

Итак, пусть имеются два риска X и Y. Тогда X меньше Y в смысле стоп-лосс ($X <_{sl} Y$), если $\mathrm{E}(X - d)^+ \leq \mathrm{E}(Y - d)^+$ для любого $d \in \mathbb{R}^+$. Иными словами, стоп-лосс премии упорядочены соответствующим образом для любого размера (вычитаемой) франшизы d. В теории вероятностей стоп-лосс порядок обычно называют *возрастающим выпуклым* порядком, поскольку $X <_{sl} Y$ эквивалентно тому, что $\mathrm{E}f(X) \leq \mathrm{E}f(Y)$ для любых неубывающих выпуклых функций f, для которых соответствующие математические ожидания существуют.

Таким образом, ущерб X "меньше чем Y, поскольку все лица с неубывающей функцией вогнутой функцией полезности, т.е. стремящиеся к прибыли, но несклонные к риску, предпочтут X, а не Y. Следовательно, порядок $<_{sl}$ отражает предпочтение всех "рациональных"перестраховщиков.

Обычно стоп-лосс порядок усиливается с помощью дополнительного требования о равенстве средних сравниваемых рисков X и Y ($\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y$). Более того, в этом случае говорят, что X меньше Y в смысле *выпуклого порядка* ($X <_{cx} Y$ или иногда в актуарной литературе это обозначается $X <_{sl,=} Y$). Термин "выпуклый"используется, поскольку $X <_{cx} Y$ эквивалентно тому, что $\mathrm{E}f(X) \leq \mathrm{E}f(Y)$ для всех выпуклых функций f, для которых указанные математические ожидания существуют, т.е. данный порядок отражает общее предпочтение всех лиц, не склонных к риску.

Лемма 7 *Если X — это случайная величина, заданная на $(\Omega, \mathcal{A})$, с $\mathrm{E}|X| < \infty$, и $\mathcal{A}_0$—σ-подалгебра ($\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$), то $\mathrm{E}[X|\mathcal{A}_0] <_{cx} X$.*

Доказательство. Утверждение следует из неравенства Йенсена для условных математических ожиданий, утверждающего, что для любой выпуклой функции f, для которой соответствующие математические ожидания существуют, верно

$$\mathrm{E}f(X) = \mathrm{E}(\mathrm{E}[f(X)|\mathcal{A}_0]) \geq \mathrm{E}f(\mathrm{E}[X|\mathcal{A}_0]). \blacksquare$$

Отсюда нетрудно получить следующую теорему, полезную для перестрахования.

Теорема 10 *Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — n независимых одинаково распределенных рисков и пусть Φ—измеримое отображение $\Phi : \mathbb{R}_n^+ \to \mathbb{R}$. Тогда существует симметрическая функция $\Phi^* : \mathbb{R}_n^+ \to \mathbb{R}$ такая, что*

$$\Phi^*(X_1, X_2, \ldots, X_n) <_{cx} \Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Функция Φ^* имеет вид

$$\Phi^*(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} \sum_{1 \leq i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_n \leq n} \Phi(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_n}).$$

Доказательство. Обозначим через $\sigma(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)})$ σ-подалгебру, порожденную вариационным рядом $(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)})$, связанным с рисками $X_1, X_2, \ldots, X_n$. В силу предыдущей леммы

$$\mathrm{E}[\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)|\sigma(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)})]$$
$$<_{cx} \Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n).$$

Тем самым доказательство закончено, поскольку

$$\mathrm{E}[\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)|\sigma(X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)})] =$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{1 \le i_1 \ne i_2 \ne \ldots \ne i_n \le n} \Phi(X_{(i_1)}, X_{(i_2)}, \ldots, X_{(i_n)})$$

$$= \frac{1}{n!} \sum_{1 \le i_1 \ne i_2 \ne \ldots \ne i_n \le n} \Phi(X_{i_1}, X_{i_2}, \ldots, X_{i_n}) =$$

$$= \Phi^*(X_1, X_2, \ldots, X_n). \blacksquare$$

Заметим, что для справедливости этой теоремы достаточно требовать вместо независимости рисков X_1, $X_2, \ldots, X_n$ их перестановочность. В перестраховании особенно часто используются функции $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вида $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ и $\sum_{i=1}^n \phi_i(x_i)$.

Критерий пересечений Карлина-Новикова (1963г.) — достаточное условие для предпочтительности в смысле порядка $<_{cx}$.

Теорема 11 *Пусть* $\mathrm{E}X_k = m$, $k = 1, 2$, *и существует такой интервал* $[x_1, x_2]$, $x_1 \le x_2$, *где эти функции распределения совпадают, в то время как* $F_1(x) \le F_2(x)$ *при* $x < x_1$ *и* $F_1(x) \ge F_2(x)$ *при* $x > x_2$, *то* $F_1 <_{sl} F_2$.

Доказательство. В силу (8) при $x \ge x_1$ имеем $\mathrm{E}\max(X_1, x) \le \mathrm{E}\max(X_2, x)$. Далее, при $x \le x_2$

$$\mathrm{E}\min(X_1, x) \ge \mathrm{E}\min(X_2, x).$$

Поэтому, используя (9), получим, что при всех x

$$\mathrm{E}\max(X_1, x) \le \mathrm{E}\max(X_2, x),$$

что в силу леммы 4 и означает $F_1 <_{sl} F_2$. $\blacksquare$

Следующие следствия из критерия пересечений предлагается получить в качестве задач.

Задача 15 Пусть F_k — это функция распределения $\mathcal{N}(\mu_k, \sigma_k^2)$, $k = 1, 2$, и $\mu_1 \le \mu_2$, $\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$, тогда $F_1 <_{sl} F_2$.

Задача 16 Пусть математические ожидания у F_1 и F_2 одинаковы и $\bar{F}_k(t) = \exp\{-\int_0^t \lambda_k(x)\, dx\}$, $0 \le t < \infty$, $k = 1, 2$. Если существует точка t_0 такая, что $\lambda_1(t) \le \lambda_2(t)$ при $t \le t_0$ и $\lambda_1(t) \ge \lambda_2(t)$ при $t \ge t_0$, то $F_1 <_{sl} F_2$. (Функцию $\lambda_k(t)$ часто называют в технических приложениях интенсивностью отказа).

Задача 17 Для распределений Вейбулла $F_k(t) = 1 - \exp\{-\lambda_k t^{\alpha_k}\}$, $0 \le t < \infty$, $k = 1, 2$, если математические ожидания равны, то из $\alpha_1 \ge \alpha_2$ следует $F_1 <_{sl} F_2$.

Задача 18 Функция $\psi(x)$ называется *звездообразной*, если $\psi(cx) \le c\psi(x)$ для всех $0 \le c \le 1$ и $0 \le x < \infty$. Пусть $\psi(x) = F_1^{-1}(F_2(x))$ звездообразна, какой из рисков предпочтительнее, с функцией распределения F_1 или F_2?

Задача 19 Если функция выпукла, будет ли она звездообразной?

Целый ряд теорем о "пересечении"можно получить, используя свойства преобразования стоп-лосс, при этом следующий результат не требует предположения о равенстве средних.

Теорема 12 *Пусть риски* X *и* Y *удовлетворяют условиям:* $\mathrm{E}X \le \mathrm{E}Y$ *и существует* $c \ge 0$ *такое, что* $F_X(t) \le F_Y(t)$ *при* $t < c$ *и* $F_X(t) \ge F_Y(y)$ *при* $t \ge c$*, тогда* $X <_{sl} Y$.

Доказательство. Введем стоп-лосс преобразование

$$m_X(d) = \mathrm{E}(X-d)^+ = \int_d^\infty (1 - F_X(u))\,du$$

и положим $\Delta(d) = m_Y(d) - m_X(d) = \int_d^\infty (F_X(u) - F_Y(u))\,du$.

Пусть $d_1 < d_2 < c$, тогда $\Delta(d_1) - \Delta(d_2) = \int_{d_1}^{d_2} (F_X(u) - F_Y(u))\,du \le 0$, т.е. $\Delta(d)$ возрастает при $d < c$. Наоборот, при $d \ge c$ функция $\Delta(d)$ убывает. Так как $m_X(0) = \mathrm{E}X$, то $\Delta(0) \ge 0$, а $\Delta(\infty) = 0$. Значит, $m_X(d) \le m_Y(d)$ при любом d, т.е. $X <_{sl} Y$. ∎

Теорема 13 *Если* $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y$ *и существуют три непересекающиеся интервала* I_0, I_1, I_2*, такие, что* $0 \in I_0$*,* I_2 *бесконечен вправо и* $[0, \infty) = I_0 \cup I_1 \cup I_2$*, при этом* $dF_X(x) \le dF_Y(x)$ *при* $x \in I_0 \cup I_2$*, а при* $x \in I_1$*, наоборот,* $dF_X(x) \ge dF_Y(x)$*, то* $X <_{sl} Y$.

Доказательство. Пусть $\delta(x) = F_X(x) - F_Y(x)$, тогда $\delta(0) = \delta(\infty) = 0$. Далее, $\delta(x) = \int_0^x dF_X(t) - \int_0^x dF_Y(t) \le 0$ при $x \in I_0$ и убывает, аналогично, $\delta(x) = (1 - F_Y(x)) - (1 - F_X(x)) = \int_x^\infty dF_Y(u) - \int_x^\infty dF_X(u) \ge 0$ и убывает при $x \in I_2$, в то время как при $x \in I_1$ функция $\delta(x)$ возрастает. Таким образом, существует такое $c \geq 0$, что сначала $\delta(x) \leq 0$ при $x < c$, затем $\delta(x) \geq 0$ при $x \geq c$. Иначе говоря, выполнены условия предыдущей теоремы, обеспечивающие $X <_{sl} Y$. ■

Задача 20 Пусть риск X равномерно распределен на $[0,2]$, а Y имеет показательное распределение с параметром 1, тогда $X <_{sl} Y$.

Задача 21 Проверить справедливость следующего утверждения. В классе рисков Y таких, что $\mathrm{E}Y = \mu$ и $\mathrm{P}(0 \leq Y \leq b) = 1$ существуют минимальный и максимальный риски в смысле порядка стоп-лосс ($X <_{sl} Y <_{sl} Z$ для любого Y), при этом $\mathrm{P}(X = \mu) = 1$, а риск Z сосредоточен в двух точках, а именно, $\mathrm{P}(Z = b) = \mu/b = 1 - \mathrm{P}(Z = 0)$.

Лемма 8 *Если* $X <_{sl} Y$ *и* $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y$, $\mathrm{D}X = \mathrm{D}Y$, *то* $X \stackrel{d}{=} Y$.

Доказательство. Из условий леммы следует, что $\mathrm{E}X^2 = \mathrm{E}Y^2$. Как известно, $\mathrm{E}X^2 = \int_0^\infty x^2\,dF_X(x) = -\int_0^\infty x^2\,d(1 - F_X(x)) = 2\int_0^\infty x(1-F_X(x))\,dx = -2\int_0^\infty x\,dm_X(x) = 2\int_0^\infty m_X(x)\,dx$. Значит, $\int_0^\infty (m_Y(x) - m_X(x))\,dx = 0$, а поскольку $X <_{sl} Y$, подинтегральная функция неотрицательна. Таким образом, $m_Y(x) = m_X(x)$, а по функции $m(x)$ однозначно восстанавливается функция распределения. ■

В заключение заметим, что предположение о равенстве средних у двух рисков не является существенным ограничением. В самом деле, согласно теореме 9 порядки $<_{sl}$ и $<_v$ эквивалентны. А если $X <_v Y$ и $\mathrm{E}X < \mathrm{E}Y$, то существует риск Y' такой, что $\mathrm{E}Y' = \mathrm{E}X$ и $X <_v Y' <_1 Y_1 \stackrel{d}{=} Y$, как показывает следующая теорема.

Теорема 14 *Пусть* $X <_v Y$, *тогда существуют случайные величины* Z_1 *и* Z_2 *такие, что* $Y \stackrel{d}{=} X + Z_1 + Z_2$, $\mathrm{E}(Z_1|X) = 0$ *и* $\mathrm{P}(Z_2 \geq 0) = 1$.

Доказательство. В силу определения 13, если $X <_v Y$, тогда существует случайная величина Z такая, что $Y \stackrel{d}{=} X+Z$ и $\mathrm{E}(Z|X) \geq$

0. Обозначим $Y_1 = X + Z$, тогда $Y_1 \stackrel{d}{=} Y$ и $\mathrm{E}(Y_1|X) \geq X$. Поскольку условные математические ожидания определены с точностью до множества меры нуль, можно считать, что выбран тот вариант, для которого неравенство справедливо всюду, т.е. $\mathrm{E}(Y_1|X = x) \geq x$. Введем новую случайную величину $Y' = Y_1 I$, где случайная величина I принимает два значения 0 и 1, причем

$$\mathrm{P}(I = 1|X = x, Y_1 = y) = x/\mathrm{E}(Y_1|X = x) =$$

$$= 1 - \mathrm{P}(I = 0|X = x, Y_1 = y).$$

Очевидно, что $Y' \leq Y_1$, тогда $Z_2 = Y_1 - Y' \geq 0$, а случайная величина $Z_1 = Y' - X$ такова, что $\mathrm{E}(Z_1|X) \geq 0$. Действительно,

$$\mathrm{E}(Y'|X = x, Y_1 = y) = xy/\mathrm{E}(Y_1|X = x),$$

а это значит, что $\mathrm{E}(Y'|X, Y_1) = XY_1/\mathrm{E}(Y_1|X)$, откуда следует необходимое соотношение

$$\mathrm{E}(Y'|X) = \frac{X\mathrm{E}(Y_1|X)}{\mathrm{E}(Y_1|X)} = X. \blacksquare$$

2.4.3 Свойства инвариантности стоп-лосс порядка

1) Прежде всего установим, что слабая сходимость сохраняет стоп-лосс порядок.

Теорема 15 *Пусть последовательность* $F_{k,n}$, $k = 1, 2$, *слабо сходится к* F_k *при* $n \to \infty$, *кроме того,*

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \bar{F}_{k,n}(t)\,dt = \int_0^\infty \bar{F}_k(t)\,dt < \infty, \qquad k = 1, 2.$$

Тогда, если $F_{1,n} <_{sl} F_{2,n}$ *при всех* n, *то* $F_1 <_{sl} F_2$.

Доказательство. Так как в предположениях теоремы при всех x выполнено

$$\lim_{n\to\infty} \int_x^\infty \bar{F}_{k,n}(t)\,dt = \int_x^\infty \bar{F}_k(t)\,dt,$$

то

$$\int_x^\infty \bar{F}_1(t)\,dt \leq \int_x^\infty \bar{F}_2(t)\,dt,$$

т.е. $F_1 <_{sl} F_2$. ■

2) Далее рассмотрим свертки.

Лемма 9 *Порядок стоп-лосс сохраняется при суммировании независимых случайных величин.*

Доказательство. Порядок $<_{sl}$ порождается классом $\mathcal{F}_{sl} = \{e_x(t)\}_{x\in\mathbb{R}}$, здесь $e_x(t) = \int_{-\infty}^{t} \Theta_x(u)\,du = (t-x)^+$. Поскольку это семейство функций инвариантно относительно сдвига, то согласно теореме 2 отношение $<_{sl}$ обладает свойством (3°), т.е. сохраняется при свертке. Таким образом, если $X_i <_{sl} Y_i$, $i = \overline{1,n}$, а $X_1, \ldots, X_n$ независимы и $Y_1, \ldots, Y_n$ независимы, то $\sum_{i=1}^{n} X_i <_{sl} \sum_{i=1}^{n} Y_i$. ■

3) Покажем, что смеси распределений (или случайных величин) также сохраняют порядок стоп-лосс.

В самом деле, пусть функции распределения соответственно X_i и Y_i, $i \geq 1$, обозначены F_i и G_i, а неотрицательные числа p_i, $i \geq 1$, в сумме равны 1.

Лемма 10 *Если $F_i <_{sl} G_i$, $i \geq 1$, то $\sum_i p_i F_i <_{sl} \sum_i p_i G_i$.*

Доказательство. Обозначим $X = \sum_i I_i X_i$, где $\mathrm{P}(I_i = 1) = p_i = 1 - \mathrm{P}(I_i = 0)$, $\sum_i I_i = 1$ и случайные величины $\{I_i\}$ не зависят от $\{X_i\}$. Тогда F, функция распределения X, равна смеси с весами p_i распределений F_i. Аналогично вводится случайная величина Y, распределение которой является смесью G_i. Следовательно,

$$\mathrm{E}(X-d)^+ = \int_d^{\infty} (x-d)\,dF(x) = \sum_i p_i \int_d^{\infty} (x-d)\,dF_i(x) =$$

$$= \sum_i p_i \mathrm{E}(X_i - d)^+ \leq \sum_i p_i \mathrm{E}(Y_i - d)^+ = \mathrm{E}(Y-d)^+.$$

Таким образом, $X <_{sl} Y$. ■

4) Суммирование случайного числа случайных слагаемых.

Лемма 11 *Пусть $\{X_i\}$ и $\{Y_i\}$, $i \geq 1$, две последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин, причем $X_i <_{sl} Y_i$, а целочисленная случайная величина N от них также не зависит. Тогда $\sum_{i=1}^{N} X_i <_{sl} \sum_{i=1}^{N} Y_i$.*

Доказательство. Очевидно, что в силу формулы полной вероятности и условий независимости

$$P(\sum_{i=1}^{N} X_i \le x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(\sum_{i=0}^{n} X_i \le x | N = n) P(N = n)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} F^{n*}(x) p_n, \tag{14}$$

здесь $p_n = P(N = n)$ и F—функция распределения X_i. Распределение $\sum_{i=1}^{N} Y_i$ аналогичным образом выражается через функцию распределения G случайных величин Y_i. В силу лемм 9 и 10 требуемый результат получен. ■

Теорема 16 *Пусть риски* X_i, $i \ge 1$, *независимы и одинаково распределены, а целочисленные случайные величины* N_j, $j = 1, 2$, *от них не зависят и* $N_1 <_{sl} N_2$, *тогда* $S_{N_1} <_{sl} S_{N_2}$, *где* $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

Доказательство. Фиксируем $d \ge 0$ и рассмотрим функцию $f(n) = E(S_n - d)^+$. Если проверить, что (при любом d) справедливо $Ef(N_1) \le Ef(N_2)$, то утверждение теоремы будет доказано. Значит, достаточно установить, что $f(n)$ – это неубывающая выпуклая функция n (см. теорему 8).

Так как $X_i \ge 0$, то $S_{n-1} \le S_n$ и, значит, $f(n-1) \le f(n)$, т.е. функция неубывающая.

Для доказательства выпуклости проверим, что $f(n) - f(n-1) \ge f(n-1) - f(n-2)$. Пусть $x, y, z \ge 0$, тогда $(x+y+z-d)^+ + (x-d)^+ \ge (x+y-d)^+ + (x+z-d)^+$. Это легко проверяется, если расписать, чему равны левая и правая части приведенного неравенства при $0 < d < x$, $x < d < x+y$, $x+y < d < x+z$ и $x+z < d < x+y+z$, так как y и z входят в правую и левую части неравенства симметрично.

Теперь возьмем $x = S_{n-2}$, $y = X_{n-1}$, $z = X_n$. Поскольку $S_{n-2} + X_{n-1} + X_n = S_n$, $S_{n-2} + X_{n-1} = S_{n-1}$, а $S_{n-2} + X_n \stackrel{d}{=} S_{n-1}$, из предыдущего неравенства мы получим $f(n) + f(n-2) \ge 2f(n-1)$, а тем самым выпуклость функции $f(\cdot)$. ■

Следствие 4 *Пусть* $\{X_i\}$ *и* $\{Y_i\}$ *две последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин, а целочисленные случайные величины* N_1 *и* N_2 *не зависят соответственно от* $\{X_i\}$ *и* $\{Y_i\}$, *кроме того* $N_1 <_{sl} N_2$, *тогда* $\sum_{i=1}^{N_1} X_i <_{sl} \sum_{i=1}^{N_2} Y_i$.

Доказательство очевидным образом следует из цепочки неравенств

$$\sum_{i=1}^{N_1} X_i <_{sl} \sum_{i=1}^{N_1} Y_i <_{sl} \sum_{i=1}^{N_2} Y_i,$$

справедливых в силу леммы 11 и теоремы 16. ■

5) Составные (сложные) пуассоновские распределения и распределения Кокса.

Как известно, *составным* пуассоновским распределением называется распределение суммы S_N пуассоновского числа N независимых одинаково распределенных слагаемых X_i, $i \geq 1$, не зависящих от N. Очевидно, что функция распределения S_N получается подстановкой $p_n = e^{-\lambda}\lambda^n/n!$ в формулу (14), где λ — параметр пуассоновского распределения.

Предположим, что существует (структурная) случайная величина Λ такая, что при условии $\Lambda = \lambda$ распределение N является пуассоновским с параметром λ, тогда N имеет распределение Кокса (или распределение Пуассона, взвешенное по параметру). Если $W(\lambda)$ – это функция распределения Λ, то

$$\mathrm{P}(N = n) = \int_0^\infty e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\,dW(\lambda). \tag{15}$$

Напомним, что производящая функция моментов пуассоновского распределения равна

$$g_N(t) = \mathrm{E}e^{tN} = e^{\lambda(e^t-1)}, \tag{16}$$

откуда легко получить, что $\mathrm{E}N = \mathrm{D}N = \lambda$. Полезны также следующие утверждения.

Лемма 12 *Сумма* n *независимых пуассоновских случайных величин с параметрами* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ *имеет распределение Пуассона с параметром* $\sum_{i=1}^n \lambda_i$.

Доказательство очевидным образом следует из соотношения (16). ■

Теорема 17 *Пусть число наступления событий N имеет распределение Пуассона с параметром λ. События классифицируются на m групп, причем каждое из них, независимо от остальных, принадлежит i-й группе с вероятностью p_i. Тогда случайные величины N_i, $i = \overline{1,m}$, независимые пуассоновские с параметрами $p_i\lambda$.*

Доказательство нетрудно получить, используя формулу полной вероятности. В самом деле,

$$\mathrm{P}(N_i = n_i) = \sum_{n=n_i}^{\infty} \mathrm{P}(N_i = n_i / N = n)\mathrm{P}(N = n) =$$

$$= \sum_{n=n_i}^{\infty} C_n^{n_i} p_i^{n_i} (1-p_i)^{n-n_i} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} = \frac{(p_i\lambda)^{n_i}}{n_i!} e^{-p_i\lambda},$$

в то время как

$$\mathrm{P}(N_1 = n_1, \ldots, N_m = n_m) =$$

$$= \mathrm{P}(N_1 = n_1, \ldots, N_m = n_m / N = \sum_{i=1}^{m} n_i)\mathrm{P}(N = \sum_{i=1}^{m} n_i) =$$

$$= \frac{(\sum_{i=1}^{m} n_i)!}{n_1! \ldots n_m!} p_1^{n_1} \ldots p_m^{n_m} \frac{\lambda^{\sum_{i=1}^{m} n_i}}{(\sum_{i=1}^{m} n_i)!} e^{-\lambda} =$$

$$= \prod_{i=1}^{m} \frac{(p_i\lambda)^{n_i}}{n_i!} e^{-p_i\lambda}.$$

Тем самым доказана независимость и пуассоновость N_i, $i = \overline{1,m}$. ■

Докажем теперь, что стоп-лосс порядок сохраняется также при суммировании случайного числа (имеющего распределение Кокса) случайных слагаемых.

Теорема 18 *Пусть $Z_j = \sum_{i=1}^{N_j} X_i$, где X_i, $i \geq 1$, независимые одинаково распределенные случайные величины и N_j, $j = 1, 2$, имеют структурные функции Λ_j такие, что $\Lambda_1 <_{sl} \Lambda_2$, тогда $Z_1 <_{sl} Z_2$.*

Доказательство. Согласно теореме 16 достаточно проверить, что $N_1 <_{sl} N_2$. Для этого сначала подсчитаем $\mathrm{E}(N_j - d)^+$ при $k \le d < k+1$.

$$\mathrm{E}(N_j - d)^+ = \sum_{n=k+1}^{\infty} (n - k - d + k)\mathrm{P}(N_1 = n) =$$

$$= \mathrm{E}(N_1 - k)^+ - (d-k)\mathrm{P}(N_j \ge k+1),$$

т.е. как функция d это математическое ожидание убывает линейно на указанном промежутке. Поэтому далее мы сравниваем лишь $\mathrm{E}(N_j - k)^+$, $j = 1, 2$, $k \ge 0$. Используя соотношение (15) и вид гамма-распределения, получим

$$\mathrm{E}(N_j - k)^+ = \sum_{n=k+1}^{\infty} (n-k)\mathrm{P}(N_j = n) =$$

$$= \int_0^\infty \sum_{n=k+1}^{\infty} (n-k)\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}\, dW_j(\lambda) =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\lambda (\lambda - u)\frac{u^{k-1}}{(k-1)!} e^{-u}\, du\, dW_j(\lambda) =$$

$$= \int_0^\infty \frac{u^{k-1}}{(k-1)!} e^{-u} \left[\int_u^\infty (\lambda - u)\, dW_j(\lambda)\right] du.$$

Поскольку внутренний интеграл равен $\mathrm{E}(\Lambda_j - u)^+$, то утверждение $N_1 <_{sl} N_2$ следует из условия $\Lambda_1 <_{sl} \Lambda_2$. ■

Следствие 5 *Отрицательно биномиальное распределение рискованнее, чем пуассоновское* (*с тем же самым математическим ожиданием*).

Доказательство. Воспользуемся предыдущей теоремой.

Пусть N_1 имеет пуассоновское распределение с параметром λ. Очевидно, что это усреднение по структурной случайной величине Λ_1, равной λ с вероятностью 1. Покажем, что отрицательно биномиальное распределение получается усреднением по случайной величине Λ_2, имеющей гамма-распределение.

Отрицательно биномиальное распределение $NB(\alpha, q)$, зависит от двух параметров а именно, для $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\mathrm{P}(N_2 = k) = C^k_{k+\alpha-1} q^k (1+q)^{-(\alpha+k)} \tag{17}$$

При $\alpha = 1$ получаем геометрическое распределение ($\tilde{q}^k \tilde{p}$ с $\tilde{p} = (1+q)^{-1}$) — распределение времени ожидания первого успеха с вероятностью успеха $\tilde{p}$. При $\alpha = r$ мы имеем число неудач до r-го успеха, иначе говоря, распределение суммы r независимых геометрически распределенных случайных величин.

Пусть Λ_2 имеет плотность распределения

$$p_{\alpha,q}(\lambda) = \frac{\lambda^{\alpha-1}}{q^\alpha \Gamma(\alpha)} e^{-\lambda/q},$$

тогда

$$\mathrm{P}(N_2 = k) = \int_0^\infty \frac{\lambda^{k+\alpha-1}}{k!\Gamma(\alpha) q^\alpha} e^{-\lambda(1+1/q)}\, d\lambda =$$
$$= \frac{\Gamma(\alpha+k)}{k!\Gamma(\alpha)} \frac{q^k}{(1+q)^{\alpha+k}},$$

что очевидным образом совпадает с (17).

Далее, $\mathrm{E}N_2 = \alpha q$, $\mathrm{D}N_2 = \alpha q(1+q)$. Если $\alpha q = \lambda$, то $N_1 <_{sl} N_2$ согласно теореме 18. ■

Задача 22 Подсчитать производящую функцию моментов отрицательно биномиального распределения.

Теорема 19 *Биномиальное распределение менее рискованное, чем пуассоновское (с тем же самым средним).*

Доказательство. Пусть N_1 — это пуассоновская случайная величина с параметром λ. Положим $S_n = I_{A_1} + \ldots + I_{A_n}$, где I_{A_j}—независимые бернуллиевские случайные величины, $\mathrm{P}(I_{A_j} = 1) = q_j = 1 - \mathrm{P}(I_{A_j} = 0)$. Иначе говоря, S_n – это число успехов в n независимых испытаниях с вероятностью успеха q_j в j-м испытании. Обозначим $\bar{q} = n^{-1} \sum_{i=1}^n q_i$ и пусть случайная величина B_n будет числом успехов в n независимых испытаниях с вероятностью успеха $\bar{q}$ в каждом испытании. Очевидно, $\mathrm{E}B_n = n\bar{q} = \sum_{i=1}^n q_i = \mathrm{E}S_n$.

Докажем по индукции, что $S_n <_{sl} B_n$. При $n = 1$ утверждение верно, так как $S_1 \stackrel{d}{=} B_1$. Если все q_i равны, то они совпадают с $\bar{q}$, а $S_n \stackrel{d}{=} B_n$. Если не все q_i одинаковы, то существуют по крайней мере две вероятности, которые между собой различны. Предположим для определенности, что $q_1 < \bar{q} < q_2$ и что $S_{n-1} <_{sl} B_{n-1}$.

Рассмотрим случайные величины I_{C_1} и I_{C_2} независимые между собой и не зависящие от введенных ранее случайных величин, далее $\mathrm{P}(I_{C_1} = 1) = \bar{q} = 1 - \mathrm{P}(I_{C_1} = 0)$, а $\mathrm{P}(I_{C_2} = 1) = q_1 + q_2 - \bar{q} = 1 - \mathrm{P}(I_{C_2} = 0)$. Нетрудно проверить, используя критерий пересечений (теорема 13), что $I_{A_1} + I_{A_2} <_{sl} I_{C_1} + I_{C_2}$. Значит, $S_n = I_{A_1} + \ldots + I_{A_n} <_{sl} I_{C_1} + I_{C_2} + I_{A_3} + \ldots + I_{A_n}$ (в силу сохранения порядка стоп-лосс при свертке). Но $q_1 + q_2 - \bar{q} + q_3 + \ldots + q_n = n\bar{q} - \bar{q} = (n-1)\bar{q}$, следовательно, по предположению индукции $I_{C_2} + I_{A_3} + \ldots + I_{A_n} <_{sl} B_{n-1}$. В свою очередь, $I_{C_1} + B_{n-1} \stackrel{d}{=} B_n$, что заканчивает индукцию.

Распределение B_n (биномиальное $Bi(n, \bar{q})$) можно рассмотреть как S_{n+1} с $q_i = \bar{q}$, $i = \overline{1, n}$, и $q_{n+1} = 0$. По доказанному оно менее рискованное, чем $Bi(n+1, \sum_{i=1}^{n+1} q_i/(n+1)) = Bi(n + 1, n\bar{q}/(n+1))$. Если обозначить $n\bar{q} = \lambda$ и воспользоваться теоремой 15 и теоремой Пуассона о сходимости (при $n \to \infty$) биномиального распределения $Bi(n, \lambda/n)$ к пуассоновскому с параметром λ, мы получим требуемый результат. ■

2.5 Порядок Лоренца

2.5.1 Эквивалентные определения

Этот порядок задается путем поточечного сравнения так называемых кривых Лоренца, используемых в экономике для сравнения доходов.

Подробно о свойствах этого порядка и его связи с мажоризацией можно прочитать в [6]. Заметим, что порядок Лоренца—это k-порядок, введенный в [21]; он также может рассматриваться как порядок, связанный с удельным ущербом (см., напр., [24]).

Пусть $\mathcal{L}$ — это множество неотрицательных случайных величин, у которых математические ожидания существуют и положительны. Обозначим через F_X функцию распределения случайной величины X, а через F_X^{-1} обратную функцию, определяемую соотношением

$$F_X^{-1}(t) = \sup\{x : F_X(x) \leq t\}.$$

Кривая Лоренца L_X, связанная со случайной величиной X, имеет вид

$$L_X(u) = \int_0^u F_X^{-1}(t)\,dt \left(\int_0^1 F_X^{-1}(t)\,dt\right)^{-1}, \quad u \in [0,1]. \qquad (18)$$

Нетрудно проверить, что $\int_0^1 F_X^{-1}(t)\,dt = \mathrm{E}X$. Кривая Лоренца — это непрерывная функция на отрезке $[0,1]$, она не убывает, $L_X(0) = 0$, $L_X(1) = 1$. Более того, она почти всюду дифференцируема и выпукла, так как функция F_X^{-1} неубывающая. Таким образом, любая кривая Лоренца имеет форму лука, тетива которого — это диагональ единичного квадрата, а сам лук лежит под ней.

Задача 23 Нарисовать кривую Лоренца для распределения Парето с $F(x) = 1 - (x/\sigma)^{-\alpha}$, $x \geq \sigma > 0$.

Если X моделирует размер дохода лиц из некоторой группы, $L_X(u)$, $u \in [0,1]$, представляет собой долю совокупного дохода, приходящегося на $100u\%$ наиболее бедных членов этой группы. Случаю полного равенства (X имеет вырожденное распределение) соответствует $L_X(u) \equiv u$, а чем больше выгнут "лук тем больше неравенство в группе.

Определение 14 Пусть X и Y—два риска ($X, Y \in \mathcal{L}$). Говорят, что X меньше Y *в смысле Лоренца* ($X \prec_{Lor} Y$), если

$$L_X(u) \geq L_Y(u) \quad \textit{для всех} \quad u \in [0,1].$$

Следующий важный результат принадлежит Харди, Литтлвуду, Пойа (1929) и Карамата (1932).

Теорема 20 *Для двух рисков X и Y*

$$X <_{Lor} Y \Leftrightarrow (X/\mathrm{E}X) <_{cx} (Y/\mathrm{E}Y). \qquad (19)$$

Иначе утверждение (19) можно сформулировать следующим образом: $X <_{Lor} Y$ тогда и только тогда, когда для любой выпуклой (непрерывной) функции h имеет место неравенство $\mathrm{E}h(X/\mathrm{E}X) \leq \mathrm{E}h(Y/\mathrm{E}Y)$.

Задача 24 Проверить, что если $X <_{Lor} Y$, то $\mathrm{CV}(X) \leq \mathrm{CV}(Y)$. Верно ли обратное утверждение?

Подчеркнем, что с помощью выпуклого порядка ($<_{cx}$) можно сравнивать лишь риски с одинаковыми средними. В то же время порядок Лоренца не требует равенства средних.

Следствие 6 *Если* $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y$*, то из* (19) *вытекает*

$$X <_{Lor} Y \Leftrightarrow X <_{cx} Y. \tag{20}$$

Доказательство. Утверждение очевидно, поскольку выпуклый порядок масштабно инвариантен. ■

Следствие 7 *Пусть* $X, Y \in \mathcal{L}$ *обладают плотностями соответственно* f_X*,* f_Y *и* $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y$*. Для выполнения* $X <_{Lor} Y$ *достаточно, чтобы разность* $f_X(x) - f_Y(x)$ *дважды меняла знак на* $(0, \infty)$ *в следующем порядке:* $-, +, -$.

Доказательство очевидным образом вытекает из (20) и теоремы 13. ■

Замечание 4 Очевидно, что утверждение $X <_{Lor} Y$ влечет за собой (и вытекает из того, что) $aX <_{Lor} bY$ для любых $a, b \in (0, \infty)$. (Иногда бывает удобнее вместо исходных случайных величин X и Y, возможно с разными математическими ожиданиями, сравнивать $X\mathrm{E}Y$ и $Y\mathrm{E}X$, обладающие одинаковыми средними).

Альтернативная характеризация порядка Лоренца, полученная Штрассеном в 1965г. (см. [32]), подчеркивает роль усреднения.

Теорема 21 $X <_{Lor} Y$ *тогда и только тогда, когда существуют такие случайные величины* Y' *и* Z'*, что* $Y \stackrel{d}{=} Y'$*, а* $X \stackrel{d}{=} c\mathrm{E}(Y'|Z')$ *для некоторого* $c > 0$.

Доказательство в одну сторону (*тогда*) вытекает из леммы 7 и теоремы 20 в силу масштабной инвариантности порядка Лоренца. Более сложное доказательство обратного утверждения можно прочитать в [32]. ■

В качестве следствия получим, что показательное распределение доминируется в смысле Лоренца распределением Парето.

Следствие 8 *Пусть X распределена показательно со средним λ, а Y — сдвинутое распределение Парето с $F_Y(x) = 1 - (1 + (x/\lambda))^{-\alpha}$, $x > 0$, и $\alpha > 1$, $\lambda > 0$, тогда $X <_{Lor} Y$.*

Доказательство. Пусть X и Z — независимые случайные величины, $X \sim \Gamma(1, \lambda^{-1})$, $Z \sim \Gamma(\alpha, 1)$. Нетрудно проверить, что $Y = X/Z$ имеет требуемое распределение Парето. По построению $\mathrm{E}(Y|X) = X\mathrm{E}(Z^{-1})$, поэтому $X = \mathrm{E}(Y|X)/\mathrm{E}(Z^{-1})$, а по теореме 21 это означает, что $X <_{Lor} Y$. ■

Чаще всего риски сравниваются с помощью порядков для случайных величин (например, $<_{sl}$ или $<_{cx}$) в предположении, что страховщик получает за них одну и ту же премию. Эта гипотеза иногда может оказаться ограничительной, так как за счет выплаты более высокой премии менее благоприятный риск может быть сделан привлекательным.

Более реалистический подход — описывать страховой контракт с помощью пары (X, P), включающей как риск X, так и выплачиваемую за него премию P. Размер премии определяется с помощью некоторого *тарифного принципа* H, т.е. некоторого функционала, который ставит в соответствие риску X действительное число $P = H(X)$, равное размеру требуемой премии. Если используется *принцип среднего* (со страховой нагрузкой α), то $H(X) = (1 + \alpha)\mathrm{E}X$.

На практике деятельность страховой компании часто оценивается с помощью случайной величины $X/H(X)$, т.е. размера риска на единицу премии (или *удельного ущерба*).

Лемма 13 *Порядок Лоренца рисков X и Y — это, по сути дела, выпуклый порядок удельных ущербов, связанных с контрактами $(X, (1 + \alpha)\mathrm{E}X)$ и $(Y, (1 + \alpha)\mathrm{E}Y)$.*

Доказательство. В самом деле, в силу (19)

$$X <_{Lor} Y \Leftrightarrow \frac{X}{(1+\alpha)\mathrm{E}X} <_{cx} \frac{Y}{(1+\alpha)\mathrm{E}Y},$$

т.е. все несклонные к риску лица предпочтут удельные потери, связанные с контрактом по риску X, если тарификация ведется по принципу среднего с нагрузкой α. ■

Таким образом, порядок Лоренца позволяет актуариям сравнивать риски X и Y, принимая во внимание соответствующие им премии.

Обратимся теперь к введенному в [21] k-порядку. Напомним, что стоп-лосс преобразование $m_X(x)$ случайной величины X определяется как $m_X(x) = \int_x^\infty (1 - F_X(t))\,dt$ (иначе говоря, это стоп-лосс премия с приоритетом x).

Функция $k_X(x)$ определяется следующим образом

$$k_X(x) = \frac{1}{\mathrm{E}X} m_X(x\mathrm{E}X).$$

Определение 15 Говорят, что $X <_k Y$, если $k_X(x) \leq k_Y(x)$ для всех $x \geq 0$.

Иначе тот же самый порядок можно ввести как стохастический порядок некоторых других случайных величин, связанных с исходными. А именно, пусть F_X^* — это функция распределения $X^* = X/\mathrm{E}X$, т.е. $F_X^*(x) = F_X(x\mathrm{E}X)$. Рассмотрим новую случайную величину $\hat{X}$ с плотностью распределения, равной $1 - F_X^*(x)$, $x > 0$, ее функцию распределения обозначим $\hat{F}_X$.

Лемма 14 *Пусть X и Y — два риска, тогда*

$$X <_k Y \Leftrightarrow \hat{X} <_{st} \hat{Y}. \tag{21}$$

Доказательство. Действительно, $\hat{X} <_{st} \hat{Y} \Leftrightarrow 1 - \hat{F}_X(x) \leq 1 - \hat{F}_Y(x)$ для всех $x \geq 0$. Поэтому достаточно записать цепочку преобразований

$$1 - \hat{F}_X(x) = 1 - \int_0^x (1 - F_X(t\mathrm{E}X))\,dt =$$

$$= \frac{1}{\mathrm{E}X} \int_{x\mathrm{E}X}^{\infty} (1 - F_X(t))\, dt = \frac{m_X(x\mathrm{E}X)}{\mathrm{E}X} = k_X(x),$$

чтобы установить справедливость (21). ■

Следствие 9 *Если* $X <_k Y$, *то* $\mathrm{CV}(X) \le \mathrm{CV}(Y)$.

Доказательство можно получить, подсчитав

$$\mathrm{E}\hat{X} = \int_0^{\infty} k_X(t)\, dt = \frac{1}{\mathrm{E}X} \int_0^{\infty} m(t\mathrm{E}X)\, dt = \frac{\mathrm{E}X^2}{2(\mathrm{E}X)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\mathrm{D}X + (\mathrm{E}X)^2}{(\mathrm{E}X)^2} = \frac{1}{2}((\mathrm{CV}(X))^2 + 1)$$

и вспомнив, что

$$\hat{X} <_{st} \hat{Y} \Rightarrow \mathrm{E}\hat{X} \le \mathrm{E}\hat{Y}. \blacksquare$$

Теорема 22 *Справедливо утверждение*

$$X <_k Y \Leftrightarrow X^* <_{sl} Y^*.$$

Доказательство очевидно, так как $m_{X^*}(x) = k_X(x)$. ■

Следствие 10 *Для* $X, Y \in \mathcal{L}$

$$X <_{Lor} Y \Leftrightarrow X <_k Y.$$

Доказательство получается комбинацией теорем 22 и 20. ■

Задача 25 Показать, что $X <_{st} Y \not\Rightarrow X <_k Y$. (Указание: рассмотреть $X \sim U(0,2)$, $Y \sim U(1,2)$, где $U(a,b)$ — равномерное распределение на (a,b).)

Задача 26 Показать, что $X < slY \not\Rightarrow X <_k Y$. (Указание: рассмотреть $X \sim (1,3;1/2)$, $Y \sim (1,3;1/3)$, где $X \sim (a,b;p)$ означает, что $\mathrm{P}(X = a) = 1 - \mathrm{P}(X = b) = p$, $0 \le a < b$, $0 < p < 1$.)

Задача 27 . Показать, что $X <_k Y \not\Rightarrow X <_{st} Y$. (Указание: рассмотреть $X \sim Exp(1)$, $Y \sim Exp(2)$, где $Exp(a)$ — показательное распределение с параметром a.)

В страховом деле возможна следующая интерпретация кривой Лоренца: $L_X(u)$ представляет собой долю общего ущерба, обусловленного $100u\%$ контрактов с наименьшими размерами требований.

Как было указано в [7], для актуариев интересна "дуальная"кривая Лоренца

$$L_X^{dual}(u) = 1 - L_X(1-u), \quad u \in [0,1].$$

Очевидно, что для заданного $u \in [0,1]$ величина $L_X^{dual}(u)$ — это доля совокупного ущерба, причиненного $100u\%$ контрактов с наибольшим размером требований. Из определения порядка Лоренца и вида L_X^{dual} легко вывести, что

$$X <_{Lor} Y \Leftrightarrow L_X^{dual}(u) \leq L_Y^{dual}(u)$$

$$\text{для всех } u \in [0,1].$$

Таким образом, получена альтернативная интерпретация порядка Лоренца, полезная в актуарном контексте: если $X <_{Lor} Y$, то доля совокупного ущерба, причиненная $100u\%$ полисов с наивысшим размером требований, при всех $u \in [0,1]$ для Y будет больше, чем для X.

2.5.2 Операции, сохраняющие и ослабляющие порядок

Практический интерес представляют преобразования множества $\mathcal{L}$, сохраняющие или ослабляющие порядок Лоренца. Иначе говоря, необходимо охарактеризовать классы функций g, для которых из $X <_{Lor} Y$ вытекает $g(X) <_{Lor} g(Y)$ или $g(X) <_{Lor} X$.

При этом будут полезны следующие две леммы, касающиеся порядка $<_{Lor}$ для случайных величин, принимающих два значения.

Лемма 15 *Пусть* $0 < x_1 < x_2$ *и случайные величины* X *и* Y *определены следующим образом*

$$\mathrm{P}(X = x_1) = p, \quad \mathrm{P}(X = x_2) = 1 - p,$$
$$\mathrm{P}(Y = x_1) = p', \quad \mathrm{P}(Y = x_2) = 1 - p'.$$

Тогда X *и* Y *сравнимы в смысле Лоренца лишь в тривиальных случаях* $p = p'$, $pp' = 0$ *или* $(1-p)(1-p') = 0$.

Лемма 16 *Пусть $x > 0$ и случайные величины X и Y заданы следующим образом*

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(X = 0) = p, &\quad \mathrm{P}(X = x) = 1 - p, \\ \mathrm{P}(Y = 0) = p', &\quad \mathrm{P}(Y = x) = 1 - p', \end{aligned}$$

тогда $p \le p' \Rightarrow X <_{Lor} Y$.

Оба утверждения легко проверить, нарисовав соответствующие кривые Лоренца.

Обозначим $\mathcal{G}$ класс всех преобразований, сохраняющих неравенство, т.е.

$$\mathcal{G} = \{g \,:\, X <_{Lor} Y \Rightarrow g(X) <_{Lor} g(Y)\}.$$

Для того, чтобы порядок $<_{Lor}$ был определен, необходимо потребовать $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ и $X \in \mathcal{L} \Rightarrow g(X) \in \mathcal{L}$.

Теорема 23 *Любая функция из $\mathcal{G}$ принадлежит к одному из трех следующих видов:*

$$\begin{aligned} g_{1,a}(x) &= ax,\ x \ge 0,\ \textit{где } a \in (0, \infty), \\ g_{2,b}(x) &= b,\ x \ge 0,\ \textit{где } b \in (0, \infty), \\ g_{3,c} &= \begin{cases} 0,\ x = 0, \\ c,\ x > 0,\ \textit{где } c \in (0, \infty). \end{cases} \end{aligned}$$

Относительно преобразований, *ослабляющих неравенство*, справедливо следующее утверждение, доказанное в [7].

Теорема 24 *Пусть $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ — измеримое отображение, а $X \in \mathcal{L}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $g(X) <_{Lor} X$;

(ii) $g(x) > 0$ при $x > 0$, $g(x)$ не убывает на $\mathbb{R}^+$, а функция $g(x)/x$ не возрастает при $x > 0$.

Доказательство. Предположим, что g удовлетворяет условиям (ii), $X \in \mathcal{L}$ и $Y = g(X)$. Так как $g(x) > 0$ при $x > 0$, $\mathrm{E}X > 0$, то $\mathrm{E}g(X) > 0$. Далее, $G(X) \le g(1)$, когда $X \le 1$, поскольку $g(x)$ не убывает на $[0, \infty)$. Кроме того, $g(X)/X \le g(1)/1$ или, что тоже самое, $g(X) \leq Xg(1)$, когда $X \geq 1$, в силу условия $g(x)/x$ не возрастает на $[0,\infty)$. Таким образом, $g(X) \leq (X+1)g(1)$, следовательно, $\mathrm{E}g(X) < \infty$, т.е. $Y = g(X) \in \mathcal{L}$.

Хорошо известно, что $X \stackrel{d}{=} X' = F_X^{-1}(U)$, где U — это случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,1]$. Значит, выражение (18) можно представить в виде

$$L_X(u) = \mathrm{E}\left[X' I_{[0,u]}(U)\right]/\mathrm{E}X',$$

(как обычно, $I_{[0,u]}$ — индикатор множества $[0,u]$).

Воспользовавшись тем, что $Y \stackrel{d}{=} g(F_X^{-1}(U))$, запишем для $u \in [0,1]$

$$L_Y(u) - L_X(u) = \int_0^u \left\{ g(F_X^{-1}(v)) - F_X^{-1}(v)\frac{\mathrm{E}Y}{\mathrm{E}X} \right\} \frac{dv}{\mathrm{E}Y}.$$

Раз $g(x)/x$ не возрастает на $(0,\infty)$, то подинтегральная функция сначала положительна, затем отрицательна, когда v меняется от 0 до 1. Значит, интеграл принимает минимальное значение при $u = 1$. Однако $L_X(1) = L_Y(1) = 1$, поэтому $L_Y(u) \geq L_X(u)$ при любом $u \in [0,1]$, т.е. $Y <_{Lor} X$.

Утверждение $(i) \Rightarrow (ii)$ доказывается от противного с использованием лемм 15 и 16. В самом деле, предположим, что g такова, что $g(x^*) = 0$ для некоторого $x^* > 0$. Рассмотрим случайную величину X такую, что $\mathrm{P}(X = x^*) = 1$. Тогда $X \in \mathcal{L}$, но $\mathrm{P}(g(X) = 0) = 1$, поэтому $g(X) \notin \mathcal{L}$ и нельзя сравнить X и $g(X)$ в смысле Лоренца.

Пусть теперь $g(x) > 0$ при всех $x > 0$, но не является неубывающей функцией на $[0,\infty)$. Следовательно, существуют такие x и y, $0 \leq x < y$, что $g(y) < g(x)$. Рассмотрим случайную величину X такую, что $\mathrm{P}(X = x) = p$, $\mathrm{P}(X = y) = 1 - p$. Возможны два случая:

1. $x = 0$, $g(y) > 0$, тогда $g(X) \not<_{Lor} X$, если $p < (g(0) - g(y))/(2g(0) - g(y))$.

2. $x > 0$, $g(y) > 0$, тогда $g(X) \not<_{Lor} X$, если $p > ((y/x) - 1)((g(x)/g(y)) + (x/y) - 2)$.

Наконец, предположим, что g не убывает и $g(x) > 0$ при $x > 0$, но $g(x)/x$ не является невозрастающей функцией на $(0,\infty)$, значит, существуют такие x и y, что $0 < x < y$ и $0 < (g(x)/x) < (g(y)/y)$. Введем случайную величину X такую, что $\mathrm{P}(X = x) = \mathrm{P}(X = y) = 1/2$. Для нее $L_{g(X)}(1/2) < L_X(1/2)$, поэтому снова приходим к противоречию. ■

Задача 28 Какие условия надо наложить на функцию g, чтобы соответствующее преобразование увеличивало неравенство?

Доказанная теорема 24 допускает интересную интерпретацию в терминах налоговой политики. Пусть X — доход до уплаты налогов, а $g(X)$ — после. Для того, чтобы налоговая политика уменьшала неравенство в доходах для любого распределения X, необходимо выполнение требований пункта (ii) теоремы 24. Действительно, условие $g(x) > 0$ для всех $x > 0$ означает, что у любого лица, имевшего доход до уплаты налогов, что-то останется и после этого. Монотонность $g(x)$ показывает, что если один заработал больше другого, то он не будет иметь меньше после уплаты налогов. Наконец, последнее условие убывания $g(x)/x$ говорит о том, что используется прогрессивная система налогообложения, при которой богатые платят бóльшую часть дохода, чем бедные.

Задача 29 Еще один способ изменить распределение доходов — увеличить зарплату. Так, если некто получает сумму x и повышение его зарплаты составляет $100\gamma(x)\%$, то новая сумма равна $g(x) = x(1 + \gamma(x))$. Какие требования надо наложить на $\gamma(x)$, чтобы новая зарплата уменьшила неравенство?

Следующий результат легко получить из теоремы 24, и он тесно связан со свойствами, полученными в [36].

Следствие 11 *Пусть g_1 и g_2—две неубывающие непрерывные функции, отображающие $\mathbb{R}^+$ в $\mathbb{R}^+$, и пусть $X \in \mathcal{L}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(i) $g_1(X) <_{Lor} g_2(X)$;

(ii) функция $g(x) = g_1 \circ g_2^{-1}(x)$ удовлетворяет условию (ii) предыдущей теоремы.

2.5.3 Взвешивание

Еще одна операция над распределениями — *взвешивание*, т.е. рассмотрение вместо исходной случайной величины X новой случайной величины X_g, для которой

$$P(X_g \le x) = \int_0^x g(y)\, dF_X(y)/\mathrm{E}g(X). \qquad (22)$$

Предполагается, что *весовая функция* $g(x)$ неотрицательна, измерима и $\mathrm{E}g(X) < \infty$. Заметим, что если $X \in \mathcal{L}$, то для того, чтобы $X_g \in \mathcal{L}$, надо также предположить, что $0 < \mathrm{E}(Xg(X)) < \infty$.

Обозначим через $\mathcal{G}_1$ класс взвешиваний, сохраняющих неравенство, т.е.

$$\mathcal{G}_1 = \{g\, :\, X <_{Lor} Y \Rightarrow X_g <_{Lor} Y_g\}.$$

Заметим, что этот класс не пуст, так как ему принадлежат функции $g(x) \equiv x$. Оказывается, что все $g \in \mathcal{G}_1$ мало отличаются от константы, как показывает следующая

Теорема 25 *Функция $g \in \mathcal{G}_1$ тогда и только тогда, когда она имеет вид: $g(0) = a$, $g(x) = b$, $x > 0$, где $a \ge b > 0$.*

Доказательство, проводимое с помощью лемм 15 и 16, можно прочитать в [6]. ■

Похожий вид имеют взвешивания, ослабляющие неравенство. Пусть

$$\mathcal{G}_2 = \{g\, :\, X \in \mathcal{L} \Rightarrow X_g <_{Lor} X\}.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 26 *Функция $g \in \mathcal{G}_2$ тогда и только тогда, когда $g(0) = a$, $g(x) = b$, $x > 0$, где $b > 0$ и $0 \le a \le b$.*

2.5.4 Смеси

Рассмотрим, как ведут себя смеси распределений случайных величин из класса $\mathcal{L}$. Пусть $X, Y \in \mathcal{L}$ и независимы, $\alpha \in (0, 1)$, а I_α — бернуллиевская случайная величина ($P(I_\alpha = 1) = \alpha = 1 - P(I_\alpha = 0)$), не зависящая от X и Y. Случайная величина

$$X_\alpha = I_\alpha X + (1 - I_\alpha)Y \qquad (23)$$

называется *смесью* X и Y. Возникает вопрос: при каких предположениях $X_\alpha <_{Lor} X$? Один из первых результатов получен Lam'ом в 1986г.

Теорема 27 *Пусть* $X, Y \in \mathcal{L}$ *и* X_α *задается формулой* (23). *Если* $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y$ *и* $Y <_{Lor} X$, *тогда* $X_\alpha <_{Lor} X$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y = 1$, тогда и $\mathrm{E}X_\alpha = 1$. Воспользуемся теоремой 20. Рассмотрим произвольную непрерывную выпуклую функцию h, тогда

$$\mathrm{E}h(X_\alpha) = \alpha \mathrm{E}h(X) + (1-\alpha)\mathrm{E}h(Y). \tag{24}$$

Поскольку $Y <_{Lor} X$, имеем $\mathrm{E}h(Y) \le \mathrm{E}h(X)$, т.е. правая часть (24) не превосходит

$$\alpha \mathrm{E}H(X) + (1-\alpha)\mathrm{E}h(X) = \mathrm{E}h(X),$$

что показывает $X_\alpha <_{Lor} X$. ■

Условия теоремы 27 не являются необходимыми, хотя близки к ним.

В самом деле, рассмотрим две случайных величины X и Y с функциями распределения

$$F_X(x) = \begin{cases} 0,\ x < 0, \\ 2x,\ 0 \le x \le 1/2, \\ 1,\ x > 1/2, \end{cases} \qquad F_Y(x) = \begin{cases} 0,\ x < 1/2, \\ x,\ 1/2 \le x < 1, \\ 1,\ x > 1 \end{cases}$$

и введем $X_{1/3}$ в соответствии с (23). Тогда нетрудно проверить, рассмотрев соответствующие кривые Лоренца, что $X_{1/3} <_{Lor} X$, хотя $\mathrm{E}X \ne \mathrm{E}Y$.

Тем не менее, верно следующее утверждение.

Теорема 28 *Пусть* $X, Y \in \mathcal{L}$ *и случайная величина* X_α *является их смесью в соответствии с* (23). *Предположим также, что* $F_X^{-1}(0) > 0$. *Если* $X_\alpha <_{Lor} X$, *то* $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y$ *и* $Y <_{Lor} X$.

Доказательство. Условие $F_X^{-1}(0) > 0$ означает, что с вероятностью 1 X отделено от нуля. В таком случае $\mathrm{E}X \ne \mathrm{E}Y$ гарантирует, что $X_\alpha \not<_{Lor} X$. Чтобы это установить, заметим прежде всего, что $F_{X_\alpha}^{-1}(0) \le F_X^{-1}(0)$ и $F_{X_\alpha}^{-1}(1) \ge F_X^{-1}(1)$. Следовательно, если $\mathrm{E}X > \mathrm{E}Y$, то $\mathrm{E}X > \mathrm{E}X_\alpha$ и $L'_X(0) < L'_{X_\alpha}(0)$, откуда вытекает $X_\alpha \not<_{Lor} X$. Если же $\mathrm{E}X < \mathrm{E}Y$, то $L'_X(1) > L'_{X_\alpha}(1)$, и снова $X_\alpha \not<_{Lor} X$.

Далее, предположим, что $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y = 1$ (без ограничения общности), но $Y \not<_{Lor} X$. Согласно теореме 20 существует выпуклая непрерывная функция h такая, что $\mathrm{E}h(Y) > \mathrm{E}h(X)$. Но тогда для этой функции $\mathrm{E}h(X_\alpha) > \mathrm{E}h(X)$, а значит, $X_\alpha \not<_{Lor} X$. ■

2.6 Другие виды порядков

2.6.1 Стоп-лосс порядок степени n

Введем еще один порядок для рисков: $<_{(n)}$ — порядок стоп-лосс степени n.

Определение 16 $X <_{(n)} Y$, если $\mathrm{E}X^k \le \mathrm{E}Y^k$ для $k = \overline{1, n-1}$ и $\mathrm{E}[(X-d)^+]^n \le \mathrm{E}[(Y-d)^+]^n$ при любом $d \ge 0$.

Теорема 29 *Порядок $<_{(n)}$ — это общее предпочтение всех, имеющих дифференцируемую n раз функцию полезности, у которой первые $(n-1)$ производных непрерывны и меняют знак, т.е. $(-1)^{k-1}u^{(k)}(x) \ge 0$, $k = \overline{1, n-1}$, а также $(-1)^{n-1}u^{(n)}(x) \ge 0$ и не возрастает по x.*

Доказательство. 1. Пусть $\mathrm{E}u(-X) \ge \mathrm{E}u(-Y)$ для любой функции $u(\cdot)$, удовлетворяющей условиям теоремы, тогда $\mathrm{E}f(X) \le \mathrm{E}f(Y)$ для $f(x) = -u(-x)$.

Если взять $f(x) = [(x-d)^+]^n$, то $f^{(k)}(x) = n(n-1)\ldots(n-k+1)[(x-d)^+]^{n-k} \ge 0$, $k = \overline{1, n}$. Для $u(x) = -f(-x)$ имеем $u^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} f^{(k)}(-x)$, т.е. выполнены все условия, наложенные на функцию полезности. Следовательно, $\mathrm{E}[(X-d)^+]^n \le \mathrm{E}[(Y-d)^+]^n$. Аналогичным образом проверяется, что $\mathrm{E}X^k \le \mathrm{E}Y^k$ при $k = \overline{1, n-1}$.

2. Обратно, пусть $X <_{(n)} Y$, а $u(\cdot)$ удовлетворяет требованиям к функции полезности. Берем $f(x) = -u(-x)$, тогда $f^{(k)}(x) \ge 0$ при $k = \overline{1, n}$, а $f^{(n)}(x)$ не убывает по x. Рассмотрим разложение Тейлора

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \ldots + f^{(n)}(0)x^n/n! +$$

$$+\int_{0+}^{x}[(x-t)^n/n!]\,df^{(n)}(t). \qquad (25)$$

Последнее слагаемое можно переписать в виде

$$\int_{0+}^{\infty}\{[(x-t)^+]^n/n!\}\,df^{(n)}(t).$$

Пользуясь формулой (25), из $X <_{(n)} Y$ получаем $\mathrm{E}f(X)\le \mathrm{E}f(y)$, следовательно, $\mathrm{E}u(-X)\ge \mathrm{E}u(-Y)$. ■

Теперь докажем, что с ростом n порядок стоп-лосс (степени n) становится слабее.

Теорема 30 *Если $m>n$, то из $X <_{(n)} Y$ следует $X <_{(m)} Y$.*

Доказательство. Функции $u(x)=-[(-x-d)^+]^m$ и $u(x)=-(-x)^k$, $k=\overline{1,m-1}$, $x\ge 0$ удовлетворяют условиям предыдущей теоремы. Значит, из $X <_{(n)} Y$ следует $\mathrm{E}u(-X)\ge \mathrm{E}u(-Y)$ для введенных выше функций $u(\cdot)$, т.е. $X <_{(m)} Y$. ■

Обратное утверждение неверно, как показывает нижеследующий пример.

Пример 1 Пусть $\mathrm{P}(X=i)=1/4$, $i=\overline{0,3}$, и $\mathrm{P}(Y=0)=1/3$, $\mathrm{P}(Y=2)=1/2$, $\mathrm{P}(Y=3)=1/6$. Нетрудно проверить, что $\mathrm{E}X=\mathrm{E}Y=1{,}5$ и $\mathrm{E}X^2=\mathrm{E}Y^2=3{,}5$. Согласно лемме 8 случайные величины X и Y не могут быть упорядочены в смысле $<_{sl}$, т.е. $<_{(1)}$, в противном случае их распределения совпадали бы, чего нет. Однако они могут быть упорядочены в смысле $<_{(2)}$, для этого достаточно решить следующую задачу, обобщающую теорему 13.

Задача 30 Пусть $\mathrm{E}X^k=\mathrm{E}Y^k$, $k=\overline{1,n}$, и имеется $n+2$ непересекающихся интервала, расположенные в порядке возрастания номера, $[0,\infty)=I_0\cup I_1\ldots\cup I_{n+1}$ (замкнутые интервалы, состоящие из одной точки, допускаются) такие, что $(-1)^{n+1-j}(dF_X(x)-dF_Y(x))\le 0$ при $x\in I_j$, тогда $X <_{(n)} Y$.

Как показывает теорема 30, с ростом n порядок стоп-лосс ослабевает. Заметим также, что стохастический порядок $<_{st}$ — это порядок стоп-лосс степени 0, т.е. $<_{(0)}$, в то время как $<_{(1)}$ — это то, что ранее обозначалось $<_{sl}$.

Задача 31 Пусть риск $\tilde{X}$ имеет функцию распределения, удовлетворяющую условию $1 - F_{\tilde{X}}(x) = m_X(x)/\mathrm{E}X$, где $m_X(x)$ — стоп-лосс преобразование X, аналогично определяется $\tilde{Y}$. Показать, что в предположении $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y$

$$X <_{(n)} Y \Leftrightarrow \tilde{X} <_{(n-1)} \tilde{Y}.$$

Замечание 5 С помощью функции $l_X(x) = 1 - F_{\tilde{X}}(x)$ в [21] был введен $<_l$ порядок следующим образом:

$$X <_l Y \Leftrightarrow \tilde{X} <_{st} \tilde{Y} \Leftrightarrow l_X(x) \leq l_Y(x),\ \ x \geq 0.$$

В разделе 3 мы увидим, как можно воспользоваться этим порядком для выбора тарифного принципа.

Задача 32 Сохраняется ли порядок $<_{(n)}$ при суммировании независимых рисков? Иначе говоря, верно ли, что

$$X_i <_{(n)} Y_i,\ i \geq 1, \Rightarrow \sum_{i=1}^{N} X_i <_{(n)} \sum_{i=1}^{N} Y_i?$$

Задача 33 Коэффициентом асимметрии риска X называется $\gamma_X = \mathrm{E}[(X-\mu)^3/\sigma^3]$, где $\mu = \mathrm{E}X$, $\sigma^2 = \mathrm{D}X$. Проверить, что из условий $X <_{(2)} Y$ и $\mathrm{E}X^k = \mathrm{E}Y^k$, $k = 1, 2$, вытекает $\gamma_X \leq \gamma_Y$.

Задача 34 Показать, что из стоп-лосс порядка степени n ($X <_{(n)} Y$) в случае $\mathrm{E}X^k = \mathrm{E}Y^k$, $k = \overline{1, n-1}$, вытекают два полных порядка:

1. X предшествует Y в *среднем геометрическом*, если $\mathrm{E}\ln X < \mathrm{E}\ln Y$,
2. X предшествует Y в *среднем гармоническом*, если $\mathrm{E}X^{-1} > \mathrm{E}Y^{-1}$.

2.6.2 Порядок отношения правдоподобия

Упорядочивание в смысле отношения правдоподобия $<_{LR}$ определяется следующим образом.

Определение 17 Если $dF_X(x)dF_Y(y) \geq dF_X(y)dF_Y(x)$ при $0 \leq x < y$ (иначе говоря, отношение правдоподобия $dF_X(x)/dF_Y(x)$ не возрастает по x), то $X <_{LR} Y$.

Лемма 17 *Порядок* $<_{LR}$ *сильнее стохастического порядка.*

Доказательство. Так как отношение правдоподобия не возрастает и $\int_0^\infty dF_X(x) = \int_0^\infty dF_Y(x) = 1$, то сначала оно больше, а потом меньше единицы. Значит, выполнен критерий пересечений (теорема 6) для стохастического порядка. ■

Покажем также, что операция взвешивания (с весовой функцией g), определенная формулой (22), сохраняет порядок $<_{LR}$.

Теорема 31 *Пусть* $X <_{LR} Y$*, а функция* g *такова, что* $X_g, Y_g \in \mathcal{L}$*, тогда* $X_g <_{LR} Y_g$ *и* $\mathrm{E}X_g \le \mathrm{E}Y_g$*.*

Доказательство. Заметим, что

$$dF_{X_g}(x) = g(x)\,dF_X(x)/\mathrm{E}g(X),$$
$$dF_{Y_g}(x) = g(x)\,dF_Y(x)/\mathrm{E}g(Y).$$

Следовательно,

$$dF_{X_g}(x)/dF_{Y_g}(x) = c(dF_X(x)/dF_Y(x)),$$

где $c = \mathrm{E}g(Y)/\mathrm{E}g(X)$. Таким образом, из $X <_{LR} Y$ следует $X_g <_{LR} Y_g$. А поскольку в силу леммы 17 отсюда вытекает $X_g <_{st} Y_g$, значит, верно и второе утверждение теоремы. ■

Специальные виды взвешивания используются при подсчете премий. В частности, выбор $g(x) = e^{hx}$, $h > 0$, дает премию Эсшера.

Замечание 6 Для $Y = X_{(h)}$ (преобразование Эсшера от X) мы имеем $dF_X(x)/dF_Y(x) = e^{-hx}\mathrm{E}e^{hX}$ при $h > 0$. Эта функция убывает по x, следовательно, $X <_{LR} X_{(h)}$ при $h > 0$.

2.6.3 Экспоненциальный порядок

Теперь рассмотрим порядок, который слабее порядка стоп-лосс любой степени.

Определение 18 *Экспоненциальный порядок* $<_e$ определяется как решение, принимаемое всеми лицами, имеющими экспоненциальную функцию полезности.

Иными словами, $\mathrm{E}u_\alpha(-X) \geq \mathrm{E}u_\alpha(-Y)$ для $u_\alpha(x) = -e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$.

Лемма 18 *При любом n порядок $<_{(n)}$ сильнее $<_e$.*

Доказательство очевидно, так как $u_\alpha(x)$ удовлетворяет условиям перемены знака $(-1)^{k-1}u^{(k)} \geq 0$ при любом k, т.е. выполнены требования теоремы 29. ■

Иначе определение экспоненциального порядка выглядит так

Определение 19 Если для любого $\alpha > 0$ выполнено $\mathrm{E}e^{\alpha X} \leq \mathrm{E}e^{\alpha Y}$, то говорят, что $X <_e Y$.

Вспомним, что $\mathrm{E}e^{\alpha X} = g_X(\alpha)$. Таким образом, мы имеем неравенство $g_X(\alpha) \leq g_Y(\alpha)$, связывающее производящие функции моментов случайных величин X и Y, если $X <_e Y$.

Задача 35 Доказать, что семейство показательных распределений возрастает в смысле порядка $<_e$.

Лемма 19 *Если использовать премию нулевой полезности с экспоненциальной функцией полезности $u_\alpha(x)$, $\alpha > 0$, то меньшая премия при всех таких функциях эквивалентна наличию экспоненциального порядка.*

Доказательство. Действительно, $\mathrm{E}u_\alpha(P-X) = u_\alpha(0)$ дает $\mathrm{E}e^{\alpha X} = e^{\alpha P}$, т.е. $P = \alpha^{-1}\ln g_X(\alpha)$. Если $P(X,\alpha) \leq P(Y,\alpha)$ при всех $\alpha > 0$, то $g_X(\alpha) \leq g_Y(\alpha)$, что и значит $X <_e Y$. Обратное очевидно. ■

Величина $\alpha = -u''(x)/u'(x)$ — это коэффициент неприятия риска. Так как α — постоянная, то отношение к риску не зависит от величины капитала или размера портфеля страховой компании.

Лемма 20 *Равномерно меньшая премия Эсшера (при любом $h > 0$) означает наличие экспоненциального порядка.*

Доказательство. Премия Эсшера (см. раздел 3.1.2)

$$\Pi(X,h) = \mathrm{E}(Xe^{hX})/g_X(h),$$

т.е. математическое ожидание преобразования Эсшера случайной величины X, иначе может быть записана как $g'_X(h)/g_X(h)$.

Пусть $\Pi(X,h) \leq \Pi(Y,h)$ при любом $h > 0$, тогда $g'_X(h)/g_X(h) \leq g'_Y(h)/g_Y(h)$, откуда следует $g'_X(h)g_Y(h) - g'_Y(h)g_X(h) \leq 0$, а значит, $g_X(h)/g_Y(h)$ убывает по h при $h > 0$. Но $g_X(0) = g_Y(0) = 1$, следовательно, $g_X(h) \leq g_Y(h)$ при всех $h > 0$, что и означает экспоненциальный порядок. ■

Задача 36 Верно ли обратное утверждение?

Итак, мы имеем следующие соотношения между изученными выше порядками:

$$<_{LR} \quad \Rightarrow \quad <_{st} \quad \Rightarrow \quad <_{sl} \quad \Rightarrow \quad <_{(n)} \quad \Rightarrow \quad <_{(m)} \quad \Rightarrow \quad <_e$$

(предполагается, что $n < m$).

Как показывает следующий пример, экспоненциальный порядок *не является полным* порядком, т.е. можно найти такие риски X и Y, для которых при некотором $\alpha > 0$ будет иметь место неравенство $g_X(\alpha) < g_Y(\alpha)$, а при $\beta \neq \alpha$ верно противоположное неравенство $g_X(\beta) > g_Y(\beta)$.

Пример 2 Пусть X имеет экспоненциальное распределение с параметром 1, а Y—это смесь двух распределений, сосредоточенного в нуле и экспоненциального с параметром 1/2, веса равны соответственно 2/3 и 1/3.

Тогда $\mathrm{E}e^{tX} = (1-t)^{-1}$ при $t < 1$, а $\mathrm{E}e^{tY} = 2/3 + (1-2t)^{-1}1/3$ при $t < 1/2$. Следовательно, положив $\Delta(t) = g_X(t) - g_Y(t)$, легко получить, что $\Delta(t) > 0$ при $0 < t < 1/4$ и $\Delta(t) < 0$ при $1/4 < t < 1/2$.

2.6.4 Порядок эксцедента богатства

Порядок эксцедента богатства (excess wealth order) задается поточечным сравнением одноименных преобразований. Пусть X — неотрицательная случайная величина с функцией распределения F_X. Связанное с F_X (нормированное) преобразование эксцедента богатства W_X определяется следующим образом

$$W_X(u) = \int_{F_X^{-1}(u)}^{\infty} (1 - F_X(x))\,dx \left(\int_0^{\infty} (1 - F_X(x))\,dx \right)^{-1}$$

для $u \in [0, 1]$.

С экономической точки зрения, когда X представляет собой доход, $W_X(u)$ может рассматриваться как доля избыточного богатства $100(1-u)\%$ наиболее богатых членов популяции. Как бы дополнительным к W_X является преобразование T_X, определяемое для $u \in [0, 1]$ следующим образом

$$T_X(u) = \int_0^{F_X^{-1}(u)} (1 - F_X(x))\, dx \left(\int_0^{\infty} (1 - F_X(x))\, dx \right)^{-1}.$$

В страховой деятельности эти преобразования интерпретируются следующим образом: W_X (соотв. T_X) описывают ситуацию для перестраховщика (соотв. цедента) в договоре стоп-лосс, когда уровень собственного удержания d^u выбран таким образом, что вероятность иметь размер ущерба меньше d^u равна u (т.е. $F_X^{-1}(u) = d^u$). В актуарной литературе T_X рассматривалось в [19]. Очевидно, что L_X, W_X и T_X тесно связаны между собой (более подробно об этом написано в [29],[31]).

Определение 20 Говорят, что X меньше Y в смысле *эксцедента богатства* (обозначается $X <_{ew} Y$), если

$$W_X(u) \le W_Y(U) \quad \textit{для любого } u \in [0, 1]. \tag{26}$$

Этот порядок, в слегка модифицированном виде, был введен в [31], а в [14] он называется right spread order. Поскольку $T_X(u) + W_X(u) = 1$ для всех $u \in [0, 1]$, легко получить, что

$$X <_{ew} Y \Leftrightarrow T_X(u) \ge T_Y(u) \quad \text{для всех } u \in [0, 1]. \tag{27}$$

Формулы (26) и (27), приводят к следующей актуарной интерпретации этого порядка. Если $X <_{ew} Y$, то перестраховщик предпочтет стоп-лосс договор по риску X с приоритетом d_1^u аналогичному договору по риску Y с приоритетом d_2^u, где приоритеты выбраны с помощью соотношений $F_X^{-1}(u) = d_1^u$ и $F_Y^{-1}(u) = d_2^u$, поскольку для риска X отношение ожидаемых выплат перестраховщика к ожидаемому размеру ущерба меньше, чем для Y, т.е.

$$\frac{\mathrm{E}(X - d_1^u)^+}{\mathrm{E}X} \le \frac{\mathrm{E}(Y - d_2^u)^+}{\mathrm{E}Y} \quad \text{для всех } u \in [0, 1]. \tag{28}$$

Если предположить, что оба, перестрахователь и перестраховщик, производят тарификацию на основе принципа среднего (хотя, возможно, с различной нагрузкой), то (28) означает сравнение отношений премии перестрахования к исходной премии для двух рисков. Наоборот, прямой страховщик предпочтет отдать в перестрахование риск Y. В случае совпадающих средних, $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y$, упорядочены соответствующие премии перестрахования, так как (28) превращается в неравенство $\mathrm{E}(X - d_1^u)^+ \leq \mathrm{E}(Y - d_2^u)^+$ для всех $u \in [0,1]$. Имеет место даже более общий результат, чем (28).

Задача 37 *Показать, что если* $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y$ *и* $X <_{ew} Y$*, то*

$$(X - d_1^u)^+ <_{sl} (Y - d_2^u)^+ \quad \text{для всех } u \in [0,1]. \tag{29}$$

Еще одно замечательное свойство порядка $<_{ew}$ состоит в следующем.

Теорема 32 *Если* $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y$ *и* $X <_{ew} Y$*, тогда из* $\mathrm{E}\phi(Y) = \mathrm{E}\phi(X + \pi)$ *следует, что*

$$\mathrm{E}\varphi(X + \pi) \leq \mathrm{E}\varphi(Y) \tag{30}$$

для любых неубывающих выпуклых функций полезности таких, что $\varphi = \psi \circ \phi$*, где* ψ *неубывающая выпуклая (т.е.* φ *— это функция полезности лица, менее склонного к риску, чем лицо с функцией полезности* ϕ*).*

Этот результат допускает естественную интерпретацию с актуарной точки зрения. В самом деле, π — это премия, которую лицо, имеющее функцию полезности ϕ, готово заплатить, чтобы заменить ущерб Y ущербом X. Тогда (30) показывает, что лицо менее склонное к риску, т.е. имеющее функцию полезности $\varphi = \psi \circ \phi$ предпочтет $X + \pi$, а не Y.

В работе [31] доказано следующее утверждение.

Теорема 33 *Если у рисков* X *и* Y *одинаковое среднее, то*

$$X <_{ew} Y \Rightarrow X <_{cx} Y, \tag{31}$$

но обратное неверно.

Другими словами, в силу (20) порядок $<_{ew}$ является в этом случае *достаточным условием* как для $<_{cx}$, так и для $<_{Lor}$.

2.6.5 Порядок рассеивания

Пусть F_X и F_Y—это функции распределения соответственно рисков X и Y. Введем еще одно отношение порядка, известное в статистике как *порядок рассеивания* (dispersive order).

Определение 21 Говорят, что $X <_{disp} Y$, если $F_Y^{-1}(x) - F_X^{-1}(x)$ — неубывающая функция x на $[0,1]$.

Упорядочивание рисков с помощью $<_{disp}$, очевидно, соответствует сравнению рисков по их изменчивости, поскольку означает, что разность между любыми двумя квантилями у X будет меньше, чем у Y, т.е.

$$X <_{disp} Y \Leftrightarrow F_X^{-1}(u_2) - F_X^{-1}(u_1) \leq F_Y^{-1}(u_2) - F_Y^{-1}(u_1)$$

для $u_1 \leq u_2$ из $[0,1]$.

Порядок $<_{disp}$ обладает многими полезными свойствами, (см., напр., [30]).

В работе [27] показано, что $<_{disp}$ обладает интерпретацией, похожей на (30) для $<_{ew}$. Более точно, если $X <_{disp} Y$ и $\mathrm{E}\phi(Y) = \mathrm{E}\phi(X+\pi)$, тогда справедливо (30) для функций φ, соответствующих большему неприятию риска, чем для ϕ.

Наконец, в [28] показано, что

$$X <_{disp} Y \Leftrightarrow (X - d_1^u)^+ <_{st} (Y - d_2^u)^+ \quad \text{для всех } u \in [0,1],$$

т.е. соотношение, похожее на (29) для $<_{ew}$.

Порядок $<_{disp}$ достаточно сильный. Например, легко видеть, что имеет место следующий результат.

Лемма 21 *Если левые концы носителей X и Y совпадают (и равны 0), то*

$$X <_{disp} Y \Rightarrow X <_{st} Y.$$

Доказательство. В самом деле, при таких предположениях

$$F_Y^{-1}(u) - F_X^{-1}(u) \geq F_Y^{-1}(0) - F_X^{-1}(0) = 0,$$

поэтому $F_Y^{-1}(u) \geq F_X^{-1}(u)$ для всех $u \in [0,1]$, откуда вытекает, что $F_X(t) \geq F_Y(t)$ для всех $t \in \mathbb{R}^+$. ■

С другой стороны, в [31] доказано, что

$$X <_{disp} Y \Rightarrow X <_{ew} Y.$$

2.6.6 Порядки, связанные со смертностью

В этом разделе будет сформулирован ряд результатов, интересных также и для страхования жизни, поэтому выбрана соответствующая терминология. Потом будет дана интерпретация, относящаяся к страхованию не жизни.

Пусть положительная случайная величина X — это продолжительность жизни человека (с момента его рождения) и $F(t) = \mathrm{P}(X \le t)$ — соответствующая функция распределения. Если человек страхует свою жизнь в возрасте x лет, то страховую компанию интересует "остаточное время жизни т.е. распределение случайной величины T_x, задаваемое следующим образом:

$$F_x(t) = [F(t+x) - F(x)]/\bar{F}(x), \quad 0 \le t < \infty.$$

Если знаменатель равен нулю, то полагаем $F_x(t) = \Theta_0(t)$.

Иначе можно записать

$$\bar{F}_x(t) = \mathrm{P}(T_x > t) = \mathrm{P}(X > t + x | X > x), \quad 0 \le t < \infty,\ x > 0. \tag{32}$$

Особый интерес представляют те распределения F, у которых F_x при различных x сравнимы друг с другом и с F.

Определение 22 Функция распределения F имеет *возрастающую интенсивность смертности* (или отказа), иначе говоря, относится к типу IFR (increasing failure rate), если при $0 \le x_1 \le x_2 < \infty$ имеет место соотношение

$$F_{x_2} <_{st} F_{x_1}. \tag{33}$$

Таким образом, с ростом x остаточные времена жизни стохастически убывают.

Если распределение F абсолютно непрерывно и f его плотность, можно ввести следующее определение.

Определение 23 *Интенсивностью смертности* $\lambda(t)$ называется отношение $\lambda(t) = f(t)/\bar{F}(t)$.

Теорема 34 *Абсолютно непрерывное распределение F имеет тип IFR тогда и только тогда, когда выполнено любое из двух условий:*

1. $\ln \bar{F}(t)$ — *вогнутая функция,*
2. $\lambda(t)$ *монотонно возрастает по* t.

Доказательство. Поскольку

$$\lambda(t) = -\frac{d}{dt} \ln \bar{F}(t), \tag{34}$$

эквивалентность условий 1 и 2 очевидна.

Иначе уравнение (34) можно записать в виде

$$1 - F(t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(y)\, dy\right). \tag{35}$$

Следовательно,

$$\bar{F}_x(t) = \exp\left(-\int_x^{x+t} \lambda(y)\, dy\right) \tag{36}$$

и $\bar{F}_x(t)$ убывает по x (при любом t) тогда и только тогда, когда λ монотонно возрастает. ■.

Обозначим $r(x) = \mathrm{E}T_x$, очевидно, $r(x) = \mathrm{E}(X-x)^+/(1-F(x))$ для тех $x \geq 0$, для которых $F(x) < 1$, и $r(x) = 0$, если $F(x) = 1$. И пусть, как обычно, $m(x) = \int_x^\infty (1 - F(t))\, dt$.

Лемма 22 *Справедливо соотношение*

$$m(x) = \mathrm{E}X \exp\left(-\int_0^x r^{-1}(t)\, dt\right). \tag{37}$$

Доказательство. По определению

$$r(x) = \int_0^\infty t\, dF_x(t) = \frac{\int_x^\infty (1 - F(t))\, dt}{1 - F(x)} = -\frac{m(x)}{m'(x)}, \tag{38}$$

откуда следует, что

$$r^{-1}(x) = -\frac{d}{dx} \ln m(x). \tag{39}$$

Интегрируя (39), с учетом того, что

$$m(0) = \mathrm{E}X = r(0),$$

получим (37). ■

Задача 38 Проверить, что следующие распределения имеют тип IFR:

a) Гамма распределение с $\alpha \geq 1$.

b) Распределение Вейбулла при $\alpha \geq 1$.

c) Равномерное распределение.

Задача 39 Подставим в (32) вместо числа x положительную случайную величину Z, не зависящую от X, и обозначим через $G(t)$ полученную таким образом функцию распределения. Показать, что если F имеет IFR-тип, то $G <_{st} F$.

Задача 40 Распределение F имеет тип IFRA (increasing failure rate average), если $-t^{-1} \ln \bar{F}(t)$ возрастающая функция t. Показать, что это эквивалентно условию $\bar{F}(at) \geq F^{a}(t)$ для всех $0 < a < 1$ и $t > 0$.

Определение 24 Функция распределения F имеет тип NBU (new better than used), если

$$F_x <_{st} F \quad \textit{для любого } x \geq 0.$$

Иначе это определение "стареющего"распределения можно записать в виде

$$\bar{F}(t+x) \leq \bar{F}(t)\bar{F}(x) \quad \text{для всех } t \geq 0,\ x \geq 0.$$

Определение 25 Функция распределения с конечным математическим ожиданием имеет тип NBUE (new better than used in expectation), если для любого x

$$\mathrm{E}T_x \leq \mathrm{E}X. \tag{40}$$

Задача 41 Проверить, что введенные четыре класса функций связаны следующим образом:

$$IFR \subset IFRA \subset NBU \subset NBUE.$$

Введем функцию распределения $G(t) = (\mathrm{E}X)^{-1} \int_0^t \bar{F}(x)\, dx$. Как мы увидим далее, она играет важную роль при изучении вероятности разорения страховой компании. В теории процессов восстановления это распределение величины перескока через любой фиксированный уровень в стационарном случае.

Лемма 23 *Функция распределения F имеет тип NBUE тогда и только тогда, когда соответствующая ей функция распределения G стохастически меньше, чем F.*

Доказательство. В самом деле, соотношение (40) эквивалентно

$$\mathrm{E}X \geq \int_0^\infty \bar{F}(t+x)\,dt/\bar{F}(x),$$

что можно переписать иначе

$$\bar{F}(x) \geq (\mathrm{E}X)^{-1} \int_x^\infty \bar{F}(t)\,dt. \tag{41}$$

А это и означает $F <_{st} G$. ■

Как следует из леммы 23, определение 25 можно переписать в виде

$$\int_0^\infty \bar{F}(x+t)\,dt \leq \bar{F}(x) \int_0^\infty \bar{F}(t)\,dt.$$

Далее, рассматривая несколько случайных величин, будем помечать функции λ, r и др. соответствующим индексом снизу.

Замечание 7 Пусть случайные величины Y и Z независимы, а $X = \min(Y, Z)$. Тогда из (34) сразу вытекает, что

$$\lambda_X(t) = \lambda_Y(t) + \lambda_Z(t). \tag{42}$$

С помощью (42) можно получить следующую интересную интерпретацию закона Мейкхэма, часто используемого в страховании жизни для описания возраста, в котором наступит смерть:

$$F_X(x) = 1 - \exp\left(-Ax - \frac{B}{\ln C}(C^x - 1)\right)$$

для должным образом выбранных параметров A, B, C. (При $A = 0$ получается закон Гомпертца.)

Очевидно, что

$$\lambda_X(x) = A + BC^x. \tag{43}$$

Как показывает замечание 7, смерть может наступить либо в возрасте Y от несчастного случая, либо (независимо) в возрасте

Z от старости. Интенсивность смерти от старости ежегодно возрастает в C раз, а смерть от несчастного случая происходит с постоянной интенсивностью A.

Существует возможность упорядочивать случайные величины в соответствии с их остаточными временами жизни или с интенсивностью смертности (отказа).

Определение 26 Если неотрицательные случайные величины X и Y таковы, что $\lambda_X(t) \geq \lambda_Y(t)$ для всех $t \geq 0$, то говорят, что X предшествует Y в смысле *смертности*, что записывается $X <_{mor} Y$.

Отметим, что возраст X в момент смерти лица с большей интенсивностью меньше в смысле порядка $<_{mor}$ (mortality), поскольку, вообще говоря, его жизнь будет короче. То же самое будет верно для остаточных времен жизни в любом возрасте, как показывает следующая теорема.

Теорема 35 *Пусть $T_{X,x}$ и $T_{Y,x}$ — это остаточные времена жизни (в возрасте x) для X и Y. Утверждение $X <_{mor} Y$ верно тогда и только тогда, когда $T_{X,x} <_{st} T_{Y,x}$ для любого $x \geq 0$.*

Доказательство. Согласно определению 26 и равенству (36) мы имеем

$$X <_{mor} Y \Leftrightarrow \mathrm{P}(T_{X,x} > t) \leq \mathrm{P}(T_{Y,x} > t) \quad \forall x, t,$$

что в свою очередь эквивалентно $T_{X,x} <_{st} T_{Y,x}$ для любых $x \geq 0$. $\blacksquare$

Таким образом, теорема 34 показывает, что если распределение принадлежит классу IFR, то с возрастом лицо становится все более смертным (в смысле порядка $<_{mor}$).

Используя связь между F_X и λ_X, можно получить следующую характеризацию порядка в смысле смертности.

Теорема 36 *Мы имеем $X <_{mor} Y$ тогда и только тогда, когда отношение хвостов распределений $(1 - F_X(x))/(1 - F_Y(x))$ убывает по x.*

Доказательство. Согласно (35) можно записать

$$\frac{1 - F_X(x)}{1 - F_Y(x)} = \exp\left(-\int_0^x [\lambda_X(t) - \lambda_Y(t)]\,dt\right).$$

Следовательно, указанное отношение убывает по x тогда и только тогда, когда подинтегральная функция неотрицательна, что и означает $X <_{mor} Y$. ■

Еще один интересный результат, описывающий порядок в смысле смертности, содержит приведенная ниже теорема.

Теорема 37 *Соотношение $X <_{mor} Y$ тогда и только тогда, когда существует независимая от Y случайная величина Z такая, что $X \stackrel{d}{=} \min(Y, Z)$.*

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно в силу (42). Чтобы доказать обратное утверждение, достаточно построить случайную величину Z (независимую от Y) с функцией распределения F_Z, которая задается формулой (35) с $\lambda_Z(x) = \lambda_X(x) - \lambda_Y(x)$. ■

Из полученного представления меньшей в смысле порядка $<_{mor}$ случайной величины легко вывести следующее утверждение.

Следствие 12 *Стохастический порядок слабее, чем порядок в смысле смертности, т.е. $X <_{mor} Y \Rightarrow X <_{st} Y$.*

Интерес представляет также теорема, доказанная Marshall'ом и Proschan'ом в 1972г., сравнивающая функцию распределения типа NBUE с показательной.

Теорема 38 *Пусть F относится к типу NBUE и имеет математическое ожидание m, тогда F стоп-лосс меньше показательного распределения с тем же средним.*

Доказательство. В силу (41) верно неравенство

$$\bar{G}(x) \le m\frac{\bar{F}(x)}{m} = mG'(x),$$

откуда $\lambda_G(x) = G'(x)/\bar{G}(x) \geq m^{-1}$. Мы установили, что распределение G предшествует показательному в смысле $<_{mor}$. Отсюда в силу следствия 12 и леммы 3 получим требуемый результат

$$m^{-1} \int_t^\infty \bar{F}(x)\, dx \leq \exp(-t/m). \blacksquare$$

Однако существует порядок, который сильнее, чем $<_{mor}$, а именно порядок отношения правдоподобия $<_{LR}$.

Теорема 39 *Если* $X <_{LR} Y$, *то* $X <_{mor} Y$.

Доказательство. Как известно, определение 17 можно переписать в виде

$$dF_X(y)/dF_X(x) \leq dF_Y(y)/dF_Y(x) \quad \text{для } 0 \leq x < y.$$

Проинтегрировав по $y \in (x, \infty)$, получим

$$\frac{\int_x^\infty dF_X(y)}{dF_X(x)} \leq \frac{\int_x^\infty dF_Y(y)}{dF_Y(x)},$$

откуда следует, что $\lambda_X(x) \geq \lambda_Y(x)$ для любого x. $\blacksquare$

Задача 42 Показать, что если $X_i <_{mor} Y_i$, $i \geq 1$, то $\min_i X_i <_{mor} \min_i Y_i$.

Еще один порядок связан со средним остаточным временем жизни.

Определение 27 Говорят, что X предшествует Y в смысле *среднего остаточного времени жизни* ($X <_r Y$), если $r_X(x) \leq r_Y(x)$ для всех $x \geq 0$.

Отметим также еще одну актуарную интерпретацию функции r: это (условное) математическое ожидание размера ущерба, превосходящего франшизу (в страховании) или уровень собственного удержания (в перестраховании).

Замечание 8 В отличие от функций $m(x)$, $l(x)$ и $k(x)$, которые не возрастают, для $r(x)$ это не всегда так. Например, если $X \sim Par(a, b)$ с $b > 1$, то

$$r_X(x) = \frac{a + x}{b - 1}, \quad x \geq 0.$$

Задача 43 Если $r(x)$ убывающая функция x, то F имеет тип DMRL (decreasing mean residual lifetime). Проверить, что DMRL$\Rightarrow$ NBUE.

Получим следующую характеризацию порядка $<_r$.

Теорема 40 *Утверждение $X <_r Y$ выполнено тогда и только тогда, когда $m_X(x)/m_Y(x)$ убывает по x.*

Доказательство. Вспомнив связь $m(x)$ и $r(x)$, установленную в лемме 22, можно записать

$$\frac{m_X(x)}{m_Y(x)} = \frac{\mathrm{E}X}{\mathrm{E}Y} \exp\left(-\int_0^x [r_X^{-1}(t) - r_Y^{-1}(t)]\, dt\right).$$

Таким образом, отношение убывает тогда и только тогда, когда подинтегральная функция неотрицательна для всех t, т.е. $r_X(t) \le r_Y(t)$. ■

Покажем теперь, что порядок в смысле смертности сильнее, чем порядок среднего остаточного времени жизни.

Теорема 41 *Пусть $X <_{mor} Y$, тогда $X <_r Y$.*

Доказательство. В силу теоремы 36 можно записать

$$\frac{1 - F_X(y)}{1 - F_X(x)} \le \frac{1 - F_Y(y)}{1 - F_Y(x)} \quad \text{для } 0 \le x < y.$$

Проинтегрировав обе части неравенства от x до ∞, получим в силу (38), что $r_X(x) \le r_Y(x)$. ■

Теперь посмотрим, как связан порядок $<_r$ с двумя основными порядками $<_{sl}$ и $<_{st}$.

Теорема 42 *Если $X <_r Y$, то $X <_{sl} Y$.*

Доказательство. Мы хотим установить, что $m_X(x)/m_Y(x) \le 1$ при всех x. Согласно теореме 40 это отношение убывает с ростом x, поэтому достаточно проверить, что $m_X(0) \le m_Y(0)$. Для этого остается лишь вспомнить, что

$$m_X(0) = r_X(0) \le r_Y(0) = m_Y(0). ■$$

Обратное утверждение неверно, в чем можно убедиться, решив следующую задачу.

Задача 44 Пусть $X \sim (1,4;1/6)$, $Y \sim (2,4;1/6)$, тогда $X <_{sl} Y$, но $X \not<_r Y$.

Замечание 9 Если отказаться от предположения об абсолютной непрерывности распределений, то теорема 42 может оказаться неверна, как показывает следующая задача.

Задача 45 Пусть $X \sim Exp(2)$, $Y \sim *Exp(1;1/3)$, где $*Exp(a;p)$ означает свертку $Exp(a)$ и распределения, сосредоточенного в нуле, соответственно с весами p и $1-p$. тогда $X <_r$ Y, *но* $X \not<_{sl} Y$.

Замечание 10 Стохастический порядок не влечет за собой порядок $<_r$, что видно из следующей задачи.

Задача 46 Пусть случайная величина U равномерно распределена на отрезке $(0,1)$, а I — бернуллиевская случайная величина, принимающая значения 0 и 1 с вероятностью $1/2$, и не зависит от U. Проверить, что для случайных величин $X = IU + 2(1-I)$ и $Y = I(U+1) + 2(1-I)$ верно $X <_{st} Y$, но $X \not<_r Y$. (Указание: проверить, что $1 = \mathrm{E}(X-1|X>1) > \mathrm{E}(Y-1|Y>1) = 3/4$.)

3 Полный порядок рисков

3.1 Тарифный принцип

3.1.1 Чистая премия и страховая нагрузка

Как было отмечено во Введении, премия (страховой взнос) — это та денежная сумма, которую страхователь уплачивает страховщику за освобождение от риска. Во Франции термин *премия* (prime) употребляется, если страховщик — это акционерная страховая компания (société anonime). Если же речь идет об обществе взаимного страхования (société mutuelle), то говорят о страховом взносе (cotisation). Для краткости далее будем говорить о премии.

Размер премии определяется с помощью некоторого *тарифного принципа* (premium calculation principle), т.е. некоторого функционала H, который ставит в соответствие риску X действительное число $P = H(X)$, равное размеру требуемой премии. Выбор адекватного принципа подсчета премий — одна из важнейших задач актуарной науки.

Базируясь на законе больших чисел, страхование пришло к так называемому *принципу эквивалентности*, который предполагает равенство (в среднем) обязательств страховщика и страхователя. Согласно этому принципу размер премии по риску X равен $P = \mathrm{E}X$. Такая премия называется *чистой* (или нетто) премией.

Однако использование центральной предельной теоремы показывает, что чистая премия не дает страховщику возможности произвести все возмещения убытков (или их большую часть). В самом деле, пусть имеется n независимых одинаково распределенных рисков X_i, $i = \overline{1,n}$. Тогда совокупный размер ущерба S_n равен $\sum_{i=1}^n X_i$, его среднее $\mathrm{E}S_n = nP$ равно сумме собранных премий. Подсчитаем $\mathrm{P}(S_n > nP)$, т.е. вероятность того, что страховой компании потребуются дополнительные средства. Иными словами, нас интересует

$$\mathrm{P}(S_n - \mathrm{E}S_n > 0) = \mathrm{P}\left(\frac{S_n - \mathrm{E}S_n}{\sqrt{\mathrm{D}S_n}} > 0\right) \tag{44}$$

(в предположении, что X_i обладают дисперсией).

Согласно центральной предельной теореме при больших n правая часть (44) близка к $1/2$, т.е. примерно в половине случаев компания будет нести убытки.

Заметим, что в данном случае предполагается, что целью компании является лишь перераспределение риска, а ее функцией полезности является $u(x) = I_{[0,\infty)}(x)$.

Задача 47 Оценить дополнительную сумму A_n, которая потребуется компании, чтобы для заданного $\varepsilon > 0$ имело место неравенство $\mathrm{P}(S_n > nP + A_n) < \varepsilon$.

Приведенные рассуждения (см. также [3]) показывают, что тарифный принцип должен удовлетворять условию $H(X) > \mathrm{E}X$. Считается (см. например, [16]), что полисодержатели менее склонны к риску, чем страховщики, поэтому готовы заплатить больше, чем средний ожидаемый размер ущерба, чтобы избавиться от неопределенности. Таким образом, к чистой премии добавляется *страховая надбавка* или нагрузка безопасности (safety loading). Размер требуемой нагрузки может задаваться либо в явном виде, либо как решение некоторых уравнений.

Подчеркнем, что пока мы не принимаем во внимание административные издержки компании, а также расходы, связанные с продажей полисов, например, комиссионные, получаемые страховыми агентами, которые включаются в окончательную *коммерческую премию*.

Очевидно, что любой тарифный приницип позволяет вполне упорядочить риски.

Определение 28 Предпочтительнее тот риск, которому соответствует *меньшая премия*.

Могут возникать различные случаи в зависимости от способа назначения премии (иначе говоря, от выбора страховой нагрузки). При этом многие тарифные принципы не сохраняют тот или иной порядок рисков как случайных величин.

Чаще всего риски сравниваются с помощью порядков для случайных величин (например, стохастического $<_{st}$, стоп-лосс $<_{sl}$ или выпуклого $<_{cx}$, т.е. порядка стоп-лосс, усиленного предположением о равенстве средних) при условии, что страховщик получает за них одну и ту же премию. Эта гипотеза иногда может оказаться ограничительной, так как менее благоприятный риск может быть сделан более привлекательным за счет выплаты высокой премии.

3.1.2 Виды премий

Рассмотрим некоторые наиболее часто используемые на практике тарифные принципы. Как будет видно, не во всех случаях порядок премий будет соответствовать стохастическому порядку.

- **Принцип среднего** (Expected value principle)

Пусть $\alpha > 0$ — коэффициент страховой нагрузки. Как известно, чистая премия (net premium) определяется как $\mathrm{E}X$. Тогда премия с нагрузкой (или надбавкой) (gross premium) задается следующим образом: $P_X = \mathrm{E}X(1+\alpha)$. При $\alpha = 0$ мы возвращаемся к упомянутому выше принципу эквивалентности (net premium principle).

Нетрудно понять, что стохастический порядок обладает свойством (1°). Действительно, если $X <_{st} Y$, то

$$\mathrm{E}X = \int_{-\infty}^{\infty} x\, dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F_X(t))\, dt$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F_Y(t))\, dt = \mathrm{E}Y.$$

Отсюда очевидным образом получаем $P_X \leq P_Y$, т.е. чем больше риск, тем выше премия.

- **Принцип дисперсии** (Variance principle)

Предположим теперь, что страховая нагрузка подсчитывается на основе дисперсии. При этом задано некоторое $\gamma > 0$ так, что премия-брутто равна $P_X = \mathrm{E}X + \gamma \mathrm{D}X$. (Чем больше γ, тем в большей степени величина премии зависит от разброса значений выплат.)

Оказывается, что можно найти такие $X <_{st} Y$, для которых $P_X > P_Y$. В самом деле, зададим распределения случайных величин X_p, $0 \leq p \leq 1$, следующим образом $\mathrm{P}(X_p = 0) = p = 1 - \mathrm{P}(X_p = 10/\gamma)$.

Тогда

$$\mathrm{E}X_p = (10/\gamma)(1-p), \quad \mathrm{E}X_p^2 = (100/\gamma^2)(1-p),$$
$$\mathrm{D}X_p = (100/\gamma)[(1-p)-(1-p)^2] = (100/\gamma^2)p(1-p).$$

Таким образом,

$$P_X = \mathrm{E}X + \gamma \mathrm{D}X = (10/\gamma)(1-p) + (100/\gamma)p(1-p) =$$
$$= 10(1-p)(1+10p)/\gamma.$$

Беря производную по p от P_X, получаем

$$\frac{\partial P_X}{\partial p} = \frac{10}{\gamma}(9-20p) > 0 \quad \text{при} \quad p < 0,45.$$

Следовательно, с ростом p премия растет, а риск X_p стохастически убывает, что является *существенным недостатком* этого принципа подсчета премии.

- **Принцип среднеквадратического отклонения** (Standard deviation principle)

Здесь премия подсчитывается по формуле

$$P_X = \mathrm{E}X + \beta\sqrt{\mathrm{D}X}.$$

Задача 48 Сохраняется ли стохастический порядок рисков при данном способе подсчета премий?

- **Голландский принцип** (Dutch principle)

Этот принцип, рассмотренный в [33], выглядит следующим образом:

$$H(X) = \mathrm{E}X + \theta \mathrm{E}I_{(\alpha \mathrm{E}X, \infty]}(X), \quad \alpha \geq 1,\ 0 \leq \theta \leq 1.$$

Задача 49 Проверить, что этот принцип обладает следующими важными свойствами:

1) масштабная инвариантность $H(aX) = aH(X)$,
2) инвариантность при сдвиге $H(X+b) = H(X) + b$,
3) сохраняет стоп-лосс порядок.

Хотя форма страховой нагрузки описывается в терминах, идущих от перестрахования, имеется достаточно сильное ограничение: относительная нагрузка менее 100%. А на практике в имущественном страховании при тарификации высоких траншей (layer) нагрузка может в несколько раз превышать среднее.

Теперь обратимся к тарифным принципам, где нагрузка задается неявно.

- **Премия нулевой полезности** (Zero utility principle)

Премия P_X риска X — это решение уравнения $\mathrm{E}u(P-X) = u(0)$, т.е. она выбирается таким образом, чтобы средняя полезность до и после страхования была одна и та же. Функция полезности предполагается неубывающей. Пусть имеется два риска $X <_{st} Y$. Как было доказано в теореме 4, найдутся такие $X' \overset{d}{=} X$ и $Y' \overset{d}{=} Y$, что $\mathrm{P}(X' \leq Y') = 1$. Тогда $u(P-Y') <_1 u(P-X')$ для любого P. Поскольку математические ожидания задаются распределением случайных величин, имеем $\mathrm{E}u(P-X) = \mathrm{E}u(P-X') \geq \mathrm{E}u(P-Y') = \mathrm{E}u(P-Y)$. Отсюда в свою очередь вытекает, что $P_X \leq P_Y$.

Значит, порядок премий *совпадает* со стохастическим порядком.

При специальном выборе функции полезности, а именно, если она экспоненциальная, можно получить явный вид премии. В самом деле, пусть $u(x) = -\exp(-\alpha x)$. Премия удовлетворяет условию $\mathrm{E}\exp\{-\alpha(P-X)\} = 1$, откуда $P_X = (1/\alpha)\ln \mathrm{E}\exp(\alpha X)$. Этот частный случай носит название *экспоненциального* принципа (exponential principle).

- **Премия Эсшера** (Esscher principle)

Введем сначала *преобразование Эсшера*. Пусть $g_X(h) = \mathrm{E}e^{hX}$ — производящая функция моментов $(-\infty < h < \infty)$. Определим случайную величину X_h, имеющую функцию распределения $F_{X,h}$, задаваемую соотношением $dF_{X,h} = e^{hx}dF_X(x)/g_X(h)$. У нее будет такая же область значений, что и у X, но они будут приниматься с другими вероятностями. При $h = 0$ получается исходное распределение.

Если $h > 0$, отношение $dF_{X,h}(x)/dF_X(x) = e^{hx}/g_X(h)$ растет с ростом x. Значит, начиная с некоторого c отношение станет больше 1, в то время как при меньших значениях x оно будет меньше, так как $F_{X,h}$ и F_X — это функции распределения. По критерию достаточности для стохастического порядка (теорема 6) оказывается, что $X <_{st} X_h$ при $h > 0$, а при $h < 0$ порядок обратный.

Премией Эсшера Π_X называется $\mathrm{E}X_h$ при некотором $h > 0$. В силу стохастического возрастания преобразования Эсшера при положительных h оказывается $\Pi_X > \mathrm{E}X$, т.е. в самом деле получается премия с нагрузкой.

Однако этот подсчета премий обладает тем же недостатком, что и принцип дисперсии. Он *не сохраняет* стохастический порядок, и у большего риска может оказаться меньшая премия.

Задача 50 Совместное распределение двух рисков X и Y задается следующим образом при некотором $h > 0$:

$$\mathrm{P}(X = 0, Y = 0) = 1/3, \quad \mathrm{P}(X = 0, Y = 2/(3h)) = 1/3,$$

$$\mathrm{P}(X = 3/h, Y = 3/h) = 1/3.$$

Необходимо проверить, что $X <_{st} Y$, но $\Pi_X > \Pi_Y$.

Этот принцип был введен в работе [11] как Парето-оптимальное решение в модели страхового рынка в случае, когда все его участники имеют экспоненциальные функции полезности и независимые страховые выплаты.

Тот же самый принцип получится, если речь идет о минимизации средних потерь страховщика в предположении, что функция потерь имеет вид

$$L(x, P) = (P - x)^2 \exp(hx).$$

Замечание 11 Используя вместо $\exp(hx)$ другие весовые функции, можно получить целое семейство тарифных принципов, напоминающих принцип Эсшера. Все они (согласно теореме 31) сохраняют порядок отношения правдоподобия, более сильный чем стохастический.

- **Швейцарский принцип** (Swiss principle)

Премия P является решением уравнения

$$\mathrm{E}f(X-\lambda P)=f((1-\lambda)P), \quad \lambda\in[0,1],$$

здесь $f(x)$ — вещественная дважды дифференцируемая функция с $f'>0$, $f''\geq 0$. Этот принцип был введен в [12].

Если положить $\lambda=0$, то получится ***обобщенный принцип среднего***, $P=f^{-1}(\mathrm{E}f(X))$, который подробно будет рассмотрен в следующем параграфе. При $\lambda=1$ приходим к принципу нулевой полезности (при этом $u(x)=-f(-x)$). Взяв $f(x)=x\exp(hx)$, $\lambda=1$, получим принцип Эсшера.

- **Принцип Орлича** (Orlicz principle)

Для нахождения P в данном случае надо решить уравнение

$$\mathrm{E}f(XP^{-\delta})=f(P^{1-\delta}), \quad \delta\in[0,1],$$

функция f непрерывная строго возрастающая. При $\delta=0$ снова получаем обобщенный принцип среднего.

Задача 51 Какие из введенных тарифных принципов обладают инвариантностью относительно сдвига и изменения масштаба? Какие порядки они сохраняют?

3.1.3 Обобщенный принцип среднего

Покажем теперь, что наложив определенные условия на поведение функционала H, задающего размер премии, можно получить его явный вид.

Поскольку, основываясь на размере премии, можно упорядочить *все* риски, естественно предположить, что полученный порядок согласуется со стохастическим порядком. А именно,

- 1) если $X<_{st}Y$, то $H(X)\leq H(Y)$, причем равенство только при $F_X(t)\equiv F_Y(t)$.

(Это требование исключает премию Эсшера или нагрузку с помощью дисперсии.)

Далее, обычно в теории риска издержки страховой компании не принимаются во внимание, т.е. рассматривается та часть премии, которая предназначена для возмещения убытков. Поэтому естественно предположить, что для вырожденного риска не требуется нагрузка, иначе

- 2) Если $\mathrm{P}(X = c)$, то $H(X) = c$

Если X и X' — два риска с одинаковыми премиями, то тарифный принцип их не различает. Разумно потребовать, чтобы это свойство сохранялось при смешивании, с любым риском Y.

- 3) Если $H(X) = H(X')$, то $H[pF_X + (1-p)F_Y] = H[pF_{X'} + (1-p)F_Y]$, $\forall p \in [0,1]$.

Замечание 12 Нетрудно увидеть сходство условий 1) и 3) с аксиомами $EU1$, $EU4$, $EU5$ теории полезности.

Теорема 43 *Условия* 1) – 3) *выполнены тогда и только тогда, когда* $H(X) = f^{-1}(\mathrm{E}f(X))$ *для некоторой непрерывной возрастающей вещественной функции* $f(x)$.

Доказательство. Начнем с проверки более простого утверждения. Пусть $H(X) = f^{-1}(\mathrm{E}f(X))$, покажем, что выполнены условия 1)-3).

Если $X <_{st} Y$ и $F_X \not\equiv F_Y$, то $\mathrm{E}f(X) < \mathrm{E}f(Y)$, а значит, $H(X) < H(Y)$, т.е. первое условие справедливо. Второе условие очевидно имеет место, так как $H(c) = f^{-1}(\mathrm{E}f(c)) = c$.

Определение $H(X)$ иначе можно представить в виде $f(H(X)) = \mathrm{E}f(X)$. Поэтому для проверки третьего условия достаточно записать следующую цепочку равенств.

$$f(H[pF_X + (1-p)F_Y]) =$$

$$= p\int f(x)\,dF_X(x) + (1-p)\int f(x)\,dF_Y(x) =$$

$$= p\int f(x)\,dF_{X'}(x) + (1-p)\int f(x)\,dF_Y(x) =$$

$$f(H[pF_{X'} + (1-p)F_Y]).$$

В обратную сторону доказательство проводится в несколько этапов. Сначала рассматриваются вырожденные риски, затем принимающие два значения 0 и a для некоторого $a > 0$. Рассматривая смеси, можно получить распределения с конечным числом n значений на отрезке $[0, a]$. Последний этап — это предельный переход при $a \to \infty$ и $n \to \infty$.

Итак, пусть Θ_s — функция распределения риска, сосредоточенного в точке $s \geq 0$. Положим $\varphi(p) = H[p\Theta_a + (1-p)\Theta_0]$. По свойству 2) имеем $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(1) = a$. Согласно 1) функция $\varphi(p)$ строго возрастает, а ее непрерывность докажем от противного.

В силу возрастания функция $\varphi(p)$ имеет не более счетного числа точек разрыва. Предположим, что p_0 является точкой разрыва и докажем, что тогда и в точке $(p_0 + p)/2$ также будет разрыв для некоторого интервала изменения p, что невозможно.

По свойству 2) имеем $H(\Theta_s) = s$. Возьмем $s = \varphi(q)$, тогда

$$H(\Theta_{\varphi(q)}) = \varphi(q) = H[q\Theta_a + (1-q)\Theta_0].$$

Согласно 3) получим

$$H\left(\frac{1}{2}\Theta_{\varphi(q)} + \frac{1}{2}\Theta_{\varphi(r)}\right) = H\left[\frac{1}{2}\left(q\Theta_a + (1-q)\Theta_0\right) + \frac{1}{2}\Theta_{\phi(r)}\right],$$

применяя второй раз это свойство, имеем

$$H\left[\frac{1}{2}\left(q\Theta_a + (1-q)\Theta_0\right) + \frac{1}{2}\left(r\Theta_a + (1-r)\Theta_0\right)\right] =$$

$$= H\left[\frac{1}{2}(q+r)\Theta_a + (1 - \frac{1}{2}(q+r))\Theta_0\right] = \varphi\left(\frac{1}{2}(q+r)\right).$$

Пусть $t = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varphi(p_0 + \varepsilon)$ и $\varphi(p)$ имеет разрыв справа в точке p_0, т.е. $\varphi(p_0) < t$. Смешаем (с весами 1/2) распределения, сосредоточенные в точках $\varphi(p_0)$ и $\varphi(p)$ для произвольного $p < p_0$, тогда

$$\varphi\left(\frac{1}{2}(p + p_0)\right) = H\left[\frac{1}{2}\Theta_{\varphi(p)} + \frac{1}{2}\Theta_{\varphi(p_0)}\right] \tag{45}$$

Согласно условию 1) при $p < p_0$ правая часть (45) *строго* меньше, чем

$$H\left[\frac{1}{2}\Theta_{\varphi(p)} + \frac{1}{2}\Theta_t\right] \le H\left[\frac{1}{2}\Theta_{\varphi(p)} + \frac{1}{2}\Theta_{\varphi(p_0+\varepsilon)}\right] = \\ = \varphi\left(\frac{1}{2}(p + p_0 + \varepsilon)\right),$$

т.е. в точке $(p + p_0)/2$ у φ имеется разрыв. Аналогично показывается, что не может быть разрыва слева.

Так как φ непрерывна и возрастает, у нее есть обратная функция $f(u) = \varphi^{-1}(u)$, которая тоже возрастает и непрерывна на $[0, a]$. Пусть $u = \varphi(t)$, т.е. $t = f(u)$, тогда

$$H(\Theta_u) = u = H[t\Theta_a + (1-t)\Theta_0] = H[(1 - f(u))\Theta_0 + f(u)\Theta_a]$$

В силу 3), если $H(X) = H(X')$ и $H(Y) = H(Y')$, то $H[tF_X + (1-t)F_Y] = H[tF_{X'} + (1-t)F_{Y'}]$. Используя этот результат, легко доказать, что если $H(F_j) = H(G_j)$, $j \ge 1$, и $p_j \ge 0$, $\sum_j p_j = 1$, то $H(\sum_j p_j F_j) = H(\sum_j p_j G_j)$. Поскольку любое дискретное распределение F_X, сосредоточенное на $[0, a]$, можно записать в виде $F_X(x) = \sum_j p_j \Theta_{c_j}(x)$, то

$$H(F_X) = H[\sum_j p_j((1 - f(c_j))\Theta_0 + f(c_j)\Theta_a)] =$$

$$= H[(1 - \sum_j p_j f(c_j))\Theta_0 + \sum_j p_j f(c_j)\Theta_a] = \varphi(\sum_j p_j f(c_j)) =$$

$$= f^{-1}(\sum_j p_j f(c_j)) = f^{-1}(\mathrm{E} f(X)).$$

Переход от дискретных распределений к непрерывным предлагается провести в виде *упражнения.* ■

Еще одно полезное требование — аддитивность. А именно,

- 4) если риски X и Y независимы, то $H(X + Y) = H(X) + H(Y)$.

При добавлении этого предположения функция f из теоремы 43 может быть экспоненциальной или линейной.

Теорема 44 *Условия* 1) − 4) *выполнены тогда и только тогда, когда функция* f *в обобщенном принципе среднего имеет вид* $f(x) = \exp(\alpha x)$ *для некоторого* $\alpha > 0$ *или* $f(x) = x$.

Доказательство. Если $f(x) = x$, то $H(X + Y) = H(X) + H(Y)$ для любых рисков X и Y, а не только независимых. Пусть теперь $f(x) = \exp(\alpha x)$, тогда $\exp(\alpha H(X)) = \mathrm{E}\exp(\alpha X)$, откуда $H(X) = (1/\alpha)\ln \mathrm{E}\exp(\alpha X)$. Если X и Y независимы, то

$$H(X+Y) = \alpha^{-1}\ln \mathrm{E}\exp(\alpha(X+Y)) =$$
$$= \alpha^{-1}\ln \mathrm{E}(\exp(\alpha X)\cdot \exp(\alpha Y)) = H(X) + H(Y).$$

Перейдем к противоположному утверждению. Для простоты будем предполагать дополнительно, что рассматриваемые далее функции дважды дифференцируемы.

Из предположений 2) и 4) следует инвариантность при сдвиге, иначе говоря, $H(X + c) = H(X) + c$ для любой константы c.

Пусть X_q — это бернуллиевская случайная величина, иначе говоря, $\mathrm{P}(X_q = 1) = q = 1 - \mathrm{P}(X_q = 0)$. Обозначим $g(q) = H(X_q)$, тогда $g(0) = 0$ и $g(q) = f^{-1}(\mathrm{E}f(X_q))$. В силу инвариантности при сдвиге для любой константы c

$$f(g(q) + c) = f(H(X_q + c)) = f(f^{-1}(\mathrm{E}f(X_q + c))) =$$
$$= \mathrm{E}f(X_q + c) = qf(1 + c) + (1 - q)f(c).$$

Продифференцируем обе части по q и рассмотрим правую производную в нуле ($q = 0$).

$$g'(q)f'(g(q) + c))|_{q=0} = g'(0)f'(c) = f(1 + c) - f(c).$$

Отсюда вытекает, что $g'(0) > 0$. Продифференцировав еще раз, имеем

$$g''(q)f'(g(q) + c) + (g'(q))^2 f''(g(q) + c) = 0.$$

Положив $q = 0$, придем к равенству

$$g''(0)f'(c) + (g'(0))^2 f''(c) = 0,$$

т.е. справедливо дифференциальное уравнение, которое удобно переписать в виде

$$\frac{f''(c)}{f'(c)} = -\frac{g''(0)}{(g'(0))^2},$$

где правая часть не зависит от c. Обозначив ее через α, нетрудно проверить, что решениями уравнения являются $f(x) = x$ (при $\alpha = 0$) или же $f(x) = \exp(\alpha x)$ (при $\alpha \neq 0$). ■

Таким образом, добавление аддитивности ведет к экспоненциальной функции f или, что то же самое к экспоненциальной полезности. Как известно, α представляет собой коэффициент неприятия риска, однако не существует процедуры для его определения. Однако величину α можно задать, добавив еще одно условие:

- 5) вероятность разорения не превосходит некоторое заданное число ε.

Обозначим через u начальный капитал (или собственные фонды) компании, т.е. ту дополнительную сумму, которую компания может потратить на уплату возмещений.

Теорема 45 *При выполнении условий* 1) − 5) *размер премии равен* $H(X) = (1/\alpha) \ln \mathrm{E} \exp(\alpha X)$, *где коэффициент неприятия риска выражается через начальный капитал и вероятность разорения* $\alpha = u^{-1} \ln \varepsilon^{-1}$.

Доказательство опирается на неравенство Лундберга и будет рассмотрено в разделе 4. ■

3.1.4 PH-преобразования

Стохастический порядок может быть использован для получения (в неявном виде) страховой нагрузки. В самом деле, если $X <_{st} Y$, то $\mathrm{E}X \leq \mathrm{E}Y$. Предлагается вместо исходного риска рассмотреть риск Y и применить к нему "принцип эквивалентности т.е. подсчитать соответствующую ему чистую премию. Записывая

$$\mathrm{E}Y = \int_0^\infty (1 - F_Y(t))\, dt =$$
$$= \left(1 + \frac{\int_0^\infty (F_X(t) - F_Y(t))\, dt}{\int_0^\infty (1 - F_X(t))\, dt}\right) \mathrm{E}X,$$

мы видим, что полученное выражение представляет собой применение принципа среднего со страховой нагрузкой

$$\alpha = \int_0^\infty (F_X(t) - F_Y(t))\,dt \Big/ \int_0^\infty (1 - F_X(t))\,dt,$$

которая неотрицательна в силу стохастического доминирования Y.

Таким образом, мы видим, что используемые в страховании жизни таблицы смертности второго рода (valuation tables) есть ни что иное, как переход от чистой премии к принципу среднего.

Специальный выбор случайной величины Y предложен в работе Wang'a [35]. Этот способ называется методом PH-преобразований (proportional hazards transforms). Происхождение такого названия можно объяснить следующим образом.

При имущественном страховании (или от несчастного случая) размер риска (ущерба) X — это неотрицательная случайная величина с функцией распределения $F_X(t) = \mathrm{P}(X \le t)$. Следовательно, размер ущерба может рассматриваться как "время жизни". Если распределение X абсолютно непрерывно, то согласно определению 26 можно ввести "интенсивность смертности"(или отказа) $\lambda_X(t) = F_X'(t)(1 - F_X(t))^{-1}$. Неблагоприятная ситуация для страховщика означает, что реализовавшийся ущерб оказался больше ожидаемого. Иначе говоря, "время жизни"длиннее среднего, а "интенсивность смертности"ниже, чем ожидалось (т.е. ситуация противоположна той, что возникает при страховании жизни, когда опасность представляет высокая смертность).

Для того чтобы обезопасить себя, при подсчете премии страховщик может (пропорционально) уменьшить интенсивность и рассмотреть (при $t \ge 0$)

$$\lambda_Y(t) = \lambda_X(t)/\rho, \quad \rho > 1, \tag{46}$$

вводя таким образом новую случайную величину Y, у которой согласно (35)

$$1 - F_Y(t) = (1 - F_X(t))^{1/\rho}. \tag{47}$$

Определение 29 Отображение $\Pi_\rho : X \to Y$, где функция распределения F_Y определена с помощью (47), называется PH-преобразованием (пропорциональное изменение интенсивности.

Замечание 13 Следует отметить, что условие (47) является более общим, чем (46), так как оно применимо не только к абсолютно непрерывным распределениям.

Если же X имеет плотность $f_X(t)$, то у Y также существует плотность $f_Y(t) = [\rho^{-1}\bar{F}_X(t)^{1/\rho-1}]f_X(t)$. Следовательно, PH-преобразование задается весовой функцией $g(t) = (1/\rho)\bar{F}_X(t)^{1/\rho-1}$, которая растет с ростом t, т.е. неблагоприятным событиям придается больший вес.

Определение 30 *Скорректированной по риску* премией (risk-adjusted premium) для X называется

$$\pi_\rho(X) = \mathrm{E}[\Pi_\rho(X)] = \int_0^\infty (1 - F_X(t))^{1/\rho}\, dt, \tag{48}$$

величина $\rho \geq 1$ носит название *индекса неприятия риска.*

Если $\rho = 1$, то получаем чистую премию $\pi_1(X) = \mathrm{E}X$.

Лемма 24 *Скорректированная премия сохраняет порядок в смысле смертности, т.е.* $X <_{mor} Y \Rightarrow \pi_\rho(X) \leq \pi_\rho(Y)$.

Доказательство очевидно в силу определения 30. ■

Замечание 14 Метод PH-преобразований согласуется с вышеупомянутой практикой в страховании жизни, когда при подсчете премий смертность q_x увеличивается на несколько процентов. Поскольку $q_x \approx \lambda(x)$, то это значит, что вместо $\lambda(x)$ рассматривается $\alpha\lambda(x)$ с $\alpha > 1$ (т.е. берется Π_ρ с $0 < \rho < 1$).

Задача 52 Найти PH-преобразование и скорректированную премию для экспоненциального распределения с параметром a, равномерного распределения на $[0, a]$, распределения Парето с параметрами (α, λ) и распределения Вейбулла.

Перейдем к рассмотрению свойств премии π_ρ для $\rho \geq 1$.

Лемма 25 *Скорректированная премия дает положительную нагрузку, точнее,*

$$\mathrm{E}X \leq \pi_\rho(X) \leq \max_\omega X(\omega)$$

и

$$\lim_{\rho\to 1}\pi_\rho(X) = \mathrm{E}X, \quad \lim_{\rho\to\infty}\pi_\rho(X) = \max_\omega X(\omega).$$

Доказательство очевидным образом следует из (48). ■

Лемма 26 *Если* $\mathrm{P}(X = c) = 1$*, то* $\pi_\rho(X) = c$*.*

Доказательство. Если риск X вырожденный, то

$$1 - F_X(t) = \begin{cases} 1, & t < c, \\ 0, & t \geq c. \end{cases}$$

Поэтому

$$\pi_\rho(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(t))^{1/\rho}\,dt = \int_0^c dt = c. \blacksquare$$

Таким образом, скорректированная премия не дает неоправданной нагрузки.

Лемма 27 *Премия* π_ρ *масштабно инвариантна, т.е.* $\pi_\rho(aX) = a\pi_\rho(X)$ *для любого* $a > 0$*.*

Доказательство. Пусть $Z = aX$, тогда $F_Z(t) = F_X(t/a)$. Следовательно,

$$\pi_\rho(Z) = \int_0^\infty (1-F_X(t/a))^{1/\rho}\,dt = a\int_0^\infty (1-F_X(u))^{1/\rho}\,du = a\pi_\rho(X). \blacksquare$$

Таким образом, размер премии не зависит от выбора денежной единицы.

Из леммы 27 вытекает также следующий результат, полезный для сострахования:

$$\pi_\rho(X) = \pi_\rho(aX) + \pi_\rho((1-a)X).$$

Лемма 28 *Премия* π_ρ *инвариантна относительно сдвига, т.е.* $\pi_\rho(X + b) = \pi_\rho(X) + b$*.*

Доказательство. Пусть $Z = X + b$, тогда $F_Z(t) = F_X(t-b)$. Поэтому имеем

$$\pi_\rho(Z) = \int_0^b dt + \int_b^\infty (1 - F_X(t-b))^{1/\rho}\, dt = b + \pi_\rho(X). \blacksquare$$

Иначе говоря, леммы 27 и 28 показывают линейность скорректированной премии: $\pi_\rho(aX+b) = a\pi_\rho(X) + b$.

Теорема 46 *Скорректированная премия сохраняет стохастический порядок:* $X <_{st} Y \Rightarrow \pi_\rho(X) \le \pi_\rho(Y)$.

Доказательство легко следует из (48), так как $X <_{st} Y \Leftrightarrow F_X(t) \ge F_Y(t)$, $\forall t$. $\blacksquare$

Задача 53 Сохраняет ли скорректированная премия стоп-лосс порядок?

Лемма 29 *Премия* $\pi_\rho(X)$ *— возрастающая функция* ρ*:*

$$\rho_1 > \rho_2 \ge 1 \Rightarrow \pi_{\rho_1}(X) > \pi_{\rho_2}(X).$$

Доказательство очевидно, так как $\bar{F}_X(t)^{1/\rho_1} > \bar{F}_X(t)^{1/\rho_2}$ (для тех t, для которых $\bar{F}_X(t) < 1$), следовательно, $\pi_{\rho_1}(X) > \pi_{\rho_2}(X)$. $\blacksquare$

Значит, для одного и того же риска X скорректированная премия будет больше для того, кто менее склонен к риску (т.е. имеет больший индекс ρ неприятия риска.) Таким образом, премия $\pi_\rho(X)$ отражает не только "относительную опасность"риска, но и отношение лица, принимающего решение, к имеющейся неопределенности.

Считается, что ρ_0(полисодержателя)$>$ ρ_1(страховщика)$>$ ρ_2(перестраховщика). Поэтому для заданного риска X имеется соотношение $\pi_{\rho_0}(X) > \pi_{\rho_1}(X) > \pi_{\rho_2}(X)$, что позволяет объяснить механизм страхования (и перестрахования) без использования функций полезности.

Пример 3 В качестве иллюстрации рассмотрим три риска с одним и тем же средним b: X имеет равномерное распределение на отрезке $[0, 2b]$ (т.е. $\bar{F}_X(t) = 1 - t/(2b)$ при $0 \le t \le 2b$), Y — показательное с параметром b^{-1} ($\bar{F}_Y(t) = \exp(-t/b)$ при $t \ge 0$),

Z — распределение Парето ($\bar{F}_Z(t) = b^2/(b+t)^2$ при $t \geq 0$). Тогда (см. задачу 52) мы получим

$$\pi_\rho(X) = \frac{2\rho}{\rho+1}b, \quad \pi_\rho(Y) = \rho b, \quad \pi_\rho(Z) = \begin{cases} \rho b(2-\rho)^{-1}, & \rho < 2, \\ \infty, & \rho \geq 2. \end{cases}$$

Положив $\rho_0 = 1,8$, $\rho_1 = 1,5$ и $\rho_2 = 1,2$, мы получим следующие численные результаты:

ρ	X	Y	Z
$1,2$	$1,09b$	$1,2b$	$1,5b$
$1,5$	$1,2b$	$1,5b$	$3,0b$
$1,8$	$1,29b$	$1,8b$	$9,0b$

Покажем теперь, что наличие неизвестного параметра приводит к дополнительной нагрузке.

Теорема 47 *Пусть распределение X зависит от (случайного) параметра θ, тогда $\pi_\rho(X) \leq \mathrm{E}_\theta \pi_\rho(X|\theta)$.*

Доказательство. Применяя неравенство Йенсена к вогнутой функции $h(x) = x^{1/\rho}$, получим

$$\mathrm{E}_\theta h(\bar{F}_X(t|\theta)) \leq h(\mathrm{E}_\theta \bar{F}_X(t|\theta)) = h(\bar{F}_X(t)).$$

Отсюда следует

$$\pi_\rho(X) = \int_0^\infty h(\bar{F}_X(t))\,dt \geq \int_0^\infty \mathrm{E}_\theta h(\bar{F}_X(t|\theta))\,dt = \mathrm{E}_\theta \pi_\rho(X|\theta),$$

причем если у θ невырожденное распределение, то имеет место строгое неравенство. ■

Следствие 13 *Пусть $Y \neq Z$, а X — их смесь с весами соответственно a и $1-a$ $(0 < a < 1)$, тогда при $\rho > 1$*

$$\pi_\rho(X) > a\pi_\rho(Y) + (1-a)\pi_\rho(Z).$$

Наконец, получим результат, полезный для перестрахования.

Определение 31 Назовем $(a, a+h]$-траншем (layer) риска X случайную величину $J_{(a,a+h]}(X) = \min(h, (X-a)^+)$.

Если риск X фиксирован, то для краткости будем писать $J_{(a,a+h]}$. Очевидно, что

$$\bar{F}_{J_{(a,a+h]}}(t) = \begin{cases} \bar{F}_X(t+a), & 0 \le t < h, \\ 0, & t \ge h. \end{cases} \tag{49}$$

Теорема 48 *Если риск X разделен на транши $(x_i, x_{i+1}]$, $i \ge 0$, $0 = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots$, т.е. $X = \sum_{i=0}^{\infty} J_{(x_i,x_{i+1}]}$, то скорректированная премия X равна сумме соответствующих премий траншей*

$$\pi_\rho(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_\rho(J_{(a,a+h]}).$$

Доказательство. В силу (49) мы имеем

$$\pi_\rho(J_{(x_i,x_{i+1}]}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \bar{F}_X(t)^{1/\rho}\, dt.$$

Суммируя эти выражения по i, получим необходимый результат

$$\sum_{i=0}^{\infty} \pi_\rho(J_{(x_i,x_{i+1}]}) = \int_0^{\infty} \bar{F}_X(t)^{1/\rho}\, dt = \pi_\rho(X). \blacksquare$$

Задача 54 Показать, что принцип дисперсий не обладает аддитивностью по траншам. Более того, разделив риск на малые транши, можно почти полностью исключить страховую нагрузку.

В работе [34] показано, что единственный принцип подсчета премий, обладающий аддитивностью (при разделе на транши), основан на преобразованных распределениях, при этом цена каждого транша подсчитывается как средний ущерб по этому траншу (для преобразованного распределения).

При этом было предложено использовать масштабное преобразование $Y = cX$ или степенное $Y = X^\eta$. Однако второе обладает серьезным недостатком: результат зависит от выбора денежной единицы, так как $(aX)^\eta = a^\eta X^\eta$.

Замечание 15 Wang'ом был рассмотрен более широкий класс преобразований, включающий как частный случай PH-преобразование. Основная идея состоит в том, что надо преобразовывать не саму случайную величину X, а хвосты ее распределения. В самом деле, если речь идет о чистой премии транша $(t, t+dt]$, то с точностью до бесконечно малых она равна $\bar{F}_X(t)\,dt$, т.е. $\bar{F}_X(t)$ можно интерпретировать как "плотность чистой стоп-лосс премии". Поэтому естественно рассматривать "скорректированную"по риску плотность вида $\bar{F}_Y(t) = g[\bar{F}_X(t)]$ и подсчитывать премию как

$$H(X) = \int_0^\infty g[\bar{F}_X(t)]\,dt. \qquad (50)$$

Если предположить, что $g(u)$ — возрастающая вогнутая функция, $g(0) = 0$, $g(1) = 1$, то указанный принцип обладает целым рядом полезных свойств.

Задача 55 Проверить, что для принципа (50) справедливы аналоги лемм 25-28 и теорем 47, 48.

Задача 56 Сохраняет ли принцип (50) порядки $<_{st}$ и $<_{sl}$?

Задача 57 Показать, что для любых двух рисков X и Y имеет место неравенство.

$$H(X+Y) \leq H(X) + H(Y.$$

Замечание 16 Предложенный Denneberg'ом в [13] принцип абсолютного отклонения (от медианы) является частным случаем принципа (50) с

$$g(x) = \begin{cases} (1+r)x, & 0 \leq x < 0,5, \\ r + (1-r)x, & 0,5 \leq x \leq 1. \end{cases} \qquad (51)$$

Если $\bar{F}_X(0) < 0,5$, то $H(X) = (1+r)\mathrm{E}X$, т.е. получается то же самое, что и для принципа среднего.

Принцип Gini, также рассмотренный в [13], получится если взять квадратичную функцию

$$g(x) = (1+r)x - rx^2, \quad 0 \leq r \leq 1, \qquad (52)$$

Задача 58 Показать, что поскольку $g'(0) = 1 + r$ в случаях (51) и (52), относительная нагрузка для верхних траншей не превосходит 100% (в отличие от PH-преобразования, где $g'(0) = \infty$). Относительная нагрузка для бесконечно малого транша $(t, t+dt]$ определяется как $H(J_{(t,t+dt]})/\mathrm{E}J_{(t,t+dt]}$.

3.1.5 Цена морального риска

В этом разделе будет показано, как с помощью теории игр можно определить размер страховой нагрузки, связанной с наличием морального риска. Напомним, что моральный риск имеет место, если страхователь получает выгоду, нарушая страховой контракт.

Чтобы избежать этого, страховая компания может проверять, что контракт соблюдается. Проверка обычно связана с расходами, т.е. наличие морального риска приводит к возникновению дополнительных издержек. Естественно представить указанную ситуацию как игру двух лиц — страховой компании и ее клиента (который одновременно является страхователем и застрахованным).

Рассмотрим страховой полис, предусматривающий премию P_0 и ожидаемые (средние) выплаты страховщика K_0. Предположим, что средние выплаты страховщика будут равны $K < K_0$, если застрахованный потратит сумму a на меры предосторожности. Он согласится на такие затраты, если премия будет снижена до $P < P_0 - a$. Далее, пусть страховая компания (затрачивая сумму b) может проверить, выполняет ли застрахованный предусмотренные контрактом меры. Если проверка показывает, что соглашение соблюдается, ничего не происходит. Если же при проверке обнаруживается, что застрахованный пытается обмануть компанию, он должен заплатить штраф Q.

Итак, будем изучать игру двух лиц с ненулевой суммой, в которой первый игрок З(застрахованный) имеет две чистые стратегии. Он может либо выполнять (A), либо нарушать (B) соглашение. Аналогично, второй игрок С(страховщик) также имеет две чистые стратегии. Он может либо производить проверку (C), либо без проверки верить (D), что соглашение не нарушается.

Игра описывается матрицей, составленной из пар, представляющих собой выплаты двух игроков при различных комбинациях стратегий.

	D	C
A	$P+a, K$	$P+a, K+b$
B	P, K_0	$P+Q, K_0+b-Q$

Застрахованный платит страховой компании премию и штраф. Если исключить тот случай, когда застрахованный не является выгодоприобретателем, можно считать, что страховая компания выплачивает возмещение застрахованному. В то же время, суммы a и b — это выплаты, которые производятся лицам, не являющимся участниками игры. Следовательно, чистый доход, получаемый игроками, может быть представлен в виде матрицы

	D	C
A	$K-P-a, P-K$	$K-P-a, P-K-b$
B	$K_0-P, P-K_0$	$K_0-P-Q, P-K_0+Q-b$

Штраф Q выплачивается только, если застрахованный мошенничает и при проверке это обнаруживается. Легко видеть, что штраф может оказать сдерживающее влияние на застрахованного лишь в том случае, когда $Q > a + K_0 - K$, а проверка будет полезна только тогда, когда $Q > b$.

Введем теперь смешанные стратегии. Пусть застрахованный нарушает контракт, не принимая меры предосторожности, с вероятностью x, а страховщик принимает решение о проверке с вероятностью y. Тогда ожидаемые доходы будут равны соответственно

$$v_1(x,y) = (1-x)(1-y)(K-P-a)+$$
$$+(1-x)y(K-P-a) + x(1-y)(K_0-P) + xy(K_0-P-Q)$$
$$= K-P-a+x(a+K_0-K-yQ)$$

для застрахованного и

$$v_2(x,y) = (1-x)(1-y)(P-K) + (1-x)y(P-K-b)$$
$$+x(1-y)(P-K_0) + xy(P-K_0+Q-b)$$
$$= P-K+x(K-K_0) - y(b-xQ)$$

для страховщика.

Пара смешанных стратегий с

$$\tilde{x} = bQ^{-1} \qquad \text{и} \qquad \tilde{y} = (a+K_0-K)Q^{-1}$$

это точка равновесия игры, поскольку

$$K-P-a=v_1(x,\tilde{y})\le v_1(\tilde{x},\tilde{y})=K-P-a,$$

$$P-K-b(K_0-K)Q^{-1}=v_2(\tilde{x},y)\le$$
$$\le v_2(\tilde{x},\tilde{y})=P-K-b(K_0-K)Q^{-1}$$

для всех $x,y\in(0,1)$. Нетрудно показать, что это единственная точка равновесия.

Поскольку страховщик имеет право решать, заключать ли ему контракт, необходимо предположить, что премия устанавливается таким образом, что доход, получаемый страховой компанией, неотрицателен, т.е.

$$P\ge K+b(K_0-K)Q^{-1}. \tag{53}$$

Если не принимать во внимание административные издержки и страховую нагрузку, обусловленную тем, что страховая компания освобождает клиента от (физического) риска, в неравенстве (53) возможен знак равенства. Значит, наименьшая приемлемая премия будет равна

$$P=K+b(K_0-K)Q^{-1}. \tag{54}$$

Первое слагаемое в правой части (54) — это ожидаемый размер возмещений, предусмотренный контрактом, т.е. чистая премия. Второе слагаемое — это нагрузка, обусловленная наличием морального риска. Эта нагрузка обладает разумными свойствами. Она пропорциональна цене проверки b и выгоде K_0-K от применения мер предосторожности. Одновременно нагрузка обратно пропорциональна штрафу Q. Это показывает, что высокий штраф ведет к предотвращению мошенничества. Таким образом, единственная точка равновесия представляет собой вполне "разумное"решение игры.

Если премия определена с помощью (54), то доход компании равен нулю. В то же время чистые выплаты страхователя равны $a+b(K_0-K)Q^{-1}$. Эта формула показывает, что ему придется полностью выплатить стоимость мер предосторожности, даже если он иногда мошенничает и пренебрегает ими. Вдобавок он выплатит еще некоторую сумму, поскольку компания хочет проверять, выполняет ли он условия контракта. Эта сумма выплачивается лишь потому, что есть возможность мошенничать, иными словами, она представляет собой "цену"за наличие элемента морального риска.

Интересно отметить, что высокий штраф оказывается также в интересах страхователя, давая большую уверенность в том, что не будет нарушения условий контракта (при этом ему придется выплачивать меньшую сумму).

3.2 Удельный ущерб

Более реалистический подход — описывать страховой контракт с помощью пары (X, P), включающей как риск X, так и выплачиваемую за него премию P. На практике деятельность страховой компании нередко оценивается с помощью случайной величины $X/H(X)$, т.е. размера риска на единицу премии, или удельного ущерба (loss ratio). Порядок Лоренца (см. раздел 2.5) рисков X и Y — это, по сути дела, выпуклый порядок удельных ущербов, связанных с контрактами $(X, (1+\alpha)\mathrm{E}X)$ и $(Y, (1+\alpha)\mathrm{E}Y)$. В самом деле,

$$X <_{Lor} Y \Leftrightarrow \frac{X}{(1+\alpha)\mathrm{E}X} <_{cx} \frac{Y}{(1+\alpha)\mathrm{E}Y}, \tag{55}$$

т.е. все несклонные к риску лица предпочтут удельные потери, связанные с контрактом по риску X, если тарификация ведется по принципу среднего с нагрузкой α. Таким образом, порядок Лоренца позволяет актуариям сравнивать риски X и Y, принимая во внимание соответствующие им премии.

Как было показано в предыдущем разделе, любой тарифный принцип вполне упорядочивает риски, но не обязательно сохраняет их частичный порядок (как случайных величин).

Ниже будут введены еще два типа полных порядков, которые сохраняют порядок стоп-лосс $<_{sl}$, соответственно, выпуклый порядок, т.е. стоп-лосс, усиленный требованием равенства средних у рисков, $<_{cx}$ для удельных ущербов.

Для этого понадобится ряд предварительных результатов, представляющих также самостоятельный интерес.

3.2.1 Характеристики удельного ущерба

Как мы видели, в страховании не жизни величина страхуемого риска (или размер ущерба) X является неотрицательной случайной величиной. Отметим, что в страховании жизни X может принимать и отрицательные значения. Например, если речь идет о пожизненной ренте, смерть застрахованного приводит к прекращению выплат, т.е. компания получает доход, а не убыток. Поэтому далее в этом разделе не предполагается неотрицательность риска X.

Итак, пусть используется принцип подсчета премии $H(X)$. Желая избежать разорения, компания обязательно потребует, чтобы $H(X) > m = \mathrm{E}X$ (премия больше ожидаемого ущерба, т.е. чистой премии).

Обозначим *удельный ущерб*, или убыток (loss ratio), через $L(X) = X/H(X)$. Интересным показателем деятельности страховой компании является *удельный доход* от заключения страхового контракта (underwriting return ratio), $G(X) = 1 - L(X)$, т.е. размер полученного дохода на единицу премии. Поскольку естественно предполагать, что $H(X) < \sup X$, то $G(X)$ может принимать и отрицательные значения.

Для того, чтобы компенсировать потери, которые возникают, если $L(X) > 1$, страховщик *удерживает* из каждой единицы премии некоторую величину $R(X)$. Предполагается, что $0 \leq R(X) \leq G(X)^+$, т.е. *доля удержания* не превосходит размера удельного дохода (в том случае, когда он положителен).

Обычно определенная доля премии $D(X)$ (dividend ratio) выплачивается в виде дивидендов ($0 \leq D(X) \leq G(X)^+$), т.е. она не может использоваться для покрытия будущих убытков.

Случайная величина $U(X) = (R(X) - G(X))^+$ называется *долей сверхпотерь* (over-loss ratio). *Чистым относительным результатом страховщика* (net outcome ratio) называется разность

$$N^0(X) = R(X) - U(X).$$

Естественно предполагать, что $\mathrm{E}[N^0(X)] \geq 0$. Более того, чтобы гарантировать прибыль или, по крайней мере, оградить себя от возможных флуктуаций, необходимо выполнение строгого неравенства. Однако мы ограничимся лишь специальным случаем $\mathrm{E}[N^0(X)] = 0$, поскольку это предположение находит применение при подсчете премий в страховании жизни (см., например, [22], [23]).

Существует много вариантов выбора $R(X)$. Однако *наиболее устойчивое* удельное удержание, т.е. наименее подверженное флуктуациям, однозначно определяется следующим образом

$$R^*(X) = \min\{B[X], G(X)^+\}. \tag{56}$$

Фигурирующая в (56) константа $B[X]$ зависит от рассматриваемого риска и задается в приводимой ниже теореме, доказательство которой использует следующую лемму.

Лемма 30 *Для заданной неотрицательной случайной величины Y рассмотрим множество*

$$S = \{X \,:\, 0 \le X \le Y \text{ и } \mathrm{E}X = \mu\}.$$

Тогда случайная величина $X^* = \min[B, Y]$, где константа B определяется из соотношения $\mathrm{E}X^* = \mu$, обладает наименьшей дисперсией в множестве S, т.е.

$$\min_{X \in S} \mathrm{D}X = \mathrm{D}X^*. \tag{57}$$

Доказательство. Обозначим

$$A = \{\omega \,:\, X(\omega) - X^*(\omega) > 0\}.$$

Поскольку $0 \le X(\omega) \le Y(\omega)$ для любого ω, множество A может быть также записано в виде

$$A = \{\omega \,:\, X(\omega) > B\} = \{\omega \,:\, X(\omega) + X^*(\omega) > 2B\}.$$

Очевидно, что для $\omega \in A$ имеет место соотношение

$$X^2(\omega) - X^{*2}(\omega) = (X(\omega) - X^*(\omega))(X(\omega) + X^*(\omega)) \ge$$
$$\ge 2B(X(\omega) - X^*(\omega)). \tag{58}$$

Неравенство (58) верно и для $\omega \in \bar{A}$, так как

$$\{\omega \,:\, 0 \le X(\omega) + X^*(\omega) \le 2B\} = \{\omega \,:\, X(\omega) - X^*(\omega) \le 0\}.$$

Вспомнив, что $\mathrm{E}X = \mathrm{E}X^*$, мы получаем

$$\mathrm{D}X - \mathrm{D}X^* = \mathrm{E}(X^2 - X^{*2}) \geq 2B\mathrm{E}(X - X^*) = 0. \qquad (59)$$

Равенство в (59) достигается, если $\mathrm{P}(X = X^*) = 1$, в остальных случаях $\mathrm{D}X \geq \mathrm{D}X^*$. значит, утверждение (57) справедливо. ■

Теорема 49 *Пусть* $S = \{R(X) : 0 \leq R(X) \leq G(X)^+, \mathrm{E}[N^0(X)] = 0\}$ *— это множество всех возможных удельных удержаний. Тогда* $R^*(X)$*, задаваемое формулой* (56)*, представляет собой оптимальный выбор, обладающий свойством:*

$$\min_{R(X) \in S} \mathrm{D}[R(X)] = \mathrm{D}R^*(X).$$

Постоянная $B[X]$ *является решением уравнения*

$$\mathrm{E}G(X) = \mathrm{E}(G(X) - B[X])^+. \qquad (60)$$

Доказательство. Поскольку $0 \leq R(X) \leq G(X)^+$, то $U(X) = (-G(X))^+ = G(X)^-$. Далее, $\mathrm{E}[N^0(X)] = 0$, если $R(X) \in S$, поэтому

$$\mathrm{E}R(X) = \mathrm{E}R^*(X) = \mathrm{E}G(X)^- = const.$$

Согласно лемме 30 $R^*(X)$ обладает минимальной дисперсией. Так как

$$N^0(X) = R^*(X) - U^*(X) = G(X) - (G(X) - B[X])^+,$$

уравнение (60) становится очевидным. ■

Уравнение (60) имеет единственное нетривиальное решение, поскольку $\mathrm{E}G(X) = 1 - m/H(X) > 0$, причем $G(X)$ может принимать отрицательные значения, а правая часть (60) монотонно убывает по $B[X]$.

3.2.2 Порядок доходности

Теперь введем новый (полный) порядок рисков $<_G$.

Определение 32 . Пусть X и Y два риска, подлежащие страхованию. Тогда X предшествует Y в смысле *доходности* (return order), если $B[X] \leq B[Y]$.

Поскольку величина $B[X]$ не случайная, введенный порядок является полным. Название порядок доходности вызвано тем, что $B[X]$ тесно связано с удельным доходом $G(X)$ от страхования риска X, а также оказывает влияние и на чистый относительный результат (или доход) страховщика.

Покажем, что этот полный порядок *сохраняет* порядок стоп-лосс между удельными убытками.

Теорема 50 *Пусть* $L(X) <_{sl} L(Y)$, *тогда* $B[X] \leq B[Y]$, *т.е.* $X <_G Y$.

Доказательство. Преобразуем уравнение (60) к виду

$$\mathrm{E}G(X) = \mathrm{E}G(X) - B[X] + \mathrm{E}(B[X] - G(X))^+,$$

откуда вытекает, что

$$B[X] = \mathrm{E}(B[X] - G(X))^+.$$

Поскольку $G(X) = 1 - L(X)$, получаем

$$B[X] = \mathrm{E}(L(X) - (1 - B[X]))^+. \tag{61}$$

Рассмотрим функцию $b_X(d) = m_{L(X)}(d) - (1-d)$, где $m_{L(X)}(d) = \mathrm{E}(L(X)-d)^+$ — это стоп-лосс преобразование случайной величины $L(X)$. Тогда, как видно из (61), функция $b_X(d)$ обращается в нуль в точке $1 - B[X]$.

Нетрудно проверить, что стоп-лосс преобразование — это убывающая выпуклая функция, производная которой заключена между -1 и 0. Следовательно, $b_X(d)$ возрастающая функция с производной, заключенной между 0 и 1. Согласно предположению теоремы $L(X) <_{sl} L(Y)$, т.е. $m_{L(X)}(d) \leq m_{L(Y)}(d)$ для любого d, значит, и $b_X(d) \leq b_Y(d)$. Поэтому для их нулей справедливо противоположное неравенство $1 - B[X] \geq 1 - B[Y]$ или, что то же самое, $B[X] \leq B[Y]$. ■

Как мы видели выше (см. (55)), если подсчет премий ведется по принципу среднего, то $L(X) <_{sl} L(Y)$ эквивалентно $X <_{Lor} Y$. Следовательно, при указанной тарификации полный порядок $<_G$ сохраняет порядок Лоренца.

Хотя полный порядок $<_G$ обладает достаточно хорошими свойствами, для его использования на практике необходимо знать полностью распределения рисков.

3.2.3 Порядок устойчивости дохода

Если известны средние и дисперсии рассматриваемых случайных величин, то можно ограничить сверху стоп-лосс премии, а это позволяет установить границу сверху для $B[X]$ и с ее помощью ввести еще один полный порядок.

Итак, пусть известны среднее и дисперсия удельного ущерба $L(X)$, а значит, и удельного дохода $G(X)$ от контракта страхования $\mathrm{E}G(X)$ и $\mathrm{D}G(X)$.

Лемма 31 *Справедливо неравенство*

$$B[X] \leq (1/4)\mathrm{D}G(X)/\mathrm{E}G(X). \tag{62}$$

Доказательство опирается на неравенство Bowers'а для стоп-лосс премий

$$\mathrm{E}(G(X) - B[X])^+ \leq (1/2)(\sqrt{\mathrm{D}G(X) + (B[X] - \mathrm{E}G(X))^2} + \\ + \mathrm{E}G(X) - B[X]), \tag{63}$$

которое нетрудно получить, использовав хорошо известное соотношение

$$(\mathrm{E}|Z|)^2 \leq \mathrm{E}Z^2$$

для моментов случайной величины $Z = G(X) - B[X]$. Заменив левую часть (63) на равную ей в силу (60) величину $\mathrm{E}G(X)$, путем несложных преобразований приходим к (62). ■

Обозначим теперь $\delta(X) = \mathrm{D}G(X)/\mathrm{E}G(X)$ и назовем эту величину *индексом устойчивости* удельного дохода. С помощью этой меры риска, содержащегося в удельном доходе от страхования, можно ввести полный порядок рисков, служащий аналогом анализа средних дисперсий в современной теории портфелей ценных бумаг.

Определение 33 Говорят, что риск X предпочтительнее риска Y в смысле *устойчивости дохода* (stable return order), если $\delta(X) \leq \delta(Y)$.

Обозначается этот порядок $<_{SR}$. Он сохраняет стоп-лосс порядок удельных ущербов, но только при равенстве их математических ожиданий (что верно, например, если премии подсчитываются по принципу среднего).

Теорема 51 *Пусть* $L(X) <_{sl} L(Y)$ *и* $\mathrm{E}L(X) = \mathrm{E}L(Y)$. *Тогда* $\delta(X) \le \delta(Y)$, *иначе говоря,* $X <_{SR} Y$.

Доказательство. Поскольку $\mathrm{E}G(X) = 1 - \mathrm{E}L(X)$ и $\mathrm{D}G(X) = \mathrm{D}L(X)$, то в силу следствия 3 из условий теоремы вытекает $\mathrm{D}G(X) \le \mathrm{D}G(Y)$, а значит, и $\delta(X) \le \delta(Y)$. ■

3.2.4 Сравнение с тарифными порядками

Сравним теперь два новых полных порядка с порядком, который устанавливает тот или иной тарифный принцип $H(X)$. Предположим, что известны распределения рисков X и Y, соответственно $L(X)$ и $L(Y)$.

Пример 4 Пусть $H(X) = (1+\alpha)\mathrm{E}X$ для некоторого $\alpha > 0$, т.е. используется принцип среднего. Предположим далее, что $X <_{sl} Y$ и $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y$. Тогда $L(X) <_{sl} L(Y)$, поэтому $B[X] \le B[Y]$ по теореме 50 и $\delta(X) \le \delta(Y)$ по теореме 51. Таким образом, хотя премии для X и Y равны, потенциально риск Y опаснее риска X.

Пример 5 Предположим, что используется принцип дисперсии, т.е. $H(X) = \mathrm{E}X + \gamma\mathrm{D}X$. Покажем, что $\delta(X) \le \delta(Y)$ тогда и только тогда, когда $H(X) \ge H(Y)$. В самом деле, определение порядка $<_{SR}$ эквивалентно неравенству

$$\mathrm{D}L(X)/(1-\mathrm{E}L(X)) \le \mathrm{D}L(Y)/(1-\mathrm{E}L(Y)),$$

что в свою очередь преобразуется к виду

$$\mathrm{D}L(X)(1-\mathrm{E}L(Y)) \le \mathrm{D}L(Y)(1-\mathrm{E}L(X)).$$

Иначе это можно переписать следующим образом

$$H(Y)\mathrm{D}X(H(Y)-\mathrm{E}Y) \le H(X)\mathrm{D}Y(H(X)-\mathrm{E}X), \qquad (64)$$

откуда вытекает $H(Y) \le H(X)$. (Все указанные преобразования можно провести и в обратном порядке).

Таким образом порядок устойчивости доходов *несовместим* с данным тарифным принципом.

Пример 6 Пусть риск X неотрицателен, $\mathrm{P}(X \geq 0) = 1$, а премия подсчитывается с помощью *модифицированного принципа дисперсии*, введенного Heilmann'ом в 1987 г. (см. [20]),

$$H(X) = \mathrm{E}X^2/\mathrm{E}X = \mathrm{E}X + \mathrm{D}X/\mathrm{E}X.$$

В случае, когда $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y$, очевидно, что $\delta(X) \leq \delta(Y)$ тогда и только тогда, когда $H(X) \geq H(Y)$. А это значит, что порядок, индуцированный этим тарифным принципом, *несовместим* с порядком устойчивости доходов.

Пример 7 Наконец, рассмотрим принцип стандартного отклонения $H(X) = \mathrm{E}X + \beta\sigma(X)$, где $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{D}X}$. Как и в примере 5, неравенство $\delta(X) \leq \delta(Y)$ эквивалентно неравенству (64), что также эквивалентно

$$\mathrm{E}Y\sigma(X) \leq \mathrm{E}X\sigma(Y).$$

Если $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y$, то $\delta(X) \leq \delta(Y)$ тогда и только тогда, когда $\sigma(X) \leq \sigma(Y)$. Следовательно, в такой ситуации порядок устойчивости доходов *согласуется* с рассматриваемым тарифным принципом и служит иллюстрацией анализа средних-дисперсий в страховой тарификации. Далее, по аналогии с примером 6, можно получить *модифицированный принцип среднего*, записав

$$H(X) = (1 + \beta\mathrm{CV}(X))\mathrm{E}X,$$

где $\mathrm{CV}(X) = \sigma(X)/\mathrm{E}X$ — коэффициент вариации риска X.

3.2.5 Алгоритм подсчета $B[X]$

В заключение рассмотрим алгоритм для подсчета $B[X]$ в случае дискретного распределения X, сосредоточенного в точках $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$, соответствующие вероятности равны $p_1, p_2, \ldots, p_n$, $p_i \geq 0$, $i = \overline{1,n}$, $\sum_i p_i = 1$. Тогда случайная величина $G(X) = 1 - X/H(X)$ принимает значения $x_i = 1 - a_i/H(X)$ с теми же вероятностями p_i, $i = \overline{1,n}$, но эти значения растут $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, а не убывают.

Пусть $F(x)$ — это функция распределения $G(X)$. Уравнение (60), которому удовлетворяет $B[X]$, можно решить, пользуясь хорошо известными формулами для подсчета стоп-лосс премий для дискретных распределений.

Начав с точки x_{n-1}, определим наибольшее число m, для которого стоп-лосс функция $m_G(x) = \mathrm{E}(G(X)-x)^+$ удовлетворяет неравенствам

$$m_G(x_{m+1}) < \mathrm{E}G(X) \le m_G(x_m). \qquad (65)$$

Как известно, при $x \in (x_m, x_{m+1})$ значения $m_G(x)$ получаются линейной интерполяцией. Геометрически константа $B = B[X]$ получается как абсцисса точки пересечения на плоскости (x, y) графика функции $y = m_G(x)$ и прямой $y = \mathrm{E}G(X)$. Поэтому надо решить уравнение

$$\mathrm{E}G(X) = (\Delta m_G(x_m)/\Delta x_m)(B - x_m) + m_G(x_m), \qquad (66)$$

где Δ означает оператор взятия первой разности, т.е. $\Delta z_k = z_{k+1} - z_k$ для последовательности действительных чисел z_k, $k \ge 1$.

Вспоминая, что для $k = \overline{1, n-1}$

$$m_G(x_k) = \sum_{i=k+1}^{n} p_i(x_i - x_k) = \sum_{i=k+1}^{n} p_i x_i - (1 - F(x_k))x_k,$$

получаем

$$\Delta m_G(x_m) = -(1 - F(x_m))\Delta x_m.$$

Подставляя это выражение в (66), окончательно находим

$$B = x_m - [\mathrm{E}G(X) - m_G(x_m)]/(1 - F(x_m)) =$$
$$= x_m - [x_1 + \sum_{k=1}^{m-1}(1 - F(x_k))(x_{k+1} - x_k)]/(1 - F(x_m)).$$

Явный вид выражения в квадратной скобке получается по индукции. Соотношение (65) означает, что m — это наибольшее целое число, для которого выражение в квадратной скобке отрицательно. Кроме того, в силу линейности стоп-лосс функции на $[x_m, x_{m+1}]$ оказывается, что $x_m \le B \le x_{m+1}$.

Список литературы

[1] Дж. фон Нейман, О.Моргенштерн. *Теория игр и экономическое поведение.* М.: Наука, 1970.

[2] В.И.Ротарь, В.Е.Бенинг. Введение в математическую теорию страхования. *Обозрение прикладной и промышленной математики*, 1994, т.1, в.5, с.698-779.

[3] Г.И.Фалин. *Математический анализ рисков в страховании.* Российский Юридический Издательский Дом, Москва, 1994.

[4] А.Н.Ширяев. Актуарное и финансовое дело: современное состояние и перспективы развития. *Обозрение прикладной и промышленной математики*, 1994, т.1, в.5, с.684-697.

[5] Д.Штойян. *Качественные свойства и оценки стохастических моделей.* М.:Мир, 1979.

[6] B.C.Arnold. Majorization and the Lorenz order: a brief introduction. *Lecture Notes in Statistics*, 43, Springer Verlag, Berlin, 1987.

[7] B.C.Arnold. Preservation and attenuation of inequality as measured by Lorenz order. In: *Stochastic orders and decisions under risk.* Eds. K.Mosler and M.Scarsini. Hayward, California, IMS Lecture Notes-Monograph Series, 19, 1991, pp.25-37.

[8] K.J.Arrow. *Essays in the Theory of Risk-Bearing.* North-Holland, 1970.

[9] K.Borch. The Price of Moral Hazard. *Scand. Actuarial J.*, 1980, pp. 173-176.

[10] K.Borch. The utility concept applied to the theory of insurance. *ASTIN Bulletin*, 1961, v.1, pp.245-255.

[11] H.Bühlmann. An economic premium principle. *ASTIN Bulletin*, 1980, v.11, pp.52-60.

[12] H.Bühlmann, B.Gagliardi, H.Gerber, E.Straub. Some inequalities for stop-loss premiums. *ASTIN Bulletin*, 1977, v.9, pp.75-83.

[13] D.Denneberg. Premium calculation: why standard deviation should be replaced by absolute deviation. *ASTIN Bulletin*, 1990, v.20, pp.181-190.

[14] J.Fernandez-Ponce, J.M.Kochar, J.Munoz-Perez. Partial ordering of distributions based on right spread functions. *Journal of Applied probability*. 1997.

[15] R.Fishburn. *The Foundations of Expected Utility*. Reidel. Dordrecht, Holland, 1982.

[16] L.R.Freifelder. *A Decision Theoretic Approach to Insurance Ratemaking*. The S.S. Huebner Foundation. Philadelphia PA, 1976.

[17] M.J.Goovaerts, F. de Vylder, J.Haezendonck. Ordering of risks: a review. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1982, v.1, pp.131-163.

[18] M.J.Goovaerts, R.Kaas, A.E.Heerwaarden, T.Bauwelinckx. *Effective actuarial methods*. North-Holland, Ansterdam, 1990.

[19] W.-R.Heilmann. Transformations of claim distributions. *Mitteilungen der Vereinigung schweiz. Versicherungsmathematiker*, 1985, pp.57-69.

[20] W.-R.Heilmann. *Grundbegriffe der Risikotheorie*. Verlag Vers. wirtschaft, Karlsruhe, 1987.

[21] W.-R.Heilmann. Ordering of distributions and risk measurement. *Blätter der Deutschen Gesselschaft für Versicherungsmathematik*, 1992, B.17, S.225-235.

[22] W.Hürlimann. Stochastic tariffing in life insurance. *Proceedings of the Int. Colloquium "Life, Disability and Pensions: Tomorrow's Challenge*

. Paris, April 1991.

[23] W.Hürlimann. Mean-variance analysis of insurance risks. *Proceedings 24 Int. Congress of Actuaries*. Montréal, 1992.

[24] W.Hürlimann. Ordering of risks through loss ratios. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1992, v.11, pp.49-54.

[25] R.Kaas, A.E. van Heerwaarden, M.J.Goovaerts. *Ordering of actuarial risks.* CAIRE, Brussels, 1994.

[26] W.Karten. *Grundlagen eines risikogerechten Schwankungsfonds für Versicherungsunternehmen.* Duncker & Humbolt, 1966.

[27] M.Landsberger, I.Meilson. The generating process and extension of Jewitt's location independent risk concept. *Management Science*, 1994, v.40, pp.662-669.

[28] J.M.Munoz-Perez. Dispersive ordering by the spread function. *Statistics and Probability Letters*, 1990, v.10, pp.407-410.

[29] T.G.Pham, N.Turkkan. The Lorenz and the scaled total-time-on-test transform curves: a unified approach. *IEEE Transactions on Reliability*, 1994, v. 43, pp.76-84.

[30] M.Shaked, J.G.Shantikumar. *Stochastic orders and their applications.* Academic Press. New York, 1994.

[31] M.Shaked, J.G.Shantikumar. Two variability orders. *Probability in Engineering and Informational Sciences*, 1998, v. 12, pp.1-23.

[32] V.Strassen. The existence of probability measures with given marginals. *Ann. Math. Statist.*, 1965, v. 24, pp.423-439.

[33] A.E. van Heerwarden, R.Kaas. The Dutch premium principle. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1992, v.11, pp.129-133.

[34] G.G.Venter. Premium calculation implications of reinsurance without arbitrage. *ASTIN Bulletin*, 1991, v.21, pp.223-230.

[35] S.Wang. Insurance pricing and increased limits ratemaking by proportional hazards transforms. *Insurance: Mathematics and Economics*, 1995, v.17, pp.43-54.

[36] B.Wilfing. Lorenz ordering of power-functions order statistics. *Statistics and Probability Letters*, 1996, v. 30, pp.313-319.

БУЛИНСКАЯ Екатерина Вадимовна

Теория риска и перестрахование

Часть 1. Упорядочивание рисков

Учебное пособие

Оригинал-макет подготовлен Е.В.Булинской
с использованием издательской системы LaTeX2ε
на механико-математическом факультете МГУ.

Подписано в печать 07.03.2001 г.
Формат 60×90 1/16. Объем 7,5 п.л.
Заказ Тираж 100 экз.

Издательство ЦПИ при механико-математическом
факультете МГУ, г. Москва, Воробьевы горы
Лицензия на издательскую деятельность ЛР № 040746
от 12.03.1996 г.

Отпечатано на типографском оборудовании механико-
математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова
и Франко-русского центра им. А. М. Ляпунова