Спецкурс “Теория риска” (для филиала в Душанбе)

Проф. Екатерина Вадимовна Булинская

(МГУ имени М.В.Ломоносова)

Лекция 4

Москва, 28 февраля 2025 г.

САЛОМ

План лекции

- Распределения отдельных убытков (окончание)
- Распределения числа убытков - считающие (или арифметические распределения)
- Классы Панджера $(a, b, 0)$, $(a, b, 1)$
- Составные считающие распределения
- Теорема Панджера
- Дополнительные результаты для числа страховых случаев
- Суммарный размер ущерба

Способы получения новых распределений

Рассмотрены на предыдущей части лекции:

1) Умножение на (положительную) константу.

2) Возведение в степень.

3) Взятие экспоненты - еще один способ получения новых распределений.

Решить **задачу**: логарифмически нормальное распределение масштабно инвариантно, но не обладает масштабным параметром.

4) Семейство распределений не в форме $Y = h(X)$

Способы получения новых распределений

Следующий способ получения новых распределений - усреднение по параметру.

Таким образом удается учесть неоднородность портфеля страховщика, а также неопределенность будущей инфляции.

В самом деле, предположим, что каждый контракт характеризуется параметром θ, представляющим собой реализацию некоторой случайной величины Θ. При фиксированном θ размер выплаты X имеет плотность $f_X(x,\theta)$. Если структурная функция портфеля, т.е. распределение Θ, обладает плотностью $u(\theta)$, то

$$f_X(x) = \mathsf{E} f_X(x,\Theta) = \int f_X(x,\theta) u(\theta)\, d\theta.$$

Безусловное распределение X соответствует наудачу выбранному риску из рассматриваемого портфеля. Такая интерпретация лежит в основе теории достоверности (credibility theory).

Обратимся к преобразованному бета-распределению, зависящему от четырех параметров $(\alpha, \theta, \gamma, \tau)$.

Положим

$$u = \frac{(x/\theta)^\gamma}{1 + (x/\theta)^\gamma}, \quad x > 0,$$

тогда

$$F(x) = \beta(\tau, \alpha, u), \quad f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\tau)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\tau)} \cdot \frac{\gamma(x/\theta)^{\gamma\tau}}{x[1 + (x/\theta)^\gamma]^{\alpha+\tau}}. \qquad (1)$$

Положив в (1) один из параметров равным 1, мы получаем следующие трехпараметрические распределения (везде ниже, если не оговорено иное, $x > 0$):

а) распределение Берра (Burr) при $\tau = 1$,

б) обратное распределение Берра при $\alpha = 1$,

в) обобщенное распределение Парето при $\gamma = 1$.

Способы получения новых распределений

В свою очередь, из вышеприведенных распределений можно получить пять двухпараметрических:

а) паралогистическое ($\alpha = \gamma, \tau = 1$) является частным случаем распределения Берра

б) обратное паралогистическое ($\tau = \gamma, \alpha = 1$) - частный случай обратного распределения Берра

в) логлогистическое ($\alpha = \tau = 1$) представляет собой частный случай распределения Берра и обратного распределения Берра

г) распределение Парето ($\gamma = \tau = 1$) получается как из обобщенного распределения Парето, так и из распределения Берра

д) обратное распределение Парето ($\gamma = \alpha = 1$) - частный случай обратного распределения Берра и обобщенного распределения Парето

Способы получения новых распределений

Упомянем также однопараметрическое распределение Парето:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^{\alpha}, \quad f(x) = \frac{\alpha\theta^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}, \; x > \theta,$$

сосредоточенное на полупрямой (θ, ∞).

Хотя в записи этого распределения фигурируют два параметра α и θ, но величина θ должна быть заранее фиксирована.

Новые распределения могут быть получены путем взвешивания. Частным случаем является преобразование Эсшера:

$$F_Y(x) = \int_0^x e^{hy} dF_X(y)/g_X(h),$$

где $g_X(h) = \mathsf{E}e^{hX}$ - производящая функция моментов.

Необходимо также отметить, что смеси функций распределения $\sum_n p_n F_n(x)$, где $p_n \geq 0$, $\sum_n p_n = 1$,

и составные распределения также используются для получения новых распределений.

Роль равномерного распределения

При компьютерном моделировании часто используется следующий хорошо известный результат.

Лемма

Пусть случайная величина Z распределена равномерно на отрезке $[0,1]$. Тогда $Y = F_X^{-1}(Z)$, где

$$F_X^{-1}(t) = \sup(x : F_X(x) \leq t),$$

имеет функцию распределения $F_X(x)$.

Таким образом, сначала строится выборка $(x_1, \ldots, x_n)$ из распределения $U(x)$, а затем подсчитываются значения $F_X^{-1}(x_k)$, $k = \overline{1,n}$, что и дает выборку из распределения F_X.

Для перестрахования полезными оказываются распределения Бенктандера, которые задаются не с помощью плотностей или функций распределения, а с помощью условных математических ожиданий $r(x) = \mathsf{E}(X - x|X > x)$.

Распределение Бенктандера I (BI) имеет

$$r(x) = x(a + 2b \ln x)^{-1}$$

Распределение Бенктандера II (BII) имеет

$$r(x) = x^{1-b}/a,$$

при $b = 1$ получается экспоненциальное распределение, а при $b = 0$ получается однопараметрическое распределение Парето.

Число происшествий (требований)

Мы будем рассматривать неотрицательные целочисленные случайные величины, иначе говоря, считающие или арифметические распределения.

Начнем с наиболее простых и широко используемых распределений: биномиального, пауссоновского, геометрического и отрицательно биномиального.

Затем обратимся к двум основным методам получения новых распределений (построение составных распределений, т.е. суммирование случайного числа случайных слагаемых, и усреднение по параметру).

Класс Панджера $(a, b, 0)$

Определение

Считающее распределение $\{p_k, k \geq 0\}$ *принадлежит классу* $(a, b, 0)$, *если существуют такие* a *и* b, *что при* $k = 1, 2, \ldots$

$$p_k = p_{k-1}\left(a + \frac{b}{k}\right). \tag{2}$$

Величину p_0 можно определить, пользуясь тем, что $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Очевидно, что $p_0 > 0$.

1) Биномиальное распределение $Bi(n,q)$

$p_k = C_n^k q^k (1-q)^{n-k}$, $a = -\frac{q}{1-q}$,
$b = (n+1)\frac{q}{1-q}$, $p_0 = (1-q)^n$,

где $0 < q < 1$, а параметр n принимает целые положительные значения.

2) Пуассоновское распределение $Poi(\lambda)$

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, a = 0, b = \lambda, p_0 = e^{-\lambda},$$

параметр λ принимает любые положительные значения.

3) Отрицательно биномиальное распределение $NB(\alpha,\beta)$

$$p_k = \frac{C_{k+\alpha-1}^k \beta^k}{(1+\beta)^{k+\alpha}}, \, a = \frac{\beta}{1+\beta}, \, b = (\alpha-1)\frac{\beta}{1+\beta}, \, p_0 = \frac{1}{(1+\beta)^{\alpha}},$$

параметры α и β принимают любые положительные значения, при $\alpha = 1$ получаем геометрическое распределение

4) Геометрическое распределение $Geo(\beta/(1+\beta))$

$$p_k = \frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+1}}, \, a = \frac{\beta}{1+\beta}, \, b = 0, \, p_0 = \frac{1}{1+\beta}.$$

Теорема Панджера

Теорема

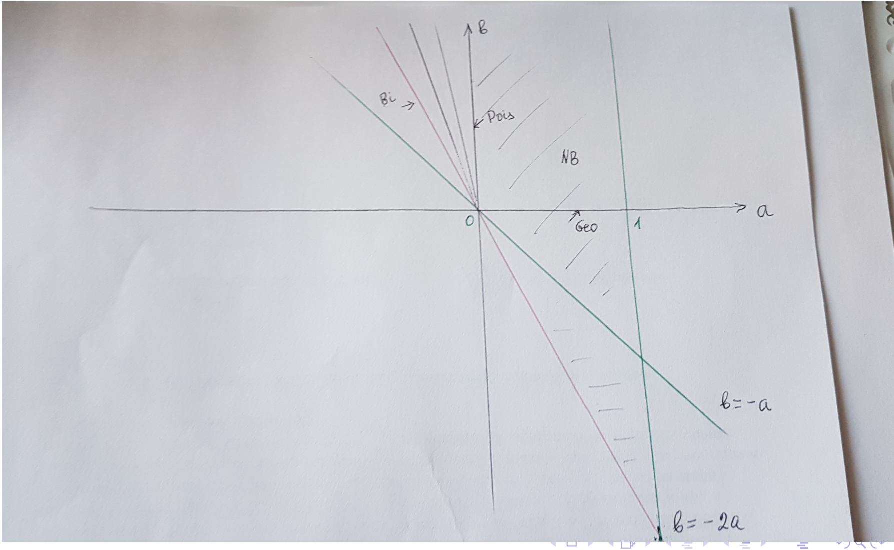
Класс $(a, b, 0)$ не содержит других невырожденных распределений, кроме 1)-4).

Доказательство. Заметим, что на плоскости $(a; b)$ прямые $b = -(n+1)a$, $a < 0$, соответствуют семейству биномиальных распределений $Bi(n; a/(a-1))$, $n = 1, 2, \ldots$.

Положительная ось ординат $a = 0$, $b > 0$ соответствует семейству пуассоновских распределений $Poi(b)$.

А область $0 < a < 1$, $b > -a$ соответствует семейству отрицательно биномиальных распределений $NB((b/a) + 1; a/(1-a))$, в частности, участок оси абсцисс $0 < a < 1$, $b = 0$ соответствует семейству геометрических распределений.

График



Теорема Панджера

Остальные значения a и b в рекуррентной формуле не дают ни при каком $p_0 > 0$ невырожденное распределение вероятностей.

В самом деле, в области $b < -a$ мы имеем $a + b < 0$, т.е. $p_1 = (a + b)p_0 < 0$, что невозможно.

Линия $b = -a$, $a < 0$ соответствует вырожденному распределению, сосредоточенному в нуле, так как $p_1 = (a + b)p_0 = 0$, а значит, и все $p_k = 0$ при $k \geq 1$.

Для любой точки области $b > -a$, $a < 0$, не принадлежащей ни одной из прямых $b = -(n + 1)a$, $n = 1, 2 \ldots,$ применение соотношений (2) рано или поздно приведет к отрицательному значению для p_k.

Наконец, при $a \geq 1$, $b > -a$ очевидна следующая цепочка неравенств

$$a + \frac{b}{k} \geq a\left(1 - \frac{1}{k}\right) \geq \frac{k-1}{k}.$$

Следовательно, применение (2) приводит к следующему результату $p_2 \geq p_1/2$, $p_3 \geq p_1/3, \ldots$, $p_k \geq p/k, \ldots$. Суммирование дает

$$\sum_k^\infty p_k \geq p_1\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k} + \ldots\right).$$

Поскольку стоящий справа ряд расходится, набор $\{p_k\}$ не может быть распределением вероятностей. $\square$

Выводы

Таким образом, единственными считающими распределениями, принадлежащими классу $(a, b, 0)$, являются биномиальное, пуассоновское, отрицательно биномиальное и геометрическое.

Принадлежность считающего распределения классу $(a, b, 0)$ позволяет получить так называемую формулу Панджера для нахождения составного распределения (докажем дальше).

Класс $(a, b, 1)$

Определение

Считающее распределение $\{p_k, k \geq 0\}$ *принадлежит классу* $(a, b, 1)$, *если для некоторых* a *и* b *рекуррентные соотношения (2) выполнены при* $k = 2, 3, \ldots$.

Отличие от класса $(a, b, 0)$ состоит в том, что рекуррентная процедура начинается не с p_0, а с p_1.

Очевидным образом все распределения из класса $(a, b, 0)$ принадлежат классу $(a, b, 1)$.

Кроме того, мы получаем возможность, сохраняя форму распределения при положительных k, менять значение вероятности в нуле.

Сумму $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ можно положить равной любому числу $c \in (0, 1]$, тогда автоматически $p_0 = 1 - c$, а рекуррентная процедура позволит найти p_1 и все последующие p_k.

Класс $(a, b, 1)$

Возможны два различных случая:
а) Подкласс урезанных в нуле распределений (zero-truncated) соответствует $p_0^T = 0$. (В этом случае вероятности будем обозначать p_k^T, $k \geq 0$.)

Данный подкласс состоит из урезанных биномиального, пуассоновского, отрицательно биномиального и геометрического распределений.

При $k \geq 1$ они имеют те же вероятности, что и не урезанные распределения, но умноженные на некоторую постоянную

$$p_k^T = dp_k, \text{ где } d^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 - p_0,$$

здесь через p_k обозначены вероятности исходного неурезанного распределения.

б) Подкласс модифицированных в нуле распределений (zero-modified) соответствует $p_0^M > 0$. (Модифицированные вероятности обозначаются p_k^M, $k \geq 0$.) Нетрудно проверить, что при $k = 1, 2, \ldots$

$$p_k^M = \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0} p_k$$

Полученное выражение можно переписать также в виде

$$p_k^M = (1 - p_0^M) p_k^T, \; k = 1, 2, \ldots$$

Таким образом, модифицированное в нуле распределение является смесью (с весами $(1 - p_0^M)$ и p_0^M) урезанного в нуле распределения и вырожденного, сосредоточенного в нуле.

в) До сих пор мы предполагали, что рассматриваются лишь те значения a и b, которые дают распределения класса $(a, b, 0)$.

Оказывается, что подкласс распределений, полученных расширением области возможных значений a и b, также принадлежит классу $(a, b, 1)$. А именно, предположим сначала, что $0 < a \leq 1$, $-2a < b < -a$. В этой области при $k \geq 2$ выполнено неравенство $a + (b/k) > 0$. Следовательно,

$$p_k = p_1 \left(a + \frac{b}{2}\right) \left(a + \frac{b}{3}\right) \dots \left(a + \frac{b}{k}\right) > 0,$$

кроме того,

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} \geq 1 - \frac{A}{k},$$

где $A = -\frac{b}{a} > 1$. Используя признак Раабе, мы получаем, что ряд из p_k сходится.

Класс $(a, b, 1)$

Получившееся распределение называется ETNB (расширенным отрицательно биномиальным распределением урезанным в нуле), поскольку вероятности имеют ту же форму записи, что и отрицательно биномиальное распределение, урезанное в нуле. Однако теперь $-1 < \alpha < 0$, в то время как раньше было $\alpha > 0$.

Итак, области $0 < a < 1$, $-a > b > -2a$ соответствует невырожденное распределение класса $(a, b, 1)$ с $p_0 = 0$.

При рассмотрении области $a = 1$, $-2 < b < 1$ обозначим $\delta = -(b+1)$, чтобы иметь $0 < \delta < 1$. Тогда получим $p_k = \frac{p_1}{k}\frac{\Gamma(k-\delta)}{\Gamma(1-\delta)}$, можно показать!!, что предел ETNB при $-1 < \alpha < 0$ и $\beta \to \infty$ является собственным распределением, не имеющим конечного математического ожидания.

Такое распределение с точки зрения страхования не представляет интереса, так как для него затруднительна тарификация.

Задача

Показать, что логарифмическое распределение с

$$p_k = \frac{\frac{\beta^k}{(1+\beta)^k}}{k\ln(1+\beta)}, k = 1, 2, \dots$$

получается из ETNB предельным переходом при $\alpha \to 0$ (т.е. соответствует $0 < a < 1$, $b = -a$). Найти производящую функцию этого распределения.

Класс $(a, b, 1)$

Теорема

Класс $(a, b, 1)$ содержит все распределения класса $(a, b, 0)$, их урезанные и модифицированные в нуле варианты; расширенное отрицательно биномиальное распределение урезанное в нуле и логарифмическое, их модификации в нуле, а также собственное распределение, не имеющее математического ожидания.

Замечание

Логарифмическое распределение, $NB(\alpha, \beta)$ при $\alpha < 1$ и ETNB имеют убывающие с ростом k вероятности p_k.

Составные считающие распределения

т.е. суммы случайного числа неотрицательных целочисленных случайных величин. Распределения такого типа могут возникать в страховании следующим образом. Пусть N - это число происшествий, связанных с некоторым ансамблем контрактов. Например, если речь идет о страховании автомобилей, это может быть число автомобильных катастроф. Предположим, что M_k - это число требований, связанных с k-м происшествием, иначе говоря, число пострадавших. Тогда $\tilde{N} = \sum_{k=1}^{N} M_k$ - это общее число требований по рассматриваемому портфелю.

Обычно предполагается, что N (первичное распределение) не зависит от последовательности $M_1, M_2, \dots,$ состоящей из независимых одинаково распределенных случайных величин (вторичное распределение).

Легко проверить, что производящая функция $\tilde{N}$ имеет вид $P(z) = P_1[P_2(z)]$, где $P_1(z)$ - производящая функция первичного распределения, т.е. случайной величины N, а $P_2(z)$ - производящая функция вторичного распределения, т.е. случайных величин M_k, $k \geq 1$. Решить в качестве **задачи**.

Для обозначения составного распределения употребляется запись из названий двух использованных распределений, сначала первичное, потом вторичное. Наиболее широко распространены составные пуассоновские распределения, т.е. такие, у которых первичное распределение пуассоновское, а значит, $P(z) = \exp\{\lambda(P_2(z) - 1)\}$.

1. Будет ли свертка составных пуассоновских распределений также составным пуассоновским распределением?

2. Проверить, что отрицательно биномиальное распределение - это пуассоновско-логарифмическое.

Лемма

Любое модифицированное в нуле распределение является составным.

Доказательство. В качестве первичного распределения рассмотрим бернуллиевское, т.е. $Bi(1, q)$.

Его производящая функция равна $P_1(z) = 1 - q + qz$.

Если $P_2(z)$ производящая функция вторичного распределения, то составное распределение имеет производящую функцию $P(z) = 1 - q + qP_2(z)$.

Предположим, что в качестве $P_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ мы выбрали производящую функцию того распределения, которое собираемся модифицировать.

Поместим в нуль массу p_0^M и умножим все остальные вероятности p_k на некоторую положительную постоянную h, т.е. положим $p_k^M = hp_k, k = 1, 2, \ldots$. Выберем h так, чтобы $\sum_{k=1}^{\infty} p_k^M = 1 - p_0^M$. Это дает $h = (1 - p_0^M)/(1 - p_0)$. Следовательно,

$$P(z) = p_0^M + \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0}(P_2(z) - p_0),$$

что может быть переписано в требуемом виде, где $q = \frac{1-p_0^M}{1-p_0}$. Тем самым мы установили, что модифицированное распределение является составным. $\square$

Определение

Распределение вероятностей называется безгранично делимым, если при любом $n > 1$ оно представляется как n-кратная свертка некоторого распределения с самим собой.

Когда речь идет о считающем распределении $\{p_k, k \geq 0\}$, то безграничная делимость означает, что при любом $n > 1$ его производящая функция удовлетворяет соотношению $P^{1/n}(z) = Q_n(z)$, где $Q_n(z)$ - также производящая функция некоторого распределения.

Если же рассматривается распределение произвольной неотрицательной случайной величины X, то безграничная делимость означает, что $L_X^{1/n}(z)$ при любом n является преобразованием Лапласа некоторой случайной величины.

Теорема

Любое безгранично делимое считающее распределение является составным пуассоновским.

Доказательство. Вспомним, что составное пуассоновское распределение имеет производящую функцию $P(z) = e^{\lambda[P_2(z)-1]}$, где $P_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k$ и $h_k \geq 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} h_k = 1$.

Мы должны записать в таком виде $P(z)$ в предположении, что $P^{1/n}(z)$ при любом n является производящей функцией некоторого распределения.

Очевидно, что $P(0) = p_0 > 0$, так как случайная величина, принимающая лишь целые положительные значения не может быть безгранично делимой. Следовательно, существует такая окрестность нуля $|z| \leq c \leq 1$, где $P(z)$ положительна, кроме того $P(z) < 1$ при $|z| < 1$.

Так как $0 < 1 - P(z) < 1$ при $|z| < c$, то функцию $\ln P(z) = \ln[1 - (1 - P(z))]$ можно разложить в ряд Тейлора

$$\ln P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k, \; -c < z < c.$$

Положив $z = 0$, приходим к выводу, что $q_0 < 0$.

Мы хотим доказать, что все остальные q_k неотрицательны. Допустим, что это не так, и придем к противоречию. Пусть $r \geq 1$ - наименьший индекс, для которого $q_r < 0$. Для упрощения записи введем обозначения

$$A(z) = \sum_{k=1}^{r-1} q_k z^k, \; B(z) = \sum_{k=r+1}^{\infty} q_k z^k, \; \frac{1}{n} = \varepsilon,$$

тогда

$$P^{1/n}(z) = e^{\varepsilon q_0} \cdot e^{\varepsilon A(z)} \cdot e^{\varepsilon q_r z^r} \cdot e^{\varepsilon B(z)}.$$

По предположению

$$P^{1/n}(z) = \sum_{k=0} f_k z^k, \text{ где } f_k \geq 0.$$

Рассмотрим f_r, т.е. коэффициент при z^r. Так как степенной ряд $B(z)$ содержит только члены со степенями больше r, он не влияет на f_r. Значит, f_r - это коэффициент при z^r в выражении

$$e^{\varepsilon q_0} \cdot (1 + \varepsilon A(z) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 A^2(z) + \dots) \cdot (1 + \varepsilon q_r z^r).$$

Поскольку $A(z)$ является полиномом степени не выше, чем $r - 1$, нетрудно проверить, что

$$f_r = e^{q_0 \varepsilon} \varepsilon [q_r + \varepsilon h(\varepsilon)],$$

где $h(\varepsilon)$ - полином от ε.
Если $q_r < 0$, то при достаточно малом ε правая часть будет отрицательна, т.е. $f_r < 0$, что невозможно. Таким образом, установлено, что $q_r \geq 0$ при $r \geq 1$. Учитывая равенство $P(1) = 1$, получаем $\ln P(1) = \sum_{k=0} q_k = 0$, значит, $-q_0 = q_1 + q_2 + \dots$. Положив $\lambda = -q_0$ и $h_k = q_k / \lambda$ при $k \geq 1$, мы запишем $P(z)$ в требуемом виде. □

Теорема Панджера

позволяет подсчитывать составные распределения в том случае, когда первичное распределение из класса $(a, b, 0)$.

Обозначим $g_n = \mathrm{P}(\tilde{N} = n)$, $p_n = \mathrm{P}(N = n)$ и $f_n = \mathrm{P}(M = n)$.

Используя формулу полной вероятности, запишем

$$g_n = \mathrm{P}(\tilde{N} = n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(\tilde{N} = n | N = k)\mathrm{P}(N = k)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(M_1 + \ldots + M_k = n) p_k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k f_n^{k*},$$

где f_n^{k*}, $n \geq 0$, это k-кратная свертка распределения $\{f_n\}$ с самим собой.

Теорема Панджера

Теорема (Panjer)

Пусть распределение N *принадлежит классу* $(a, b, 0)$, *тогда*

$$g_n = \frac{1}{1 - af_0} \sum_{j=1}^{n} \left(a + \frac{bj}{n} \right) f_j g_{n-j}, \; n \geq 1.$$

Доказательство. Рекуррентное соотношение может быть переписано в виде

$$kp_k = a(k-1)p_{k-1} + (a+b)p_{k-1}.$$

Умножим обе части этого равенства на $[P_2(z)]^{k-1} P_2'(z)$ и просуммируем по k

$$\sum_{k=1}^{\infty} kp_k [P_2(z)]^{k-1} P_2'(z) = a \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)p_{k-1} [P_2(z)]^{k-1} P_2'(z)$$

$$+(a+b) \sum_{k=1}^{\infty} p_{k-1} [P_2(z)]^{k-1} P_2'(z).$$

Поскольку $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k [P_2(z)]^k$, полученное уравнение можно переписать в виде

$$P'(z) = a \sum_{k=0}^{\infty} k p_k [P_2(z)]^k P_2'(z) + (a+b) \sum_{k=0}^{\infty} p_k [P_2(z)]^k P_2'(z).$$

В свою очередь последнее соотношение показывает, что

$$P'(z) = aP'(z)P_2(z) + (a+b)P(z)P_2'(z).$$

Разложив обе части по степеням z, приравняем коэффициенты при z^{n-1} и получим

$$ng_n = a \sum_{j=0}^{n} (n-j) f_j g_{n-j} + (a+b) \sum_{j=0}^{n} j f_j g_{n-j}.$$

Преобразуем правую часть получившегося соотношения, выделив слагаемые с $j = 0$ и перегруппировав остальные,

$$anf_0 g_n + a \sum_{j=1}^{n} (n-j) f_j g_{n-j} + (a+b) \sum_{j=1}^{n} j f_j g_{n-j}$$

$$= anf_0 g_n + an \sum_{j=1}^{n} f_j g_{n-j} + b \sum_{j=1}^{n} j f_j g_{n-j}.$$

Окончательно имеем

$$g_n = af_0 g_n + \sum_{j=1} \left(a + \frac{bj}{n} \right) f_j g_{n-j},$$

что эквивалентно требуемому результату. □

Значение в нуле

Для использования рекуррентной процедуры необходимо знать величину g_0.

Как показывает следующая лемма, подсчет g_0 не использует предположение, что первичное распределение из класса $(a, b, 0)$.

Лемма

Для любого составного распределения $g_0 = P_1(f_0)$, где $P_1(z)$ производящая функция первичного распределения, а f_0 - вероятность нулевого значения для вторичного распределения.

Доказательство. Результат немедленно вытекает из формулы полной вероятности

$$g_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(M_1 + \ldots + M_k = 0)\mathrm{P}(N = k) = \sum_{k=0}^{\infty} f_0^k \mathrm{P}(N = k) = P_1(f_0).$$

Задачи

Нетрудно проверить, что для составного пуассоновского распределения

$$g_n = \frac{\lambda}{n} \sum_{j=1}^{n} j f_j g_{n-j}.$$

Если первичное распределение принадлежит классу $(a, b, 1)$, то справедливо соотношение

$$g_n = \frac{[p_1 - (a+b)p_0]f_n + \sum_{j=1}^{n} \left(a + \frac{bj}{n}\right) f_j g_{n-j}}{1 - af_0}.$$

Специальный вид первичного распределения

Теорема

Пусть первичное распределение имеет производящую функцию, зависящую от параметра θ *следующим образом*

$$P_1(z;\theta) = B[\theta(z-1)],$$

где $B(z)$ *не зависит от параметра* θ*, хотя может зависеть от других параметров. Тогда производящая функция составного распределения* $P(z) = P_1[P_2(z);\theta]$ *может быть переписана в виде*

$$P(z) = P_1[P_2^T(z);\theta(1-f_0)],$$

где $P_2^T(z)$ *соответствует условному распределению на положительных целых числах, т.е. урезанному в нуле вторичному распределению.*

Доказательство.

Воспользуемся тем, что любая производящая функция $P_2(z)$ может быть записана в виде

$$P_2(z) = f_0 + (1 - f_0)P_2^T(z).$$

Следовательно, справедлива следующая цепочка равенств

$$P(z) = P_1[P_2(z); \theta)] = P_1[f_0 + (1 - f_0)P_2^T(z); \theta]$$

$$= B\{\theta[f_0 + (1 - f_0)P_2^T(z) - 1]\} = B\{\theta(1 - f_0)[P_2^T(z) - 1]\}$$

$$= P_1[P_2^T(z); \theta(1 - f_0)].$$

Замечание

Распределения класса $(a, b, 0)$ *удовлетворяют условию доказанной теоремы.*

В самом деле, для биномиального $Bi(n, q)$ *распределения*

$$B(z) = (1 + z)^n, \quad \theta = q,$$

для пуассоновского $Poi(\lambda)$ *соответственно*

$$B(z) = e^z, \quad \theta = \lambda,$$

а для отрицательно биномиального $NB(\alpha, \beta)$ *имеем*

$$B(z) = (1 - z)^{-\alpha}, \quad \theta = \beta.$$

Отрицательно биномиальное распределение

является, с одной стороны, пуассоновско-логарифмическим, т.е. составным,

с другой стороны, его можно получить усреднением по параметру пуассоновского распределения, если структурная функция имеет гамма-распределение.

Пусть плотность распределения структурной функции

$$u_{\alpha,\beta}(\theta) = \frac{\theta^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)} e^{-\theta/\beta},$$

тогда

$$\mathsf{P}(N = k) = \int_0^{\infty} \frac{\theta^{k+\alpha-1}}{k!\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} e^{-\theta(1+1/\beta)}\, d\theta$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+k)}{k!\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\beta^k}{(1+\beta)^{\alpha+k}} = C^k_{k+\alpha-1} \frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+\alpha}},$$

что очевидным образом совпадает с $NB(\alpha,\beta)$.

Замечание

Как уже говорилось, усреднение распределения по параметру полезно для учета неоднородности портфеля страховой компании.

Сейчас мы покажем, что если рассматривать усредненные пуассоновские распределения, то при определенных предположениях мы не получаем ничего нового по сравнению с составными пуассоновскими распределениями.

Теорема

Усредненное по параметру пуассоновское распределение является также и составным пуассоновским распределением, если распределение параметра безгранично делимо.

Если предположить, что производящая функция вторичного распределения $P_2(z)$ такова, что $P_2(0) = 0$, то она единственна.

Доказательство.

Итак, нам известно, что производящая функция

$$P(z) = \int_0^\infty e^{\lambda\theta(z-1)}\,dU(\theta),$$

где распределение $U(\cdot)$ безгранично делимо. Отметим, что масштабный параметр θ введен здесь для удобства записи (т.е. мы считаем, что параметр пуассоновского распределения имеет вид $\lambda\Theta$, $U(\cdot)$ - распределение Θ). Нетрудно понять, что справедливо равенство

$$P(z) = L_\Theta[\lambda(1-z)],$$

где преобразование Лапласа параметра Θ

$$L_\Theta(z) = \int_0^\infty e^{-z\theta}\,dU(\theta).$$

В силу безграничной делимости распределения Θ функция

$$L_n(z) = L_\Theta^{1/n}(z)$$

также является преобразованием Лапласа некоторого распределения.

Комбинируя полученные формулы, получаем, что

$$P^{1/n}(z) = L_n[\lambda(1-z)],$$

причем $P^{1/n}(z)$ снова соответствует пуассоновскому распределению усредненному по параметру. Поскольку тем самым исходное распределение оказалось безгранично делимым, остается воспользоваться теоремой о его представлении, согласно которой

$$P(z) = e^{\lambda[P_2(z)-1]}.$$

Если $P_2(0) = 0$, то $\lambda = -\ln p_0$ и $P_2(z) = 1 + \lambda^{-1}\ln P(z)$. $\square$

Замечание

Как показывает теорема, неслучайно, что отрицательно биномиальное распределения является одновременно и составным, и усредненным по параметру пуассоновским распределением, поскольку гамма-распределение, по которому производится усреднение, является безгранично делимым.

Дальнейшее расширение набора распределений для описания числа требований может производиться

путем рассмотрения классов (a, b, m) при $m > 1$. Для них рекуррентная формула задает вероятности, начиная с p_m. Следовательно, такие распределения зависят от $m + 2$ параметров.

Другой путь - использование составных распределений в качестве первичных и вторичных, при этом производящая функция будет иметь вид

$$P(z) = P_1(P_2(P_3 \ldots (P_m(z)))).$$

Число параметров для такого распределения равно сумме чисел параметров составляющих распределений. Однако, как показывает практика, рассмотрение слишком большого числа параметров нецелесообразно.

Суммарный ущерб

Распределение суммарного ущерба в коллективной модели риска является составным $S^{col} = \sum_{k=1}^{N} X_k$. Следовательно, если размеры требований X_k целочисленные, а распределение N принадлежит классу $(a, b, 0)$, можно воспользоваться теоремой Панджера, при этом $g_n = \mathrm{P}(S^{col} = n)$, а $f_n = \mathrm{P}(X_k = n)$, $k \geq 1$.

Теорема

Если распределение N принадлежит классу $(a, b, 0)$, а распределение X непрерывно с плотностью $f_X(x)$, то распределение S^{col} будет иметь атом в нуле и плотность $f_S(x)$ на положительной полуоси, удовлетворяющую следующему интегральному уравнению

$$f_S(x) = p_1 f_X(x) + \int_0^x \left(a + \frac{by}{x}\right) f_X(y) f_S(x-y)\, dy, \; x > 0.$$

Дословное повторение доказательства теоремы Панджера с заменой производящей функции вторичного распределения на преобразование Лапласа $L_X(z)$ дает интегральное уравнение, а $\mathrm{P}(S^{col} = 0) = \mathrm{P}(N = 0) = p_0$.

Суммарный ущерб - аппроксимации

В том случае, когда распределение X не является ни непрерывным, ни арифметическим, можно получать верхние и нижние границы для функции распределения $F_S(x)$ суммарного ущерба или различные аппроксимации, производя дискретизацию (или арифметизацию) распределения размера отдельного ущерба X.

Различные методы арифметизации были предложены в 1976 Гербером и Джонсом и подробно изучены Панджером и Лютеком в связи с подсчетом стоп-лосс премий.

а) Один из методов носит название округления (по-английски rounding или mass dispersion). В рамках этого метода прежде всего выбирается шаг h новой случайной величины $\tilde{X}$, затем ищутся вероятности $K_j = \mathrm{P}(\tilde{X} = jh)$, $j \geq 0$. Заметим, что величина h всегда может рассматриваться как новая денежная единица, и таким образом мы будем снова иметь дело со считающим распределением.

Округление

Соответствующая функция распределения имеет вид

$$K(x) = \sum_{j=0}^{[x]} K_j,\ x \geq 0.$$

где $[x]$ означает взятие целой части x.

Возможны три различные процедуры подсчета K_j, которые назовем следующим образом:

A. Округление до нижней единицы

$$K_0^A = F_X(h-0),\ K_j^A = F_X(jh+h-0) - F_X(jh-0),\ j \geq 1.$$

B. Округление до ближайшей единицы при $j \geq 1$

$$K_j^B = F_X(jh+(h/2)-0) - F_X(jh-(h/2)-0),\ \text{а}\ K_0^B = F_X((h/2)-0).$$

C. Округление до верхней единицы т.е.

$$K_0^C = 0,\ K_j^C = F_X(jh) - F_X(jh-h),\ j \geq 1.$$

Округление

Напомним, что $F_X(x) = \mathsf{P}(X \le x)$ функция распределения исходной случайной величины X, а $F_X(x-0) = \mathsf{P}(X < x)$.

Нетрудно проверить, что в силу определений A-C и формулы для $K(x)$ справедливы следующие неравенства

$$K^A(x) \ge F_X(xh) \ge K^C(x),\ x \ge 0,$$

$$K^A(x) \ge K^B(x) \ge K^C(x),\ x \ge 0.$$

Дальнейшее обоснование этого приближения получим после изучения стохастического порядка на следующей лекции.

Заметим, что "округленные распределения" не обязаны иметь то же самое среднее, что исходное распределение.

б) Если желательно, чтобы аппроксимирующее распределение имело форму, похожую на исходную, используют способ приравнивания глобальных или локальных моментов.

Мы хотим, чтобы при переходе к аппроксимирующему распределению сохранялось заданное число p моментов. Для большей точности приближения приравнивание производится на отдельных участках длины ph. Рассмотрим произвольный интервал $(x_k, x_k + ph]$. Необходимо выбрать массы $m_0^k, m_1^k, \ldots, m_p^k$, которые будут помещены в точки $x_k, x_k + h, \ldots, x_k + ph$ таким образом, чтобы сохранились первые p моментов.

Соответствующая система уравнений запишется в виде

$$\sum_{j=0}^{p} (x_k + jh)^r m_j^k = \int_{x_k}^{x_k+ph} x^r dF_X(x), \ r = \overline{0, p}. \tag{3}$$

Уравнение, отвечающее $r = 0$, означает, что вероятностная масса, распределенная на данном интервале, одна и та же у исходного и у аппроксимирующего арифметического распределения.

Суммарный ущерб

Теорема

Решение системы (3) записывается в виде

$$m_j^k = \int_{x_k}^{x_k+ph} \prod_{i\neq j} \frac{(x - x_k - ih)}{(j-i)h}\, dF_X(x),\ j = \overline{0,p}. \tag{4}$$

Доказательство. Формула Лагранжа для полинома $f(y)$, принимающего значения $f(y_j)$ в точках y_j, $j = \overline{0,n}$, выглядит следующим образом

$$f(y) = \sum_{j=0}^{n} f(y_j) \prod_{i\neq j} \left(\frac{y - y_i}{y_j - y_i} \right).$$

Применим эту формулу для полинома $f(y) = y^r$, когда выбраны точки $x_k, x_k + h, \ldots, x_k + ph$, и получим

$$x^r = \sum_{j=0}^{p} (x_k + jh)^r \prod_{i\neq j} \frac{(x - x_k - ih)}{(j-i)h},\ r = \overline{0,p}.$$

Суммарный ущерб

Проинтегрировав обе части этого равенства по интервалу $(x_k, x_k + ph]$ относительно вероятностной меры, порожденной распределением X, мы приходим к системе уравнений (3), где m_j^k задаются формулами (4). Таким образом, как мы и хотели, первые p моментов сохраняются. $\square$

Описанная процедура проводится сначала для интервала $(0, ph]$, затем $(ph, 2ph]$, $(2ph, 3ph]$ и т.д. Окончательно вероятности, сосредоточенные в точках nh, $n \geq 0$, получаются из (4) с учетом того, что две массы, приписываемые процедурой точкам вида kph, $k > 0$, суммируются.

Для большинства практически интересных распределений размера требований использование двух моментов ($p = 2$) давало приемлемую точность подсчета стоп-лосс премий, а добавление третьего момента вело лишь к незначительному улучшению. Кроме того, округление и использование лишь первого момента давало примерно одну и ту же точность, в то время как использование двух моментов приводило к лучшим результатам.

Суммарный ущерб

Интересно отметить, что интегралы в правой части (4) легко подсчитываются для дискретных (но необязательно арифметических распределений), в то время как для непрерывных распределений не всегда можно произвести интегрирование и приходится также прибегать к численным методам. Поэтому метод округления может оказаться более предпочтительным. Наконец, решение уравнения для f_S в том случае, когда распределение X непрерывно, также включает процедуру дискретизации.

Однако даже в том случае, когда формула Панджера дает точный результат для распределения $\{g_n\}$, возникают ошибки вычисления при многократном ее применении, т.е. для больших n. Поэтому использование рекуррентных формул полезно дополнять исследованием асимптотики правого хвоста распределения. В основе таких исследований лежит следующая теорема.

Асимптотика правого хвоста

Теорема

Предположим, что распределение $\{p_n\}_{n\geq 0}$ *числа требований удовлетворяет следующему соотношению*

$$p_n \sim \theta^n n^\gamma C(n) \text{ при } n \to \infty$$

для $0 < \theta < 1$, $\gamma \in R$ *и некоторой медленно меняющейся на бесконечности функции* $C(x)$. *Если, кроме того, распределение* X *не арифметическое, существует такое число* κ, *что*

$$L_X(-\kappa) = \theta^{-1} \tag{5}$$

и $-L'_X(-\kappa) < \infty$, *то*

$$1 - F_S(x) \sim \frac{xe^{-\theta x} C(x)}{\kappa[-\theta L'_X(-\kappa)]^{\gamma+1}} \text{ при } x \to \infty.$$

Так как $L_X(-t) = g_X(t)$, то для (5) должна существовать п. ф. м.

Асимптотика правого хвоста

Функция $C(x)$ называется медленно меняющейся на бесконечности, если $C(tx) \sim C(x)$ при $x \to \infty$ для любого $t > 0$. Запись $A(x) \sim B(x)$ при $x \to \infty$ означает, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{A(x)}{B(x)} = 1.$$

Доказывать теорему мы не будем, а лишь кратко остановимся на поведении хвостов некоторых распределений, важных для страхования.

Согласно классификации Эмбрехтса и Веравербеке распределения можно разделить на 3 класса: с легкими, средними и тяжелыми (правыми) хвостами.

Определение

Распределение X имеет легкий хвост, если для любого $0 < \theta < 1$ существует такое $\kappa > 0$, что выполнено (5).

Определение

Распределение имеет средний хвост, если существует такое $\gamma > 0$, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - F_X^{2*}(x)}{1 - F_X(x)} = 2L_X(-\gamma) < \infty, \tag{6}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - F_X(x-y)}{1 - F_X(x)} = e^{\gamma y} \text{ для любого } y \in R.$$

Определение

Распределение X имеет тяжелый хвост, если (5) не выполняется ни для какого θ.

Практический интерес представляет также следующая

Теорема (Teugels)

Пусть распределение X *имеет средний хвост и* $P'[L_X(-\gamma)] < \infty$*, где* $P(z)$ *- производящая функция* N*, тогда*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - F_S(x)}{1 - F_X(x)} = P'[L_X(-\gamma)].$$

Определение

Если $\gamma = 0$ *в (6), т.е.*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - F_X^{2*}(x)}{1 - F_X(x)} = 2,$$

то распределение называется субэкспоненциальным.

Аналог теоремы Тейгельса для субэкспоненциальных распределений, доказанный ранее Эмбрехтсом, Голди и Веравербеке, выглядит следующим образом.

Теорема

Если распределение X субэкспоненциально, а N имеет производящую функцию моментов для некоторого $z > 0$, то

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - F_S(x)}{1 - F_X(x)} = EN.$$

Задача. Доказать, что для субэкспоненциальных распределений

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - F^{n*}(x)}{1 - F(x)} = n.$$

Для некоторых субэкспоненциальных распределений существуют такие постоянная δ и медленно меняющаяся на бесконечности функция $C(x)$, что

$$1 - F(x) \sim x^{-\delta} C(x) \text{ при } x \to \infty.$$

Задача. Доказать, что для преобразованного бета-распределения выполнено указанное соотношение, найти δ и $C(x)$.

Задача. Найти асимптотику $1 - F(x)$ при $x \to \infty$ для логнормального распределения.

Определение

Если $(1 - F_X(x))/(1 - F_Y(x)) \to 0$ при $x \to \infty$, распределение X имеет более легкий (правый) хвост чем Y, и более тяжелый, если отношение стремится к бесконечности.

Задача. Проверить, что хвост преобразованного гамма-распределения легче, чем у преобразованного бета.

Задача. Сравнить правые хвосты распределений Парето, логнормального и гамма.

Задача. Исследовать поведение левого хвоста преобразованного бета-распределения, показав, что $F(x) \sim cx^{\delta}$ при $x \to 0$. Чему равно c?

Основная литература

1. Е.В.Булинская. Теория риска и перестрахование, часть I, Изд-во мех-мат ф-та МГУ, 2001.
2. Е.В.Булинская. Теория риска и перестрахование, часть 2, Изд-во мех-мат ф-та МГУ, 2006.
3. Ekaterina Bulinskaya. New Research Directions in Modern Actuarial Sciences. In: Modern problems of stochastic analysis and statistics - selected contributions in honor of Valentin Konakov, ed. V.Panov, November 2017, Springer Proceedings in Mathematics and Statistics 208, p. 349-408.