МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. М.В.ЛОМОНОСОВА

Механико-математический факультет

Е.В.БУЛИНСКАЯ

ТЕОРИЯ РИСКА И ПЕРЕСТРАХОВАНИЕ

ЧАСТЬ 2

М о с к в а 2006 год

Булинская Е.В.

Теория риска и перестрахование
Часть 2.

Учебное пособие. — Издательство механико-математического факультета МГУ, Москва, 2006 г., 160 стр.

Настоящее пособие представляет собой вторую часть курса лекций "Актуарная математика дополненную задачами и материалом для углубленного самостоятельного изучения предмета.

Первая глава посвящена моделям риска (индивидуальная модель и ее модификации, коллективная модель – статическая и динамическая, переход от индивидуальной модели к коллективной, сравнение различных моделей).

Вторая глава содержит описание широко используемых на практике договоров престрахования, их преимуществ и недостатков, а также финансовых и экономических особенностей, изучается выбор оптимального договора перестрахования с точки зрения цедента и перестраховщика.

Для студентов и аспирантов математических факультетов университетов, специализирующихся в области теории вероятностей и математической статистики, а также актуарной и финансовой математики.

Рецензенты

Кафедра математической статистики и эконометрики
Тверского государственного университета

Доктор физико-математических наук, профессор *В.Ю.Королев*
Доктор физико-математических наук, профессор *С.Я.Шоргин*

Содержание

Предисловие

Данное учебное пособие является продолжением книги автора [1], опубликованной в 2001 году. Оно содержит материал, соответствующий программе курса "Актуарная математика - 2 принятой на механико-математическом факультете МГУ. В основу положены лекции, которые регулярно читаются автором для студентов актуарно-финансовой группы. Кроме того, предложен ряд задач для самостоятельного решения.

В первой главе изучаются модели риска: индивидуальная и ее обобщения, коллективная, переход от индивидуальной модели к коллективной, проводится сравнение моделей с помощью различных стохастических порядков, а также дается представление о динамических моделях риска и вероятности разорения.

Вторая глава посвящена перестрахованию. Рассматриваются виды и механизмы перестрахования. Подробно изучаются наиболее употребляемые на практике договоры пропорционального и непропорционального перестрахования, их преимущества и недостатки, экономические и финансовые условия. В заключительном разделе рассматривается проблема оптимального выбора договора перестрахования.

В связи с ограниченным объемом книги некоторые результаты приводятся без доказательства. Указывается также дополнительная литература для углубленного изучения предмета. Нумерация формул, теорем, лемм, замечаний, примеров и задач ведется подряд, независимо от главы. При ссылке на результаты из первой части пособия перед соответствующим номером добавляется единица (например, теорема 1.33 означает теорему 33 из [1]).

Автор выражает признательность за полезные обсуждения своим рецензентам профессорам В.Ю.Королеву и С.Я.Шоргину, зав.кафедрой математической статистики и эконометрики Тверского государственного университета профессору Ю.С.Хохлову, а также всем сотрудникам кафедры теории вероятностей механико-математического факультета МГУ. Особая благодарность доценту А.Д.Маните и д.ф.м.н. А.С.Черному за помощь в подготовке графиков на компьютере.

1 Модели риска

Этот раздел мы начнем с описания хорошо известных актуариям моделей представления суммарного ущерба страховой компании в течение заданного промежутка времени, а затем произведем их сравнение.

Речь идет о достаточно коротком промежутке (обычно это год), поэтому в классических моделях ни инфляция, ни доходы от инвестиций не учитываются. Предполагается также, что премии вносятся в начале рассматриваемого промежутка. Модели такого типа возникают как в страховании "не жизни"(гражданская ответственность, имущественное или медицинское страхование), так и при краткосрочном страховании жизни.

Изучение распределения суммарного ущерба представляет большой интерес для страховых компаний, так как служит основой для принятия таких важных решений как выбор размера премий и объема резервов. Этой проблеме посвящены многие статьи и монографии (см. напр. [55], [13], [42], [39]).

Исторически первой была *индивидуальная модель*, которая находит и теперь широкое применение в страховании жизни и медицинском страховании. В последнее десятилетие появились ее различные модификации, о которых речь пойдет в разделах 1.1.2 и 1.3.5. *Модель коллективного риска*, введенная в 1903г. Ф.Лундбергом и разработанная в 30-е годы двадцатого века известным шведским математиком Г.Крамером, позволила получить целый ряд важных результатов, интересных как с теоретической, так и с практической точки зрения.

Особый интерес в рамках теории коллективного риска представляют так называемые *динамические модели*, где рассматривается процесс функционирования страховой компании не только на конечном, но и на бесконечном промежутке времени. При этом суммарный ущерб, как впрочем и поступление премий, является случайным процессом. Основное внимание в этих моделях уделяется вероятности разорения. Краткое введение в такую проблематику содержится в разделе 1.4. Более подробно ознакомиться с этими вопросами можно, прочитав, например, [67], [7], [2] или упоминавшиеся выше [55], [42].

1.1 Индивидуальная модель

Введем сначала классическую индивидуальную модель, а далее рассмотрим ее обобщение, учитывающее возможность инфляции и случайного изменения процентных ставок.

1.1.1 Классический вариант

Пусть портфель страховой компании состоит из фиксированного числа, скажем n, контрактов, по которым могут поступать требования (претензии, иски) на выплату возмещений при наступлении страховых случаев (или событий). Предполагается, что контракты (или риски) между собой независимы, но не обязательно одинаковы. Если обозначить V_i, $i = \overline{1,n}$, суммарный размер поступивших требований по i-му контракту за определенный промежуток времени (чаще всего год), то это будут независимые неотрицательные случайные величины, вообще говоря, разно распределенные. Осуществление события $\{V_i = 0\}$ означает, что по i-му контракту не поступало требований. Обозначим через $\mathbf{1}_i$ индикатор события $\{V_i > 0\}$, $i = \overline{1,n}$, и введем независимые случайные величины U_i, имеющие распределение $G_i(x) = \mathrm{P}(U_i \le x) = q_i^{-1}[F_i(x) - (1-q_i)]$, $x \ge 0$, где $q_i = \mathrm{P}(V_i > 0)$, а $F_i(x) = \mathrm{P}(V_i \le x)$, (и не зависящие от $\mathbf{1}_i$, $i = \overline{1,n}$). Тогда $\mathrm{P}(U_i = 0) = 0$, причем $V_i \stackrel{d}{=} \mathbf{1}_i U_i$ (иначе можно сказать, что U_i — это суммарный размер требований по i-му контракту при условии, что хоть одно требование по данному контракту поступило).

Если по каждому контракту может поступить не более одного требования за рассматриваемый промежуток времени, то $N^* = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_i$ — это число поступивших требований. Такая ситуация характерна для страхования жизни. А именно, если q_j — вероятность смерти j-го застрахованного в течение года и b_j — соответствующая страховая сумма, то случайная величина V_j принимает лишь два значения: $\mathrm{P}(V_j = b_j) = q_j$ и $\mathrm{P}(V_j = 0) = 1 - q_j$. Как объяснено в [55], в медицинском страховании, где требования на выплату могут поступать неоднократно, в соответствии с числом визитов к врачу, удобно рассматривать лишь суммарный объем требований за год и считать, что выплата производится в конце года. В самом деле, модель, используемая страховщиком, не должна зависеть от того, как работает тот или иной врач (например, один зубной врач может выполнить всю работу в течение одного визита, а другой разделит ее на несколько). Кроме того, в медицинском страховании часто используется франшиза, относящаяся к суммарным выплатам за весь год, т.е. некоторую заранее фиксированную сумму, например, первые 100 или 500 долларов пациент платит сам (самострахование), а затем начинает платить страховая компания.

Суммарный размер требований по всему портфелю из n контрактов S^{ind} в индивидуальной модели риска равен $\sum_{i=1}^{n} V_i$, т.е. сумме требований по отдельным контрактам. Согласно сделанным предположениям

$$\mathrm{E}S^{ind} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}V_i, \quad \mathrm{D}S^{ind} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{D}V_i,$$

а функция распределения подсчитывается как свертка

$$F_n^{ind} = *_{i=1}^{n} F_i.$$

Иногда бывает удобно использовать преобразование Лапласа $L_X(z) = \mathrm{E}e^{-zX}$. При сложении независимых случайных величин преобразования Лапласа перемножаются, следовательно,

$$L_{S^{ind}}(z) = \prod_{i=1}^{n} L_{V_i}(z). \tag{1}$$

Поскольку

$$L_{V_j}(z) = 1 - q_j + q_j L_{U_j}(z),$$

то (1) перепишется в виде

$$L_{S^{ind}}(z) = \prod_{j=1}^{n} (1 - q_j + q_j L_{U_j}(z)). \tag{2}$$

Дифференцирование (2) позволяет находить моменты S^{ind}. Однако только в редких случаях удается найти точное обращение $L_{S^{ind}}(z)$, т.е. F_n^{ind}. Один из немногих примеров дает

Задача 1 *Пусть* V_i *имеет распределение* $\Gamma(\alpha_i, \beta)$, $i = \overline{1,n}$, *с плотностью*

$$f_{V_i}(x) = \frac{\beta^{\alpha_i} x^{\alpha_i - 1}}{\Gamma(\alpha_i)} e^{-\beta x}, \quad x > 0.$$

Используя преобразование Лапласа, показать, что S^{ind} *имеет распределение* $\Gamma(\sum_{i=1}^n \alpha_i, \beta)$.

Существуют различные методы аппроксимации F_n^{ind}. При больших n можно использовать нормальное приближение

$$F_n^{ind}(x) \approx \Phi\left(\frac{x - \sum_{i=1}^n \mathrm{E}V_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \mathrm{D}V_i}}\right),$$

если выполнены условия **центральной предельной теоремы в форме Линдеберга**:
Случайные величины V_i, $i = \overline{1,n}$, *независимы, существуют* $\mathrm{E}V_i$ *и* $\mathrm{D}V_i$, *а также для любого* $\varepsilon > 0$

$$B_n^{-2} \sum_{i=1}^n \int_{\{x : |x - \mathrm{E}V_i| > \varepsilon B_n\}} (x - \mathrm{E}V_i)^2 \, dF_{V_i}(x) \to 0 \quad \text{при } n \to \infty,$$

где $B_n^2 = \sum_{i=1}^n \mathrm{D}V_i$. *Тогда*

$$\mathrm{P}\left(\frac{S^{ind} - \sum_{i=1}^n \mathrm{E}V_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \mathrm{D}V_i}} \le x\right) \to \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-u^2/2} \, du.$$

О других методах аппроксимации (ряды Эджворта, преобразование Эсшера, метод Монте-Карло и др.) можно прочитать, например, в [13].

Для малых n распределение S^{ind} может быть подсчитано с помощью рекуррентной процедуры. Предположим, что все V_i — целочисленные случайные величины, и обозначим $S_m = V_1 + \ldots + V_m$. Тогда, если

$$f_{S_m}(k) = \mathrm{P}(V_1 + \ldots + V_m = k), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

то $f_{S_1}(k) = \mathrm{P}(V_1 = k) = f_{V_1}(k)$ и при $m > 1$

$$f_{S_m}(k) = \sum_{j=0}^{k} f_{S_{m-1}}(k-j) f_{V_m}(j), \quad k = 0, 1, \ldots. \tag{3}$$

Таким образом, приходится подсчитывать $f_{S_2}(k)$, $f_{S_3}(k), \ldots$, пока мы не получим $f_{S_n}(k) = f_{S^{ind}}(k)$. Если распределения V_m, $m \geq 1$, непрерывны, то суммы в (3) заменяются на интегралы, $f_{S_m}(x)$ интерпретируется как плотность распределения и для нее справедливо рекуррентное соотношение

$$f_{S_m}(x) = \int_0^x f_{S_{m-1}}(x-y) f_{V_m}(y)\, dy.$$

При больших n такие подсчеты могут оказаться очень трудоемкими, поэтому во многих случаях более привлекательной оказывается коллективная модель риска.

1.1.2 Обобщенная модель

Перед тем как заняться подробным изучением модели коллективного риска, рассмотрим следующее обобщение индивидуальной модели для однородного портфеля. Заметим, что при определенных предположениях предлагаемая модель может превращаться в коллективную.

Итак, пусть $\{X_k\}_{k \geq 1}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин (имеющих такое же распределение как случайная величина X). Нетрудно понять, что X_k можно интерпретировать как возможный размер ущерба от k-го риска в однородном портфеле. Предположим также, что для каждого k задана бернуллиевская случайная величина $\mathbf{1}_k$, которая показывает осуществился ли риск, т.е. поступила ли претензия по данному риску в течение рассматриваемого промежутка времени. Наконец, для каждого k вводится масштабный параметр A_k, являющийся положительной дискретной случайной величиной. Как упоминалось выше, A_k может, например, учитывать случайные колебания процентой ставки или инфляцию. Тогда суммарный размер требований по рассматриваемому портфелю будет равен

$$S_X = \sum_{k=1}^{N} \mathbf{1}_k A_k X_k, \tag{4}$$

где через N обозначено число рисков. Величина N может быть не только фиксированной, что было характерно для классической индивидуальной модели, но и случайной. При этом предполагается, что последовательность X_k не зависит от троек $(N, \mathbf{1}_k, A_k)$, хотя сами тройки могут быть зависимы. Модели с добавлением множителей A_k были введены в работах [20] и [69], а затем изучались, например, в [46]. Другая интерпретация величин A_k приводится в [6], где подобная модель называется факторизационной (величины $\mathbf{1}_k$ там предполагаются равными единице). Она используется для получения асимптотических оценок оптимальных страховых тарифов.

1.2 Коллективная модель

Все поступающие требования рассматриваются в порядке их поступления, при этом не учитывается, по какому контракту они поступили. Размеры требований X_i, $i \geq 1$, считаются независимыми одинаково распределенными положительными случайными величинами с функцией распределения $G(x) = \mathrm{P}(X_i \leq x)$, $G(0) = 0$. Число требований N за рассматриваемый промежуток времени предполагается случайным, причем целочисленная случайная величина N не зависит от последовательности $\{X_i\}_{i\geq 1}$. Суммарный размер поступивших требований $S^{col} = \sum_{i=1}^{N} X_i$ равен сумме случайного числа случайных слагаемых. Легко видеть, что S^{col} совпадает с S_X из (4), если все $\mathbf{1}_k = A_k = 1$.

Задача 2 *Проверить, что производящая функция моментов случайной величины S^{col} записывается следующим образом*

$$g_{S^{col}}(t) = \mathrm{E}e^{tS^{col}} = P_N(g_X(t)),$$

где $P_N(z) = \mathrm{E}z^N$ — производящая функция N, а $g_X(t) = \mathrm{E}e^{tX_i}$, $i \geq 1$, — производящая функция моментов случайных величин

X_i. *Следовательно,*

$$\mathrm{E}S^{col} = \mathrm{E}N \cdot \mathrm{E}X_1, \quad \mathrm{D}S^{col} = \mathrm{E}N \cdot \mathrm{D}X_1 + \mathrm{D}N \cdot (\mathrm{E}X_1)^2. \tag{5}$$

В следующих разделах будут приведены наиболее часто используемые на практике распределения для числа происшествий (страховых случаев) N и для размера отдельных требований (выплат) X. Как показано в [42], использование более сложных распределений, зависящих от двух, трех или даже четырех параметров, дает возможность подобрать распределение, наилучшим образом описывающее реальные данные. Подчеркнем также, что выбор по отдельности распределений числа требований и размера отдельного требования имеет своей целью полнее отразить структуру изучаемых процессов. Тем самым обеспечивается возможность получения гораздо более точного приближения для истинного распределения суммарного ущерба, чем при подборе распределения непосредственно по наблюдениям за суммарным ущербом. Указанное представление оказывается полезным и для учета изменений в контракте страхования и при перестраховании.

1.2.1 Размер отдельного требования

Для описания поступающих требований (или выплат страховой компании) обычно используются непрерывные распределения. В самом деле, размер отдельных выплат может принимать любые неотрицательные значения, если речь идет о медицинском страховании (расходы на лечение), имущественном (возмещение ущерба, нанесенного имуществу застрахованного), гражданской ответственности (ущерб, причиненный третьим лицам, оплата услуг юристов или судебных издержек) и др., тем более, что может производиться пересчет из одной валюты в другую.

Ниже мы перечислим ряд базовых (или стандартных) непрерывных распределений и укажем несколько способов получения из них более сложных распределений (умножение на положительную константу, возведение в степень, взятие экспоненты, усреднение по параметру, смесь распределений и др.).

Пусть $F_X(\cdot)$ и $f_X(\cdot)$ обозначают соответственно функцию распределения и плотность случайной величины X. Для всех распределений, кроме нормального и фигурирующих в задачах 6, 7, предполагается, что $X > 0$, т.е. $F_X(0) = 0$. (Для упрощения записи индекс X иногда будет опускаться.) Если специально не оговорено, параметры рассматриваемых распределений считаются положительными.

Нам понадобятся следующие обозначения для некоторых специальных функций распределения:

- *Неполная гамма-функция*

$$G(\alpha, x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt, \quad \alpha > 0,\ x > 0,$$

где

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt.$$

При целом $\alpha = n$ верно равенство

$$G(n, x) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{x^k}{k!} e^{-x}. \tag{6}$$

- *Неполная бета-функция*

$$\beta(a, b, x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_0^x t^{a-1} (1-t)^{b-1}\, dt,\ a > 0,\ b > 0,\ 0 < x < 1. \tag{7}$$

- *Стандартное нормальное распределение*

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}\, dt, \quad -\infty < x < \infty.$$

- *Равномерное распределение* на отрезке $[0, 1]$ с функцией распределения

$$\mathcal{U}(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Показательное (экспоненциальное) распределение с единичным средним имеет функцию распределения $G(1, x)$. Согласно (6) для $X \sim Exp(1)$

$$F_X(x) = 1 - e^{-x}, \quad f_X(x) = e^{-x}, \quad x > 0.$$

Как следует из задачи 1, сумма n независимых показательно распределенных случайных величин с единичным средним имеет функцию распределения $G(n, x)$, задаваемую (6). Для произвольного α неполная гамма-функция $G(\alpha, x)$ также является функцией распределения. Аналогично с помощью неполной бета-функции $\beta(a, b, x)$ задается *стандартное бета-распределение*, сосредоточенное на отрезке $[0, 1]$.

Дадим также следующие определения.

Определение 1 *Семейство распределений называется* масштабно инвариантным*, если вместе с распределением случайной величины X распределение $Y = cX$ при любом $c > 0$ также принадлежит этому семейству.*

Определение 2 *Масштабно инвариантное семейство обладает* масштабным параметром *θ, если у случайной величины $Y = cX$ только θ переходит в $c\theta$, а все остальные параметры такие же, как у X.*

Рассматриваемые далее распределения являются масштабно инвариантными. Их преимущество состоит в том, что для них легко учитывать инфляцию, когда она равномерна по всему диапазону выплат. Наличие масштабного параметра (которым обладают все распределения, кроме логнормального и обращенного гауссовского) позволяет моделировать неопределенность будущей инфляции.

1. *Умножение на* (положительную) *константу* — это один из способов получения новых распределений.

Лемма 1 *Пусть $Y = \theta X$ с $\theta > 0$, тогда*

$$F_Y(x) = F_X(x/\theta) \quad \text{и} \quad f_Y(x) = \theta^{-1} f_X(x/\theta), \quad x > 0.$$

Доказательство первого равенства очевидным образом вытекает из определения функции распределения

$$F_Y(x) = \mathrm{P}(Y \le x) = \mathrm{P}(\theta X \le x) = \mathrm{P}(X \le x/\theta) = F_X(x/\theta).$$

Для плотности имеем

$$f_Y(x) = \frac{d}{dx} F_Y(x) = \frac{1}{\theta} f_X\left(\frac{x}{\theta}\right). \blacksquare$$

Следствие 1 *Параметр θ в лемме 1 является масштабным.*

С помощью леммы 1 может быть получено семейство *показательных распределений*, $Y \sim Exp(1/\theta)$:

$$F_Y(x) = 1 - e^{-x/\theta}, \quad f_Y(x) = \theta^{-1} e^{-x/\theta}, \quad x > 0.$$

Легко проверить, что $\mathrm{E}Y = \theta$.

Задача 3 *Доказать, что единственное непрерывное распределение, обладающее отсутствием памяти,*

$$\mathrm{P}(X > x + t | X > x) = \mathrm{P}(X > t),$$

это показательное распределение. Иначе это свойство называется отсутствием старения или последействия.

Аналогично получаем семейство *гамма-распределений* $\Gamma(\alpha, \theta^{-1})$, зависящее от двух параметров:

$$F(x) = G(\alpha, x/\theta), \quad f(x) = \frac{(x/\theta)^\alpha e^{-x/\theta}}{x\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0.$$

Введение масштабного параметра θ в стандартное бета-распределение дает (при $0 < x < \theta$)

$$F(x) = \beta(a, b, u), \quad f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^a (1-u)^{b-1} \frac{1}{x}, \quad u = x/\theta.$$

При этом меняется носитель распределения, поэтому параметр θ считается заранее заданным (а не оценивается по результатам наблюдений) как для данного распределения, так и для *обобщенного бета-распределения* $(0 < x < \theta)$:

$$F(x) = \beta(a, b, u), \quad f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} u^a (1-u)^{b-1} \frac{\tau}{x}, \quad u = (x/\theta)^\tau.$$

2. *Возведение в степень* также ведет к построению новых распределений.

Лемма 2 *Пусть* $Y = X^{1/\tau}$*, тогда при* $\tau > 0$

$$F_Y(x) = F_X(x^\tau), \quad f_Y(x) = \tau x^{\tau-1} f_X(x^\tau), \quad x > 0,$$

а при $\tau < 0$

$$F_Y(x) = 1 - F_X(x^\tau), \quad f_Y(x) = -\tau x^{\tau-1} f_X(x^\tau), \quad x > 0. \qquad (8)$$

Доказательство очевидно, так как

$$F_Y(x) = \mathrm{P}(Y \le x) = \mathrm{P}(X^{1/\tau} \le x) = \begin{cases} \mathrm{P}(X \le x^\tau), & \tau > 0, \\ \mathrm{P}(X \ge x^\tau), & \tau < 0. \end{cases} \quad \blacksquare$$

Определение 3 *Если* $\tau > 0$*, то распределение* Y *называется* преобразованным (*или трансформированным*)*, при* $\tau = -1$ обратным*, а при прочих* $\tau < 0$ обратным преобразованным.

Замечание 1 Поскольку часто желательно и в случае обратного преобразованного распределения считать параметр τ положительным, вместо (8) для этого случая используют соотношения

$$F_Y(x) = 1 - F_X(x^{-\tau}), \quad f_Y(x) = \tau x^{-\tau-1} f_X(x^{-\tau}), \quad \tau > 0,$$

полученные заменой τ на $-\tau$.

Задача 4 *Проверить, что для базового распределения* $Exp(1)$ *обратное имеет функцию распределения* $F(x) = e^{-1/x}$*, у преобразованного распределения* $F(x) = 1 - \exp(-x^\tau)$*, а у обратного преобразованного* $F(x) = \exp(-x^{-\tau})$.

Замечание 2 Если мы хотим ввести масштабный параметр в преобразованное распределение, то следует рассмотреть случайную величину $\theta X^{1/\tau}$.

Таким образом мы получаем еще одно однопараметрическое семейство — *обратное экспоненциальное*:

$$F(x) = e^{-\theta/x}, \quad f(x) = \frac{\theta e^{-\theta/x}}{x^2}, \quad x > 0,$$

следующие двухпараметрические семейства:

а) *Вейбулла*

$$F(x) = 1 - \exp[-(x/\theta)^\tau], \quad f(x) = \frac{\tau (x/\theta)^\tau e^{-(x/\theta)^\tau}}{x}, \quad x > 0,$$

б) *обратное Вейбулла*

$$F(x) = \exp[-(\theta/x)^\tau], \quad f(x) = \frac{\tau (\theta/x)^\tau e^{-(\theta/x)^\tau}}{x}, \quad x > 0,$$

в) *обратное гамма*

$$f(x) = 1 - G(\alpha, \theta/x), \quad f(x) = \frac{(\theta/x)^\alpha e^{-\theta/x}}{x\Gamma(\alpha)}, \quad x > 0,$$

и трехпараметрические (с параметрами α, θ, τ):

а) *преобразованое гамма-распределение*

$$F(x) = G(\alpha, u), \quad f(x) = \frac{\tau u^\alpha e^{-u}}{x\Gamma(\alpha)}, \text{ где } u = (x/\theta)^\tau, \quad x > 0, \tag{9}$$

б) *преобразованное обратное гамма-распределение*

$$F(x) = 1 - G(\alpha, u), \quad f(x) = \frac{\tau u^\alpha e^{-u}}{x\Gamma(\alpha)}, \text{ где } u = (\theta/x)^\tau, \quad x > 0. \tag{10}$$

Замечание 3 Рассмотренные выше двух- и однопараметрические распределения могут быть получены из (9) и (10) как частные случаи. Так, из преобразованного гамма-распределения при $\alpha = 1$ получаем распределение Вейбулла, при $\tau = 1$ гамма-распределение и при $\alpha = \tau = 1$ экспоненциальное. Аналогичным образом из преобразованного обратного гамма-распределения получаются обратные распределения Вейбулла, гамма и экспоненциальное.

Таким образом, на практике при подборе распределения по результатам наблюдений удобнее начинать с однопараметрического семейства. Если соответствие оказывается недостаточно хорошим, можно переходить к двухпараметрическим семействам, а если понадобится, увеличивать число параметров до трех или четырех.

3. *Взятие экспоненты* — еще один способ получения новых распределений.

Лемма 3 *Пусть $Y = e^X$, тогда*

$$F_Y(x) = F_X(\ln x), \quad f_Y(x) = x^{-1} f_X(\ln x), \quad x > 0.$$

Доказательство очевидным образом следует из равенства

$$F_Y(x) = \mathrm{P}(Y \le x) = \mathrm{P}(e^X \le x) = \mathrm{P}(X \le \ln x). \quad \blacksquare$$

Этим способом мы получаем хорошо известное *логнормальное распределение* с параметрами μ и σ (μ может быть отрицательным). А именно, пусть $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, т.е. $F_X(x) = \Phi((x-\mu)/\sigma)$. Возьмем $Y = e^X$, тогда при $x > 0$

$$F_Y(x) = \Phi\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right), \quad f_Y(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Задача 5 *Показать, что логарифмически нормальное распределение масштабно инвариантно, но не обладает масштабным параметром.*

Задача 6 *Пусть $f_X(x) = \exp(-|x/\theta|)/2\theta$ для $-\infty < x < \infty$. Найти распределение $Y = e^X$.*

Задача 7 *Выразить функцию распределения Стьюдента, обладающую плотностью*

$$f_X(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi r}\,\Gamma\left(\frac{r}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{r}\right)^{-(r+1)/2}, \quad -\infty < x < \infty, \quad r > 0,$$

через неполную бета-функцию. Найти функцию распределения и плотность лог-t распределения $Y = \exp(aX + b)$.

Еще одна функция, используемая для получения новых неотрицательных распределений, $Y = \ln(1+X)$. На ней мы останавливаться не будем. Вместо этого рассмотрим семейство распределений, которое не получается с помощью некоторой функции $Y = h(X)$. А именно, широко известное *обращенное гауссовское распределение* представляет собой частный случай (при $\lambda = -0,5$) следующего семейства с плотностью, зависящей от трех параметров $\mu > 0$, $\beta > 0$, $-\infty < \lambda < \infty$,

$$f(x) = \frac{\mu^{-\lambda} x^{\lambda-1} \exp[-(x^2+\mu^2)/2\beta x]}{2K_\lambda(\mu\beta^{-1})}, \quad x > 0, \tag{11}$$

где $K_\lambda(x)$ — это модифицированная функция Бесселя третьего рода

$$K_\lambda(x) = \frac{1}{2}\int_0^\infty y^{\lambda-1} e^{-x(y+y^{-1})/2}\,dy, \quad x > 0.$$

Заметим, что при $n = 0, 1, 2, \ldots$

$$K_{n+\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{1/2} e^{-x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(n+k)!}{(n-k)!k!}(2x)^{-k}$$

и

$$K_\lambda(x) \sim \sqrt{\pi}(2\lambda)^{\lambda-(1/2)} e^{-\lambda} x^{-\lambda} \quad \text{при} \quad \lambda \to \infty.$$

Задача 8 *Проверить, что*

$$\begin{gathered} K_\lambda(x) = K_{-\lambda}(x), \\ K_{\lambda+1}(x) = \tfrac{2\lambda}{x} K_\lambda(x) + K_{\lambda-1}(x), \\ \tfrac{\partial}{\partial x} K_\lambda(x) = -\tfrac{1}{2}[K_{\lambda+1}(x) + K_{\lambda-1}(x)]. \end{gathered}$$

Обращенное гауссовское распределение, получающееся при $\lambda = -0,5$, имеет плотность

$$f(x) = \mu(2\pi\beta x^3)^{-1/2} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\beta x}\right\}, \quad x > 0,$$

и функцию распределения

$$F(x) = \Phi[(\beta x)^{-1/2}(x-\mu)] + e^{2\mu\beta^{-1}} \Phi[-(\beta x)^{-1/2}(x+\mu)].$$

Распределение, получающееся при $\lambda = 0,5$, называют *взаимным* обращенному гауссовскому распределению.

Задача 9 *Проверить, что в случае X, имеющей обращенное гауссовское распределение с параметрами μ, θ, случайная величина $Y = cX$ имеет аналогичное распределение, но оба параметра умножаются на c.*

4. Следующий способ получения новых распределений — *усреднение по параметру.*

Таким образом удается учесть неоднородность портфеля страховщика, а также неопределенность будущей инфляции.

В самом деле, предположим, что каждый контракт характеризуется параметром θ, представляющим собой реализацию некоторой случайной величины Θ. При фиксированном θ размер выплаты X имеет плотность $f_X(x, \theta)$. Если *структурная функция портфеля*, т.е. распределение Θ, обладает плотностью $u(\theta)$, то

$$f_X(x) = \mathrm{E} f_X(x, \Theta) = \int f_X(x, \theta) u(\theta)\, d\theta. \tag{12}$$

Безусловное распределение X соответствует наудачу выбранному риску из рассматриваемого портфеля. Такая интерпретация лежит в основе *теории достоверности* (credibility theory), о которой речь пойдет в третьей части данного пособия.

Другая интерпретация усреднения возникает, как показывает следующая задача, если предположить, что параметр θ является масштабным.

Задача 10 *Найти распределение CX в предположении, что случайная величина C не зависит от X и обладает плотностью $f_C(\cdot)$. Показать, что $f_{CX}(x)$ может быть записана в виде интеграла, стоящего в правой части* (12). *Чему равна плотность $u(\theta)$ в данном случае? Если $\mathrm{E}C = 1$, проверить, что $\mathrm{D}(CX) > \mathrm{D}X$.*

Следовательно, усреднение по масштабному параметру моделирует неопределенность будущей инфляции.

Наконец, обратимся к *преобразованному бета-распределению*, зависящему от четырех параметров $(\alpha, \theta, \gamma, \tau)$. Положим

$$u = \frac{(x/\theta)^\gamma}{1 + (x/\theta)^\gamma}, \quad x > 0,$$

тогда

$$F(x) = \beta(\tau, \alpha, u), \quad f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\tau)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\tau)} \frac{\gamma (x/\theta)^{\gamma\tau}}{x[1 + (x/\theta)^\gamma]^{\alpha+\tau}}. \qquad (13)$$

Задача 11 *Проверить, что преобразованное бета-распределение может быть получено усреднением по масштабному параметру θ преобразованного гамма-распределения. При этом предполагается, что θ имеет обратное преобразованное гамма-распределение с тем же параметром τ, что у исходного.*

Задача 12 *Можно ли получить обратное преобразованное гамма-распределение, если устремить к бесконечности τ в преобразованном бета-распределении?*

Задача 13 *Показать, что преобразованное гамма-распределение получается из преобразованного бета-распределения, если $\theta \to \infty$, $\alpha \to \infty$ и $\theta/\alpha^{1/\gamma} \to \xi$ (где ξ — постоянная).*

Задача 14 *Если $\gamma^{-1}\sqrt{\xi^\gamma} \to \sigma$ и $\gamma^{-1}(\xi^\gamma \tau - 1) \to \mu$, то преобразованное гамма-распределение из предыдущего упражнения стремится к логнормальному.*

Положив в (13) один из параметров равным 1, мы получаем следующие трехпараметрические распределения (везде ниже, если не оговорено иное, $x > 0$):

а) *распределение Берра* (Burr) при $\tau = 1$

$$F(x) = 1 - u^\alpha, \quad f(x) = \frac{\alpha\gamma(x/\theta)^\gamma}{x[1 + (x/\theta)^\gamma]^{\alpha+1}}, \quad u = [1 + (x/\theta)^\gamma]^{-1},$$

б) *обратное распределение Берра* при $\alpha = 1$

$$F(x) = u^\tau, \quad f(x) = \frac{\tau\gamma(x/\theta)^{\gamma\tau}}{x[1 + (x/\theta)^\gamma]^{\tau+1}}, \quad u = \frac{(x/\theta)^\gamma}{1 + (x/\theta)^\gamma},$$

в) *обобщенное распределение Парето* при $\gamma = 1$

$$F(x) = \beta(\tau, \alpha, u), \quad f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\tau)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\tau)} \frac{\theta^\alpha x^{\tau-1}}{(x+\theta)^{\alpha+\tau}} \quad u = \frac{x}{x+\theta}.$$

Задача 15 *Найти предел обобщенного распределения Парето при $\alpha \to \infty$ и $\theta \to \infty$.*

Задача 16 *Проверить, что обратное распределение Берра получается усреднением обратного распределения Вейбулла по масштабному параметру, имеющему преобразованное гамма-распределение с тем же τ.*

В свою очередь, из вышеприведенных распределений можно получить пять двухпараметрических:

а) *паралогистическое* ($\alpha = \gamma, \tau = 1$) является частным случаем распределения Берра

$$F(x) = 1 - u^{\alpha}, \quad f(x) = \frac{\alpha^2 (x/\theta)^{\alpha}}{x[1 + (x/\theta)^{\alpha}]^{\alpha+1}}, \quad u = [1 + (x/\theta)^{\alpha}]^{-1},$$

б) *обратное паралогистическое* ($\tau = \gamma, \alpha = 1$) — частный случай обратного распределения Берра

$$F(x) = u^{\tau}, \quad f(x) = \frac{\tau^2 (x/\theta)^{\tau^2}}{x[1 + (x/\theta)^{\tau}]^{\tau+1}}, \quad u = \frac{(x/\theta)^{\tau}}{1 + (x/\theta)^{\tau}},$$

в) *логлогистическое* ($\alpha = \tau = 1$) представляет собой частный случай распределения Берра и обратного распределения Берра

$$F(x) = u, \quad f(x) = \frac{\gamma (x/\theta)^{\gamma}}{x[1 + (x/\theta)^{\gamma}]^2}, \quad u = \frac{(x/\theta)^{\gamma}}{1 + (x/\theta)^{\gamma}},$$

г) *распределение Парето* ($\gamma = \tau = 1$) получается как из обобщенного распределения Парето, так и из распределения Берра

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x + \theta}\right)^{\alpha}, \quad f(x) = \frac{\alpha \theta^{\alpha}}{(x + \theta)^{\alpha+1}},$$

д) *обратное распределение Парето* ($\gamma = \alpha = 1$) — частный случай обратного распределения Берра и обобщенного распределения Парето

$$F(x) = \left(\frac{x}{x + \theta}\right)^{\tau}, \quad f(x) = \frac{\tau \theta x^{\tau-1}}{(x + \theta)^{\tau+1}}.$$

Задача 17 *Показать, что распределение Парето обладает масштабным параметром.*

Задача 18 *Проверить, что распределение обратное к логлогистическому также логлогистическое.*

Задача 19 *Показать, что распределение Парето (с $\alpha = 1$) можно получить усреднением показательного распределения по масштабному параметру, который имеет обратное показательное распределение.*

Задача 20 *При произвольном α распределение Парето получается усреднением по λ показательного распределения $Exp(\lambda)$ со средним λ^{-1}. Предполагается, что λ имеет гамма-распределение $\Gamma(\alpha, \theta)$, см. задачу 1.*

Упомянем также *однопараметрическое распределение Парето*:

$$F(x) = 1 - \left(\frac{\theta}{x}\right)^{\alpha}, \quad f(x) = \frac{\alpha\theta^{\alpha}}{x^{\alpha+1}}, \quad x > \theta,$$

сосредоточенное на полупрямой (θ, ∞). Хотя в записи этого распределения фигурируют два параметра α и θ, но величина θ должна быть заранее фиксирована.

Замечание 4 Новые распределения могут быть получены путем *взвешивания,* рассмотренного в разделе 2.5.3 части I данного пособия, см. [1]. Частным случаем является *преобразование Эсшера:*

$$F_Y(x) = \int_0^x e^{hy}\, dF_X(y)/g_X(h),$$

где $g_X(h) = \mathrm{E}e^{hX}$ — производящая функция моментов.

Необходимо также отметить, что *смеси* функций распределения $\sum_n p_n F_n(x)$, где $p_n \geq 0$, $\sum_n p_n = 1$, и *составные распределения,* о которых уже говорилось в [1], также используются для получения новых распределений. Они будут вновь рассмотрены в следующем разделе, когда речь пойдет о частоте требований.

При компьютерном моделировании часто используется следующий хорошо известный результат.

Лемма 4 *Пусть случайная величина Z распределена равномерно на отрезке $[0,1]$. Тогда $Y = F_X^{-1}(Z)$, где*

$$F_X^{-1}(t) = \sup(x : F_X(x) \leq t),$$

имеет функцию распределения $F_X(x)$.

Таким образом, сначала строится выборка $(x_1, \ldots, x_n)$ из распределения $\mathcal{U}(x)$, а затем подсчитываются значения $F_X^{-1}(x_k)$, $k = \overline{1,n}$, что и дает выборку из распределения F_X.

Для перестрахования полезными оказываются также распределения Бенктандера, которые задаются не с помощью плотностей или функций распределения, а с помощью условных математических ожиданий $r(x) = \mathrm{E}(X - x | X > x)$.

Распределение Бенктандера I (BI) имеет

$$r(x) = x(a + 2b \ln x)^{-1}.$$

Распределение Бенктандера II (BII) имеет

$$r(x) = x^{1-b}/a$$

(при $b = 1$ получается экспоненциальное распределение, а при $b = 0$ получается однопараметрическое распределение Парето).

Подробности, касающиеся распределений, перечисленных выше, а также ряд других распределений, полезных в страховании, можно найти в [42], [12], [39], [55].

1.2.2 Число требований

В этом параграфе мы будем рассматривать неотрицательные целочисленные случайные величины, иначе говоря, *считающие или арифметические распределения.* Как и в предыдущем параграфе, начнем с наиболее простых и широко используемых распределений: биномиального, пауссоновского, геометрического и отрицательно биномиального. Затем обратимся к двум основным методам получения новых распределений (построение составных распределений, т.е. суммирование случайного числа случайных слагаемых, и усреднение по параметру).

Целый ряд полезных свойств указанных распределений был получен в параграфе 2.4.3 первой части данного пособия (см. [1]). В частности, было произведено сравнение распределений в смысле порядка стоп-лосс, а также показано, что отрицательно биномиальное распределение получается усреднением пуассоновского по параметру.

Рассмотрение отрицательно биномиального распределения для частоты происшествий (или требований) может объясняться необходимостью учесть *неоднородность* рассматриваемого *портфеля* контрактов. Например, очевидно, что застрахованные водители, относящиеся к одной и той же тарифной группе, обладают различным искусством вождения автомобилей. Следовательно, у них различно среднее число происшествий λ за год. Если при фиксированном λ условное распределение числа происшествий N пуассоновское, то безусловное распределение

$$\mathrm{P}(N=k)=\int \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}u(\lambda)\,d\lambda, \tag{14}$$

где $u(\lambda)$ — структурная плотность портфеля.

Задача 21 *Проверить, что* (14) *дает отрицательно биномиальное распределение* $NB(\alpha,\beta)$ *в том случае, когда*

$$u(\lambda)=\frac{\lambda^{\alpha-1}\exp(-\lambda/\beta)}{\beta^\alpha\Gamma(\alpha)}, \quad \lambda>0,$$

(*см. также следствие* 1.2).

Здесь мы остановимся на том факте, что вероятности $p_k=\mathrm{P}(N=k)$, $k=0,1,\ldots$, для вышеупомянутых распределений удовлетворяют некоторым рекуррентным соотношениям, или в терминологии [42], [55] принадлежат классу $(a,b,0)$.

Определение 4 *Считающее распределение* $\{p_k\}_{k\geq 0}$ *принадлежит* классу $(a,b,0)$, *если существуют такие* a *и* b, *что при* $k=1,2,\ldots$

$$p_k=p_{k-1}\left(a+\frac{b}{k}\right). \tag{15}$$

Величину p_0 можно определить, пользуясь тем, что $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$. Очевидно, что $p_0 > 0$.

Нетрудно видеть, чему равны a, b и p_0 для следующих распределений:

а) *Биномиальное распределение* $Bi(n, q)$

$$p_k = C_n^k q^k (1-q)^{n-k}, \quad a = -\frac{q}{1-q}, \quad b = \frac{(n+1)q}{1-q}, \quad p_0 = (1-q)^n, \tag{16}$$

где $0 < q < 1$, а параметр n принимает целые положительные значения.

б) *Пуассоновское распределение* $Poi(\lambda)$

$$p_k = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad a = 0, \quad b = \lambda, \quad p_0 = e^{-\lambda}, \tag{17}$$

параметр λ принимает любые положительные значения.

в) *Отрицательно биномиальное распределение* $NB(\alpha, \beta)$

$$p_k = \frac{C_{k+\alpha-1}^k \beta^k}{(1+\beta)^{k+\alpha}}, \quad a = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad b = (\alpha-1)\frac{\beta}{1+\beta}, \quad p_0 = \frac{1}{(1+\beta)^\alpha}, \tag{18}$$

параметры α и β принимают любые положительные значения, при $\alpha = 1$ получаем геометрическое распределение.

г) *Геометрическое распределение* $Geo(\beta/(1+\beta))$

$$p_k = \frac{\beta^k}{(1+\beta)^{k+1}}, \quad a = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad b = 0, \quad p_0 = \frac{1}{1+\beta}. \tag{19}$$

Задача 22 *Проверить, что геометрическое распределение обладает следующим свойством*

$$\mathrm{P}(X \geq k + l | X \geq k) = \mathrm{P}(X \geq l),$$

т.е. является нестареющим.

Задача 23 *Доказать, что пуассоновское распределение* $Poi(\lambda)$ *получается из отрицательно биномиального* $NB(\alpha, \beta)$, *если положить* $\alpha\beta = \lambda$ *и* $\beta \to 0$.

Лемма 5 *Класс* $(a, b, 0)$ *не содержит других невырожденных распределений, кроме* (16) – (19).

Доказательство. Прежде всего заметим, что на плоскости (a, b) прямые $b = -(n+1)a$, $a < 0$, соответствуют семейству *биномиальных* распределений $Bi(n, a/(a-1))$, $n = 1, 2, \ldots$. Положительная ось ординат $a = 0$, $b > 0$ соответствует семейству *пуассоновских* распределений $Poi(b)$. Наконец, область $0 < a < 1$, $b > -a$ соответствует семейству *отрицательно биномиальных* распределений $NB((b/a) + 1, a/(1-a))$, в частности, участок оси абсцисс $0 < a < 1$, $b = 0$ соответствует семейству *геометрических* распределений (см. Рис. 1).

b

0 1 a

Рис. 1

Теперь покажем, что остальные значения a и b в рекуррентной формуле (15) не дают ни при каком $p_0 > 0$ невырожденное распределение вероятностей. В самом деле, в области $b < -a$ мы имеем $a + b < 0$, т.е. $p_1 = (a+b)p_0 < 0$, что невозможно. Линия $b = -a$, $a < 0$ соответствует вырожденному распределению, сосредоточенному в нуле, так как $p_1 = (a+b)p_0 = 0$, а значит, и все $p_k = 0$ при $k \geq 1$. Для любой точки области $b > -a$, $a < 0$, не принадлежащей ни одной из прямых $b = -(n+1)a$, $n = 1, 2, \ldots$, применение соотношений (15) рано или поздно приведет к отрицательному значению для p_k. Наконец, при $a \geq 1$, $b > -a$ очевидна следующая цепочка неравенств

$$a + \frac{b}{k} \geq a\left(1 - \frac{1}{k}\right) \geq \frac{k-1}{k}.$$

Следовательно, применение (15) приводит к следующему результату $p_2 \geq p_1/2$, $p_3 \geq p_1/3, \ldots$, $p_k \geq p_1/k, \ldots$. Суммирование дает

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k \geq p_1 \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{k} + \ldots\right).$$

Поскольку стоящий справа ряд расходится, набор $\{p_k\}$ не может быть распределением вероятностей.

Таким образом, единственными считающими распределениями, принадлежащими классу $(a, b, 0)$, являются биномиальное, пуассоновское, отрицательно биномиальное и геометрическое. ■

Далее мы увидим, что принадлежность считающего распределения классу $(a, b, 0)$ позволяет получить так называемую формулу Панджера (см. например, [52], [53] или [42]) для нахождения составного распределения.

А пока рассмотрим следующий класс распределений.

Определение 5 *Считающее распределение* $\{p_k\}_{k\geq 0}$ *принадлежит* классу $(a, b, 1)$, *если для некоторых* a *и* b *рекуррентные соотношения* (15) *выполнены при* $k = 2, 3, \ldots$.

Отличие от класса $(a, b, 0)$ состоит в том, что рекуррентная процедура начинается не с p_0, а с p_1. Очевидным образом все распределения из класса $(a, b, 0)$ принадлежат классу $(a, b, 1)$. Кроме того, мы получаем возможность, сохраняя форму распределения при положительных k, менять значение вероятности в нуле. Сумму $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ можно положить равной любому числу $c \in (0, 1]$, тогда автоматически $p_0 = 1 - c$, а рекуррентная процедура позволит найти p_1 и все последующие p_k. Возможны два различных случая:

а) Подкласс *урезанных в нуле* распределений (zero-truncated) соответствует $p_0^T = 0$. (В этом случае вероятности будем обозначать p_k^T, $k \geq 0$.) Данный подкласс состоит из урезанных биномиального, пуассоновского, отрицательно биномиального и геометрического распределений. При $k \geq 1$ они имеют те же вероятности, что и неурезанные распределения, но умноженные на некоторую постоянную

$$p_k^T = dp_k, \quad \text{где} \quad d^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1 - p_0,$$

здесь через p_k обозначены вероятности исходного неурезанного распределения.

Задача 24 *Выписать явный вид* p_k^T, $k \geq 1$, *для урезанных в нуле распределений из класса* $(a, b, 0)$.

Такие распределения могут быть полезны, если речь идет о числе требований, соответствующих отдельному происшествию, в предположении, что учитываются лишь те происшествия, по которым поступило хоть одно требование.

б) Подкласс *модифицированных в нуле* распределений (zero-modified) соответствует $p_0^M > 0$. (Модифицированные вероятности обозначаются p_k^M, $k \geq 0$.) Нетрудно проверить, что при $k = 1, 2, \ldots$

$$p_k^M = \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0} p_k,$$

здесь снова p_k соответствует исходному распределению, которое подвергается модификации. Полученное выражение можно переписать также в виде

$$p_k^M = (1 - p_0^M) p_k^T, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, модифицированное в нуле распределение является смесью (с весами $1 - p_0^M$ и p_0^M) урезанного в нуле распределения и вырожденного, сосредоточенного в нуле.

Задача 25 *Являются ли модифицированные в нуле распределения смесью вырожденного распределения, сосредоточенного в нуле и исходного* $(a, b, 0)$ *распределения?*

Очевидно, что класс $(a, b, 1)$ зависит, вообще говоря, от трех параметров a, b и p_0^M. Если положить $p_0^M = p_0$, то получаем распределения класса $(a, b, 0)$.

в) До сих пор мы предполагали, что рассматриваются лишь те значения a и b, которые согласно лемме 5 дают распределения класса $(a, b, 0)$. Оказывается, что подкласс распределений, полученных *расширением области возможных значений* a и b, также принадлежит классу $(a, b, 1)$.

А именно, предположим сначала, что $0 < a \le 1$, $-2a < b < -a$. В этой области при $k \ge 2$ выполнено неравенство $a + (b/k) > 0$. Следовательно,

$$p_k = p_1 \left(a + \frac{b}{2}\right)\left(a + \frac{b}{3}\right) \dots \left(a + \frac{b}{k}\right) > 0, \tag{20}$$

кроме того,

$$\frac{p_k}{p_{k-1}} \le 1 - \frac{A}{k}, \quad \text{где} \quad A = -\frac{b}{a} > 1.$$

Используя признак Раабе, мы получаем, что ряд из p_k сходится.

Задача 26 *Выбрать* p_1 *так, чтобы* $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$. *Положив* $a = \beta/(1+\beta)$, $b = (\alpha - 1)a$ *при* $-1 < \alpha < 0$, $0 < \beta < \infty$, *найти явный вид* p_k *и производящую функцию.*

Получившееся распределение называется ETNB (*расширенным отрицательно биномиальным распределением урезанным в нуле*), поскольку вероятности имеют ту же форму записи, что и отрицательно биномиальное распределение, урезанное в нуле. Однако теперь $-1 < \alpha < 0$, в то время как раньше было $\alpha > 0$. Итак, области $0 < a < 1$, $-a > b > -2a$ соответствует невырожденное распределение класса $(a, b, 1)$ с $p_0 = 0$.

При рассмотрении области $a = 1$, $-2 < b < -1$ обозначим $\delta = -(b + 1)$, чтобы иметь $0 < \delta < 1$. Тогда из (20) получим

$$p_k = \frac{p_1}{k} \frac{\Gamma(k - \delta)}{\Gamma(1 - \delta)}. \tag{21}$$

Задача 27 *Найти производящую функцию распределения* (21). *Иными словами показать, что предел ETNB при* $-1 < \alpha < 0$

и $\beta \to \infty$ является собственным распределением, не имеющим конечного математического ожидания.

Такое распределение с точки зрения страхования не представляет интереса, так как для него затруднительна тарификация.

Задача 28 *Показать, что* логарифмическое *распределение с*

$$p_k = \frac{\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^k}{k \ln(1+\beta)}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

получается из $ETNB$ предельным переходом при $\alpha \to 0$ (т.е. соответствует $0 < a < 1$, $b = -a$). Найти производящую функцию этого распределения.

Замечание 5 Логарифмическое распределение, $NB(\alpha, \beta)$ при $\alpha < 1$ и $ETNB$ имеют убывающие с ростом k вероятности p_k.

Выбрав произвольное p_0, мы получим *модифицированное в нуле расширенное отрицательно биномиальное распределение*, $(0 < a < 1,\ b > -2a)$. Частный случай $(0 < a < 1,\ b = -a)$, иначе говоря, $\alpha = 0$, $\beta > 0$, соответствует *модифицированному в нуле логарифмическому распределению.*

Итак, мы получили следующий результат.

Теорема 1 *Класс $(a, b, 1)$ содержит все распределения класса $(a, b, 0)$, их урезанные и модифицированные в нуле варианты; расширенное отрицательно биномиальное распределение урезанное в нуле и логарифмическое, их модификации в нуле, а также собственное распределение* (21)*, не имеющее математического ожидания.*

Теперь перейдем к рассмотрению *составных считающих распределений*, т.е. к суммам случайного числа неотрицательных целочисленных случайных величин. Распределения такого типа могут возникать в страховании следующим образом. Пусть N — это число происшествий, связанных с некоторым ансамблем контрактов. Например, если речь идет о страховании автомобилей, это может быть число автомобильных катастроф. Предположим, что M_k — это число требований, связанных с k-м происшествием, иначе говоря, число пострадавших. Тогда $\tilde{N} = \sum_{k=1}^{N} M_k$

— это общее число требований по рассматриваемому портфелю. Обычно предполагается, что N не зависит от последовательности $M_1, M_2, \ldots$, состоящей из независимых одинаково распределенных случайных величин.

Задача 29 *Проверить, что производящая функция $\tilde{N}$ имеет вид $P(z) = P_1[P_2(z)]$, где $P_1(z)$ — производящая функция* первичного распределения*, т.е. случайной величины N, а $P_2(z)$ — производящая функция* вторичного распределения*, т.е. случайных величин M_k, $k \geq 1$.*

Для обозначения составного распределения употребляется запись из названий двух использованных распределений, сначала первичное, потом вторичное. Наиболее широко распространены составные пуассоновские распределения, т.е. такие, у которых первичное распределение пуассоновское, а значит, $P(z) = \exp\{\lambda(P_2(z) - 1)\}$.

Задача 30 *Будет ли свертка составных пуассоновских распределений также составным пуассоновским распределением?*

Задача 31 *Проверить, что отрицательно биномиальное распределение — это пуассоновско-логарифмическое.*

Задача 31 позволяет предложить еще одну *интерпретацию* появления отрицательно биномиального распределения числа требований: число происшествий имеет пауссоновское распределение, а число требований для каждого происшествия логарифмическое.

Лемма 6 *Любое модифицированное в нуле распределение является составным.*

Доказательство. В качестве первичного распределения рассмотрим бернуллиевское, т.е. $Bi(1, q)$. Его производящая функция равна $P_1(z) = 1 - q + qz$. Если $P_2(z)$ — производящая функция вторичного распределения, то составное распределение имеет производящую функцию

$$P(z) = 1 - q + qP_2(z). \tag{22}$$

Предположим, что в качестве $P_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k$ мы выбрали производящую функцию того распределения, которое собираемся модифицировать. Поместим в нуль массу p_0^M и умножим все остальные вероятности p_k на некоторую положительную постоянную h, т.е. положим $p_k^M = hp_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Выберем h так, чтобы $\sum_{k=1}^{\infty} p_k^M = 1 - p_0^M$. Это дает $h = (1 - p_0^M)/(1 - p_0)$. Следовательно,

$$P(z) = p_0^M + \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0}(P_2(z) - p_0),$$

что может быть переписано в виде (22), где

$$q = \frac{1 - p_0^M}{1 - p_0}.$$

Тем самым мы установили, что модифицированное распределение является составным. ■

Определение 6 *Распределение вероятностей называется* безгранично делимым*, если при любом $n > 1$ оно представляется как n-кратная свертка некоторого распределения с самим собой.*

Когда речь идет о считающем распределении $\{p_k\}_{k \geq 0}$, то безграничная делимость означает, что при любом $n > 1$ его производящая функция удовлетворяет соотношению $P^{1/n}(z) = Q_n(z)$, где $Q_n(z)$ — также производящая функция некоторого распределения.

Если же рассматривается распределение произвольной неотрицательной случайной величины X, то безграничная делимость означает, что $L_X^{1/n}(z)$ при любом n является преобразованием Лапласа некоторой случайной величины.

Задача 32 *Все ли распределения класса $(a, b, 0)$ являются безгранично делимыми?*

Задача 33 *Проверить, что гамма-распределение и обращенное гауссовское являются безгранично делимыми.*

Теорема 2 *Любое безгранично делимое считающее распределение является составным пуассоновским.*

Доказательство. Вспомним, что составное пуассоновское распределение имеет производящую функцию

$$P(z) = e^{\lambda[P_2(z)-1]}, \tag{23}$$

где $P_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k z^k$ и $h_k \geq 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} h_k = 1$. Мы должны записать в таком виде $P(z)$ в предположении, что $P^{1/n}(z)$ при любом n является производящей функцией некоторого распределения. Очевидно, что $P(0) = p_0 > 0$, так как случайная величина, принимающая лишь целые *положительные* значения не может быть безгранично делимой. Следовательно, существует такая окрестность нуля $|z| \leq c \leq 1$, где $P(z)$ положительна, кроме того $P(z) < 1$ при $|z| < 1$. Так как $0 < 1 - P(z) < 1$ при $|z| < c$, то функцию $\ln P(z) = \ln[1 - (1 - P(z))]$ можно разложить в ряд Тейлора

$$\ln P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k z^k, \quad -c < z < c.$$

Положив $z = 0$, приходим к выводу, что $q_0 < 0$. Мы хотим доказать, что все остальные q_k неотрицательны. Допустим, что это не так, и придем к противоречию. Пусть $r \geq 1$ — наименьший индекс, для которого $q_r < 0$. Для упрощения записи введем, следуя [5], обозначения

$$A(z) = \sum_{k=1}^{r-1} q_k z^k, \quad B(z) = \sum_{k=r+1}^{\infty} q_k z^k, \quad \frac{1}{n} = \varepsilon,$$

тогда

$$P^{1/n}(z) = e^{\varepsilon q_0} \cdot e^{\varepsilon A(z)} \cdot e^{\varepsilon q_r z^r} \cdot e^{\varepsilon B(z)}.$$

По предположению

$$P^{1/n}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k, \quad \text{где} \quad f_k \geq 0.$$

Рассмотрим f_r, т.е. коэфициент при z^r. Так как степенной ряд $B(z)$ содержит только члены со степенями больше r, он не влияет на f_r. Значит, f_r — это коэффициент при z^r в выражении

$$e^{\varepsilon q_0} \cdot (1 + \varepsilon A(z) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 A^2(z) + \ldots) \cdot (1 + \varepsilon q_r z^r).$$

Поскольку $A(z)$ является полиномом степени не выше, чем $r-1$, нетрудно проверить, что

$$f_r = e^{\varepsilon q_0}\varepsilon[q_r + \varepsilon h(\varepsilon)], \tag{24}$$

где $h(\varepsilon)$ — полином от ε. Если $q_r < 0$, то при достаточно малом ε правая часть (24) будет отрицательна, т.е. $f_r < 0$, что невозможно. Таким образом, установлено, что $q_r \geq 0$ при $r \geq 1$. Учитывая равенство $P(1) = 1$, получаем $\ln P(1) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k = 0$, значит, $-q_0 = q_1 + q_2 + \ldots$. Положив $\lambda = -q_0$ и $h_k = q_k/\lambda$ при $k \geq 1$, мы запишем $P(z)$ в виде (23). ■

Перейдем к выводу ***формулы Панджера***, позволяющей подсчитывать составные распределения. Обозначим $g_n = \mathrm{P}(\tilde{N} = n)$, $p_n = \mathrm{P}(N = n)$ и $f_n = \mathrm{P}(M = n)$. Используя формулу полной вероятности, запишем

$$g_n = \mathrm{P}(\tilde{N} = n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(\tilde{N} = n | N = k)\mathrm{P}(N = k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(M_1 + \ldots + M_k = n)p_k = \sum_{k=0}^{\infty} p_k f_n^{*k},$$

где f_n^{k*}, $n \geq 0$, — это k-кратная свертка распределения $\{f_n\}$ с самим собой.

Теорема 3 (Panjer) *Пусть распределение N принадлежит классу $(a, b, 0)$, тогда*

$$g_n = \frac{1}{1 - af_0}\sum_{j=1}^{n}\left(a + \frac{bj}{n}\right) f_j g_{n-j}, \quad n \geq 1. \tag{25}$$

Доказательство. Соотношение (15) может быть переписано в виде

$$kp_k = a(k-1)p_{k-1} + (a+b)p_{k-1}. \tag{26}$$

Умножим обе части равенства (26) на $[P_2(z)]^{k-1}P_2'(z)$ и просуммируем по k

$$\sum_{k=1}^{\infty} kp_k[P_2(z)]^{k-1}P_2'(z) = a\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)p_{k-1}[P_2(z)]^{k-1}P_2'(z) + \quad (27)$$
$$+(a+b)\sum_{k=1}^{\infty} p_{k-1}[P_2(z)]^{k-1}P_2'(z).$$

Поскольку $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k[P_2(z)]^k$, уравнение (27) можно переписать в виде

$$P'(z) = a\sum_{k=0}^{\infty} kp_k[P_2(z)]^k P_2'(z) + (a+b)\sum_{k=0}^{\infty} p_k[P_2(z)]^k P_2'(z).$$

В свою очередь последнее соотношение показывает, что

$$P'(z) = aP'(z)P_2(z) + (a+b)P(z)P_2'(z). \qquad (28)$$

Разложив обе части (28) по степеням z, приравняем коэффициенты при z^{n-1} и получим

$$ng_n = a\sum_{j=0}^{n}(n-j)f_j g_{n-j} + (a+b)\sum_{j=0}^{n} jf_j g_{n-j}.$$

Преобразуем правую часть получившегося соотношения, выделив слагаемые с $j = 0$ и перегруппировав остальные,

$$anf_0g_n + a\sum_{j=1}^{n}(n-j)f_j g_{n-j} + (a+b)\sum_{j=1}^{n} jf_j g_{n-j} =$$
$$= anf_0g_n + an\sum_{j=1}^{n} f_j g_{n-j} + b\sum_{j=1}^{n} jf_j g_{n-j}.$$

Окончательно имеем

$$g_n = af_0g_n + \sum_{j=1}^{n}\left(a + \frac{bj}{n}\right) f_j g_{n-j},$$

что эквивалентно (25). ■

Очевидно, что для использования рекуррентной процедуры необходимо знать величину g_0. Как показывает следующая лемма, подсчет g_0 не использует предположение, что первичное распределение из класса $(a, b, 0)$.

Лемма 7 *Для любого составного распределения* $g_0 = P_1(f_0)$, *где* $P_1(z)$ *— производящая функция первичного распределения, а* f_0 *— вероятность нулевого значения для вторичного распределения.*

Доказательство. Результат немедленно вытекает из формулы полной вероятности

$$g_0 = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{P}(M_1 + \ldots + M_k = 0)\mathrm{P}(N = k) = \sum_{k=0}^{\infty} f_0^k \mathrm{P}(N = k) = P_1(f_0). \blacksquare$$

Задача 34 *Проверить, что для составного пуассоновского распределения*

$$g_n = \frac{\lambda}{n} \sum_{j=1}^{n} j f_j g_{n-j}.$$

Задача 35 *Если первичное распределение принадлежит классу* $(a, b, 1)$, *то вместо* (25) *справедливо соотношение*

$$g_n = \frac{[p_1 - (a+b)p_0]f_n + \sum_{j=1}^{n} \left(a + \frac{bj}{n}\right) f_j g_{n-j}}{1 - a f_0}.$$

О дальнейших обобщениях разложения Панджера можно прочитать, например в [34].

Теперь покажем, что если производящая функция первичного распределения имеет специальный вид, то составное распределение будет принадлежать к тому же семейству распределений, когда вместо исходного вторичного распределения мы возьмем его урезанную или модифицированную в нуле версию.

Теорема 4 *Пусть первичное распределение имеет производящую функцию, зависящую от параметра* θ *следующим образом*

$$P_1(z; \theta) = B[\theta(z - 1)], \tag{29}$$

где $B(z)$ не зависит от параметра θ, хотя может зависеть от других параметров. Тогда производящая функция составного распределения $P(z) = P_1[P_2(z);\theta]$ может быть переписана в виде

$$P(z) = P_1[P_2^T(z);\theta(1-f_0)],$$

где $P_2^T(z)$ соответствует условному распределению на положительных целых числах, т.е. урезанному в нуле вторичному распределению.

Доказательство. Воспользуемся тем, что любая производящая функция $P_2(z)$ может быть записана в виде

$$P_2(z) = f_0 + (1-f_0)P_2^T(z).$$

Следовательно, справедлива следующая цепочка равенств

$$\begin{aligned} P(z) = P_1[P_2(z);\theta)] = P_1[f_0 + (1-f_0)P_2^T(z);\theta] = \\ = B\{\theta[f_0 + (1-f_0)P_2^T(z) - 1]\} = B\{\theta(1-f_0)[P_2^T(z) - 1]\} = \\ = P_1[P_2^T(z);\theta(1-f_0)]. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Замечание 6 Распределения класса $(a,b,0)$ удовлетворяют условию (29). В самом деле, для биномиального $Bi(n,q)$ распределения $B(z) = (1+z)^n$, $\theta = q$, для пуассоновского $Poi(\lambda)$ соответственно $B(z) = e^z$, $\theta = \lambda$, а для отрицательно биномиального $NB(\alpha,\beta)$ имеем $B(z) = (1-z)^{-\alpha}$, $\theta = \beta$.

Задача 36 *Как сформулировать аналог теоремы* 4*, если производящая функция первичного распределения имеет вид*

$$P(z;\theta) = \frac{B[\theta(z-1)] - B(-\theta)}{B(0) - B(-\theta)}?$$

Как выглядит функция $B(\cdot)$ для логарифмического распределения?

Задача 37 *Проверить, что отрицательно гипергеометрическое распределение* (*или распределение Пойа-Эггенбергера*) *с*

$$p_k = \frac{C_{-a}^k C_{-b}^{n-k}}{C_{-a-b}^n}, \quad k \geq 0, \quad a > 0, \quad b > 0,$$

(где, как обычно, $C_{-a}^k = (-a)(-a-1)\dots(-a-k+1)/k!$) получается усреднением биномиального $Bi(n,q)$ распределения по параметру q, имеющему бета-распределение (7).

Задача 38 *Какой вид имеет производящая функция (трехпараметрического) обобщенного распределения Пуассона-Паскаля (т.е. составного пуассоновского, у которого вторичное распределение NB или ETNB)? Показать, что как частные случаи или предельным переходом из обобщенного распределения Пуассона-Паскаля можно получить следующие (двухпараметрические) распределения: пуассоновско–обращенное гауссовское, Пойа-Эппли (пуассоновско-геометрическое), распределение Неймана типа A (пуассоновско-пуассоновское) и отрицательно биномиальное.*

Задача 39 *Показать, что распределение Пуассона-Линдли, имеющее вид*

$$p_k = \frac{\theta^2(\theta+2+k)}{(\theta+1)^{k+3}}, \quad k \geq 0,$$

получается усреднением пуассоновского по λ с плотностью

$$u(\lambda) = \frac{\theta^2}{\theta+1}(\lambda+1)e^{-\lambda\theta}, \quad \lambda > 0.$$

Сама плотность $u(\cdot)$ является смесью гамма-распределения и экспоненциального.

Задача 40 *Проверить, что составное распределение, у которого первичное распределение отрицательно биномиальное с производящей функцией*

$$P_1(z) = [1-\beta_1(z-1)]^{-r},$$

где r — целое положительное число, а вторичное распределение геометрическое с производящей функцией

$$P_2(z) = [1-\beta_2(z-1)]^{-1},$$

является также составным биномиально-геометрическим. Какие параметры будут у первичного и вторичного распределений?

Замечание 7 Существуют многомерные аналоги формулы Панджера (подробности см. в [64]). Здесь мы приведем результат, относящийся к двумерным распределениям, который будет полезен при изучении перестрахования. А именно, пусть распределение N принадлежит классу $(a, b, 0)$. С каждым происшествием связаны два типа требований (иначе говоря, вторичное распределение двумерно). Предположим, что размеры требований целочисленны и заданы вероятности $f(k_1, k_2) = \mathrm{P}(Y_{i1} = k_1, Y_{i2} = k_2)$, $k_1 \geq 0$, $k_2 \geq 0$. Обозначим $S_l = \sum_{i=1}^{N} Y_{il}$, $l = 1, 2$, тогда совместное распределение (S_1, S_2) может быть подсчитано следующим образом:

$$g(n_1, n_2) = \sum_{k_1=0}^{n_1} \left(a + \frac{bk_1}{n_1}\right) \sum_{k_2=1}^{n_2} f(k_1, k_2) g(n_1 - k_1, n_2 - k_2), \quad (30)$$

при $n_1 = 1, 2, \ldots, n_2 = 0, 1, 2, \ldots$ и

$$g(n_1, n_2) = \sum_{k_2=0}^{n_2} \left(a + \frac{bk_2}{n_2}\right) \sum_{k_1=1}^{n_1} f(k_1, k_2) g(n_1 - k_1, n_2 - k_2). \quad (31)$$

при $n_1 = 0, 1, 2, \ldots, n_2 = 1, 2, \ldots$.

Таким образом, можно использовать (30), чтобы подсчитать $g(n_1, n_2)$ для всех (n_1, n_2) с $n_1 > 0$, а затем вычислить $g(0, n_2)$, воспользовавшись (31).

Как уже говорилось в предыдущем параграфе, усреднение распределения по параметру полезно для учета неоднородности портфеля страховой компании. Сейчас мы покажем, что если рассматривать усредненные пуассоновские распределения, то при определенных предположениях мы не получаем ничего нового по сравнению с составными пуассоновскими распределениями.

Теорема 5 *Усредненное по параметру пуассоновское распределение является также и составным пуассоновским распределением, если распределение параметра безгранично делимо.*

Если предположить, что производящая функция вторичного распределения $P_2(z)$ такова, что $P_2(0) = 0$, то она единственна.

Доказательство. Итак, нам известно, что производящая функция

$$P(z) = \int_0^\infty e^{\lambda\theta(z-1)}\, dU(\theta), \tag{32}$$

где распределение $U(\cdot)$ безгранично делимо. Отметим, что масштабный параметр λ введен в (32) для удобства записи (т.е. мы считаем, что параметр пуассоновского распределения имеет вид $\lambda\Theta$, $U(\cdot)$ — распределение Θ).

Нетрудно понять, что справедливо равенство

$$P(z) = L_\Theta[\lambda(1-z)], \tag{33}$$

где преобразование Лапласа параметра Θ

$$L_\Theta(z) = \int_0^\infty e^{-z\theta}\, dU(\theta).$$

В силу безграничной делимости распределения Θ функция

$$L_n(z) = L_\Theta^{1/n}(z) \tag{34}$$

также является преобразованием Лапласа некоторого распределения.

Комбинируя (33) и (34), получаем, что

$$P^{1/n}(z) = L_n[\lambda(1-z)],$$

причем $P^{1/n}(z)$ снова соответствует пуассоновскому распределению усредненному по параметру. Поскольку тем самым исходное распределение оказалось безгранично делимым, остается воспользоваться теоремой 2, согласно которой

$$P(z) = e^{\lambda[P_2(z)-1]}.$$

Если $P_2(0) = 0$, то $\lambda = -\ln p_0$ и $P_2(z) = 1 + \lambda^{-1}\ln P(z)$. ■

Замечание 8 Мы уже подчеркивали, что отрицательно биномиальное распределения является одновременно и составным, и усредненным по параметру пуассоновским распределением. Как показывает теорема 5, этот результат неслучаен, поскольку гамма-распределение, по которому производится усреднение, является безгранично делимым.

Задача 41 *Распределение Неймана типа A – это составное пуассоновско-пуассоновское распределение. Выписать его производящую функцию. Является ли это распределение также усредненным пуассоновским? Верно ли подобное утверждение для обобщенного распределения Пуассона-Паскаля?*

Замечание 9 Если распределение $U(\cdot)$, фигурирующее в (32), считающее с производящей функцией P_Θ, то вместо (33) можно записать

$$P(z) = P_\Theta(e^{\lambda(z-1)}).$$

Таким образом, и в этом случае мы получаем составное распределение (даже если $U(\cdot)$ не безгранично делимо), но пуассоновским здесь является вторичное распределение.

Замечание 10 Дальнейшее расширение набора распределений для описания числа требований может производиться путем рассмотрения классов (a, b, m) при $m > 1$. Для них формула (15) задает вероятности, начиная с p_m. Следовательно, такие распределения зависят от $m + 2$ параметров.

Другой путь — использование составных распределений в качестве первичных и вторичных, при этом производящая функция будет иметь вид

$$P(z) = P_1(P_2(P_3 \dots (P_m(z)))).$$

Число параметров для такого распределения равно сумме чисел параметров составляющих распределений. Однако, как показывает практика, рассмотрение слишком большого числа параметров нецелесообразно.

1.2.3 Суммарный ущерб

Как известно, распределение суммарного ущерба в коллективной модели риска является составным $S^{col} = \sum_{k=1}^{N} X_k$. Следовательно, если размеры требований X_k целочисленные, а распределение N принадлежит классу $(a, b, 0)$ (или $(a, b, 1)$), можно воспользоваться теоремой 3 (соотв. задачей 35), при этом $g_n = \mathrm{P}(S^{col} = n)$, а $f_n = \mathrm{P}(X_k = n)$, $k \geq 1$.

Аналогичный результат справедлив и в том случае, когда размер требований X имеет непрерывное распределение. Тогда распределение S^{col} будет иметь атом в нуле и плотность на положительной полуоси, для которой можно выписать интегральное уравнение.

Теорема 6 *Если распределение N принадлежит классу $(a, b, 0)$, а распределение X непрерывно с плотностью $f_X(x)$, то плотность $f_S(x)$ распределения S^{col} удовлетворяет следующему интегральному уравнению*

$$f_S(x) = p_1 f_X(x) + \int_0^x \left(a + \frac{by}{x}\right) f_X(y) f_S(x-y)\, dy, \quad x > 0. \tag{35}$$

Доказательство. Очевидно, что $\mathrm{P}(S^{col} = 0) = \mathrm{P}(N = 0) = p_0$. Обозначим преобразование Лапласа непрерывной части распределения S^{col} через $\tilde{L}(z)$, тогда $\tilde{L}(z) = L_S(z) - p_0$, где $L_S(z)$ — преобразование Лапласа S^{col}. Дословное повторение доказательства теоремы 3 с заменой производящей функции вторичного распределения на преобразование Лапласа $L_X(z)$ приводит к следующему соотношению

$$L'_S(z) = aL_X(z)L'_S(z) + (a+b)L'_X(z)L_S(z).$$

Отсюда нетрудно получить уравнение для $\tilde{L}(z)$

$$\tilde{L}'(z) = aL_X(z)\tilde{L}'(z) + (a+b)L'_X(z)\tilde{L}(z) + (a+b)p_0L'_X(z).$$

Поскольку $p_1 = (a+b)p_0$, то обращая предыдущее уравнение, получаем

$$xf_S(x) = a\int_0^x (x-y) f_X(y) f_S(x-y)\, dy +$$

$$+(a+b)\int_0^x y f_X(y) f_S(x-y)\, dy + p_1 x f_X(x).$$

Перегруппировка слагаемых в этом уравнении и деление обеих частей на x приводит к требуемому результату (35). ■

Замечание 11 Уравнение (35) имеет вид

$$h(x) = J(x) + \int_0^x K(x,y)h(y)\,dy,$$

т.е. является уравнением Вольтерра второго рода. О решении таких уравнений в контексте актуарной математики можно прочитать, например, в [55].

Задача 42 *Выписать аналог уравнения* (35) *для распределения* N*, принадлежащего классу* $(a,b,1)$.

В том случае, когда распределение X не является ни непрерывным, ни арифметическим, можно получать верхние и нижние границы для функции распределения $F_S(x)$ суммарного ущерба или различные аппроксимации, производя *дискретизацию* (или арифметизацию) распределения размера отдельного ущерба X. Различные методы арифметизации были предложены в 1976 Гербером и Джонсом (см. [29]) и подробно изучены Панджером и Лютеком в связи с подсчетом стоп-лосс премий (см. [54]).

а) Один из методов носит название округления@"(по-английски rounding или mass dispersion). В рамках этого метода прежде всего выбирается шаг h новой случайной величины $\tilde{X}$, затем ищутся вероятности $K_j = \mathrm{P}(\tilde{X} = jh)$, $j \geq 0$. Заметим, что величина h всегда может рассматриваться как новая денежная единица, и таким образом мы будем снова иметь дело со считающим распределением. Соответствующая функция распределения имеет вид

$$K(x) = \sum_{j=0}^{[x]} K_j, \quad x \geq 0, \tag{36}$$

где $[x]$ означает взятие целой части x.

Возможны *три различные процедуры* подсчета K_j, которые назовем следующим образом:

A. Округление до нижней единицы@ т.е.

$$K_0^A = F_X(h-0), \quad K_j^A = F_X(jh+h-0) - F_X(jh-0), \quad j \geq 1.$$

B. Округление до ближайшей единицы@ т.е. при $j \geq 1$

$K_j^B = F_X(jh+(h/2)-0) - F_X(jh-(h/2)-0)$, а $K_0^B = F_X((h/2)-0)$.

С. Округление до верхней единицы@ т.е.

$$K_0^C = 0, \quad K_j^C = F_X(jh) - F_X(jh-h), \quad j \geq 1.$$

(Напомним, $F_X(x) = \mathrm{P}(X \leq x)$ — функция распределения исходной случайной величины X, а $F_X(x-0) = \mathrm{P}(X < x)$.)

Нетрудно проверить, что в силу определений A-C и формулы (36) справедливы следующие неравенства

$$K_A(x) \geq F_X(xh) \geq K_C(x), \quad x \geq 0,$$

$$K_A(x) \geq K_B(x) \geq K_C(x), \quad x \geq 0.$$

Вспомнив определение стохастического порядка (см. [1], стр.31), мы можем записать эти соотношения как

$$Y_A <_{st} (X/h) <_{st} Y_C, \quad Y_A <_{st} Y_B <_{st} Y_C,$$

где Y_A — это целочисленная случайная величина с распределением $\{K_j^A\}_{j\geq 0}$ и функцией распределения $K_A(x)$, аналогично задаются Y_B и Y_C.

Поскольку стохастический порядок сохраняется при взятии составных распределений, мы получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n K_A^{*n}(x) \geq \sum_{n=0}^{\infty} p_n F_X^{*n}(hx) \geq \sum_{n=0}^{\infty} p_n K_C^{*n}(x), \quad x \geq 0, \tag{37}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n K_A^{*n}(x) \geq \sum_{n=0}^{\infty} p_n K_B^{*n}(x) \geq \sum_{n=0}^{\infty} p_n K_C^{*n}(x), \quad x \geq 0. \tag{38}$$

Как видно из приведенных соотношений (37) и (38), округление до ближайшей единицы может рассматриваться как приближение для истинного распределения суммарного ущерба. Однако для того чтобы понять, насколько это приближение точно, все равно необходимо подсчитать верхнюю и нижнюю границы, даваемые методами A и C. Сделать это нетрудно, используя формулы Панджера, если распределение N принадлежит классу (a, b, m), $m \geq 0$. Заметим, что "округленные распределения"не обязаны иметь то же самое среднее, что исходное распределение.

б) Если желательно, чтобы аппроксимирующее распределение имело форму, похожую на исходную, используют способ *приравнивания* глобальных или *локальных моментов.*

Иными словами, мы хотим, чтобы при переходе к аппроксимирующему распределению сохранялось заданное число p моментов. Для большей точности приближения приравнивание производится на отдельных участках длины ph. Рассмотрим произвольный интервал $(x_k, x_k + ph]$. Необходимо выбрать массы $m_0^k, m_1^k, \dots, m_p^k$, которые будут помещены в точки $x_k, x_k + h, \dots, x_k + ph$ таким образом, чтобы сохранились первые p моментов. Соответствующая система уравнений запишется в виде

$$\sum_{j=0}^{p} (x_k + jh)^r m_j^k = \int_{x_k}^{x_k+ph} x^r \, dF_X(x), \quad r = \overline{0, p}. \tag{39}$$

Уравнение, отвечающее $r = 0$, означает, что вероятностная масса, распределенная на данном интервале, одна и та же у исходного и у аппроксимирующего арифметического распределения.

Теорема 7 *Решение системы* (39) *записывается в виде*

$$m_j^k = \int_{x_k}^{x_k+ph} \prod_{i \neq j} \frac{(x - x_k - ih)}{(j - i)h} \, dF_X(x), \quad j = \overline{0, p}. \tag{40}$$

Доказательство. Формула Лагранжа для полинома $f(y)$, принимающего значения $f(y_j)$ в точках y_j, $j = \overline{0, n}$, выглядит следующим образом

$$f(y) = \sum_{j=0}^{n} f(y_j) \prod_{i \neq j} \left(\frac{y - y_i}{y_j - y_i} \right).$$

Применим эту формулу для полинома $f(y) = y^r$, когда выбраны точки $x_k, x_k + h, \dots, x_k + ph$, и получим

$$x^r = \sum_{j=0}^{p} (x_k + jh)^r \prod_{i \neq j} \frac{(x - x_k - ih)}{(j - i)h}, \quad r = \overline{0, p}.$$

Проинтегрировав обе части этого равенства по интервалу $(x_k, x_k + ph]$ относительно вероятностной меры, порожденной распределением X, мы приходим к системе уравнений (39), где m_j^k

задаются формулами (40). Таким образом, как мы и хотели, первые p моментов сохраняются. ■

Описанная процедура проводится сначала для интервала $(0, ph]$, затем $(ph, 2ph]$, $(2ph, 3ph]$ и т.д. Окончательно вероятности, сосредоточенные в точках nh, $n \geq 0$, получаются из (40) с учетом того, что две массы, приписываемые процедурой точкам вида kph, $k > 0$, суммируются. Как было показано в [54], для большинства практически интересных распределений размера требований использование двух моментов ($p = 2$) давало приемлемую точность подсчета стоп-лосс премий, а добавление третьего момента вело лишь к незначительному улучшению. Кроме того, округление и использование лишь первого момента давало примерно одну и ту же точность, в то время как использование двух моментов приводило к лучшим результатам.

Интересно отметить, что интегралы в правой части (40) легко подсчитываются для дискретных (но необязательно арифметических распределений), в то время как для непрерывных распределений не всегда можно произвести интегрирование и приходится также прибегать к численным методам. Поэтому метод округления может оказаться более предпочтительным. Наконец, решение уравнения (35) в том случае, когда распределение X непрерывно, также включает процедуру дискретизации.

Однако даже в том случае, когда формула Панджера дает точный результат для распределения $\{g_n\}$, возникают ошибки вычисления при многократном ее применении, т.е. для больших n. Поэтому *использование рекуррентных формул полезно дополнять исследованием асимптотики правого хвоста распределения.* В основе таких исследований лежит следующая теорема, которая доказана в [23].

Теорема 8 *Предположим, что распределение $\{p_n\}_{n\geq 0}$ числа требований удовлетворяет следующему соотношению*

$$p_n \sim \theta^n n^\gamma C(n), \quad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{41}$$

для $0 < \theta < 1$, $\gamma \in R$ и некоторой медленно меняющейся на бесконечности функции $C(x)$.

Если, кроме того, распределение X не арифметическое, су-

ществует такое число κ, что

$$L_X(-\kappa) = \theta^{-1}, \tag{42}$$

и $-L'_X(-\kappa) < \infty$, *то*

$$1 - F_S(x) \sim \frac{x^\gamma e^{-\kappa x} C(x)}{\kappa[-\theta L'_X(-\kappa)]^{\gamma+1}}, \quad \textit{при} \quad x \to \infty. \tag{43}$$

Напомним, что $L_X(-t) = g_X(t)$. Значит, для выполнения (42) обязательно должна существовать производящая функция моментов. Далее, функция $C(x)$ называется *медленно меняющейся на бесконечности*, если $C(tx) \sim C(x)$ при $x \to \infty$ для любого $t > 0$. Запись $A(x) \sim B(x)$ при $x \to \infty$ означает, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{A(x)}{B(x)} = 1.$$

Задача 43 *Проверить, что* $\ln x$ *медленно меняется на бесконечности, а* e^x *нет.*

Доказывать теорему 8 мы не будем, а лишь кратко остановимся на *поведении хвостов* некоторых распределений, важных для страхования.

Согласно классификации Эмбрехтса и Вераврбеке (см., например, [24]) распределения можно разделить на 3 *класса*: с легкими, средними и тяжелыми (правыми) хвостами.

Определение 7 *Распределение X имеет* легкий *хвост, если для любого* $0 < \theta < 1$ *существует такое* $\kappa > 0$, *что выполнено* (42).

Задача 44 *Проверить, что экспоненциальное распределение, гамма и обобщенное обращенное гауссовское* (*при* $\lambda > 0$) *имеют легкий хвост.*

Определение 8 *Распределение имеет* средний *хвост, если существует такое* $\gamma > 0$, *что*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - F_X^{2*}(x)}{1 - F_X(x)} = 2L_X(-\gamma) < \infty, \tag{44}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - F_X(x-y)}{1 - F_X(x)} = e^{\gamma y} \quad \textit{для любого} \quad y \in R.$$

Может быть показано, что преобразование Лапласа $L_X(z)$ существует для всех $z \geq -\gamma$. Нетрудно понять, что условие (42) выполнено лишь для некоторых θ.

Практический интерес представляет также следующая теорема, доказательство которой можно прочитать в [66].

Теорема 9 (Teugels) *Пусть распределение X имеет средний хвост и $P'[L_X(-\gamma)] < \infty$, где $P(z)$ — производящая функция N, тогда*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - F_S(x)}{1 - F_X(x)} = P'[L_X(-\gamma)].$$

Задача 45 *Проверить, что обобщенные обращенные гауссовские распределения (при $\lambda < 0$), в том числе обращенное гауссовское распределение, обладают средними хвостами.*

Определение 9 *Если $\gamma = 0$ в (44), т.е.*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - F_X^{2*}(x)}{1 - F_X(x)} = 2,$$

то распределение называется субэкспоненциальным.

Аналог теоремы 9 для субэкспоненциальных распределений, доказанный ранее Эмбрехтсом, Голди и Веравербеке (см. [21]), выглядит следующим образом.

Теорема 10 *Если распределение X субэкспоненциально, а N имеет производящую функцию моментов для некоторого $z > 0$, то*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1 - F_S(x)}{1 - F_X(x)} = \mathrm{E}N.$$

Определение 10 *Распределение X имеет* тяжелый *хвост, если (42) не выполняется ни для какого θ.*

Очевидно, что распределение обладает тяжелым хвостом, если у него существует лишь конечное число моментов. Однако возможна и такая ситуация, когда имеются моменты любого порядка (как у логнормального распределения), но производящая функция моментов не существует.

Задача 46 *Доказать, что для субэкспоненциальных распределений*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-F^{n*}(x)}{1-F(x)} = n.$$

Задача 47 *Проверить, что логнормальное распределение, Парето и преобразованное бета имеют тяжелые хвосты.*

Для некоторых субэкспоненциальных распределений существуют такие постоянная δ и медленно меняющаяся на бесконечности функция $C(x)$, что

$$1 - F(x) \sim x^{-\delta} C(x) \quad \text{при} \quad x \to \infty. \tag{45}$$

Задача 48 *Доказать, что для преобразованного бета-распределения выполнено* (45), *найти* δ *и* $C(x)$.

Задача 49 *Найти асимптотику* $1 - F(x)$ *при* $x \to \infty$ *для логнормального распределения.*

Если $(1 - F_X(x))/(1 - F_Y(x)) \to 0$ при $x \to \infty$, распределение X имеет *более легкий* (правый) хвост чем Y, и *более тяжелый*, если отношение стремится к бесконечности.

Задача 50 *Проверить, что хвост преобразованного гамма-распределения легче, чем у преобразованного бета.*

Задача 51 *Сравнить правые хвосты распределений Парето, логнормального и гамма.*

Задача 52 *Исследовать поведение левого хвоста преобразованного бета-распределения, показав, что* $F(x) \sim cx^{\delta}$ *при* $x \to 0$. *Чему равно* c*?*

Правый хвост показывает, как часто появляются большие требования (или большие ущербы), а левый — малые.

Обратимся теперь к считающим распределениям и посмотрим, когда для них выполняется соотношение (41). Результаты будут сфомулированы в виде задач различной степени трудности.

Задача 53 *Проверить, что для отрицательно биномиального распределения* $NB(\alpha,\beta)$

$$p_n \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(\frac{1}{1+\beta}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{n} \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Какой вид будет иметь (43) *в данном случае?*

Задача 54 *Для обобщенного распределения Пуассона-Паскаля с производящей функцией*

$$P(z)=\exp(\mu\{[1-\beta(z-1)]^{-\alpha}-1\})$$

при $-1<\alpha<0$

$$p_n \sim \frac{\alpha\mu(1+\beta)^{-\alpha}e^{-\mu}}{\Gamma(1+\alpha)}\left(\frac{\beta}{1+\beta}\right)^{n} n^{\alpha-1}.$$

Записать (43) *для данного распределения* N.

Задача 55 *Найти асимптотическое поведение* p_n *при* $n\to\infty$ *в случае пуассоновско – обращенного гауссовского распределения и соответствующую асимптотику* $1-F_S(x)$ *при* $x\to\infty$.

Задача 56 *Найти асимптотику* $1-F_S(x)$ *для составного распределения Зихеля* (*Sichel*), *т.е. в том случае, когда*

$$p_n=\frac{\mu^n}{n!}\frac{K_{\lambda+n}[\mu\beta^{-1}(1+2\beta)^{1/2}]}{K_\lambda(\mu\beta^{-1})}(1+2\beta)^{-(\lambda+n)/2},$$

а распределение X *удовлетворяет условию* (42).

Как видно из вышеизложенного, поведение правого хвоста составного распределения в основном зависит от того, какой из хвостов тяжелее у первичного или у вторичного распределения, т.е. у числа происшествий или у размера требования. В самом деле, согласно теореме 8 если хвост у распределения N удовлетворяет (41), т.е. достаточно тяжелый, а хвост распределения X, удовлетворяющий (42), легкий, тогда поведение хвоста S, как следует из (43), определяется асимптотикой распределения X.

Замечание 12 Знание асимптотики правого хвоста распределения $1-F_S(x)$, позволяет установить, как меняется *стоп-лосс премия* при росте приоритета (франшизы). Напомним, что стоп-лосс премия (для приоритета x) имеет вид

$$m_S(x) = \int_x^\infty [1 - F_S(y)]\, dy.$$

Таким образом, если для некоторой постоянной C, как, например, было в задачах 53-55,

$$1 - F_S(x) \sim Cx^\gamma e^{-\kappa x}, \quad x \to \infty,$$

то с помощью правила Лопиталя нетрудно получить

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^\gamma e^{-\kappa x}}{m_S(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\gamma x^{\gamma-1} e^{-\kappa x} - \kappa x^\gamma e^{-\kappa x}}{-(1-F_S(x))} =$$
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^\gamma e^{-\kappa x}}{1 - F_S(x)} \left[\kappa - \frac{\gamma}{x}\right] = \kappa C^{-1}.$$

Иными словами, стоп-лосс премия ведет себя при $x \to \infty$ следующим образом

$$m_S(x) \sim \frac{C}{\kappa} x^\gamma e^{-\kappa x}.$$

Задача 57 *Найти плотность лог-гамма распределения, которое получается с помощью преобразования $Y = e^X$, где X имеет гамма-распределение. Проверить, что это субэкспоненциальное распределение.*

Исследовать поведение правого хвоста составного распределения, для которого данное является вторичным, и найти асимптотику соответствующей стоп-лосс премии.

1.3 Сравнение моделей

Встает вопрос, каким образом перейти от индивидуальной модели риска к "соответствующей"коллективной модели. Иными словами, как выбрать распределение числа страховых случаев N и размера отдельного требования X, чтобы получившаяся модель давала адекватное описание рассматриваемого портфеля рисков (или была более рискованной). Наиболее распространенными являются "биномиальная "пуассоновская"и "отрицательно биномиальная"модели.

Прежде всего заметим, что если все контракты "одинаковы т.е. все V_i, $i = \overline{1,n}$, имеют одну и ту же функцию распределения F, то N^* (из параграфа 1.1.1) имеет биномиальное распределение с параметрами n и $q = \mathrm{P}(V_1 > 0)$. Возьмем $N \overset{d}{=} N^*$ и пусть функция распределения всех X_i, $i \geq 1$, равна $G(x) = q^{-1}[F(x) - (1-q)]$, $x \geq 0$, тогда $S^{ind} \overset{d}{=} S^{col}$.

В общем случае, когда распределения V_i различны, мы также можем получить биномиальную модель. Для этого положим

$$q = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} q_i, \quad \text{а} \quad G(x) = (nq)^{-1}\sum_{i=1}^{n} q_i G_i(x), \tag{46}$$

как и ранее, здесь обозначено

$$q_i = \mathrm{P}(V_i > 0), \quad G_i(x) = q_i^{-1}[F_i(x) - (1-q_i)], \quad F_i(x) = \mathrm{P}(V_i \leq x).$$

Отметим, что при таким выборе $G(x)$ мы будем иметь

$$\mathrm{E}X_1^k = \frac{1}{nq}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}V_i^k, \quad k \geq 1.$$

Далее, пусть N имеет биномиальное распределение $Bi(n,q)$ с параметрами n и q, тогда $\mathrm{E}N = nq$, следовательно, в силу (5)

$$\mathrm{E}S^{col} = \mathrm{E}N\mathrm{E}X_1 = nq(nq)^{-1}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}V_i = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}V_i = \mathrm{E}S^{ind}.$$

Таким образом чистые премии, подсчитанные для индивидуальной и коллективной моделей, совпадают. Отметим также, что $N^* <_{sl} N$ (N доминирует N^* в смысле порядка стоп-лосс), как следует из доказательства теоремы 1.19.

Перейдем к построению пуассоновской модели коллективного риска. В этом случае S^{col} будет иметь сложное (или составное) пуассоновское распределение. Точнее, мы снова предполагаем, что X_i, $i \geq 1$, независимы и распределены одинаково с функцией распределения G, введенной выше. А число страховых случаев (или число поступлений требований) N имеет распределение Пуассона $Poi(\lambda)$ с параметром $\lambda = nq$. В этом случае $\mathrm{E}N = \mathrm{D}N = nq$, поэтому также

$$\mathrm{E}S^{col} = \mathrm{E}S^{ind}.$$

Теперь рассмотрим третью модель — отрицательно биномиальную. Это означает, что распределение размера отдельного требования как и в прежних случаях G, а N имеет отрицательно биномиальное распределение $NB(n, q)$. Тогда снова $\mathrm{E}N = nq$, т.е. $\mathrm{E}S^{col} = \mathrm{E}S^{ind}$.

О функциональном подходе к аппроксимации индивидуальных моделей можно прочитать в [58].

1.3.1 Дисперсия суммарного ущерба

Перейдем к сравнению дисперсий для различных моделей. Поскольку в биномиальной модели $\mathrm{D}N = nq(1-q)$, а

$$\mathrm{D}X_1 = \mathrm{E}X_1^2 - (\mathrm{E}X_1)^2 = (nq)^{-1}\sum_{i=1}^n \mathrm{E}V_i^2 - (nq)^{-2}(\sum_{i=1}^n \mathrm{E}V_i)^2,$$

то с помощью (5) получим

$$\mathrm{D}S^{col} = \sum_{i=1}^n \mathrm{E}V_i^2 - n^{-1}(\sum_{i=1}^n \mathrm{E}V_i)^2.$$

С другой стороны, в силу независимости V_i

$$\mathrm{D}S^{ind} = \sum_{i=1}^n \mathrm{D}V_i = \sum_{i=1}^n \mathrm{E}V_i^2 - \sum_{i=1}^n (\mathrm{E}V_i)^2,$$

поэтому

$$\Delta_{Bi} = \mathrm{D}S^{col} - \mathrm{D}S^{ind} = \sum_{i=1}^n (\mathrm{E}V_i)^2 - n^{-1}(\sum_{i=1}^n \mathrm{E}V_i)^2 \geq 0.$$

В пуассоновском случае

$$\mathrm{D}S^{col} = \sum_{i=1}^n \mathrm{E}V_i^2,$$

значит,

$$\Delta_{Po} = \mathrm{D}S^{col} - \mathrm{D}S^{ind} = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{E}V_i)^2 > \Delta_{Bi}.$$

Наконец, в отрицательно биномиальном случае мы имеем $\mathrm{D}N = nq(1+q)$, следовательно,

$$\mathrm{D}S^{col} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}V_i^2 + n^{-1}(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}V_i)^2.$$

Таким образом,

$$\Delta_{NB} = \mathrm{D}S^{col} - \mathrm{D}S^{ind} = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{E}V_i)^2 + n^{-1}(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}V_i)^2 > \Delta_{Po}.$$

1.3.2 Стоп-лосс порядок моделей

Заметим, что качественный результат, т.е. возрастание дисперсии $\mathrm{D}S^{col}$ при переходе от биномиальной модели к пауссоновской и от пуассоновской к отрицательно биномиальной следовало ожидать в силу теоремы 1.19 и следствия 1.5. В самом деле, $S^{col} = \sum_{i=1}^{N} X_i$, а по теореме 1.16 порядок стоп-лосс сохраняется при суммировании случайного числа случайных слагаемых, т.е. $S^{col}_{Bi} <_{sl} S^{col}_{Po} <_{sl} S^{col}_{NB}$. При равенстве средних ($\mathrm{E}S^{col} = nq$ для любой модели) это влечет за собой возрастание дисперсий. Итак, каждая из трех моделей коллективного риска правильно задает среднее, т.е. чистую премию, но переоценивает дисперсию. Как уже отмечалось ранее, выбор более рискованной модели приводит к принятию более "осторожного"решения, в частности, к большей страховой нагрузке, если премия-брутто подсчитывается на основе принципа дисперсии или среднего квадратичного (разумеется, при использовании принципа среднего размер премии-брутто останется тем же самым).

Интересно, что к тому же самому составному пуассоновскому распределению, которое возникает при рассмотрении пуассоновской модели коллективного риска, можно придти на основе других рассуждений. А именно, пусть $V_1, \ldots, V_n$ — это n независимых рисков с функциями распределения $F_1, \ldots, F_n$. Введем независимые случайные величины Y_i, $i = \overline{1,n}$, такие, что

$Y_i \stackrel{d}{=} \sum_{k=1}^{N_i} V_k^{(i)}$, где N_i имеет распределение Пуассона с параметром 1, величины $N_1, \ldots, N_n$ независимы, а $V_k^{(i)} \stackrel{d}{=} V_i$, $k \geq 1$, т.е. имеют функцию распределения F_i, независимы друг от друга и от N_i. Иначе говоря, каждый риск V_i заменяется на другой риск Y_i, имеющий составное пуассоновское распределение. Покажем, что при этой замене мы получим для суммы Y_i такое же распределение, как в случае паусcоновской модели коллективного риска.

Лемма 8 *При сделанных предположениях* $\sum_{i=1}^n Y_i \stackrel{d}{=} S_{Po}^{col}$.

Доказательство. Очевидно, что производящая функция моментов для Y_i имеет вид

$$g_{Y_i}(t) = \mathrm{E}e^{Y_i t} = \exp\{g_{V_i}(t) - 1\},$$

откуда следует, что соответствующая функция для $\sum_{i=1}^n Y_i$ равна

$$\prod_{i=1}^n g_{Y_i}(t) = \exp\{\sum_{i=1}^n (g_{V_i}(t) - 1)\} = \exp\{n[n^{-1}\sum_{i=1}^n g_{V_i}(t) - 1]\}.$$

Нетрудно понять, что это производящая функция сложного пуассоновского распределения с параметром $\lambda = n$ и функцией распределения отдельного слагаемого $\hat{G}(x) = n^{-1}\sum_{i=1}^n F_i(x)$, которую можно переписать в виде $\hat{G}(x) = qG(x) + (1-q)I(x)$. Здесь $G(x)$ определено в (46), а через $I(x)$ обозначена функция распределения случайной величины равной нулю. Значит, мы имеем

$$n^{-1}\sum_{i=1}^n g_{V_i}(t) = g_{\hat{G}}(t) = \int_0^\infty e^{tx}\, d\hat{G}(x) = q\int_0^\infty e^{tx}\, dG(x) + 1 - q,$$

откуда следует

$$\exp\{n[n^{-1}\sum_{i=1}^n g_{V_i}(t) - 1]\} = \exp\{n[1 - q + q\int_0^\infty e^{tx}\, dG(x) - 1]\} =$$

$$= \exp\{nq(g_G(t) - 1)\},$$

здесь и выше $g_G(t)$ (соотв. $g_{\hat{G}}(t)$) означает производящую функцию моментов случайной величины, имеющей функцию распределения $G(x)$ (соотв. $\hat{G}(x)$). ■

Отсюда сразу можно получить следующее соотношение между индивидуальной и коллективной (пуассоновской) моделями.

Следствие 2 *В смысле порядка стоп-лосс индивидуальная модель менее рискованная, т.е.* $S^{ind} <_{sl} S^{col}_{Po}$.

Доказательство. Поскольку $S^{col}_{Po} \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{n} Y_i$, достаточно проверить, что $S^{ind} <_{sl} \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Последнее соотношение очевидным образом вытекает из свойств порядка стоп-лосс. В самом деле, $1 <_{sl} N$, если N имеет распределение Пуассона с параметром 1. Значит, $V_i <_{sl} Y_i$, $i = \overline{1,n}$, откуда $S^{ind} = \sum_{i=1}^{n} V_i <_{sl} \sum_{i=1}^{n} Y_i$. ■

1.3.3 Сравнение функций распределения

Покажем также, что выбор пуассоновского распределения с параметром 1 при довольно широких предположениях обеспечивает наиболее точную оценку распределения S^{ind} с помощью S^{col}.

Итак, пусть у нас имеется портфель, состоящий из n независимых контрактов. Пусть далее p_i, $0 < p_i < 1$, — это вероятность того, что за рассматриваемый период времени по i-му контракту не поступит ни одного требования на выплату, а $q_i = 1 - p_i$ — вероятность противоположного события, т.е. того, что поступит хоть одно требование. Обозначим, как и ранее, через G_i условное распределение полного объема требований за период по i-му контракту при условии, что хоть одно требование поступило. При этом рассматриваются лишь положительные требования, т.е. предполагается, что $G_i(0) = 0$.

Используя введенные обозначения, можно записать функцию распределения суммарного размера требований по i-му полису F_i в следующем виде

$$F_i = p_i I_i + q_i G_i, \quad i = \overline{1,n}, \tag{47}$$

где I_i соответствует вырожденному распределению, сосредоточенному в нуле.

В индивидуальной модели распределение суммарного размера требований по всему портфелю задается как свертка n распределений вида (47)

$$F^{ind} = *_{i=1}^{n} F_i.$$

Теперь предположим, что мы хотим аппроксимировать индивидуальную модель составным пуассоновским распределением. Это можно сделать, например, заменив каждое распределение F_i составным пуассоновским распределением P_i, где параметр пауссоновского распределения равен $\lambda_i > 0$, а распределение слагаемых в случайной сумме обозначено Q_i, т.е.

$$P_i = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda_i} \frac{\lambda_i^k}{k!} Q_i^{*k}, \quad i = \overline{1, n}, \tag{48}$$

при этом, как всегда, $Q_i^{*0} = I$.

Качество такой замены зависит от выбора λ_i и Q_i. Выбор λ_i разными авторами осуществляется по-разному, однако все берут $Q_i = G_i$. Мы также будем использовать такие Q_i.

Очевидно, что взяв свертку сложных пуассоновских распределений (48), мы получаем распределение F^{cP}, приближающее суммарный размер требований F^{ind} по всему портфелю

$$F^{cP} = *_{i=1}^{n} P_i = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} G^{*k},$$

которое снова является сложным пуасоновским с

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$$

и распределением размера отдельного требования

$$G = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i G_i.$$

Для того, чтобы сравнить приближения, соответствующие выбору различных λ_i, выведем, следуя [59], верхние и нижние границы для ошибок, возникающих при подсчете функций распределения суммарных требований с использованием приближения вместо точного распределения. Для этого понадобится несколько лемм.

Лемма 9 *Пусть* F*,* G *и* H *— некоторые функции распределения, причем существуют такие постоянные* a *и* b*, что для всех* x

$$a \leq F(x) - G(x) \leq b. \tag{49}$$

Тогда при всех x *будет справедливо аналогичное неравенство*

$$a \leq F * H(x) - G * H(x) \leq b.$$

Доказательство немедленно вытекает из (49), если воспользоваться определением свертки, что дает

$$F * H(x) - G * H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [F(x-s) - G(x-s)]\, dH(s). \blacksquare$$

Лемма 10 *Пусть* F_i *и* G_i*,* $i = \overline{1,n}$*, – это функции распределения, удовлетворяющие при всех* x *неравенствам*

$$a_i \leq F_i(x) - G_i(x) \leq b_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Тогда при всех x *будет справедливо следующее неравенство*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leq *_{i=1}^{n} F_i(x) - *_{i=1}^{n} G_i(x) \leq \sum_{i=1}^{n} b_i. \tag{50}$$

Доказательство проводится по индукции. По предположению леммы соотношение (50) выполнено при $n = 1$. Далее, пусть установлено, что неравенство справедливо при $n = k - 1$. Тогда, применяя дважды лемму 9, можно записать

$$\sum_{i=1}^{k-1} a_i \leq (*_{i=1}^{k-1} F_i) * F_k(x) - (*_{i=1}^{k-1} G_i) * F_k(x) \leq \sum_{i=1}^{k-1} b_i$$

и

$$a_k \leq (*_{i=1}^{k-1} G_i) * F_k(x) - (*_{i=1}^{k-1} G_i) * G_k(x) \leq b_k.$$

Суммируя два неравенства, мы немедленно получаем, что требуемый результат справедлив и при $n = k$. $\blacksquare$

Обозначим, как обычно, $c^+ = \max(c, 0)$ и $c^- = -\min(c, 0)$, тогда $c = c^+ - c^-$, $|c| = c^+ + c^-$ и $c^- = (-c)^+$. Теперь мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 11 *При всех x справедливо неравенство*

$$-\sum_{i=1}^{n}(p_i - e^{-\lambda_i})^- \le F^{ind}(x) - F^{cP}(x) \le \tag{51}$$

$$\le \sum_{i=1}^{n}[p_i - e^{-\lambda_i} + (q_i - \lambda_i e^{-\lambda_i})^+].$$

Доказательство. В силу леммы 10 достаточно доказать (52) лишь для $n = 1$, т.е. индекс i можно далее не писать. Таким образом, мы имеем

$$F^{ind} = pI + qG$$

и

$$F^{cP} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}G^{*k}$$

с $G(0) = 0$.

Если $x < 0$, то $F^{ind}(x) = F^{cP}(x) = 0$, поэтому (52) выполнено в силу неравенства

$$p - e^{-\lambda} + (q - \lambda e^{-\lambda})^+ \ge 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} \ge 0.$$

Более интересный случай $x \ge 0$. С одной стороны,

$$F^{ind}(x) - F^{cP}(x) = p - e^{-\lambda} + (q - \lambda e^{-\lambda})G(x) - \sum_{k=2}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}G^{*k}(x)$$

$$\le p - e^{-\lambda} + (q - \lambda e^{-\lambda})^+.$$

С другой стороны, поскольку $G^{*k}(x) \le G(x)$, то

$$F^{ind}(x) - F^{cP}(x) \ge p - e^{-\lambda} + (q - 1 + e^{-\lambda})G(x)$$

$$\ge p - e^{-\lambda} - (e^{-\lambda} - p)^- = -(p - e^{-\lambda})^-,$$

что и доказывает теорему. ■

Заметим, что справедлив следующий результат.

Следствие 3 *Если $\lambda_i \ge -\ln p_i$ для $i = \overline{1,n}$, то $F^{cP}(x) \le F^{ind}(x)$ для всех x.*

Иными словами, при указанных предположениях относительно λ_i, $i = \overline{1,n}$, сложное пуассоновское распределение доминирует (в смысле стохастического порядка) распределение, получающееся в индивидуальной модели.

Замечание 13 Отметим также, что в случае $q_i \geq \lambda_i e^{-\lambda_i}$ для $i = \overline{1,n}$ верхняя граница в (52) может быть упрощена с использованием неравенства

$$p_i - e^{-\lambda_i} + (q_i - \lambda_i e^{-\lambda_i})^+ < \lambda_i^2/2, \tag{52}$$

которое в свою очередь вытекает из следующей цепочки равенств и неравенств

$$1 - (1+\lambda_i)e^{-\lambda_i} = 1 - e^{\ln(1+\lambda_i)-\lambda_i} < 1 - e^{-\lambda_i^2/2} < \lambda_i^2/2.$$

Теперь посмотрим, во что превращаются границы в (52) для специальным образом подобранных λ_i. Мы начнем с двух случаев, описанных в книге Гербера [27].

Случай 1. Наиболее часто встречающееся на практике предположение состоит в том, что

$$\lambda_i = q_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Оно означает, что параметр пуассоновского распределения выбран таким образом, чтобы среднее число требований в обеих моделях было одно и то же. Поскольку $e^{-\lambda_i} > 1 - \lambda_i = p_i$ и $q_i > \lambda_i e^{-\lambda_i}$, то из (52), с использованием (52), получаем, что для всех x

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n q_i^2 < \sum_{i=1}^n (p_i - e^{-q_i}) \leq F^{ind}(x) - F^{cP}(x) \leq \tag{53}$$

$$\leq \sum_{i=1}^n [1 - (1+q_i)e^{-q_i}] < \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n q_i^2.$$

Таким образом, несколько расширяя границы, мы имеем возможность понять, каков порядок ошибки при переходе от индивидуальной модели к сложной пуассоновской.

Случай 2. Другая возможность — положить

$$\lambda_i = -\ln p_i, \quad i = \overline{1,n},$$

при этом вероятность не иметь ни одного требования окажется одной и той же для обеих моделей.

Поскольку при сделанном предположении $q_i = 1 - e^{-\lambda_i} > \lambda_i e^{-\lambda_i}$, то согласно теореме 11 и замечанию 13 для любых x имеем

$$0 \le F^{ind}(x) - F^{cP}(x) \le \sum_{i=1}^{n}(q_i + p_i \ln p_i) < (1/2)\sum_{i=1}^{n}(\ln p_i)^2.$$

Эта граница для ошибки была получена Хиппом (Hipp) в работе [36].

Случай 3. Как указал Хипп в [37], приближение первого порядка для суммарного размера требований, предложенное Корня (Kornya) [43], может также рассматриваться как составное пуассоновское распределение с

$$\lambda_i = q_i/p_i, \quad i = \overline{1,n}.$$

Известно, что $e^{\lambda_i} > 1 + \lambda_i = 1/p_i$, то $e^{-\lambda_i} < p_i$ и $q_i = \lambda_i p_i > \lambda_i e^{-\lambda_i}$. Таким образом, в данном случае имеем (согласно теореме 11 и замечанию 13) для всех x

$$0 \le F^{ind}(x) - F^{cP}(x) \le (1/2)\sum_{i=1}^{n}(q_i/p_i)^2.$$

Наконец, установим, какой выбор λ_i предпочтителен, т.е. обеспечивает минимальную разность между верхней и нижней оценками возникающей ошибки. Обозначим

$$f_L(\lambda) = -(p - e^{-\lambda})^-,$$
$$f_U(\lambda) = p - e^{-\lambda} + (q - \lambda e^{-\lambda})^+$$

и

$$f(\lambda) = f_U(\lambda) - f_L(\lambda) = (p - e^{-\lambda})^+ + (q - \lambda e^{-\lambda})^+.$$

Поскольку $f_U(\lambda)$ возрастающая функция λ, а $f_L(\lambda) = 0$ при $\lambda \ge -\ln p$, то функция $f(\lambda)$ достигает минимум в точке $\lambda^* \le$

$-\ln p$. Но при $\lambda \leq -\ln p$ имеем $f(\lambda) = q - \lambda e^{-\lambda}$, а такая функция убывает при $\lambda < 1$ и возрастает при $\lambda > 1$. Значит, минимум $f(\lambda)$ достигается при

$$\lambda^* = \begin{cases} -\ln p, & \text{если} \quad -\ln p < 1, \\ 1, & \text{если} \quad -\ln p \geq 1. \end{cases} \tag{54}$$

Условие $-\ln p < 1$ соответствует $q < 1 - e^{-1} = 0,632121$. Заметим, что обычно используемое составное пуассоновское приближение с $\lambda_i = q_i$ не дает минимальной разницы между верхней и нижней границами ошибки аппроксимации.

1.3.4 Границы для стоп-лосс премии

Пусть X — это риск, т.е. неотрицательная случайная величина с функцией распределения F и конечным математическим ожиданием μ. Стоп-лосс преобразование функции F определяется следующим образом

$$m(F, t) = \mathrm{E}(X - t)^+ = \int_t^\infty (x - t)\, dF(x).$$

Заметим, что в частности $m(F, 0) = \mu$.

Если F — это распределение суммарного размера требований (ущерба) в течение определенного промежутка времени (например, года), то $m(F, t)$ — это чистая стоп-лосс премия за этот период с приоритетом (или собственным удержанием) t.

Ниже приводятся некоторые результаты, касающиеся границ для стоп-лосс премий. Утверждения такого типа возникли в основополагающей работе [14] (см. также [27]).

Лемма 11 *Пусть F, G и H — функции распределения и существуют такие постоянные a и b, что для любого t*

$$a \leq m(F, t) - m(G, t) \leq b. \tag{55}$$

Тогда

$$a \leq m(F * H, t) - m(G * H, t) \leq b. \tag{56}$$

Доказательство. Пусть X, Y, Z — случайные величины с функциями распределения соответственно F, G, H, и предположим, что Z не зависит от X и Y. Пользуясь свойствами математического ожидания, получим

$$m(F * H, t) - m(G * H, t) = \mathrm{E}[\mathrm{E}[(X + Z - t)^+ | Z]] -$$
$$-\mathrm{E}[\mathrm{E}[(Y + Z - t)^+ | Z]] = \mathrm{E}[m(F, t - Z)] - \mathrm{E}[m(G, t - Z)],$$

откуда утверждение леммы (56) сразу же следует в силу (55).

Лемма 12 *Пусть функции распределения F_i, G_i, $i = \overline{1, n}$, удовлетворяют для любого t системе неравенств*

$$a_i \leq m(F_i, t) - m(G_i, t) \leq b_i.$$

Тогда при любом t справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \leq m(*_{i=1}^{n} F_i, t) - m(*_{i=1}^{n} G_i, t) \leq \sum_{i=1}^{n} b_i. \qquad (57)$$

Доказательство. По предположению неравенства (57) справедливы при $n = 1$. Для произвольного n они доказываются по индукции с использованием леммы 11 по аналогии с доказательством леммы 10. ■

Лемма 13 *Пусть F и G — функции распределения неотрицательных случайных величин. Тогда для любого t*

$$m(F, t) + m(G, t) - (t)^- \leq m(F * G, t) \leq m(F, t) + m(G, 0).$$

Доказательство. Нетрудно проверить, что для произвольного t и неотрицательных x и y справедливо неравенство

$$(x - t)^+ + (y - t)^+ - (t)^- \leq (x + y - t)^+ \leq (x - t)^+ + y,$$

откуда немедленно вытекает требуемое утверждение. ■

Лемма 14 *Пусть F — распределения риска, тогда для любых t и $n \geq 1$*

$$nm(F, t) - (n - 1)(t)^- \leq m(F^{*n}, t) \leq (n - 1)m(F, 0) + m(F, t). \quad (58)$$

Доказательство проводится по индукции. Очевидно, что (58) верно при $n = 1$. Предположим, далее, что оно справедливо при $n = k-1$. Тогда при $n = k$ справедливость неравенства вытекает из леммы 13, если ее применить к $F^{*(k-1)}$ и F. ■

Заметим, что в предположениях леммы интерес представляют стоп-лосс премии с неотрицательным приоритетом t. Поэтому соотношение (58) для $t \geq 0$ примет вид

$$nm(F,t) \leq m(F^{*n},t) \leq (n-1)m(F,0) + m(F,t). \tag{59}$$

Докажем теорему, дающую границы для ошибки, возникающей при подсчете стоп-лосс премии с заменой индивидуальной модели сложной пуассоновской.

Теорема 12 *Для любого приоритета t справедливы неравенства*

$$\sum_{i=1}^{n} \mu_i[1-\lambda_i - e^{-\lambda_i} - (e^{-\lambda_i} - p_i)^-] \leq \tag{60}$$

$$\leq m(F^{ind},t) - m(F^{cP},t) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu_i (q_i - \lambda_i)^+,$$

где через μ_i обозначено среднее (условного) распределения размера требований G_i.

Доказательство. В силу леммы 12 достаточно установить требуемый результат в частном случае $n = 1$, т.е. предположить, что $F^{ind} = pI + qG$ приближена с помощью

$$F^{cP} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} G^{*k}.$$

Поскольку $G(0) = 0$, для $t \leq 0$ имеем

$$m(F^{ind},t) - m(F^{cP},t) = m(F^{ind},0) - m(F^{cP},0) = \mu(q-\lambda),$$

где μ — это среднее распределения G. Следовательно, нетрудно проверить, что соотношение (61) выполнено.

Наибольший интерес представляет случай $t > 0$. Тогда $m(I,t) = 0$, значит,

$$m(F^{ind},t) - m(F^{cP},t) = qm(G,t) - \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}m(G^{*k},t).$$

Из (59) вытекает, что для любого $t > 0$

$$qm(G,t) - \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}[(k-1)m(G,0) + m(G,t)] \leq$$

$$\leq m(F^{ind},t) - m(F^{cP},t) \leq qm(G,t) - \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}km(G,t).$$

Так как $m(G,0) = \mu$, предыдущие неравенства можно переписать следующим образом

$$\begin{gathered}(q - 1 + e^{-\lambda})m(G,t) - (\lambda - 1 + e^{-\lambda})\mu \leq \\ \leq m(F^{ind},t) - m(F^{cP},t) \leq (q-\lambda)m(G,t).\end{gathered}$$

Принимая во внимание, что $0 \leq m(G,t) \leq \mu$ для $t > 0$, отсюда получаем,что

$$[-(e^{-\lambda} - p)^- + 1 - \lambda - e^{-\lambda}]\mu \leq m(F^{ind},t) - m(F^{cP},t) \leq (q-\lambda)^+\mu,$$

что и заканчивает доказательство. ■

Отметим, что если $\lambda_i \leq q_i$, $i = \overline{1,n}$, то сложное пуассоновское распределение приводит к более осторожным решениям, а именно, $m(F^{ind},t) \leq m(F^{cP},t)$ при всех t.

Как и в предыдущем параграфе, проанализируем границы (61) для специальным образом выбранных λ.

Случай 1. Если $\lambda_i = q_i$, $i = \overline{1,n}$, то для любого собственного удержания t

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mu_i q_i^2 < \sum_{i=1}^{n}\mu_i(p_i - e^{-q_i}) \leq m(F^{ind},t) - m(F^{cP},t) \leq 0.$$

Верхняя граница была получена в работе [14]. Нижняя граница была выведена в работе [28] для специального случая детерминированных возмещений. Для случайных возмещений Гербером была получена оценка снизу $-\sum_{i=1}^{n}\mu_i q_i^2$, хотя и была отмечена возможность ее улучшения, установленная выше.

Случай 2. Если выбрано $\lambda_i = -\ln p_i$, $i=\overline{1,n}$, то для всех t получаем

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mu_i(\ln p_i)^2 < \sum_{i=1}^{n}\mu_i(q_i+\ln p_i) \le m(F^{ind},t)-m(F^{cP},t)\le 0.$$

Случай 3. Приближение первого порядка, прнадлежащее Корня, получится, если положить $\lambda_i = q_i/p_i$, $i=\overline{1,n}$. Тогда для любого t

$$-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\mu_i q_i^2/p_i \le m(F^{ind},t)-m(F^{cP},t)\le 0.$$

Чтобы закончить анализ границ (61), рассмотрим

$$g_L(\lambda)=1-\lambda-e^{-\lambda}-(e^{-\lambda}-p)^-, \qquad g_U(\lambda)=(q-\lambda)^+$$

и

$$g(\lambda)=g_U(\lambda)-g_L(\lambda).$$

Поскольку функция $g_L(\lambda)$ убывает при всех λ, а $g_U(\lambda)=0$ при $\lambda\ge q$, то минимум $g(\lambda)$ достигается при $\lambda^*\le q$. Но при $\lambda\le q$ можно записать $g(\lambda)=e^{-\lambda}-p$, т.е. получаем убывающую функцию λ. Это означает, что минимум $g(\lambda)$ достигается при $\lambda^*=q$.

Сравнение с (54) показывает, что оптимальное значение параметра пуассоновского распределения меняется в зависимости от того, каким образом измеряется расстояние между точной (индивидуальной) моделью и аппроксимирующей пуассоновской.

Упомянем также, что верхние и нижние границы, полученные в теоремах 11, и 12, растут линейно с ростом объема портфеля n, поэтому они непригодны для больших портфелей.

Альтернативные оценки для стоп-лосс премий были получены Хиппом (см. [36]) для классического приближения ($\lambda_i = q_i$) с использованием функций концентрации. Напомним, что функция концентрации $C(F,r)$ для функции распределения F на отрезке длины $r>0$ определяется как

$$C(F,r)=\sup_x[F(x+r)-F(x)].$$

Обозначим через μ_i и $\mu_i^{(2)}$ соответственно первый и второй моменты условного распределения размера требования G_i.

Теорема 13 (Hipp) *Для любого* x

$$|F^{ind}(x) - F^{cP}(x)| \le \frac{\pi^2}{4} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i^2}{p_i} C(\bar{F}, \mu)$$

и для любого t

$$-\frac{\pi^2}{4} \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i^2}{p_i} \left(\mu_i + \frac{\mu_i^{(2)}}{2\mu_i} \right) C(\bar{F}, \mu_i) \le m(F^{ind}, t) - m(F^{cP}, t) \le 0$$

где $\bar{F}$ *— это составное пуасоновское распределение с параметром*

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} p_i q_i$$

и распределением размера слагаемых

$$\bar{G} = \frac{1}{2\bar{\lambda}} \sum_{i=1}^{n} p_i q_i G_i.$$

Чтобы понять порядок ошибок, полученных в теореме 13, можно воспользоваться следующими простыми оценками для функции концентрации

$$C(\bar{F}, \mu_i) \le \mu_i' C(\bar{F}, 1) \le \mu_i' (2e\bar{\lambda})^{-1/2},$$

где через μ_i' обозначено наименьшее целое число большее или равное μ_i. Оказывается, что $C(\bar{F}, \mu_i)$ имеет порядок $\bar{\lambda}^{-1/2}$. В результате метод Хиппа приводит к ошибкам порядка $\sqrt{n}$, в то время как предшествующие теоремы 11 и 12 давали ошибки порядка n. Таким образом, для больших портфелей оценки Хиппа более точные, но их гораздо труднее вычислять. Например, если все G_i — арифметические распределения, то потребуется применение алгоритма Панджера.

1.3.5 Сравнение обобщенных моделей

Проведем сравнение двух однородных портфелей, которые отличаются только размерами требований, т.е. у одного они распределены как X, а у другого как Y, в то время как N, I_k, A_k остаются теми же. Возникает вопрос, при каких условиях из $X \preceq Y$ следует, что $S_X \preceq S_Y$, где S_X задается с помощью (4), соответственно S_Y получается заменой X на Y. Иначе говоря, когда из того, что размеры отдельных требований менее рискованные, следует, что то же самое верно и для суммарного ущерба.

Следуя [46], воспользуемся тем, что S_X и S_Y представляются как смеси случайных величин

$$X_B = \sum_{i \in B} a_i X_i \quad (\text{соответственно} \quad Y_B = \sum_{i \in B} a_i Y_i),$$

где B — это некоторое подмножество из $\{1, 2 \ldots, n\}$, $n \geq 1$. При этом вероятности в смеси имеют вид

$$p(n, B, a) = \mathrm{P}(N = n, \prod_{i \in B} \{I_i = 1\} \cap \{A_i = a_i\}).$$

Заметим, что суммы X_B и Y_B состоят из независимых случайных величин.

Таким образом, очевидно, что если порядок $\preceq$ инвариантен относительно взятия смесей, сверток и изменения масштаба (умножения на положительную константу), то он сохраняется и для суммарных издержек вида (4).

Лемма 15 *Если порядок $\preceq$ порождается некоторым классом функций $\mathcal{F}$, инвариантным относительно сдвига и изменения масштаба, то он инвариантен относительно взятия сумм вида* (4).

Доказательство. Напомним, что порядок порождается некоторым классом $\mathcal{F}$, когда

$$X \preceq Y, \quad \text{если} \quad \mathrm{E}f(X) \leq \mathrm{E}f(Y) \quad \text{для любой} \quad f \in \mathcal{F},$$

в предположении, что указанные математические ожидания существуют (см. определение 1.6).

Поэтому сохранение порядка смесей проверяется также, как это было сделано в лемме 1.10. Инвариантность относительно взятия сверток была проверена в теореме 1.2. Наконец, порядок $\preceq$ масштабно инвариантен если из $f \in \mathcal{F}$ следует, что для любого $a > 0$ также и $h_a \in \mathcal{F}$, где $h_a(x) = f(ax)$. Таким образом, $S_X \preceq S_Y$. ■

Задача 58 *Проверить, что любой порядок, порождаемый s-выпуклыми функциями, сохраняется при взятии сумм вида* (4). (*Функция $f(x)$ называется s-выпуклой, если ее производная порядка s неотрицательна.*)

Как следует из леммы 15, порядок стоп-лосс сохраняется при взятии сумм вида (4).

Обратимся теперь к порядку Лоренца $<_{Lor}$ (см. определение 1.14) и порядку $<_{hamr}$.

Пусть случайные величины X и Y принадлежат классу $\mathcal{L}$, т.е. неотрицательны и имеют *конечные положительные* математические ожидания. Согласно теореме 1.20 $X <_{Lor} Y$ тогда и только тогда, когда

$$\frac{X}{\mathrm{E}X} <_{cx} \frac{Y}{\mathrm{E}Y}, \text{ т.е. } \mathrm{E}f\left(\frac{X}{\mathrm{E}X}\right) \le \mathrm{E}f\left(\frac{Y}{\mathrm{E}Y}\right) \text{ для любой выпуклой } f,$$

как всегда, в предположении, что математические ожидания существуют.

Обозначим
$$H_X(u) = \frac{\mathrm{E}(X-u)^+}{\mathrm{E}X}.$$

Определение 11 *Говорят, что X предшествует Y в смысле гармонического среднего остаточной жизни (harmonic average mean remaining life), что записывается $X \le_{hamr} Y$, если для любого $u \ge 0$*
$$H_X(u) \le H_Y(u).$$

Задача 59 *Проверить, что оба порядка $<_{Lor}$ и $\le_{hamr}$ масштабно инвариантны, однако инвариантность относительно сверток и смесей имеется не всегда.*

Покажем, что при дополнительном предположении относительно средних (которое справедливо, в частности, для последовательностей одинаково распределенных случайных величин) имеется также инвариантность порядка Лоренца относительно сверток и смесей.

Теорема 14 *Пусть последовательности* $\{X_k\}_{k=\overline{1,m}}$ *и* $\{Y_k\}_{k=\overline{1,m}}$ *удовлетворяют следующим условиям: все* X_k, Y_k *из класса* $\mathcal{L}$ *и*

$$X_k <_{Lor} Y_k, \tag{61}$$

$$\frac{\mathrm{E}X_k}{\mathrm{E}Y_k} = c \quad \textit{для некоторой константы} \quad c. \tag{62}$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{m} X_k <_{Lor} \sum_{k=1}^{m} Y_k.$$

Доказательство. Заметим, что из (62) немедленно вытекает равенство

$$r_k = \frac{\mathrm{E}X_k}{\sum_{j=1}^{m} \mathrm{E}X_j} = \frac{\mathrm{E}Y_k}{\sum_{j=1}^{m} \mathrm{E}Y_j}, \quad k = \overline{1,m}. \tag{63}$$

Далее, из (61) и масштабной инвариантности порядка $<_{cx}$ имеем

$$r_k \frac{X_k}{\mathrm{E}X_k} <_{cx} r_k \frac{Y_k}{\mathrm{E}Y_k}, \quad k = \overline{1,m}.$$

Пользуясь инвариантностью выпуклого порядка относительно свертки, получаем

$$\sum_{k=1}^{m} r_k (X_k/\mathrm{E}X_k) <_{cx} \sum_{k=1}^{m} r_k (Y_k/\mathrm{E}Y_k),$$

что может быть переписано в силу (63) как

$$\frac{\sum_{k=1}^{m} X_k}{\sum_{k=1}^{m} \mathrm{E}X_k} <_{cx} \frac{\sum_{k=1}^{m} Y_k}{\sum_{k=1}^{m} \mathrm{E}Y_k}.$$

А это и есть требуемый результат. ■

Задача 60 *Привести пример, показывающий, что при нарушении условия* (62) *порядок Лоренца может не сохраняться при свертке.*

Теорема 15 *При дополнительном условии* (62) *порядок Лоренца сохраняется при смешивании распределений.*

Доказательство. В силу (62) мы имеем

$$s_k = \frac{\mathrm{E}X_k}{\sum_{j=1}^m p_j \mathrm{E}X_j} = \frac{\mathrm{E}Y_k}{\sum_{j=1}^m p_j \mathrm{E}Y_j}.$$

Как и в предыдущей теореме, используя масштабную инвариантность, получим

$$s_k \frac{X_k}{\mathrm{E}X_k} <_{cx} s_k \frac{Y_k}{\mathrm{E}Y_k}, \quad k = \overline{1,m}.$$

Следовательно, для любой выпуклой функции f

$$\sum_{k=1}^m p_k \mathrm{E}f[s_k(X_k/\mathrm{E}X_k)] \leq \sum_{k=1}^m p_k \mathrm{E}f[s_k(Y_k/\mathrm{E}Y_k)].$$

Иначе это неравенство можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^m p_k \mathrm{E}f\left[\frac{X_k}{\sum_{j=1}^m p_j \mathrm{E}X_j}\right] \leq \sum_{k=1}^m p_k \mathrm{E}f\left[\frac{Y_k}{\sum_{j=1}^m p_j \mathrm{E}Y_j}\right],$$

что означает сохранение порядка Лоренца для смеси. ■

Задача 61 *Привести пример, когда порядок Лоренца не сохраняется при взятии смесей.*

Следствие 4 *Если $X_k <_{Lor} Y_k$, $\mathrm{E}X_k = m_1$, $\mathrm{E}Y_k = m_2$ при любом $k \geq 1$, то $S_X <_{Lor} S_Y$.*

Полученные результаты позволяют сравнивать в смысле Лоренца также коллективные модели.

Следствие 5 *Если $F_X <_{Lor} F_Y$, где F_X и F_Y — это функции распределения размеров требования в двух коллективных моделях, а распределение числа требований в обеих моделях одно и то же, то суммарный ущерб в первой модели предпочтительнее в смысле порядка Лоренца, чем во второй.*

Условимся писать $X =_{hamr} Y$, если $X \leq_{hamr} Y$ и $Y \leq_{hamr} X$.

Лемма 16 *Пусть $X \in \mathcal{L}$, $Y \in \mathcal{L}$ и $\mathrm{E}X \leq \mathrm{E}Y$. Тогда $X =_{hamr} Y$ в том и только том случае, когда существует не зависящая от Y бернуллиевская случайная величина ν, для которой $X \stackrel{d}{=} \nu Y$.*

Доказательство. Предположим сначала, что $X \stackrel{d}{=} \nu Y$, т.е. распределения X и νY совпадают. Требуемый результат $X =_{hamr} Y$ вытекает из следующей цепочки равенств, верной для любого $u \geq 0$,

$$H_X(u) = H_{\nu Y}(u) = \frac{\mathrm{E}(\nu Y - u)^+}{\mathrm{E}(\nu Y)} = \frac{\mathrm{E}(Y-u)^+ \mathrm{P}(\nu = 1)}{\mathrm{E}Y \mathrm{P}(\nu = 1)} = H_Y(u).$$

Пусть теперь наоборот $X =_{hamr} Y$. Это значит, что для любого $u \geq 0$

$$\frac{\int_u^\infty \mathrm{P}(X > t)\, dt}{\mathrm{E}X} = \frac{\int_u^\infty \mathrm{P}(Y > t)\, dt}{\mathrm{E}Y}.$$

Следовательно, для любого $u \geq 0$

$$\int_u^\infty \left(\frac{\mathrm{P}(X > t)}{\mathrm{E}X} - \frac{\mathrm{P}(Y > t)}{\mathrm{E}Y} \right) dt = 0,$$

откуда нетрудно вывести, что для почти всех t

$$\mathrm{P}(X > t) = \left(\frac{\mathrm{E}X}{\mathrm{E}Y} \right) \mathrm{P}(Y > t).$$

Так как функция распределения непрерывна справа, то указанное равенство справедливо для всех $t \geq 0$. Выбрав $\mathrm{P}(\nu = 1) = \mathrm{E}X/\mathrm{E}Y$, что возможно в силу предположения $\mathrm{E}X \leq \mathrm{E}Y$, мы получаем необходимое представление $X \stackrel{d}{=} \nu Y$. ■

Задача 62 *Показать, что из* $X \le_{hamr} Y$ *не следует* $\mathrm{E}X \le \mathrm{E}Y$, *однако вытекает* $\mathrm{E}(X|X>0) \le \mathrm{E}(Y|Y>0)$ (*см. также* [*33*]).

Связь между порядком Лоренца и $\le_{hamr}$ устанавливает следующая лемма.

Лемма 17 *Если* $X <_{Lor} Y$ *и* $\mathrm{E}X \le \mathrm{E}Y$, *то* $X \le_{hamr} Y$.

Доказательство. Воспользуемся тем, что функция $f(x) = (x-u)^+$ выпукла по x при фиксированном u, а $\mathrm{E}(Y-u)^+$ убывает по u на положительной полуоси. Пусть $X <_{Lor} Y$, тогда в предположении, что $\mathrm{E}X \le \mathrm{E}Y$, имеем

$$\frac{\mathrm{E}(X-u)^+}{\mathrm{E}X} = \mathrm{E}\left(\frac{X}{\mathrm{E}X} - \frac{u}{\mathrm{E}X}\right)^+ \le \mathrm{E}\left(\frac{Y}{\mathrm{E}Y} - \frac{u}{\mathrm{E}X}\right)^+ =$$
$$= \mathrm{E}\left(Y - u\frac{\mathrm{E}Y}{\mathrm{E}X}\right)^+ / \mathrm{E}Y \le \frac{\mathrm{E}(Y-u)^+}{\mathrm{E}Y},$$

что и дает $X \le_{hamr} Y$. ■

Задача 63 *Проверить, что обратное утверждение неверно, т.е. из* $X \le_{hamr} Y$ *и* $\mathrm{E}X \le \mathrm{E}Y$ *не следует* $X <_{Lor} Y$. (*Указание. Рассмотреть* $X \stackrel{d}{=} \nu Y$, *с* $\mathrm{E}Y > 0$, ν *бернуллиевская, не зависящая от* Y, *и* $0 < \mathrm{P}(\nu = 1) < 1$.)

Прежде чем сформулировать условия, при которых порядок $\le_{hamr}$ сохраняется при свертке, необходимо вспомнить определение 1.25: распределение имеет тип $NBUE$, если $\mathrm{E}(X-u|X \ge u) \le \mathrm{E}X$ для всех $u \ge 0$.

Справедлив следующий результат, доказанный в [56].

Теорема 16 *Пусть* $\{X_k\}$ *и* $\{Y_k\}$ — *две последовательности независимых случайных величин из класса* $\mathcal{L}$, *удовлетворяющих условиям*

$$X_k \le_{hamr} Y_k$$

и

$$\mathrm{E}X_k \le \mathrm{E}Y_k, \quad k = \overline{1,m}.$$

Далее, все X_k и Y_k имеют тип $NBUE$, кроме, возможно, одной X_{k_1} и одной Y_{k_2}, при $k_1 \neq k_2$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{m} X_k \leq_{hamr} \sum_{k=1}^{m} Y_k.$$

Интересна также следующая теорема, доказательство которой можно прочитать в [46].

Теорема 17 *Для случайной величины $X \in \mathcal{L}$ следующие результаты эквивалентны:*

1. *X имеет тип $NBUE$,*
2. *$X \leq_{hamr} X + Y$ для любой случайной величины $Y \in \mathcal{L}$, не зависящей от X,*
3. *$X + Y_1 \leq_{hamr} X + Y_2$ для любых случайных величин Y_1, Y_2 из $\mathcal{L}$, не зависящих от X и таких, что $\mathrm{E}Y_1 \leq \mathrm{E}Y_2$.*

В отличие от свертки для сохранения порядка $\leq_{hamr}$ при смешивании распределений не надо знать тип распределения, что показывает следующая теорема.

Теорема 18 *При дополнительном условии (62) из $X_k \leq_{hamr} Y_k$, $k = \overline{1,m}$, следует, что смеси их распределений также упорядочены в смысле порядка $\leq_{hamr}$.*

Доказательство. Если смеси берутся с вероятностями $p_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^{m} p_k = 1$, их порядок $\leq_{hamr}$ означает согласно определению 11, что при любом $u \geq 0$

$$\sum_{i,k=1}^{m} p_i p_k \mathrm{E}(X_k - u)^+ \mathrm{E}Y_i \leq \sum_{i,k=1}^{m} p_i p_k \mathrm{E}(Y_k - u)^+ \mathrm{E}X_i. \qquad (64)$$

Учитывая (62), означающее $(\mathrm{E}X_k/\mathrm{E}Y_k) = c$, $k = \overline{1,m}$, а также то, что $X_k \leq_{hamr} Y_k$, можно записать следующую цепочку равенств и неравенств

$$\mathrm{E}(X_k - u)^+ \mathrm{E}Y_i = \frac{\mathrm{E}(X_k - u)^+}{\mathrm{E}X_k} \mathrm{E}X_k \mathrm{E}Y_i \leq \frac{\mathrm{E}(Y_k - u)^+}{\mathrm{E}Y_k} \mathrm{E}X_k \mathrm{E}Y_i =$$

$$= \mathrm{E}(Y_k - u)^+ \mathrm{E}X_i \left(\frac{\mathrm{E}X_k}{\mathrm{E}Y_k}\right) \left(\frac{\mathrm{E}X_i}{\mathrm{E}Y_i}\right)^{-1} = \mathrm{E}(Y_k - u)^+ \mathrm{E}X_i,$$

откуда очевидным образом следует (64). ■

Следующая задача показывает, что при отсутствии условия (62) порядок $\le_{hamr}$ при смешивании распределений не сохраняется.

Задача 64 *Фиксируем* $a > 0$ *и* $u > 0$ *такие, что* $1 < 1+a < u < 3/2$, *и положим* $m = 2$, $p_1 = p_2 = 0,5$, $X_1 = 1$, $X_2 = 4$, $Y_1 = 1+a$, $Y_2 = 4 + a$. *Проверить, что* $X_1 \le_{hamr} Y_1$, $X_2 \le_{hamr} Y_2$, *но* (64) *не выполнено при указанных* u.

Следствие 6 *Если* $X <_{Lor} Y$ *и* $\mathrm{E}X \le \mathrm{E}Y$, *то* $S_X <_{Lor} S_Y$ *и* $S_X \le_{hamr} S_Y$.

Доказательство очевидным образом вытекает из леммы 17 и теорем 14, 15, 18, поскольку свойство (62) выполнено в силу одинаковой распределенности слагаемых в S_X и S_Y. ■

Итак, мы установили возможность сравнения размера суммарного ущерба для обобщенных моделей, если известен порядок между соответствующими размерами отдельных требований. Точнее, $S_X \preceq S_Y$, если $X \preceq Y$, когда речь идет о стоп-лосс порядке ($\preceq = <_{sl}$) или порядке Лоренца ($\preceq = <_{Lor}$). При дополнительном предположении, что размеры отдельных требований имеют $NBUE$-распределение, то же самое справедливо и для порядка $hamr$ ($\preceq = \le_{hamr}$).

1.4 Динамическая модель

Рассмотренные в предыдущих параграфах модели имеют одну общую черту: они все являются статическими, задавая лишь величину суммарного ущерба за фиксированный промежуток времени.

Перейдем теперь к рассмотрению динамического варианта модели коллективного риска. Он описывает изменение суммарного ущерба $S(t)$ на бесконечном промежутке $\{t \ge 0\}$ и учитывает процесс поступления премий $\{\mathcal{P}(t), t \ge 0\}$. Тем самым обеспечивается возможность исследовать поведение процесса $\{U(t),$

$t \geq 0\}$, удовлетворяющего следующему соотношению

$$U(t) = u + \mathcal{P}(t) - S(t).$$

Нетрудно понять, что $U(t)$ представляет собой размер капитала (или резерва) страховой компании в момент $t \geq 0$, а $u = U(0)$ — это размер начального капитала, т.е. такая сумма, которую компания готова использовать для обеспечения устойчивости своей деятельности.

1.4.1 Описание модели Крамера-Лундберга

В подавляющем большинстве моделей (см. напр. [4], [67]) предполагается, что процесс поступления премий является детерминированным. Более того, в классической модели Крамера-Лундберга рассматривается линейный процесс поступления премий $\mathcal{P}(t) = at$, причем премия a за единицу времени подсчитывается по принципу среднего. Иными словами, $a = (1+\theta)\mathrm{E}S(1)$, где $\theta > 0$ — это страховая нагрузка.

Предполагается также, что моменты поступления требований на возмещение убытков совпадают с моментами скачков пуассоновского процесса с параметром λ. Для наглядности можно представлять себе, что промежутки между моментами поступления требований являются независимыми показательно распределенными с параметром λ случайными величинами. Размеры поступающих требований образуют последовательность независимых положительных случайных величин $\{X_i\}$ (не зависящую от пуассоновского процесса) с общей функцией распределения $G(x)$.

Поскольку число поступивших за время t требований $N(t)$ имеет распределение Пуассона с параметром λt, то суммарный размер требований $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$ имеет составное пуассоновское распределение.

Предположим далее, что премии поступают непрерывно в систему со скоростью a. Обозначим через u начальный капитал страховой компании. Тогда резерв (или капитал) в момент t задается следующим образом

$$U(t) = u + at - S(t).$$

1.4.2 Вероятность разорения

В рамках коллективной модели риска большое внимание уделяется проблемам разорения.

Случайная величина

$$T = \inf\{t > 0 : U(t) < 0\}$$

называется *моментом разорения* страховой компании. Как обычно, полагаем $T = \infty$, если $U(t) \geq 0$ для любого $t > 0$.

Вероятностью разорения (при начальном капитале u) называется

$$\psi(u) = \mathrm{P}(T < \infty | U(0) = u),$$

т.е. вероятность того, что в какой-то момент капитал компании станет отрицательным (иначе говоря, компания будет не в состоянии выплачивать поступающие требования).

Простую верхнюю грань для вероятности разорения (ruin probability) дает неравенство Лундберга. Для его формулировки потребуется дополнительное требование, которое часто называют *условием Крамера*: существует единственный положительный корень R уравнения

$$\lambda g_X(r) = \lambda + ra, \tag{65}$$

через $g_X(r)$ здесь обозначена производящая функция моментов, т.е. $g_X(r) = \mathrm{E}e^{rX}$. Величина R носит название *характеристический показатель* (adjustment coefficient) или *экспонента Лундберга*.

Теорема 19 *При выполнении условия Крамера* (65)*, вероятность разорения оценивается сверху, для любого u, следующим образом*

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}.$$

Доказательство. Нетрудно понять, что разорение может наступить лишь в момент поступления некоторого требования, так как только в эти моменты происходят скачки процесса $U(t)$ вниз, а в промежутках он растет с постоянной скоростью. Обозначим $\psi_k(u)$ вероятность разорения в предположении, что поступило не более k требований. Очевидно, что $\psi_k(u) = 1$ при $u < 0$.

Поскольку $\psi_k(u) \leq \psi(u)$ для любого k и $\psi_k(u) \to \psi(u)$ при $k \to \infty$, достаточно проверить, что все $\psi_k(u) \leq e^{-Ru}$. Этот факт устанавливается с помощью индукции по k. При $k = 0$ неравенство очевидным образом выполнено, так как $\psi_0(u) = 1$, если $u < 0$, и $\psi_0(u) = 0$, если $u \geq 0$.

Предположим, что соотношение $\psi_{k-1}(u) \leq e^{-Ru}$ уже проверено, и докажем справедливость аналогичного неравенства для $\psi_k(u)$. При сделанных предположениях о процессе поступления требований формула полной вероятности приводит к равенству

$$\psi_k(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty \psi_{k-1}(u + at - x)\, dG(x)\, dt.$$

Согласно предположению индукции правая часть не превосходит

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \int_0^\infty e^{-R(u+at-x)}\, dG(x) =$$

$$= e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-t(\lambda+Ra)}\, dt \int_0^\infty e^{Rx}\, dG(x).$$

Интегрирование приводит к следующему результату

$$e^{-Ru} \frac{\lambda}{\lambda + Ra} g_X(R) = e^{-Ru},$$

(последнее равенство является следствием условия Крамера). ■

Полученный результат позволяет провести доказательство теоремы 1.45. Напомним ее формулировку.

Теорема 1.45 *Если справедливы предположения* $1) - 5)$, *то премия за риск* Y *подсчитывается по формуле*

$$H(Y) = \frac{1}{\alpha} \ln \mathrm{E} e^{\alpha Y} \quad \text{с} \quad \alpha = \frac{1}{u} \ln \frac{1}{\varepsilon},$$

как и выше, u *— это начальный капитал.*

Доказательство. Как было установлено (см. теоремы 1.43 и 1.44), при выполнении условий 1)-4) премия подсчитывается с помощью экспоненциального принципа, иными словами

$$H(Y) = \frac{1}{\alpha} \ln g_Y(\alpha).$$

Величина α — это коэффициент неприятия риска, для определения которого не существует простой процедуры.

Вспомним также, что условие 5) формулировалось следующим образом: вероятность разорения не превосходит заданное (малое) число $\varepsilon > 0$.

Далее, при рассмотрении коллективной модели риска в качестве Y мы выбираем $S(1)$, суммарный размер требований за единицу времени, имеющий производящую функцию моментов $g_{S(1)}(t) = \exp\{\lambda(g_X(t) - 1)$. (Здесь X обозначает размер отдельного требования.) Следовательно, экспоненциальная премия (с параметром α) для $S(1)$ равна

$$H_\alpha[S(1)] = \frac{\lambda}{\alpha}(g_X(\alpha) - 1).$$

С другой стороны, выражая $a = H_\alpha[S(1)]$ из уравнения для характеристического показателя R, получим

$$\frac{1}{\alpha}(g_X(\alpha) - 1) = \frac{1}{R}(g_X(R) - 1).$$

Таким образом, отсюда вытекает $\alpha = R$. Наконец, используя неравенство Лундберга для вероятности разорения, положим $e^{-Ru} = \varepsilon$, что эквивалентно утверждению теоремы. ■

При выполнении (65) функция $\Psi_R(u) = \Psi(u)e^{Ru}$ удовлетворяет уравнению восстановления (см. [5], гл.11). В силу этого справедливо предельное соотношение

$$\lim_{u\to\infty} \Psi_R(u) = k_{CL}, \tag{66}$$

где

$$k_{CL} = \frac{\int_0^\infty e^{Rx} \int_x^\infty (1 - G(y))\, dy\, dx}{\int_0^\infty xe^{Rx}(1 - G(x))\, dx}$$

представляет собой так называемую *постоянную Крамера-Лунд берга*. Соотношение (66) может быть переписано в виде

$$\Psi(u) \sim k_{CL}e^{-Ru}. \tag{67}$$

Заодно отметим, что если размер требований имеет также показательное распределение с параметром μ, то функция $\Psi(u)$ находится в явном виде

$$\Psi(u) = (1 + \theta)^{-1}e^{-Ru}, \quad R = \mu\theta(1 + \theta)^{-1}.$$

Начиная с работы Гербера [26], для нахождения вероятности разорения используется теория мартингалов. Покажем, как это делается в классической модели, удовлетворяющей условию Крамера. Положим

$$X(t) = \exp(-RU(t)),$$

где R – экспонента Лундберга. Тогда при любом $s > 0$

$$\mathrm{E}(X(t+s)|X(t)) = e^{-RU(t)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda s)^k}{k!} e^{-\lambda s} e^{-Ras} \mathrm{E} e^{R(X_1+\ldots+X_k)} = X(t),$$

т.е. $X(t)$ – мартингал. Отсюда вытекает, что

$$\mathrm{E}(X(T); T < \infty) = X(0) = e^{-Ru},$$

где T – момент разорения. Следовательно,

$$\Psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{\mathrm{E}(X(T)|T < \infty)}. \tag{68}$$

Поскольку $X(T) > 1$, то из (68) вытекает неравенство Лундберга $\Psi(u) \leq e^{-Ru}$. Соотношение (68) позволяет также находить двусторонние оценки для вероятности разорения (подробнее об этом можно прочитать в [2]).

1.4.3 Модель Спарре-Андерсена

В настоящее время существует большое количество обобщений классической модели. Одним из них является модель *Спарре Андерсена*, предложенная в работе [9].

Как и в модели Крамера-Лундберга, процесс поступления премий детерминирован и линеен по времени. Размеры требований X_i, $i \geq 1$, независимы и одинаково распределены с функцией распределения $G(x)$. А моменты поступления требований τ_i образуют процесс восстановления, т.е. промежутки $Y_i = \tau_i - \tau_{i-1}$ между последовательными требованиями независимы и одинаково распределены с функцией распределения $A(x) = \mathrm{P}(Y_i \leq x)$, которая не обязана быть показательной.

Естественно предполагать, что

$$b_1 = \mathrm{E}X < \infty, \quad d_1 = \mathrm{E}Y < \infty,$$

и относительная нагрузка безопасности $\theta = (ad_1 - b_1)/b_1 > 0$.

Оказывается, что асимптотическая формула (67) справедлива и в данной модели, если заменить условие Крамера (65) следующим

$$\mathrm{E}\exp(R(X_1 - aY_1)) = 1$$

и соответственно переопределить постоянную k_{CL}. Данное обобщение подробно обсуждается в работе [24]. Оно получено с помощью теории Винера-Хопфа и использованием связи вероятности разорения $\Psi(u)$ с распределением максимума случайного блуждания и соответствующими лестничными моментами и высотами (см. [11]), а именно,

$$\Psi(u) = \mathrm{P}(M > u), \quad M = \sup_k \sigma_k,$$

$$\sigma_0 = 0, \quad \sigma_k = \sum_{i=1}^{k} \xi_i, \quad \xi_i = X_i - aY_i.$$

Интересно отметить, что распределение времени ожидания в одноканальной системе массового обслуживания совпадает с распределением указанного максимума случайного блуждания, т.е. существует возможность переноса результатов теории очередей в теорию риска и наоборот. Определим *лестничный момент*

$$L = \inf\{k : \sigma_k > 0\}.$$

В силу положительности нагрузки, случайная величина L несобственная. Положим $q = \mathrm{P}(L = \infty)$ и определим условное распределение *лестничной высоты* σ_L

$$F_\chi(x) = \mathrm{P}(\sigma_L \le x | L < \infty).$$

Известно (см., например, [10]), что максимум M случайного блуждания $\{\sigma_k\}$ удовлетворяет следующему равенству

$$M \stackrel{d}{=} \chi_1 + \ldots + \chi_{\nu - 1},$$

где случайная величина ν не зависит от последовательности $\{\chi_k\}$ и имеет геометрическое распределение

$$\mathrm{P}(\nu = k) = q(1-q)^{k-1}, \quad k \geq 1,$$

а указанная последовательность состоит из независимых одинаково распределенных случайных величин с функцией распределения $F_\chi(x)$. В результате получается следующее представление вероятности разорения

$$\Psi(u) = \sum_{k=1}^{\infty} q(1-q)^{k-1} \overline{F}_\chi^{(k-1)}(u), \tag{69}$$

где $F_\chi^{(k-1)}$ – $(k-1)$-кратная свертка функции распределения F_χ, а $\overline{F}_\chi^{(k-1)}(x) = 1 - F_\chi^{(k-1)}(x)$.

Для классической модели справедливы следующие соотношения

$$q = \theta(1+\theta)^{-1}, \quad F_\chi^{(k-1)}(x) = b_1^{-1} \int_0^x (1 - G(u))\, du,$$

которые можно рассматривать как следствие формулы Поллачека-Хинчина (см. [10]) и которые сильно облегчают анализ вероятности разорения.

Интересные асимптотические результаты можно получить и в отсутствие условия Крамера. Так, например, для субэкспоненциального распределения F_χ суммы $\sum_{i=1}^k \chi_i$ ведут себя асимптотически как $\max_{i\leq k} \chi_i$, т.е. $1 - F_\chi^{(n)}(x) \sim 1 - F_\chi^n(x)$. Поэтому из (69) получается

$$\Psi(u) \sim (\theta b_1)^{-1} \int_u^\infty (1 - G(x))\, dx.$$

Подробности можно прочитать также в [24] или [15].

2 Перестрахование

Напомним, что перестрахование — это страхование страховщиков. Иными словами, перестрахование — это операция, посредством которой одна сторона (перестрахователь), выплачивая некоторую сумму (премию перестрахования) другой стороне (перестраховщику), передает ей тем самым часть принятого на гарантию риска, т.е. обеспечивает выплату ею определенной части возникающего ущерба (см. [1], там же указаны причины, по которым необходимо перестрахование). Об истории перестрахования можно прочитать, например, в [3].

2.1 Некоторые статистические данные

Для того чтобы еще раз подчеркнуть различие между страхованием жизни и не жизни, приведем некоторые данные, касающиеся рынка страхования, взятые из [48]. Так, в 1994 году общий размер собранных премий (в млрд. $) составлял 1967, из них 1120 (т.е. 57%) приходилось на долю страхования жизни и 847 (т.е. 43 %) на долю страхования не жизни.

Первые 5 стран по объему премий страхования *не жизни* и размер премий на душу населения в 1994 году

Страна	Доля мирового объема премий	Премия на душу населения (в $)
США	40,5%	1315
Япония	15,2%	1032
Германия	9,1%	946
Великобритания	5,0%	722
Франция	4,8%	703

Таким образом, почти 75% (точнее, 74,6%) всех премий приходятся на первые 5 стран. Чем беднее страна, тем меньше премий на душу населения. Кстати, в Японии очень сильно развито страхование жизни (больше чем не жизни). Поэтому, например, в результате землетрясения в Кобе (1995г.) выплаты страховых компаний покрыли лишь незначительную долю убытков.

Отметим также, что страхование жизни растет быстрее, чем не жизни. Так, в 1992 году было собрано премий 1466, из них 768 (т.е. 52%) — это премии по страхованию жизни и 698 (т.е. 48%) — не жизни.

Для сравнения рассмотрим аналогичные данные, относящиеся к 2003-4гг., взятые из [62].

Общий объем премий составил 2958,3 млрд. $ в 2003г. и 3243,9 млрд. $ в 2004г. Из них на долю страхования жизни приходилось 1682,7 млрд. $ в 2003г. и 1848,7 млрд. $ в 2004г. Соответственно премии по страхованию не жизни составили 1275,6 млрд. $ в 2003г. и 1395,2 млрд. $ в 2004г.

В 2004г. на долю США приходилось 33,84% собранных премий, на втором месте Япония – 15,18%, на третьем месте Великобритания – 9,09%, затем Франция – 6,00%, Германия – 5,88%, Италия – 3,97%, на седьмом месте Канада – 2,15%, далее Южная Корея – 2,12%, Голландия – 1,81%, на десятом месте Испания – 1,72% и на 23 месте Россия – 0,50%.

Следующая таблица содержит распределение общего объема премий в 2004г. по регионам.

Регион	Доля мирового объема премий	Премия на душу населения (в $)
Америка	37,51%	1404,3
Европа	36,94%	1427,9
Азия	22,69%	194,3
Африка	1,16%	43,4
Океания	1,70%	1736,9

Две таблицы, приводимые ниже, содержат такие же сведения о распределении премий по регионам, но отдельно для страхования жизни

Регион	Доля мирового объема премий	Премия на душу населения (в $)
Америка	29,45%	628,4
Европа	37,57%	848,1
Азия	30,09%	147,2
Африка	1,42%	30,3
Океания	1,46%	851,0

и страхования не жизни

Регион	Доля мирового объема премий	Премия на душу населения (в $)
Америка	48,19%	775,9
Европа	36,10%	579,8
Азия	12,88%	47,1
Африка	0,81%	13,1
Океания	2,02%	885,9

Цифры для перестрахования получить труднее по двум причинам:

— понятие премии в перестраховании определено недостаточно точно,

— во многих странах перестраховщики не контролируются, поэтому статистика недостоверна.

В 1994 году премии перестрахования составляли примерно 80 млрд. $, из них 85% в страховании не жизни и 15% в страховании жизни. Значит, премии перестрахования составили 8% премий страхования не жизни и только 1,1% премий страхования жизни.

Главные действующие лица на рынке перестрахования — немцы, швейцарцы и американцы. В настоящее время в мире существует около 250 профессиональных перестраховщиков, из них около 100 в Европе и 35 в ФРГ. Чистые премии (без ретроцессии), собранные ведущими перестраховыми компаниями мира, составляли в 1994 году в млрд.$

Münchener Rück	11980
Suisse de Re	9295
Kölnische Rück	3550
Employers Re	3485
Hannover Rück	3230
General Re	3000

— Как следует из данной таблицы, одной из характерных особенностей перестрахового рынка является *большая концентрация*. Так, уже первые два перестраховщика имеют примерно 26% премий.

— Другой особенностью является *слияние компаний*: в 1995г.

General Re купила старейшую перестраховую компанию Kölnische Rück (основана в 1846г.), а Employers Re (компания из Далласа) купила Frankone Rück и Aachener Rück, 8 и 15 перестраховые компании. Среди французских перестраховых компаний наиболее крупная, Scor, занимает 11 место в мировой классификации.

Перестрахованием занимаются и прямые страховщики, но доля их незначительна. Так в 1996г. из 57,5 млрд. немецких марок, собранных немецкими перестраховщиками в Германии и за рубежом, лишь 9% приходилось на долю непрофессиональных перестраховщиков.

Компания Lloyds не занимает видного места в классификации перестраховщиков, так как ведет не только перестрахование, но и страхование, причем все это распределено среди сотен синдикатов. Перестраховая деятельность составляет менее 5% мирового объема перестрахования.

2.2 Виды перестрахования

Существуют два основных вида перестрахования: *обязательное*, или *облигаторное* (obligatory), и *факультативное* (facultative). Иначе обязательное перестрахование называют *договорным*. Тем самым подчеркивается разница между обязательным страхованием и перестрахованием. Как известно, во многих странах обязательно страхование гражданской ответственности водителей автотранспорта. Это означает, что не застраховавшись невозможно управлять автомобилем. (Если же застрахованный водитель разобьет машину другого, то все издержки по ремонту заплатит его страховая компания, однако если будет много происшествий и компании придется много выплачивать, то на следующий год она увеличит тариф.) Обязательное перестрахование предусматривает заключение контракта между страховщиком и перестраховщиком, который называется *договором перестрахования* (treaty по-английски, traité по-французски). Согласно этому договору все и каждый риск@ принадлежащие определенному классу (оговоренному в договоре) *должны передаваться* страховщиком в перестрахование и *приниматься* перестраховщиком.

Основой для заключения договора является *слип* (slip), документ, содержащий информацию о деловом опыте, а также определяющий вид и тип перестрахования, местонахождение риска, подлежащего перестрахованию, ожидаемую перестраховочную премию и максимальную ответственность перестраховщика, размер открываемого депозита, комиссию, участие в прибыли, срок действия договора.

Обязательное перестрахование относится к *ансамблю* (или подпортфелю) *рисков*. Автоматически передаются в перестрахование *все* полисы указанного в договоре класса (например, все автомобильные риски или страхование жилья и т.д.)

Преимущество обязательного перестрахования в меньших административных расходах и отсутствии антиселекции.

При факультативном перестраховании риски (полисы) берутся по одному. Прямой страховщик сам выбирает, кому предложить риск в перестрахование. А перестраховщик, оценив полученное предложение, решает, принять ли на себя часть риска, и если да, то какую. Этот способ используется для покрытия

— очень больших рисков, в которых *страховые суммы сильно превосходят возможности страховой компании*, т.е. *потолок гарантий* или максимальную страховую сумму (по-английски, underwriting limits, по-французски, capacité (plein) de souscription). В качестве примера можно назвать индустриальные риски (RI) или космические.

— специальных рисков, требующих определенных знаний экспертов (например, гражданская ответственность производителей какой-то продукции), или технологических рисков (нефтехимия и т.д.).

— рисков, исключенных из обязательного перестрахования.

— рисков, которые редко гарантируются компанией и были приняты из коммерческих соображений.

Факультативное перестрахование по форме очень близко к непосредственному страхованию. Для него характерны

— большой объем административной работы, а значит, и высокие издержки,

— утрата конфиденциальности,

— длительный период предварительных исследований, при этом страховщик может потерять бизнес, если окажется не в состоянии быстро принять решение.

Однако это недостатки только для перестрахователя, но не для перестраховщика. Есть риск антиселекции, но решение обычно принимает перестраховщик единолично.

2.3 Механизмы перестрахования

Далее речь будет идти в основном об обязательном перестраховании, хотя для факультативного механизмы похожи.

Договоры делятся на *пропорциональные* и *непропорциональные.* Такое же деление на пропорциональное и непропорциональное перестрахование характерно и для факультативного перестрахования.

При *пропорциональном* перестраховании ответственность по рискам (страховые суммы), премии и убытки распределяются пропорционально, т.е. в определенных долях, между страховщиком и перестраховщиком.

— Пропорциональное перестрахование *ограничивает ответственность.*

— Оно *осуществляется на основе страховой суммы*, следовательно, при подписании договора уже "определяется"каково будет участие перестраховщика.

В случае *непропорционального* перестрахования страховые суммы (ответственность), премии и убытки распределены непропорционально между страховщиком и перестраховщиком. Перестраховщик принимает участие в возмещении убытков лишь в том случае, когда они превышают определенный порог, обусловленный заранее. В этом непропорциональное перестрахование похоже на страхование с (вычитаемой) франшизой.

— Непропорциональное перестрахование *производится на базе убытков*, т.е. размер участия определяется после возникновения убытков.

— Оно *ограничивает размер убытков.*

Пропорциональное перестрахование обычно применяется в страховании от пожаров, страховании жизни, страховании отдельных лиц от несчастных случаев. Непропорциональное перестрахование характерно для страхования гражданской ответственности.

Обязательное, как пропорциональное так и непропорциональное, перестрахование подразделяется на ряд типов.

Пропорциональное перестрахование делится на *квотное* (quota share по-английски и quote part по-французски) и *эксцедентное*, более точно *эксцедент сумм* (surplus по-английски и excédent de capitaux по-французски). В свою очередь квотное перестрахование бывает без ограничения ответственности перестраховщика (quote part generale), распространяющееся на весь портфель (или подпортфель) страховщика, или с ограничением (quote part sur retention), т.е. распространяющееся лишь на собственное удержание страховщика, о котором будет сказано при рассмотрении эксцедентных договоров. Третий тип пропорционального перестрахования — это *факультативно-обязательное* (facob или open cover).

В непропорциональном перестраховании наиболее распространены эксцедентные договоры, а именно, *эксцедент убытка* (excess of loss по-английски и excédent de sinistre по-французски) и *эксцедент убыточности* (stop loss по-английски и excédent de perte annuelle по-французски). Грубо говоря, механизм действия этих договоров одинаков, но в первом случае речь идет либо об убытках по отдельному риску (risk excess of loss или кратко risk XL), либо по отдельному происшествию, т.е. катастрофе (catastrophe excess of loss, кратко cat XL), в то время как во втором случае (стоп-лосс) имеют ввиду суммарные убытки за определенный период времени, например, год.

2.4 Пропорциональное перестрахование

Вернемся к пропорциональному перестрахованию и рассмотрим подробнее основные типы договоров.

2.4.1 Квотный договор

Квотный договор является наиболее простой формой перестраховочного договора. Согласно условиям такого договора страховая компания передает в перестрахование в согласованной с перестраховщиком доле *все без исключения* принятые на страхование риски по определенному виду страхования или группе смежных страхований. В этой же доле перестраховщику передается причитающаяся ему премия, и он возмещает перестрахователю в той же доле все оплаченные им в соответствии с условиями страхования убытки.

Пример 1 Передается в перестрахование доля $t = 80\%$. Объект застрахован на 10 млн. долларов ($10^7\$$), убытки равны $10^6\$$.

до перестрахования			после перестрахования	
	страх-к	перестр-к	страх-к	перестр-к
страх. сумма	10^7	—	$2 \cdot 10^6$	$8 \cdot 10^6$
убыток	10^6	—	$0,2 \cdot 10^6$	$0,8 \cdot 10^6$

Итак, по условиям договора перестраховщик участвует *во всех* принятых страховщиком рисках в определенной доле и получает соответствующую долю его премии.

Это самый простой квотный договор, распространяющийся на весь портфель страховщика. Его удобно применять в тех отраслях, где не существует страховых сумм, например, при страховании гражданской ответственности. Используется также при страховании автомобилей, при страховании от бури и градобития, в морском страховании.

- **Преимущества**

— Простота управления, требующая меньших затрат.

— Защита от риска изменения и в случае небольших и средних рисков, а также при небольших и средних убытках.

— Сокращение расходов в случае неожиданного увеличения размера убытков в результате повышения их частоты или среднего размера.

— Во многих случаях возрастает размер комиссии и создаются более благоприятные условия.

Можно сказать, что *перестраховщик полностью разделяет судьбу страховщика.*

- **Недостатки**

— Основной недостаток квотного договора заключается в необходимости перестраховывать в значительной доле небольшие и, следовательно, не представляющие серьезной опасности риски, которые при других обстоятельствах передающая компания могла бы держать на собственной ответственности, сохраняя большие суммы премии.

— Недостаточная защита от отдельных крупных убытков, не создается более однородный портфель. Такой способ перестрахования непригоден, например, для страхования от огня крупных предприятий.

— Отсутствие защиты от кумуляции нескольких рисков в результате одного происшествия.

Данный тип перестрахования используют в обычном страховании от огня, когда страховые суммы однородны, а нужно защититься от риска изменений. Также используется теми страховыми компаниями, которые только начинают работу на этом рынке и не располагают должной информацией. Полезен для преодоления кратковременных затруднений.

Учитывая, что страховые суммы по некоторым принятым на страхование рискам могут быть значительными, участие перестраховщика обычно ограничивается определенным лимитом ответственности по одному риску, т.е. несмотря на обязательное участие перестраховщика в установленной доле в каждом риске, он не может нести ответственность выше этого лимита. Чаще всего используется квотное перестрахование, распространяющееся на собственное удержание страховщика по эксцедентному договору.

2.4.2 Эксцедент суммы (E1)

— Как правило, эксцедентный договор также обязателен для обеих сторон (страховщик обязан передать, а перестраховщик принять оговоренные риски).

— Однако перестраховщик теперь принимает участие не во всех принятых страховщиком рисках, а лишь в тех, которые превышают уровень (или размер) *собственного удержания*.

Итак, для эксцедентного договора определяющим фактором в механизме перестрахования является *собственное удержание* компании, представляющее собой экономически обоснованный уровень суммы, в пределах которой компания оставляет (удерживает) на своей ответственности определенную часть страхуемых рисков, передавая в перестрахование суммы, ее превышающие. Лимиты собственной ответственности, или собственного удержания, передающая компания, как правило, устанавливает в определенной сумме, относящейся ко всем страховым рискам по одному виду страхования.

Согласно условиям договора все принятые на страхование риски, страховая сумма которых превышает уровень собственного удержания передающей компании, подлежат передаче в перестрахование в пределах определенного лимита, или *эксцедента*, т.е. суммы собственного удержания передающей компании, умноженной на оговоренное число раз. Так, сумма эксцедента может состоять из n равных долей (*линий*), каждая из которых равна сумме собственного удержания, и, следовательно, общая сумма гарантии по данному договору, включая собственное удержание составит $(n + 1)$ долю. Если один из перестраховщиков принимает в перестрахование k долей, то его ответственность составит k/n суммы эксцедента.

Пример 2 Пусть страховая сумма равна 200 тыс., собственное удержание 50 тыс., $n = 10$, $k = 2$, эксцедент 150 тыс., ответственность перестраховщика 30 тыс.=(1/5)150 тыс.

Пропорционально сумме собственного удержания и долям участия перестраховщиков в договоре производится распределение премии и оплаченных убытков.

Пример 3 Собственное удержание равно 100 тыс.$. Емкость договора перестрахования равна 2,5 млн. = эксцеденту сумм в размере 25 линий (или максимумов).

Подчеркнем, что одна линия (line по-английски или plein по-французски) равна собственному удержанию.

Пусть сумма, на которую застрахован риск, равна 2 млн. Премия взимается в размере $1^0/_{00}$ от страховой суммы, т.е. составляет 2 тыс.

	собственное удержание	эксцедент перестраховщика
ответственность	100 тыс.	1,9 млн.
премии	100	1900
	убытки	
полная гибель	100 тыс.	1,9 млн.
частичная гибель 500 тыс.	25 тыс. (т.е. 25% стоимости)	475 тыс. (25%)

Итак, обозначим

R — собственное удержание (retention или conservation),

C — ответственность перестраховщика (capacity или capacité),

K_i — страховая сумма (sum insured) i-го риска (полиса),

t_i — ставка цессии i-го полиса (доля, передаваемая в перестрахование),

L (иногда S) — убыток (loss или sinistre).

Замечание 14 Вместо страховой суммы может использоваться *максимальный вероятный убыток* (probable maximum loss). Это характерно для страхования от огня крупных промышленных предприятий. В основе лежит предположение, что пожар вряд ли приведет к полной гибели объекта.

Все риски, у которых $K_i > R$, передаются в перестрахование, процент передачи t_i подсчитывается отдельно по каждому полису. Процент получения премии и выплаты убытка (у перестраховщика) такой же, как и принятая ответственность:

$$t_i = 100 \cdot \frac{\min(C, \max(K_i - R, 0))}{K_i} \% \qquad (70)$$

На самом деле не все обстоит так просто. Когда заключается договор эксцедента сумм, то там указывается *максимальное* собственное удержание и максимальное число линий. *Максимальная емкость договора* (или ответственность перестраховщика) равна произведению максимального собственного удержания на максимальное число линий ($C_m = R_m \cdot n_m$), а максимальная ответственность, гарантируемая с помощью данного договора, равна

$R_m + C_m$ сумме собственного удержания и емкости договора и называется *максимальной автоматической емкостью.*

Дальше страховщик может решить сам, какую сумму R он удерживает на своей ответственности по данному риску или группе рисков, т.е. выбрать $R \leq R_m$. Но как только R выбрано, это значит, что он может передать в перестрахование (или уступить) не больше, чем $R \cdot n_m$.

Пример 4 Предположим, что в договоре перестрахования E1 указано

R_m	maximum retention	250 тыс.
n_m	maximum number of lines	4
C_m	maximum treaty capacity	250тыс. $\times 4 =$ 1 млн.
$R_m + C_m$	maximum automatic capacity	1,25 млн.

Пусть страховая сумма K равна 500 тыс. $, премия P составляет 1000, а убыток L равен 50 тыс. Посмотрим, какие существуют варианты.

страховщик			перестраховщик			число
соб. уд.	прем.	убыт.	ответст.	прем.	убыт.	линий
250	500	25	250	500	25	1
200	400	20	300	600	30	1,5
150	300	15	350	700	35	2,33
100	200	10	400	800	40	4
50	100	5	450 (200)	400	20	9 (4)

(Собственное удержание страховщика, ответственность перестраховщика и размеры убытков указаны в тысячах $.)

Как видно из таблицы, страховщик не может оставить себе меньше $1/5$ риска, если он хочет все остальное передать перестраховщику. Если он выберет $R = 50$, то $C = 200$, а еще 250 он должен включить во второй эксцедент или перестраховать факультативно.

Теперь предположим, что максимальное собственное удержание $R_m = 50$ тыс., эксцедент равен 20 максимумам ($n_m = 20$). Пусть страховая сумма $K = 500$ тыс., A — очень хороший риск, собственное удержание $R = 50$ тыс., B — очень плохой риск, $R = 20$ тыс.

В случае A на долю перестраховщика придется 450 тыс. (так как его максимальная ответственность равна 1 млн.), риск полностью перестрахован. В случае B на долю перестраховщика приходится лишь 400 тыс. (20×20), при этом неперестрахованная сумма равна 80 тыс.

Подводя итоги, можно сказать, что эксцедент суммы имеет следующие

- **Преимущества**

— Прямой страховщик платит перестраховочную премию только по рискам, которые он не в состоянии оставить себе.

— За счет денежного предела, а не соотношения (как в квотном договоре) портфель, который входит в состав собственного удержания прямого страховщика, становится более однородным.

— Прямой страховщик имеет возможность варьировать собственное удержание по рискам или группам рисков, оставляя за собой большие доли хороших рисков, а в плохих участвует лишь незначительными долями.

- **Недостатки**

— Большие издержки и управленческие расходы. Установление размера собственного удержания, передача каждого отдельного риска и включение в договор — дело опытных сотрудников.

Для облегчения этой задачи существуют так называемые *таблицы максимумов*.

Максимальное собственное удержание

профессия	класс A	класс B	класс C
класс 1	250	225	200
класс 2	200	180	160
класс 3	150	135	120
класс 4	100	90	80

Максимальное число линий

профессия	класс A	класс B	класс C
класс 1	4	4	3
класс 2	3	3	2
класс 3	2	2	1
класс 4	1	1	1

(Конечно, таблица с максимальным собственным удержанием устанавливается страховщиком, а таблица с максимальным числом линий перестраховщиком.)

В результате будет следующая таблица максимального объема договора

профессия	класс A	класс B	класс C
класс 1	1000	900	600
класс 2	600	540	320
класс 3	300	270	120
класс 4	100	90	80

Эксцедентное перестрахование наиболее часто применяется при страховании жизни, страховании от несчастных случаев, от огня и кражи со взломом.

2.4.3 Факультативно-обязательный договор

В принципе факультативно-обязательный договор — это тоже пропорциональный договор (на базе эксцедента сумм). Он предназначен для тех случаев, когда страховые суммы превышают возможности обязательных договоров эксцедента суммы. Договор касается очень небольшого числа рисков и является чем-то средним между обязательным перестрахованием и факультативным. Особенность в том, что договор *обязателен только для перестраховщика.* Страховщик *может*, но не обязан передать в перестрахование определенный риск (за ним право свободного выбора), в то время как перестраховщик *обязан* его принять.

Этот тип договора часто возникает за счет плохих рисков (риск, не покрытый в рамках классических договоров или имеющий явно заниженный тариф), следствием чего являются частые плохие результаты договоров такого типа и их название "Мусорный ящик"(poubelle по-французски).

- **"Настоящий facob**

Ответственность, как и в случае эксцедентного договора, определяется не только одной суммой, но и *кратным собственного удержания* (например, 25 максимумов или 25 линий).

- **Открытый полис** (open cover)

Ответственность перестраховщика задана *исключительно в форме абсолютной суммы*, без ссылки на собственное удержание.

Чтобы продемонстрировать разницу, рассмотрим пример.

Пример 5 Пусть собственное удержание по самому благоприятному риску равно 100 тыс. Сумма, на которую страхуется рассматриваемый риск, равна 2,5 млн. В связи с большой вероятностью ущерба страховщик хочет оставить на собственном удержании только 30% того, что он удерживает в наиболее благоприятном случае, т.е. 30 тыс.

Пусть имеется договор facob с 25 максимумами, т.е. максимальный объем ответственности равен 2,5 млн. Для указанного риска ответственность перестраховщика будет составлять 750 тыс. (30×25). Если же имеется open cover с тем же объемом ответственности, выраженным в абсолютных единицах, а именно, 2,5 млн., то на долю перестраховщика по этому риску придется 2,47 млн.

Таким образом, соотношение между собственным удержанием и договорной ответственностью в первом случае будет 1 к 25, а во втором 1 к 82.

2.4.4 Программа перестрахования

Для перестрахования рисков, страховые суммы которых превышают потолок гарантий по договору E1 первого эксцедента (550 тыс. в примере 76), передающая компания может иметь договор второго эксцедента E2, скажем, с максимальной ответственностью

2000 тыс. сверх 550 тыс., покрываемых первым эксцедентом. В необходимых случаях могут быть договоры третьего и четвертого эксцедента, т.е. возникает так называемая *программа перестрахования*.

Ниже приведена типовая программа перестрахования от огня на чисто пропорциональной основе.

<table>
<tr><td>факультативное перестрахование</td><td></td></tr>
<tr><td>факультативно-обязательный договор</td><td></td></tr>
<tr><td>2 эксцедент суммы</td><td></td></tr>
<tr><td>1 эксцедент суммы</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">собственное удержание брутто</td><td>квота</td></tr>
<tr><td>собственное удержание нетто</td></tr>
</table>

Пусть страховщик предоставляет лимит гарантий, определяемый природой риска.

Пример 6 ([48]) Имеется три типа рисков, соответствующий потолок гарантий (в млн. франков) для каждого типа приведен ниже:

— риск частных лиц	(RP)	10,
— риск сельскохозяйственный	(RA)	20,
— риск индустриальный	(RI)	100.

Собственное удержание R выберем равным 2 млн. Для покрытия рисков первого типа (RP) достаточен договор первого эксцедента E1 с 4 линиями. Для RA и RI используется договор второго эксцедента E2 с 10 линиями. Кроме того, для RI необходим еще договор E3 с 15 линиями. Но и его будет недостаточно, поэтому придется использовать также факультативный договор емкости 40 млн. Наглядно это можно представить в виде таблицы.

	R	E1	E2	E3	Fac
RP	2	8	–		
RA	2	8	10	–	
RI	2	8	20	30	40

Предположим также, что квота на собственное удержание равна 30%.

Посмотрим, каков результат применения этой программы к полису типа RI со страховой суммой $K = 80$ млн., если ущерб $L = 40$ млн.

	R	E1	E2	E3	Fac
t	2/80 2,5%	8/80 10%	20/80 25%	30/80 37,5%	20/80 25%
L	1	4	10	15	10

Далее, перестраховщик по квотному договору платит 30% от 1 млн., а на долю страховщика остается (1-0,3)млн.=0,7 млн.

Возникает естественный вопрос, *почему необходимо использовать программу перестрахования.*

— Она дает возможность разместить риски у нескольких перестраховщиков.

— Разные перестраховщики имеют различные предпочтения (одни предпочитают индустриальные риски, другие — риски частных лиц и т.п.)

— Различные договоры обладают разной устойчивостью (см. следующий параграф). Обычно, $(P/E)_{E1} > (P/E)_{E2} > (P/E)_{E3}$. Эта разница компенсируется более выгодными финансовыми и экономическими условиями для менее уравновешенных договоров.

— Наличие маклеров облегчает размещение неблагоприятных договоров (например, договор третьего эксцедента очень неуравновешен). Маклер может предложить в дополнение к такому договору со страховщиком A "хороший"договор первого эксцедента со страховщиком B.

2.4.5 Уравновешенность договора

Равновесие портфеля страховщика оценивается отношением P/E собранных премий P к принятым на себя обязательствам E (engagement).

Продолжим рассмотрение **примера 6**. Пусть портфель страховщика состоит из 4 полисов типа RP. Как и раньше, K_i — страховая сумма i-го полиса. Через t_i^P обозначена ставка премии (в ${}^0/_{00}$).

i	K_i	t_i^P	P_i	t_i	P_i^r
1	5	1	5	$(5-2)/5 = 60\%$	3
2	10	0,8	8	(10-2)/10=80%	6,4
3	1,5	2	3	0%	0
4	4	2	8	$(4-2)/4 = 50\%$	4
			24		13,4

Размеры страховых сумм заданы в млн., соответственно, собранные премии $P_i = t_i^p K_i$ в тыс., доля риска t_i, переданная в перестрахование, определяется по формуле (70), а премия перестрахования равна $P_i^r = t_i P_i$.

Рассмотрим устойчивость портфеля страховщика до и после перестрахования, а также портфель перестраховщика (по договору E1).

1) *До перестрахования.* Премии, собранные страховщиком, равны $24 \cdot 10^3$, а его обязательство (потолок гарантий) $10 \cdot 10^6$, т.е. $P/E = 2,4 \cdot 10^{-3}$. Обратная величина $E/P = 417$ показывает, что компания должна собирать премии в течение 417 лет, чтобы оплатить одно происшествие, равное максимальной страховой сумме, не прибегая к перестрахованию.

2) *После перестрахования.* Премии, остающиеся у страховщика после передачи части риска в перестрахование, равны $(24 - 13,4) \cdot 10^3 = 10,6 \cdot 10^3$. Его обязательство теперь равно собственному удержанию $2 \cdot 10^6$. Таким образом, $P/E = 5,3 \cdot 10^{-3}$, а $E/P = 189$ (лет), т.е. портфель стал более уравновешенным после перестрахования.

3) *Перестраховщик.* Премии, переданные в перестрахование, равны $13,4 \cdot 10^3$, обязательство перестраховщика (емкость первого эксцедента) $8 \cdot 10^6$. Следовательно, $P/E = 1,68 \cdot 10^{-3}$ и $E/P = 597$ лет.

Заметим, что если портфель страховщика имеет 40000 полисов (по 10000 полисов каждого из 4 типов), то ситуация изменится следующим образом: знаменатель отношения P/E останется тем же самым, а числитель увеличится в 10000 раз.

В результате мы получаем

1) До перестрахования $P/E = 24$ и $E/P = 0,04$ года. Одно происшествие, наносящее максимальный ущерб, равно 4% собранных премий (т.е. совпадает с потенциальной прибылью страховщика).

2) После перестрахования $P/E = 53$ и $E/P = 0,019$ года. Перестрахование не вполне адекватно, поскольку составляет примерно половину прибыли.

3) У перестраховщика $P/E = 16,8$ и $E/P = 0,6$ года.

2.4.6 Экономические и финансовые условия

Основные издержки, связанные с пропорциональными договорами перестрахования:

— комиссия перестрахования,

— участие в прибылях,

— комиссия маклеру.

Финансовые условия касаются главным образом депозитов, которые перестраховщик создает у страховщика, и периодичности счетов.

- **Комиссия перестрахования**

Страховая премия складывается из нескольких элементов. Типичное распределение премии выглядит следуюшим образом:

Премия	100
Возмещения убытков	-65
Издержки приобретения	-15
Общие издержки	-15
Прибыль	5

Перестраховщику не приходится непосредственно оплачивать расходы по приобретению каждого отдельного полиса и тратиться на другие расходы, связанные с полисами.

Однако он платит *комиссионные* перестрахования (некоторый процент от уступленных ему премий). Эта комиссия может рассматриваться как участие перестраховщика в расходах страховщика по приобретению полисов, уступаемых в перестрахование, и управлению ими.

Комиссионные бывают двух типов: *фиксированные* (оговоренные заранее) или *переменные* (в зависимости от результатов деятельности перестраховщика), в дополнение к фиксированным комисионным возможно также *участие в прибыли.*

• **Фиксированные комиссионные**

Рассмотрим, какую комиссию перестраховщик готов уплатить в зависимости от его предположения о будущей убыточности, т.е. отношении убытков к премии (L/P).

Пусть речь идет о квотном договоре, по которому перестраховщику передается 40% риска.

1 *случай.* Предполагаемое отношение $L/P = 65\%$.

	до перест.	пере-к	после перест.
прем.	100	40	60
убыт.	-65	-26	-39
изд.	-30	-	-30
комис. перест.	-	-12	12
результ.	5(+5%)	2(5%)	3(5%)

В этом случае комиссия перестрахования (30%) выбрана так, что перестраховщик покрывает долю издержек страховщика, равную полученной доле премий (и выплаченных убытков). Таким образом, результат (выраженный в процентах) у страховщика и перестраховщика один и тот же. В этом случае говорят о полном разделении участи.

2 *случай.* Предполагаемая величина $L/P = 90\%$.

	до перест.	пере-к	после перест.
прем.	100	40	60
убыт.	-90	-36	-54
изд.	-30	-	-30
комис. перест.	-	-8	8
результ.	-20(-20%)	-4(-10%)	-16(-26,7%)

Комиссия перестрахования выбрана равной 20% переданных в перестрахование премий (т.е. доля участия в расходах страховщика меньше). Перестраховщик готов понести в данном году потери, поскольку он верит в страховщика. Он хочет не потерять клиента, поскольку продолжение совместной деятельности важнее, чем возможные убытки в неблагоприятный год.

3 *случай.* Предполагаемая убыточность $L/P = 35\%$.

	до перест.	пере-к	после перест.
прем.	100	40	60
убыт.	-35	-14	-21
изд.	-30	-	-30
комис. перест.	-	-20	20
результ.	35(+35%)	6(15%)	29(48,3%)

В этом случае комиссия равна 50% уступленных премий. Перестраховщик имеет меньший доход, чем страховщик, хотя его результат лучше, чем в случае 1. Почему он согласен с такими условиями? Дело в том, что причины хороших результатов у страховщика обычно состоят в том, что не было происшествия с очень большим ущербом (просто повезло). Кроме того, он лучше отобрал риски, чем конкуренты, используя те же самые тарифы. Но в будущем L/P будет расти, селекция уже не играет такой роли.

Мы видели, что ставка комиссии зависит от *результатов договора*. Кроме того, она может меняться в зависимости от *страны страховщика*, а также от *вида* страховой деятельности и *типа договора* перестрахования. Так, например, при страховании от огня частных лиц обычно комиссия 30%, индустриальных рисков 25%, в автомобильном страховании также 25%, транспортное страхование 20%. Для факультативных договоров комиссия составляет 20%, в случае эксцедентов сумм соответственно (Е3 — 22,5%, Е2 — 25%, Е1 — 27,5%) и квота на собственное удержание — 35%.

- **Переменные комиссионные**

Переменные комиссионные можно рассматривать как некое участие в прибылях перестраховщика, поскольку ставка комиссии возрастает по мере убывания отношения L/P.

Более точно, ставка комиссии C имеет вид "ступеньки которая задается с помощью 4 чисел C_{min}, C_{max}, $(L/P)_{min}$, $(L/P)_{max}$ следующим образом: $C = C_{max}$, когда $L/P \leq (L/P)_{min}$, если же $L/P \geq (L/P)_{max}$, то $C = C_{min}$, а при промежуточных значениях L/P функция C линейно убывает. Указанные выше параметры обычно выбираются таким образом, чтобы наклон прямой был от -0,3 до -0,65 и, что более важно, чтобы перестраховщик при любых результатах своей деятельности (между $(L/P)_{min}$ и $(L/P)_{max}$) получал прибыль. Например, если указано, что комиссионные меняются от 30% до 40%, когда L/P убывает от 65% до 45%, то это означает, что перестраховщик может получить от 5% до 15% прибыли (см. Рис. 2).

C

0 L/P

Рис. 2

Такой выбор комиссионных широко распространен, так как при этом легче придти к соглашению при заключении договора. Однако этот способ хорош лишь для тех договоров, результаты которых мало меняются.

- **Участие в прибыли** (тантьема)

Если результаты перестраховщика оказываются благоприятными, он может "возвратить"часть своей прибыли страховщику.

Введем следующие обозначения:

P — премии, уступленные в перестрахование,

C — комиссионные перестрахования, при этом t_C — это ставка комиссионных, т.е. доля премий, полученных перестраховщиком, "возвращаемая"непосредственному страховщику,

L — убытки, оплаченные перестраховщиком,

t_{FG} — общие издержки перестраховщика (в процентах от премий, обычно 3-10%),

t_{PB} — процент участия в прибыли (обычно 10-20%),

PB — размер участия в прибыли.

(Отметим, что на самом деле общие издержки постоянны, но ежегодно подсчитывается, какой процент от премий они составляют.)

Тогда $PB = \max[0, (P - C - L - P \cdot t_{FG}) \cdot t_{PB}]$.

Технический результат перестраховщика $R = P - C - L - PB$ — это та сумма, которую в конце года страховщик заплатит перестраховщику. Чтобы вычислить реальную прибыль перестраховщика, надо из R вычесть издержки перестраховщика.

Пример 7 Пусть премии, переданные в перестрахование, составляют $P = 200$ млн., $t_{FG} = 7,5\%$, $t_{PB} = 40\%$ и $t_C = 35\%$.

Рассмотрим три различные ситуации:

1) Пусть $L/P = 55\%$, тогда

$$PB = (200 - 70 - 110 - 15) \cdot 0,4 = 2,$$

здесь $P = 200$, $C = 70$, $L = 110$, $t_{FG}P = 15$, следовательно, участие в прибыли составляет 2 млн., а

$$R = 200 - 70 - 110 - 2 = 18.$$

2) Пусть $L/P = 75\%$, тогда

$$PB = \max(0, (200 - 70 - 150 - 15) \cdot 0,4) = 0.$$

Участия в прибыли не будет, а технический результат отрицательный

$$R = 200 - 70 - 150 = -20.$$

3) Пусть, наконец, $L/P = 60\%$, в этом случае

$$PB = \max(0, (200 - 70 - 120 - 15) \cdot 0,4) = 0,$$

технический результат

$$R = 200 - 70 - 120 = 10$$

положителен (т.е. страховщик платит перестраховщику), но его не хватает для покрытия расходов перестраховщика, который тем самым несет убытки.

Выше были рассмотрены примеры, показывающие, как подсчитывается участие страховщика в прибыли перестраховщика по результатам одного года. Возможен также учет результатов за несколько предыдущих лет (при этом, несмотря на положительный результат данного года, страховщику не будет ничего выплачиваться, пока не будут компенсированы прошлые потери). На практике обычно прошлые потери учитываются в течение 3 лет.

Замечание 15 Более точно, размер тантьемы подсчитывается как определенный процент от разности между доходами и расходами перестраховшика. При этом в доход включают не только премию, полученную в текущем году, но также резерв убытков и незаработанную премию на конец предыдущего года. Расходы же, кроме убытков, оплаченных в текущем году, перестраховочной комиссии и общих издержек перестраховщика включают еще незаработанную премию и резерв убытков на конец текущего года, а также убытки предыдущих лет вплоть до их окончательного урегулирования.

- **Участие в потерях**

Около 15 лет назад было введено также участие страховщика в потерях перестраховщика. В определении размера этого участия играет важную роль "комбинированное"отношение (combined ratio)

$$CR = \frac{L + C}{P},$$

т.е. отношение выплат перестраховщика (возмещение убытков и комиссионные) к переданным в перестрахование премиям. Этот коэффициент обычно подсчитывается в процентах. Начало потерь — это $CR = 100\%$.

Чем больше CR, тем больше участие страховщика в потерях перестраховщика. Один их типичных примеров соответствующего соглашения:

CR	стр-к платит из убытков перестр-ка
105%-120%	20%
120%-140%	50%
>140%	100%

Рассмотрим следующий пример.

Пример 8 Пусть $P = 300$.

1) Если $CR = 115\%$, то страховщик платит перестраховщику

$$PP = 300 \cdot [(115\% - 105\%) \cdot 0,2] = 6.$$

После этого $CR = 115\% - (6/300)100\% = 113\%$.

2) В том случае, когда $CR = 135\%$, выплаты страховщика будут

$$PP = 300 \cdot [(120\% - 105\%) \cdot 0,2 + (135\% - 120\%) \cdot 0,5] = 31,5.$$

При этом $CR = 135\% - (31,5/300)100\% = 124,5\%$ (результаты перестраховщика улучшились на 10,5%).

3) Пусть $CR = 150\%$, тогда

$$PP = 300 \cdot [(120\% - 105\%) \cdot 0,2 + (140\% - 120\%) \cdot 0,5 + (150\% - 140\%) \cdot 1].$$

В результате $PP = 69$ и $CR = 150\% - (69/300)100\% = 127\%$.

4) Наконец, если $CR = 323\%$, то после участия страховщика в потерях $CR = 127\%$, так как свыше 140% все потери выплачиваются страховщиком.

Если имеются договоры перестрахования с несколькими перестраховщиками, то оговорка (clause) об участии в потерях на одних и тех же условиях.

- **Маклерская комиссия**

Маклер является посредником между страховщиком и перестраховщиком, а также *мандатарием* (уполномоченным) страховщика. Его вознаграждение выражается в процентах от передаваемых перестраховщику премий (0,5-2,5%).

- **Финансовые условия**

В ряде стран страховщик должен представить совокупность всех своих (технических) обязательств в виде соответствующих инвестиций, как если бы он не был перестрахован. Поэтому перестраховщик должен внести депозит, гарантирующий его обязательства перед страховщиком.

Депозиты бывают двух видов

— депозит премий, соответствующий резервам на текущие риски (или резерв незаработанных премий),

— депозит убытков, соответствующий резервам на подлежащие выплате убытки.

Имеются три формы депозита

— в виде наличных,

— в виде ценных бумаг,

— в виде документов о кредите.

2.5 Непропорциональное перестрахование

Размер выплат перестраховщика определяется не заранее, а уже после наступления происшествия (страхового случая). Наиболее часто встречаются договор эксцедента убытка и договор эксцедента убыточности (или стоп-лосс).

2.5.1 Эксцедент убытка

По-английски такой договор называется excess of loss. Эта наиболее распространенная форма непропорционального перестрахования служит для защиты портфелей страховых компаний по отдельным видам страхования от *наиболее крупных и непредвиденных убытков* по некоторому риску или *от очень большого числа мелких убытков по разным рискам*, которые возникают одновременно в результате некоторого стихийного бедствия. В соответствии с этим различают договор эксцедента убытка по риску (XL per risk) и договор эксцедента убытка по катастрофе (XL per cat), в последнем случае иногда говорят об эксцеденте риска по событию (XL per event). Механизм перестрахования в обоих случаях одинаков.

Премии, причитающиеся перестраховщикам-участникам договора, обычно устанавливаются в определенных процентах к годовой премии-брутто по защищаемому портфелю страхований. Однако поскольку к началу действия договора может быть известна только оценочная или ожидаемая сумма премий, то обычно первоначально уплачивается определенная сумма аванса премии, так называемая *депозитная премия* или депозит премии, с последующим перерасчетом окончательной суммы премии на базе фактически полученной суммы брутто-премии за соответствующий год.

По условиям договора инструмент перестрахования вступает в силу только тогда, когда окончательная сумма убытка по застрахованному риску в результате страхового случая или серии страховых случаев, являющихся следствием одного и того же происшествия, превысит определенную сумму a (*приоритет* или уровень собственного удержания передающей компании, по-английски priority или retention). Ответственность перестраховщика сверх этой суммы ограничена определенным *лимитом* b, называемым *емкостью эксцедента* (extent of cover), шириной полосы, лейера (layer) или транша (tranche). Величина $a+b$ называется *потолком гарантий* (limit). Обозначается такой договор XL: b xs a.

Пример 9 Пусть, например, b=1 млн., a=100 тыс. (XL: 1 xs 0,1). Если размер ущерба (у страховщика) $L = 150$ тыс., то перестраховщик платит 50 тыс. А в том случае, когда $L = 1,5$ млн., перестраховщик выплачивает 1 млн.

За первым эксцедентом может следовать второй, а затем и третий, в зависимости от потребностей передающей компании. В этом случае потолок гарантий одного договора является приоритетом следующего.

- **Функционирование договора**

Предположим, что N — это число требований, поступивших в страховую компанию в течение года, а $X_1, X_2, \ldots$ — это размеры поступивших требований, т.е. последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин с функцией распределения $F_X(x)$. Договор эксцедента убытка XL: b xs a предоставляет следующее перестраховое покрытие для i-го требования

$$Y_i = \min(\max(0, X_i - a), b). \tag{71}$$

Следовательно, суммарные выплаты перестраховщика равны

$$Y = \sum_{i=1}^{N} Y_i \tag{72}$$

в предположении, что перестраховщик платит *каждый раз*, когда размер требования попадает в рассматриваемую полосу $[a, a+b]$. Однако на практике перестраховщик желает, чтобы его ответственность не превосходила некоторую заданную величину M в течение рассматриваемого периода действия договора.

Рассмотрим численный пример из [48].

Пример 10 Пусть имеется договор XL: 5 xs 3 (приоритет и ширина лейера заданы в млн. $).

i	X_i (FGU)	Y_i	$\sum_{k=1}^{i} Y_k$	XL, M=15	XL'
1	4	1	1	1	-
2	6	3	4	3	-
3	7	4	8	4	-
4	4	1	9	1	-
5	11	5	14	5	-
6	7	4	18	1	3
7	6	3	21	-	3
8	5	2	23	-	2

В первом столбике помещен номер выплаты i. Во втором FGU (from ground up) означает, что в этом столбике помещены точные (без франшизы) размеры отдельных требований X_i к непосредственному страховщику. Третий столбик дает размеры отдельных выплат перестраховщика по договору XL при отсутствии ограничений на количество выплат, в то время как в четвертом содержится накопленный размер выплат. В пятом столбике приведены выплаты по данному договору при наличии годового лимита гарантий перестраховщика M, который в данном случае равен 15 млн. Наконец, в последнем столбике содержатся выплаты по новому договору, относящемуся к той же самой полосе, с накопленной годовой франшизой D=15 и годовой гарантией M'=10 (XL': 5 xs 3 + a.d. 15).

- **Возобновления**

В связи с годовым лимитом гарантий возникает понятие (или) полосы ширины b (reinstatement по-английски). На практике это значит, что лимит гарантии перестраховщика равен $M = (m+1)b$, где m — это . Идея состоит в том, что после каждой выплаты полоса должна быть восстановлена в полном объеме b. Отметим, что возобновление может производиться как бесплатно, так и при выплате *дополнительной премии* (additional premium), которая равна некоторой (обычно кратной 25%) доле первоначальной премии. Иными словами, добавочная премия за n-е возобновление составляет $c_n \cdot 100\%$, т.е. она может быть $0\%, 25\%, 50\%,\ 75\%, 100\%, 150\%, 200\%$ и т.п. от исходной премии. Добавочная премия, вносимая после очередной выплаты перестраховщика, пропорциональна размеру этой выплаты.

Картина может усложняться из-за наличия (годовой) D, относящейся к суммарным выплатам (aggregate deductible). Ее введение означает, что перестраховщик платит не Y, а $\max(0, Y - D)$. Окончательно, при наличии франшизы D и m возобновлений суммарные выплаты перестраховщика составляют $Z = \min(\max(0, Y-D), (m+1)b)$, где Y задается с помощью (71)-(72).

Для наглядности рассмотрим численный пример из [49].

Пример 11 В таблице приведены размеры 6 требований и соответствующие их части, приходящиеся на долю договора 150 xs 100.

номер иска	1	2	3	4	5	6
размер требования	175	150	125	300	220	130
доля перестраховщика	75	50	25	150	120	30

Предположим, что франшиза нулевая и имеется только одно возобновление с добавочной премией 100%. Это значит, что после первого требования страховщик должен внести $75P/150 = P/2$, где P — это первоначальная премия, после второго он выплачивает перестраховщику дополнительно еще $50P/150 = P/3$ и, наконец, после третьего $25P/150 = P/6$. Общая сумма дополнительных выплат составляет P. При поступлении четвертого требования перестраховщик выплачивает причитающуюся на его долю сумму 150, равную ширине полосы, и на этом договор заканчивается. Таким образом, перестраховщик заплатил по 4 требованиям сумму 300 и получил полную премию $2P$.

Еще один пример взят из [48].

Пример 12 Рассматривается договор XL: 6 xs 2 с двумя восстановлениями, соответственно 100% и 200% добавочной премии, первоначальная премия $P = 2,4$. Наличие двух восстановлений означает, что $M = 6(2+1) = 18$.

i	X_i (FGU)	Y_i	$\sum_{k=1}^{i} Y_k$	XL, M=18	AP
1	5	3	3	3	1,2
2	6	4	7	4	2
3	6	4	11	4	3,2
4	3	1	12	1	0,8
5	5	3	15	3	-
6	8	6	21	3	-

Добавочная премия после первой выплаты равна $2,4 \cdot (3/6) = 1,2$, после второй $2,4 \cdot (3/6) + 2,4 \cdot (1/6) \cdot 2 = 2$, так как восстанавливается часть первой и часть второй полосы, после третьей выплаты $2,4 \cdot (4/6) \cdot 2 = 3,2$, после четвертой $2,4 \cdot (1/6) \cdot 2 = 0,8$. Затем, так как все восстановления уже закончены, дополнительная премия не платится (перестраховщик полностью оплачивает приходящуюся ему долю по пятому убытку, а по шестому лишь частично, в пределах годового лимита гарантий). Таким образом, полный размер премии равен $2,4 + 1,2 + 2 + 3,2 + 0,8 = 9,6$.

Подведем итог изложенного. Предположим для простоты и далее, что франшиза отсутствует. В случае платных возобновлений первоначальная премия P покрывает нулевое возобновление, которое составляет

$$r_0 = \min(Y, b).$$

Полная премия за первое возобновление равна $P_1 = c_1 P r_0 / b$. В общем случае n-е возобновление предоставляет покрытие расходов

$$r_n = \min(\max(0, Y - nb), b).$$

Таким образом, при m возобновлениях суммарные потери перестраховщика равны

$$R_m = \sum_{n=0}^{m} r_n = \min(Y, (m+1)b),$$

а суммарный размер полученных им премий составляет

$$T_m = P\left(1 + \frac{1}{b}\sum_{n=1}^{m} c_n r_{n-1}\right).$$

Заметим, что случайные величины r_n зависимы, а именно, если существует такое $0 \le j \le m$, что $r_j = 0$, тогда $r_i = 0$ при любом $i > j$. Если же при некотором $j > 0$ оказывается $r_j > 0$, тогда $r_i = b$ при всех $i < j$. Иначе говоря, размер очередной величины r_j положителен лишь при том условии, что все предыдущие равнялись максимальному возможному значению, т.е. ширине полосы.

- **Эксцедент убытка по катастрофе**

В отличие от эксцедента убытка по риску (или отдельному полису) здесь рассматривается суммарный ущерб от серии страховых случаев (по разным рискам или полисам), вызванных одним и тем же событием (происшествием). В качестве такого события могут выступать ураган, тайфун, землетрясение, извержение вулкана, наводнение, цунами, лесные пожары и т.п.

Для того, чтобы не были включены убытки, вызванные двумя разными причинами, в договоре имеются специальные оговорки. Первая из них (geographical limitation clause) указывает, что включаются все полисы, по которым возникли убытки по одной и той же причине в определенной *географической зоне*. Вторая, временная оговорка (time limitation clause), устанавливает, что учитывается ущерб, вызванный одной и той же причиной, нанесенный в течение определенного промежутка времени, обычно это бывает 72 часа с момента начала вышеуказанных природных явлений. В случае наводнения иногда устанавливают срок 168 часов. Если срок действия бедствия, вызванного одной и той же причиной, больше указанного в договоре, то считается, что имеется два различных происшествия, следующие одно за другим.

Еще одна особенность договора (XL per cat) состоит в том, что предусматривается не более одного восстановления, чаще всего оно платное, 100% дополнительной премии.

Ниже приводятся некоторые размеры ущерба, возникающие в различных областях страхования (взятые из [48], даны в ценах 1994г.).

Гражданская ответственность в автомобильном страховании:

— происшествие, в котором пострадало несколько человек, 100 млн. франков

Транспорт:

— доставка контейнеров 100 млн. $,

— пакетботы 400-500 млн. $.

Авиация:

— самолет боинг 300 млн. $,

— пассажиры (за одного человека):

- американцы 2-3 млн. $,

- японцы и западноевропейцы 0,5-1 млн. $,

- остальные 50-100 тыс. $.

Таким образом, выплаты страховой компании при гибели боинга с 500 американцами могут превзойти 1,5 млрд. $.

Данные о 30 наиболее "дорогих"стихийных бедствиях в 1970-95гг. приведены в [22]. В ценах 1992г. они меняются от 851 млн. до 16 млрд. $, 7 из них принесли ущерб, меньший 1 млрд., для 11 ущерб лежит в пределах от 1 млрд. до 1,5 млрд., для 3 между 1,5 млрд. и 2 млрд. Остальные 9, которые привели к убыткам больше 2 млрд., перечислены ниже (в убывающем порядке):

24/08/92	Ураган Эндрю	США	16
17/01/94	Землетрясение	США	11,838
27/09/91	Торнадо Мирей	Япония	5,724
25/01/90	Буря Дарья	Европа	4,931
17/10/89	Землетрясение	США	4,528
26/02/90	Взрыв	Англия	2,373
17/01/95	Землетрясение	Япония	2,282

Потенциальный убыток от стихийных бедствий может быть очень велик (в ценах 1994г.)

— циклон в Майами 50-60 млрд. $,

— землетрясение в Сан-Франциско 100 млрд. $.

Общегражданская ответственность

— асбест (в США) 40-60 млрд. $,

— загрязнение окружающей среды 50-200 млрд. $.

2.5.2 Эксцедент убыточности

Договор эксцедента убыточности действует точно также, как эксцедент убытка, но речь здесь идет не об отдельном требовании или сумме убытков, обусловленных одним происшествием (катастрофой), а о суммарном убытке по всему портфелю страховой компании за год.

Наиболее распространенная форма такого договора носит название стоп-лосс (stop-loss), его обозначение SL. Он отличается двумя особенностями:

— приоритет и емкость договора обычно выражаются в процентах от собранных страховщиком премий (в некоторых случаях лимит ответственности перестраховщика может быть задан и в абсолютной сумме),

— нет возобновлений.

Данный тип непропорционального договора перестрахования имеет своей целью защитить страховщика от колебаний отношения L/P, т.е. удельного ущерба (на единицу премии) или *убыточности* за год.

При установлении приоритета необходимо убедиться, что цедент не получает гарантированной прибыли в случае неблагоприятного развития убыточности. Важно, чтобы цедент отвечал за свою долю в убытках, как и при других видах перестрахования. Соответственно, важно правильно оценить административные и управленческие расходы страховщика.

Рассмотрим пример из [3].

Пример 13 Средняя убыточность перестрахованного портфеля за последние 10 лет равна 50%, административные и управленческие расходы цедента 30%, приоритет договора стоп-лосс 75%, максимальная ответственность перестраховщика 45%, премия перестрахования 5%.

Посмотрим, какие результаты даст наличие этого договора SL: 45% xs 75%, если убыточность составляет 100%. Перестраховщик выплатит 25% годовой премии (100%-75%=25%). В то же время на выплату возмещений у страховщика имеется 100%(премии)-30%(издержки)-5%(премия перестрахования)=65%. А надо выплатить 75%(после участия перестраховщика), т.е. реальная убыточность после перестрахования равна 10%. Тот же самый результат будет при любой убыточности страховщика, заключенной между 75% и 120%.

Еще один пример относится к двум договорам типа стоп-лосс.

Пример 14 Пусть по защищаемому портфелю страховщиком собраны премии $P = 400{\cdot}10^6$. У него имеются договоры стоп-лосс

$$\mathrm{SL1}\,30\%\,xs\,110\%,\qquad \mathrm{SL2}\,60\%\,xs\,140\%.$$

1-*й случай*: убытки $L = 480{\cdot}10^6$, тогда $L/P = 480/400 = 120\%$. По договору SL1 перестраховщик платит $(120\% - 110\% = 10\%)$ собранных премий, т.е. 40 млн.

2-*й случай*: убытки $L = 640 \cdot 10^6$, тогда

$$L/P = 640/400 = 160\%.$$

По договору SL1 перестраховщик платит 30% премий, т.е. 120 млн., а выплаты по договору SL2 составляют $(160\% - 140\% = 20\%)$ премий, что равно 80 млн.

Договор используется реже, чем эксцедент убытка по двум причинам:

— Моральный риск: как только суммарный убыток достигает приоритета договора, страховщик более не озабочен отягощением убыточности, он даже может более "либерально"относиться к урегулированию претензий, так как за это платит перестраховщик. Этого нет в случае договора эксцедента убытка, поскольку там страховщик отвечает за приоритет по каждому требованию, более того, в большинстве случаев он должен платить добавочные премии за возобновление.

— Трудности, связанные с установлением премии перестрахования (или цены такого договора), поскольку перестраховщик покрывает всевозможные изменения, как в частоте происшествий, так и в стоимости отдельного требования.

Обычно перестраховщик избегает заключать договоры такого типа, очень выгодные для страховщика. Договор стоп-лосс может использоваться лишь в следующих трех случаях:

— страхование урожая от града,

— страхование здоровья,

— небольшие страховые компании (в дополнение к программе перестрахования, составленной из пропорциональных и непропорциональных договоров).

Почему в первых двух случаях естественно применять договор эксцедента убыточности, а не эксцедента убытка (по катастрофе)? Объяснение очень просто. Здесь невозможно определить, какое происшествие вызвало убытки и временные границы воздействия данного происшествия. В самом деле, если урожай погиб от града, то невозможно определить повлиял ли град, побивший посевы в первый раз, во второй или в третий, если град был несколько раз в году. Аналогичным образом в медицинском страховании трудно определить, возникли ли убытки от эпидемии, предположим гриппа, или по какой-то другой причине, когда началась эпидемия и когда она закончилась.

2.5.3 Программа непропорционального перестрахования

Программа непропорционального перестрахования может состоять из нескольких договоров эксцедента убытка, соответствующих двум (или трем) соседним полосам $[a_1, a_1 + b_1]$, $[a_2, a_2 + b_2]$ (соотв. $[a_3, a_3 + b_3]$), где $a_{i+1} = a_i + b_i$, $i = 1, 2$. Иначе говоря, договор XLi имеет вид b_i xs a_i, $i = 1, 2, 3$. Если число возобновлений по этим договорам конечно и равно m_i по i-му договору, они могут дополняться договорами с франшизой $D_i = m_i \cdot b_i$ по тем же полосам. В исключительных случаях может быть еще дополнительный договор стоп-лосс, защищающий весь портфель страховщика целиком.

Ниже даны два типичных примера программы непропорционального перестрахования.

Пример 15 Максимальная страховая сумма равна 100 млн.

XL 1	15 xs 10	3 беспл. восст.
XL 2	25 xs 25	2 восст.: 50% A.P., 100% A.P.
XL 3	50 xs 50	1 восст.: 25% A.P.

Пример 16 Без страховой суммы (гражданская ответственность водителей автотранстпорта)

XL 1	3 xs 2	неогр. число беспл. восст.
XL 2	10 xs 5	неогр. число беспл. восст.
XL 3	∞ xs 15	неогр. число беспл. восст.

2.5.4 Уравновешенность договора

Равновесие договора эксцедента убытка оценивается, как и в случае пропорционального перестрахования, с помощью двух отношений.

Первое из них — это (выраженное в процентах) отношение премии перестрахования к емкости договора, по-английски оно называется *rate on line*:

$$r.o.l. = 100P/b.$$

Второе задает время амортизации и показывает, сколько лет надо собирать премии перестрахования, чтобы оплатить убыток, равный ширине полосы, он называется *pay back*.

$$p.b. = b/P = 100/r.o.l.$$

Пример 17 Предположим, что рассматривается договор XL: 3 xs 2, а размер полученных премий $P = 0,75$, тогда период амортизации p.b.=3/0,75=4 года, а r.o.l.=25.

В зависимости от величины указанных отношений лейеры эксцедента делятся на 3 группы:

	r.o.l.	p.b.
working	> 15	$< 6,5$ лет
middle	4-15	6,5-25 лет
catast.	< 4	> 25 лет

2.5.5 Финансовые и экономические условия

Основные пункты непропорциональных договоров (кроме убытков) следующие:
— премия перестрахования,
— участие в прибыли,
— бонус за отсутствие требований,
— комиссионные

- **Премия перестрахования**

В непропорциональном перестраховании премия для договоров эксцедента убытка или эксцедента убыточности расчитывается как некоторая фиксированная сумма для всего перестрахованного портфеля, независимо от каждого отдельного риска. Административные издержки прямого страховщика во внимание не принимаются и *комиссионные не платятся.*

Расчет премии перестрахования (или *котировка*) проводится с учетом следующих факторов:

1. Исходным пунктом является чистая или рисковая премия, необходимая для возмещения оплаты предполагаемых убытков при перестраховании.

2. Гарантийная надбавка к базовой премии необходима, поскольку убыточность из года в год подвержена серьезным колебаниям и возможны ошибки при расчете премии. Размер этой надбавки зависит от вида страхования, приоритета цедента, лимита ответственности перестраховщика, а

также от размера и сбалансированности перестрахованного портфеля.

3. Объем премии должен быть достаточным для покрытия дополнительных расходов перестраховщика (таких как брокерская комиссия, налоги и т.п.)

4. Если перестраховщик прибегает к ретроцессии, то соответствующие расходы также надо принять во внимание при расчете цены перестрахования эксцедента убытка.

5. Надо также учесть надбавку на покрытие административных расходов перестраховщика и на прибыль, которую должен получить перестраховщик на инвестированный капитал.

Главная проблема при расчете премии состоит в предварительном определении, как часто будут происходить крупные убытки при более или менее однородном портфеле с точки зрения рисков или страховых сумм и каков будет размер этих убытков.

Существуют три типа премии:

1. *фиксированная* премия (flat premium), как правило, назначается, если премия перестрахования невелика (не более 50 тыс. $).

2. *фиксированная ставка* премии: $0,1\% - 10\%$ от премий, собранных прямым страховщиком.

3. *переменная* или скользящая *ставка* (sliding scale).

При вычислении перестраховочной премии (без надбавок) можно использовать следующие методы:

- *burning cost* (оценка риска на основе экстраполяции убыточности за прошлые годы)

- *exposure* (калькуляция на основе структуры перестраховочного портфеля)

- *scenario method* (вычисления на основе частоты повторения событий, приводящих к большим убыткам)

Какой метод применяется, зависит от вида страхования, приоритета и лимита договора, а также представленных статистических данных.

При использовании метода экстраполяции премия определяется на базе убыточности прошлых лет, т.е. убыточности, которая могла наступить в предшествующие годы, если бы приоритет и лимит ответственности по договору соответствовали новым условиям. А потом полученный результат соотносится с размером премий, собранных страховщиком. Для иллюстрации рассмотрим численный пример из [3].

Пример 18 Пусть размер приоритета равен 80 тыс. Ниже приводятся данные о премиях и убытках за пять лет. Объем премий цедента (в миллионах) содержится в столбце (2). Столбец (3) указывает номера страховых случаев в соответствующем году. Далее, (4) — это выплаты по страховому случаю, (5) — резервы, (6) — общая сумма выплат, (7) — убытки, приходящиеся на долю перестраховщика (приведены в тысячах).

год	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	экстрапол.
1988	10	1	120	-	120	40	
		2	10	90	100	20	
						60	0,60%
1989	12	1	80	40	120	40	0,33%
1990	13	1	2	88	90	10	
		2	30	80	110	30	
		3	95	-	95	15	
		4	130	-	130	50	
						105	0,81%
1991	15	1	85	15	100	20	
		2	20	100	120	40	
		3	50	35	85	5	
						65	0,43%
1992	17	1	-	200	200	120	
		2	10	140	150	70	
						190	1,12%
	67					460	

Итак, средняя экстраполяция за 1988-92гг. (система burning cost)	$\frac{460}{67000}$	0,69%
Среднее арифметическое	3,29/5	0,66%

Надо обращать внимание на следующие факты:

1. В результате постоянной инфляции имеющаяся статистика не полностью отражает реальные результаты по договору перестрахования эксцедента убытка, так как убытки в прошлом стоят меньше, чем в будущем. В страховании общей гражданской ответственности и ответственности владельцев автотранспорта (особенно в случае телесных повреждений) особую роль играют увеличение зарплаты, изменения законодательства, развитие медицины. В имущественном страховании надо учитывать не только общий рост цен, но и изменение техники строительства.

Необходимо экстраполировать понесенные в прошлом убытки, применяя к ним сегодняшние цены. Надо учитывать и корректировку ставки премии (т.е. тарифные изменения). Обе процедуры не исключают друг друга. Перестрахование на базе эксцедента убытка связано с крупными убытками, которые более подвержены инфляции, чем обычные убытки, на основе которых исчисляется ставка премии.

Перестраховщик в гораздо большей степени зависит от увеличения расходов на урегулирование убытков, поскольку обязательство покрытия этих расходов в доле, превышающей приоритет, полностью ложится на него.

В ряде случаев приоритет оказывается превышенным лишь в результате инфляции. Рассмотрим следующий пример.

Пример 19 Пусть заключен договор эксцедента убытка с приоритетом 100 тыс. И пусть имеется два страховых случая по прямому договору страхования, убытки составляют соответственно 125 тыс. и 80 тыс. Убытки, затрагивающие прямого страховщика, равны 100 тыс. и 80 тыс., а перестраховщик платит лишь по первому страховому случаю 25 тыс.

Предположим, что инфляция составляет 40%. Тогда размеры убытков по прямому договору будут равны соответственно 175 тыс. и 112 тыс. Из них на долю цедента в обоих случаях приходится 100 тыс. Таким образом, в первом случае инфляция для прямого страховщика равна 0%, а во втором она составляет 25%, так как вместо 80 тыс. его выплаты теперь составляют 100 тыс. Что касается перестраховщика, то он выплачивает теперь соответственно 75 тыс. и 12 тыс. Следовательно, в первом случае инфляция равна 200%, а во втором она бесконечна, так как ранее перестраховщик не платил ничего.

2. Если речь идет об эксцеденте убытка по событию (cat XL), т.е. имеется кумуляция рисков при землетрясении или урагане, необходимо учитывать растущую стоимость отдельных рисков как результат общей инфляции убытков, равно как и тот факт, что перестрахованный портфель может включать больше контрактов, чем раньше. Таким образом, число затронутых полисов будет больше, чем прежде.

Чтобы экстраполировать число убытков и их размер, необходима общая информация о портфеле цедента, а именно, количество застрахованных рисков или полная страховая сумма на момент наступления убытков и прогноз на предстоящий год.

То же самое важно и для эксцедента убытка по риску (risk XL), так как больший риск наступления крупных убытков может быть вызван расширением страхового покрытия или увеличением страховых сумм.

3. Расчет цены договора часто производится тогда, когда многие убытки еще не полностью оплачены, так что окончательный размер убытков неизвестен. Это особенно важно в случае страхования гражданской ответственности, где урегулирование часто связано с обращением в суд и может идти многие годы или даже десятилетия.

Резерв для урегулирования таких убытков при наступлении менее благоприятной ситуации, чем предполагалось ранее, носит название IBNER-резерва (incurred but not enough reserved), т.е. резерв произошедших, но недостаточно зарезервированных убытков.

Еще труднее учесть должным образом произошедшие, но еще незаявленные убытки, т.е. оценить IBNR-резервы (incurred but not reported). Сюда же относятся убытки, еще не связанные с какой-либо конкретной причиной, поэтому требование о возмещении убытков пока и не предъявлено. Такие ситуации характерны при страховании ответственности за произведенную продукцию. Может пройти 20 или более лет, как было в случае с асбестом, прежде чем будут заявлены претензии. Потом будет еще судебное разбирательство, которое также займет много времени. Именно к таким убыткам и применим термин IBNR, но он может часто применяться и к IBNER-убыткам, тем более, что для перестраховщика они и в самом деле являются IBNR-убытками, до тех пор, пока они не превысят приоритет. Эти убытки чаще всего крупные, хотя и долго неизвестны, поэтому они затрагивают договор эксцедента убытка.

Правильный расчет IBNR-резерва важен и для бухгалтерских отчетов, чтобы избежать впоследствии больших убытков, когда придется выполнять обязательства.

Существует целый ряд методов подсчета IBNR-резервов, но все они обладают недостатками. Этой теме уделяется большое внимание в актуарной литературе, она будет рассмотрена в третьей части пособия.

Итак, для расчета премии перестрахования методом экстраполяции, перестраховщик должен иметь информацию об объеме премии, собранной цедентом, и обо всех отдельных убытках за определенный период времени. Экстраполируя на цены сегодняшнего дня, он определяет, превысят ли прошлые убытки приоритет, который будет применен в будущем.

Обычно требуются данные за 5 лет или даже более для тех отраслей, в которых длительный период повторения событий (ураганы, град и т.п.) или урегулирование убытков происходит медленно, например, страхование общегражданской ответственности или ответственности владельцев автотранспорта. При этом надо знать данные об урегулировании убытков, т.е. размер резервов и отдельно произведенные выплаты на конец каждого года, чтобы представлять развитие IBNR-убытков.

Метод экстраполяции применим к договорам с низким приоритетом и умеренным пределом возмещения убытков, так как для них имеются адекватные данные об убытках. Иначе премии могут быть несоразмерны и оказаться даже нулевыми, если в предыдущие годы не было зарегистрировано убытков.

Структурный метод основан на разбиении портфеля на однородные типы риска. Например, при огневом страховании портфель разбивается на промышленные, коммерческие и частные риски. На этой информации, определяющей профиль риска, и базируется премия перестрахования. При этом к различным подпортфелям применяется различная ставка премии. Структурный метод применяется в случае высоких приоритетов, где данные о фактической убыточности недостаточны для надежных расчетов.

Сценарный метод используется для расчета котировок по договорам эксцедента убытка, призванным защитить портфель страховщика от стихийных бедствий. Сценарии убытков призваны подразделить происшествия в зависимости от периода их повторения. Предполагаемый размер убытков по происшествию зависит от страховой суммы или премии по всему портфелю.

Пример 20 Предположим, что на острове в Карибском море в среднем через каждые 20 лет возникает небольшой ураган, через 40 лет ураган средней силы, а через 100 лет сильный ураган. Известно, что небольшой ураган разрушает 2% застрахованного имущества, средний — 5%, а сильный — 12%.

Страховая компания в целях защиты своего бизнеса по имущественному страхованию со страховой суммой 200 млн. намерена заключить договор эксцедента убытка XL: 8 xs 4 (приоритет и лимит ответственности перестраховщика указаны в миллионах).

Итак, абсолютная величина ущерба от небольшого урагана составит 4 млн., от среднего 10 млн. и от сильного 24 млн. Из них на долю договора эксцедента убытков приходится соответственно 0, 6 и 8 млн. Учитывая период повторения ураганов, получаем, что средегодовой убыток (приходящийся на долю эксцедента) по небольшим ураганам равен 0, по средним 150 тыс., а по сильным 80 тыс. Следовательно, необходимая годовая премия перестрахования равна 230 тыс.

На практике перестраховщик не ограничивается каким-то одним способом подсчета премий, а использует элементы структурного анализа, применяя экстраполяцию.

"Фиксированная премия согласованная сторонами, не может быть точно расчитана, пока неизвестен размер премий собранных цедентом (так как на самом деле чаще всего расчитывется фиксированная ставка премии – flat rate). Но поскольку от перестраховщика может быть потребовано возмещение убытков до окончания года, несправедливо откладывать уплату премии перестрахования до конца года. Поэтому стороны соглашаются на уплату *предварительной премии*, обычно с момента начала договора (1 января). Иногда выплаты проводятся в форме двух взносов (1 января и 1 июля), а корректировка происходит в начале следующего года. Предварительная премия обычно является и минимальной. Это особенно важно в отраслях, находящихся на начальной стадии развития.

Экстраполяция и структурный метод применимы и для договоров стоп-лосс. Расчет надбавок зависит от ожидаемых колебаний в данных об убытках. Поэтому иногда заключается соглашение о том, что страховщик не будет менять свою андеррайтинговую политику и критерии приема рисков на гарантию.

Скользящая ставка премии отражает изменения убыточности. Процедура состоит в установлении минимальной и максимальной премии. Ставка премии в этих пределах расчитывается с помощью экстраполяции плюс надбавка. Обычно такие надбавки используют как расчетные коэффициенты (100/70, 100/75, 100/80, 100/85), хотя они могут и прибавляться к основной ставке (например, 0,5% основной ставки).

Пример 21 Предположим, что окончательные расходы, понесенные в связи с убытками, как процент от основной премии первый год действия договора составляют 2%

Надбавка 100/70 (=42,86%)	0,857%
Согласованная минимальная премия	1,5%
Согласованная максимальная премия	4,5%
Премия за один год действия договора эксцедента убытка	2,857%

Если уровень убыточности за первый год составит 4%, то премия, включая надбавку составит 5,714%, но максимальная ставка равна 4%, она и будет прменяться в течение второго года.

Недостаток скользящей шкалы заключается в том, что резервы убытков, влияющие на показатель убыточности, нуждаются в постоянной корректировке, пока не произведено полное урегулирование убытков. Значит, уровень убыточности может оставаться долгое время неизвестным, т.е. неизвестна будет и премия перестрахования.

Переменную ставку следует применять лишь в договорах со столь низким приоритетом и лимитом ответственности, что убытки затрагивают их постоянно. Иначе премия, уплаченная перестраховщику, будет достаточна лишь в те годы, когда обнаруживается обычный уровень убыточности. Следовательно, перестраховщик будет лишен возможности создания резервов на случай крупных убытков, когда даже премия, расчитанная по максимальной ставке, недостаточна.

Итак, *скользящая ставка премии* t вычисляется следующим образом

$$t = \min(t_{\max}, \max(t_{\min}, \alpha Z/A)),$$

где $t_{\min}$ — минимальная ставка премии, $t_{\max}$ — максимальная ставка премии, α — коэффициент надбавки, A — премии, собранные страховщиком, Z — убытки, уже оплаченные перестраховщиком, и еще не урегулированные, находящиеся на его гарантии.

Таким образом, премия перестрахования равна

$$P = t \cdot A = \min(t_{\max} A, \max(t_{\min} A, \alpha Z)).$$

Коэффициент α принимает следующие значения:

а) для *непосредственно* заключенных договоров (без маклера)

— 100/85 для отраслей с быстрым урегулированием оплаты (например, пожары),

— 100/80 для отраслей, где оплата убытков может производиться несколько лет, например, гражданская ответственность в автомобильном страховании или общая гражданская ответственность.

б) для договоров *с маклером* соответственно

— 100/75 при быстром урегулировании,

— 100/70 при медленном.

Различие объясняется тем, что маклер берет комисионные в размере до 10%

Задача 65 *Например, ставка премии от* 2% *до* 5% *(при коэффициенте надбавки* 100/80 *убытков на гарантии перестраховщика, уже оплаченных или еще не урегулированных), дает премию перестрахования, меняющуюся в диапазоне от* $4 \cdot 10^6$ *до* $10 \cdot 10^6$*, если премия прямого страховщика равна* $200 \cdot 10^6$.

Подсчитать, чему равна премия по договору $3xs2$ *(млн.), если размеры последовательных убытков равнялись* 3, 3.4, 3.2, 4.8, 4.4, 7.

Если предусмотрена выплата дополнительной премии за восстановление, то размер базовой премии устанавливается меньше, чем в договоре эксцедента убытка с безвозмездным восстановлением.

Существует также *реверсивная ставка* (reverse rate), предусматривающая, что в годы с низкой убыточностью применяется более высокая ставка, чем в годы с высокой убыточностью.

Пример 22 Предположим, что оговорены следующие условия.

Минимальная ставка:	2%	при убыточности $\geq 70\%$
Максимальная ставка:	7%	при убыточности $\leq 45\%$

В пределах от 70% до 45% ставка премии повышается на 20% от разницы между 70% и действительным уровнем убыточности.

Пусть уровень убыточности равен 60%, разница 70%-60%=10%, значит, ставка повышается на 2% и составляет 4%.

- **Оговорка о корректировке** (индексации)

В квотном и эксцедентном (пропорциональном) перестраховании премии и убытки распределяются пропорционально между цедентом и перестраховщиком. Таким образом, инфляция, влияющая на размер убытков, затрагивает в равной мере обе стороны. В договоре эксцедента убытков рост выплат при возмещении ущерба в большей степени затрагивает перестраховщика. Количество убытков, превышающих приоритет, растет даже если портфель страховщика не изменился.

В некоторых странах, например в Бельгии (см. [3]), ввели практику ежегодной корректировки приоритета и предела ответственности перестраховщика при каких-либо изменениях реальной стоимости застрахованного интереса. Такая корректировка производится во всех случаях, если положения и условия договора не пересматриваются полностью, и основывается на индексе цен на недвижимость.

Поскольку пределы возрастания ущерба не могут быть предусмотрены заранее (они зависят не только от инфляции, но также от изменений заработной платы, изменений в правовой сфере, что влияет на стоимость урегулирования убытков, изменений в законодательстве и прогресса в медицине), то их нельзя учесть в актуарных расчетах.

Если нет возможности учесть увеличение убытков в премии перестрахования, то это делается с помощью оговорки о корректировке, или индексации, в договоре перестрахования.

Оговорка действует двояким способом. Один из них (vertical adjustment) означает ежегодную корректировку приоритета и лимита ответственности в соответствии с индексом прожиточного минимума, независимо от того, произошел ли страховой случай или нет.

С другой стороны, точная величина, на которую возросли суммы убытков по сравнению с началом действия договора, определяется не временем наступления страхового случая, а моментом урегулирования убытков. Оговорка применима к любым убыткам, произошедшим за то время, когда договор был в силе (horizontal adjustment). Применяемый уровень приоритета и ответственности перестраховщика зависит в каждом конкретном случае от продолжительности времени, необходимого для урегулирования убытков, т.е. периода подверженного инфляции.

Пример 23 Пусть приоритет договора эксцедента убытков равен 100 тыс., а фактический размер убытков 175 тыс.

Увеличение суммы убытков ко времени их урегулирования в соответствии с при меняемым индексом 40%.

Следовательно, размер убытков без учета инфляции равен 125 тыс. (175/1,4).

Перераспределение убытков:

прямой страховщик:	100	=80%	общей суммы убытков
перестраховщик:	25	=20%	общей суммы убытков

Перераспределение фактических убытков без применения оговорки о корректировке:

прямой страховщик:	100	=57%	общей суммы убытков
перестраховщик:	75	=43%	общей суммы убытков

Перераспределение фактических убытков с применением оговорки о корректировке:

прямой страховщик:	140	=80%	общей суммы убытков
перестраховщик:	35	=20%	общей суммы убытков

В последнем случае у прямого страховщика и перестраховщика убытки выросли на 40%.

- **Участие в прибыли**

Механизм такой же, как и в случае пропорционального перестрахования, но только комиссия по определению равна нулю в непропорциональном перестраховании.

Кроме того, участие в прибыли используется не так часто как в пропорциональном перестраховании. Дело в том, что непропорциональный договор по своей природе крайне неуравновешен, и таким образом, доход, получаемый в течение одного или нескольких лет подряд, составляет лишь небольшую часть емкости договора.

Если не удается договориться иначе, то применяется участие в прибыли, но с условием, что при подсчетах убытки переносятся не менее, чем на пять лет.

- **Бонус при отсутствии претензий** (no claim bonus)

Это то же самое, что участие в прибыли при отсутствии убытков: если Z означает убытки на обеспечении перестраховщика, то при $Z > 0$, никакого бонуса нет. В противном случае полагается, что $t_{NCB} \sim t_{PB}$, а $t_{FG} = 0$. Такая система иначе может быть описана – "все или ничего".

Также не очень широко применяется, из-за наличия морального риска. Цеденту часто может быть более выгодно получить бонус за отсутствие требований, чем небольшую выплату за превышение приоритета.

- **Маклерская комиссия**

Комиссия маклера может достигать 10% от первоначальной премии перестрахования. По премиям возобновления комиссионные могут составлять от 0% до 5%. Вознаграждение маклера может быть определено по соглашению в случае очень больших или очень маленьких премий.

2.5.6 Другие типы непропорциональных договоров

Существует целый ряд непропорциональных договоров перестрахования, которые редко прменяются на практике, но достаточно полно исследовались с теоретической точки зрения. Среди них надо отметить LCR (largest claims reinsurance), или по-французски COSIMA (coût de sinistre majeur), и ECOMOR (excédent de coût moyen relatif).

- **Класс договоров**

Дадим общее определение договора, который строится по вариационному ряду требований (см., напр., [44]). Предположим, что число поступивших требований по рассматриваемому портфелю рисков K равно N. Обозначим через $X_{N:1} \leq X_{N:2} \leq \ldots \leq X_{N:N}$ размеры поступивших требований $X_1, X_2, \ldots, X_N$, расположенные в возрастающем порядке.

Пусть h — измеримая функция $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ и b_i, $i \geq 1$, — это семейство измеримых отображений $b_i : [0, 1] \to [0, 1]$. Далее, пусть c_j, $j = \overline{1, l}$, — это действительные числа, k_j — неотрицательные целые числа, а $\mathbf{1}_A$ — индикатор множества A.

Предположим, что

$$R_n(y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} b_n(i/n) h(y_i) + \sum_{j=1}^{l} c_j h(y_{n-k_j}) \mathbf{1}_{[0,n)}(k_j) \quad (73)$$

для любого набора $0 \le y_1 \le \ldots \le y_n$ удовлетворяет условию

$$R_n(y_1, \ldots, y_n) \in [0, \sum_{i=1}^{n} y_i].$$

Случайная величина

$$R_N(X_{N:1}, \ldots, X_{N:N})\mathbf{1}_{(0,\infty)}(N)$$

может интерпретироваться как часть суммарного размера требований $\sum_{i=1}^{N} X_i$, которая передается в перестрахование. Соответственно, семейство $R = (R_n, n \ge 1)$, определяет *договор перестрахования, построенный по вариационному ряду требований.*

Рассматриваемый класс договоров достаточно широк, что демонстрируют приводимые ниже примеры, хотя и не включает договор на базе эксцедента убыточности.

Пример 24 Положим $l = 0$, тогда вторая сумма в (73) пропадет. Если $b_n(u) = \alpha$, $0 < \alpha < 1$, при всех u и $h(y) = y$, получим квотный договор (quota share). В самом деле, в перестрахование передается доля α суммарного ущерба

$$R_n(y_1, \ldots, y_n) = \alpha \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Остальные примеры будут относиться к непропорциональному перестрахованию.

Пример 25 Выбор $l = 0$, $b_n(u) = 1$, при всех u, $h(y) = (y - d)^+$ для фиксированного $d \ge 0$ дает договор эксцедента убытка (excess of loss), кратко XL(d). В этом случае

$$R_N^{XL} = \sum_{i=1}^{N} (X_{N:i} - d)\mathbf{1}_{X_{N:i} \ge d} = \sum_{i=1}^{N} (X_i - d)^+.$$

Пример 26 Если $l = 0$, $b_n(u) = \mathbf{1}_{(1-(p/n),1] \cap [0,1]}(u)$ для фиксированного целого $p \ge 1$, $h(y) = y$, то получится договор, покрывающий p наибольших требований (largest claims treaty) или кратко LC(p). Для него

$$R_N(X_{N:1}, \ldots, X_{N:N}) = \sum_{i=1}^{p} X_{N:N-i+1}$$

Следующий договор получается как смесь договоров из примеров 25 и 26.

Пример 27 Пусть $l = 0$, $b_n(u) = \mathbf{1}_{(1-(p/n),1]\cap[0,1]}(u)$ для фиксированного целого $p \geq 1$, $h(y) = (y-d)^+$ для фиксированного $d \geq 0$, тогда получится договор, покрывающий ту часть p наибольших требований, которая превосходит приоритет d.

$$R_N = \sum_{i=1}^{p} (X_{N:N-i+1} - d)^+.$$

Предложенный в 1950 году французским актуарием Thépaut договор ECOMOR содержится в следующем примере.

Пример 28 При $b_n(u) = \mathbf{1}_{(1-(p/n),1]\cap[0,1]}(u)$, $p \geq 1$, $l = 1$, $c_1 = -p$, $k_1 = p-1$, $h(y) = y$ получается договор, покрывающий ту часть требований, которая превосходит p-е по величине требование. Договор обозначается ECOMOR(p), для него

$$R_N(X_{N:1}, \ldots, X_{N:N}) = \sum_{i=1}^{p} (X_{N:N-i+1} - X_{N:N-p+1}).$$

- **Подсчет премии**

Исследуем поведение чистой (рисковой) премии μ^R договора $R = (R_n, n \geq 1)$, т.е.

$$\mu^R = \mathrm{E} R_N(X_{N:1}, \ldots, X_{N:N}) \mathbf{1}_{(0,\infty)}(N),$$

и ставки премии (premium rate)

$$\rho^R = \mu^R / \mu,$$

где $\mu = \mathrm{E}\sum_{i=1}^{N} X_i$ — это средний суммарный размер требований, поступивших к страховщику по перестрахованному портфелю (или чистая премия страховщика).

Достаточно простая формула для μ^R получается для больших портфелей.

Более точно, пусть K_m, $m \geq 1$, — это (растущая) последовательность портфелей, N_m — число требований портфеля K_m, а соответствующий договор перестрахования $R_m = (R_{mn}, n \geq 1)$ построен по вариационному ряду требований с помощью формулы (73), где коэффициенты зависят от m

$$b_n = b_{mn}, \quad c_j = c_{mj}, \quad k_j = k_{mj}.$$

Предположим, что

$$\lim_{m\to\infty} \mathrm{E}N_m = \infty, \quad \lim_{m\to\infty} \sqrt{\mathrm{D}N_m}/\mathrm{E}N_m = 0.$$

Размеры требований X_i, $i \geq 1$, являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с непрерывной функцией распределения F, а N_m не зависят от них. Далее, при $l \geq 1$ существуют такие постоянные $s_j \in (0, 1)$, $j = \overline{1, l}$, и действительные числа c_j, $j = \overline{1, l}$, что

$$\lim_{m\to\infty} k_{mj}/\mathrm{E}N_m = s_j, \quad \lim_{m\to\infty} c_{mj}/\mathrm{E}N_m = c_j.$$

Множество функций $\{b_{mn}\}$ равномерно ограничено. Существуют функция b на $[0, 1]$ и числа $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{r+1} = 1$ такие, что $\lim_{m\to\infty} b_{mn_m} = b$ равномерно на замкнутых подинтервалах $[0, 1] \setminus \{t_1, \ldots, t_r\}$ для любой последовательности $\{n_m\}$, удовлетворяющей условиям $n_m \to \infty$, $n_m/\mathrm{E}N_m \to 1$.

Функция $b = b_s + b_d$, где b_s непрерывно дифференцируема и имеет ограниченную вариацию, а b_d ступенчатая $b_d = \sum_{i=1}^{r} d_i \mathbf{1}_{[t_i, 1]}$, где d_i, $i = \overline{1, r}$, действительные числа.

Пусть $F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}$. Предполагается, что функция h неубывающая и непрерывная в точках $F^{-1}(1-s_j)$, а $\mathrm{E}h(X_i) < \infty$. Далее, $F(u) < F(v) < F(w)$ для всех u, w таких, что $u < v < w$, если $v = F^{-1}(1 - s_j)$ или $v = F^{-1}(1 - t_i)$. В случае $l \geq 1$ дополнительно предполагается, что $\tilde{F}(u) = h(F^{-1}(u))$ ограничена.

Обозначим

$$\nu_m = \mathrm{E}N_m \cdot \left[\int b(F(x))h(x)\, dF(x) + \sum_{j=1}^{l} c_j \tilde{F}(1 - s_j) \right], \qquad (74)$$

$$\rho = \left[\int b(F(x))h(x)\, dF(x) + \sum_{j=1}^{l} c_j \tilde{F}(1 - s_j) \right] \left[\int x\, dF(x) \right]^{-1}. \qquad (75)$$

Теорема 20 *Пусть справедливы все сделанные выше предположения и $\rho > 0$, тогда*

$$\lim_{m\to\infty}(\mu_m/\nu_m) = 1, \quad \lim_{m\to\infty}\rho_m = \rho. \tag{76}$$

Доказательство этих утверждений можно прочитать в [44]. С практической точки зрения (76) означает, что для больших портфелей чистая премия перестрахования может подсчитываться с помощью формулы (74), а ставка премии с помощью (75).

2.6 Оптимальное перестрахование

2.6.1 Постановка задачи

Проблемы разделения риска между двумя агентами в страховании были предметом исследования в течение последних 30 лет (см. напр, [47],[30],[63]). В работе [18] изучалось упорядочивание случайных величин, полезное для изучения четырех способов перераспределения риска, широко используемых в прямом страховании (франшиза, вычитаемая франшиза, первый ущерб и сострахование). При этом использовался стохастический порядок второй степени (second degree stochastic order), который в теории вероятностей называют также возрастающий вогнутый порядок (increasing concave order). Эти результаты легко переносятся на перестрахование. Интересны также работы [51] о применении стохастических порядков при анализе франшиз (deductibles), а также [19] о распространении понятий оптимальности на более широкие модели полезности (non-expected utility models). В работе [32] доказано, что стоп-лосс договор оптимален с точки зрения цедента (передающей компании) в довольно широком классе договоров перестрахования. В работе [17] это исследование было продолжено.

Перейдем к проблеме выбора договора перестрахования для данного риска X (причем это может быть суммарный ущерб по всему портфелю страховщика). Очевидно, что этот выбор зависит от оптимизационного критерия, который использует цедент (т.е. исходный страховщик). Важными элементами такого критерия являются премия перестрахования и характеристики риска, остающегося на собственном удержании. Мы увидим, что многие используемые критерии приводят к предпочтению, совместимому с порядком $<_{sl}$.

Итак, пусть X — некоторый риск. Предположим, что рынок перестрахования предлагает контракты, обладающие следующими свойствами. Выплата перестраховщика — это непрерывная неотрицательная неубывающая функция h размера ущерба, которая не может расти быстрее, чем сам ущерб. Таким образом, речь идет о множестве $\mathcal{H}$ допустимых контрактов вида

$$\mathcal{H} = \{h(x) \,:\, h(0) = 0,\, 0 \leq h'(x) \leq 1\}.$$

Наиболее важные элементы этого класса

1) *квотный договор* $h(x) = \theta x$ для некоторого $\theta \in [0,1]$,

2) *договор стоп-лосс* $h(x) = (x-d)^+$ для некоторого $d > 0$.

Если цедент уже принял решение о том, сколько он готов заплатить перестраховщику, это значит, что он выбирает элемент h из более узкого множества

$$\mathcal{H}_P = \{h \in \mathcal{H} \,:\, H(h(X)) = P\}.$$

Примем дополнительно, что премия перестрахования подсчитывается по принципу среднего с нагрузкой α и обозначим $\mu = P/(1+\alpha)$. Это будет означать, что оптимизация производится в классе

$$\mathcal{H}_\mu = \{h \in \mathcal{H} \,:\, \mathrm{E}h(X) = \mu\}.$$

Обозначим через Z удерживаемый риск, т.е. $Z = X - h(X)$. Поскольку перестрахователь оптимизирует некоторую характеристику этого риска, то его критерий c может рассматриваться как некоторый функционал на множестве функций распределения F_Z. Чаще всего ищется $\min c(F_Z)$ по некоторому подмножеству $\mathcal{H}$.

Определение 12 *Говорят, что оптимизационный критерий сохраняет порядок стоп-лосс на $\mathcal{H}$, если для любых $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ условие $Z_1 <_{sl} Z_2$ влечет $c(F_{Z_1}) \leq c(F_{Z_2})$.*

Замечание 16 Из теоремы 1.8 вытекает, что критерий $c(\cdot)$ сохраняет порядок стоп-лосс на любом допустимом множестве контрактов, если его можно записать в виде $c(F_Z) = \mathrm{E}f(Z)$, где $f \in \mathcal{K}_2$ (т.е. выпуклая возрастающая).

Используя это замечание, нетрудно понять, что *максимизация ожидаемой полезности* (с вогнутой возрастающей функцией полезности) сохраняет порядок стоп-лосс. Действительно, в этом случае речь идет о минимизации $\mathrm{E}[-u(x_0 - P - Z)]$, где x_0 — начальный капитал, а P — премия перестрахования. При фиксированной премии функция $f(z) = -u(x_0 - P - z)$ — выпуклая возрастающая.

Точно также *минимизация дисперсии* сохраняет порядок $<_{sl}$ на $\mathcal{H}_\mu$. В самом деле, согласно следствию 1.3 при условии $\mathrm{E}Z_1 = \mathrm{E}Z_2$ из $Z_1 <_{sl} Z_2$ следует $\mathrm{D}Z_1 \le \mathrm{D}Z_2$.

Задача 66 *Предположим, что отношение страховщика к риску адекватно отражено в используемом им тарифном принципе. Следовательно, он предпочтет тот риск, за который сам бы запросил наименьшую премию. Проверить, какие из рассмотренных в разделе* 3 *первой части данного пособия* [1] *принципов подсчета премий сохраняют порядок стоп-лосс.*

2.6.2 Вид оптимального договора

Для всех оптимизационных критериев, которые сохраняют порядок стоп-лосс, предпочтителен тот договор, согласно которому удерживается наименьший в смысле порядка стоп-лосс риск. Нахождению такого договора помогает следующая теорема.

Теорема 21 *Пусть $h_1, h_2 \in \mathcal{H}$ два допустимых договора перестрахования, для которых $h_i'(x) < 1$, причем существует такое s, что $h_1(x) \le h_2(x)$ для $0 \le x \le s$ и $h_1(x) \ge h_2(x)$ при $x > s$. Далее, пусть X — риск, для которого $\mathrm{E}h_1(X) \ge \mathrm{E}h_2(X)$, тогда $Z_1 <_{sl} Z_2$.*

Доказательство основано на проверке условий теоремы 1.12, обеспечивающей стоп-лосс порядок. Очевидно, что $\mathrm{E}Z_1 \le \mathrm{E}Z_2$.

Далее, функции $z_i(x) = x - h_i(x)$, $i = 1, 2$, строго возрастающие, так как $0 \le h_i'(x) < 1$. Поэтому имеет место равенство

$$F_X(x) = \mathrm{P}(X \le x) = \mathrm{P}(z_i(X) \le z_i(x)) = F_{Z_i}(z_i(x)),\ i = 1, 2.$$

По условию теоремы $z_1(x) \ge z_2(x)$ при $x \le s$, следовательно

$$F_{Z_2}(z_1(x)) \ge F_{Z_2}(z_2(x)) = F_{Z_1}(z_1(x)).$$

Аналогично, $F_{Z_2}(z_1(x)) \le F_{Z_1}(z_1(x))$ при $x > s$. Положив $z = z_1(x)$ и $c = z_1(s)$, получим выполнение требований теоремы о пересечении. ■

Конечно, не для любого класса допустимых договоров перестрахования можно найти такой, который пересекает все остальные элементы только один раз. Если рассмотреть класс $\mathcal{H}$, т.е. предположить, что премия роли не играет, то оптимальным будет договор $h(x) = x$ (выгоднее все отдать в перестрахование).

Нетривиальный результат может быть получен для класса $\mathcal{H}_\mu$, здесь оптимальным окажется договор стоп-лосс. (Мы можем ожидать такой результат на основании леммы 1.30, которая утверждает, что этот договор имеет наименьшую дисперсию в классе $\mathcal{H}_\mu$.)

Теорема 22 *Для любого критерия, сохраняющего порядок $<_{sl}$, оптимальным в классе $\mathcal{H}_\mu$ является договор $h_d(x) = (x-d)^+$, где d определено условием $\mathrm{E}h_d(X) = \mu$.*

Доказательство. Очевидно, что для любого $h \in \mathcal{H}_\mu$ выполнены неравенства $0 = h'_d(x) \le h'(x)$ при $x < d$ и $1 = h'_d(x) \ge h'(x)$ при $x > d$. Таким образом, имеется не более одной точки пересечения $h_d(x)$ и $h(x)$. Однако воспользоваться теоремой 21 и утверждать, что договор h_d оптимален мы не можем, так как условие $h'_d(x) < 1$ для всех x не выполнено. Тем не менее мы можем получить необходимый нам результат непосредственно проверив выполнение условий теоремы 1.11.

В самом деле, удерживаемый страховщиком риск при договоре h_d равен $Z_d(X) = X - h_d(X) = \min(X, d)$. Следовательно,

$$F_{Z_d}(t) = \mathrm{P}(Z_d(X) \le t) = \begin{cases} F_X(t), & t < d, \\ 1, & t \ge d. \end{cases} \tag{77}$$

С другой стороны, известно, что $\mathrm{P}(Z(X) \le X) = 1$ для любого договора перестрахования $h \in \mathcal{H}_\mu$. Поэтому имеют место неравенства $F_X(t) \le F_{Z(X)}(t) \le 1$, откуда с использованием (77) получаем

$$\begin{aligned} F_{Z(X)}(t) &\ge F_{Z_d}(t) \quad \text{при } t < d, \\ F_{Z(X)}(t) &\le F_{Z_d}(t) \quad \text{при } t \ge d. \end{aligned}$$

Тем самым условия теоремы 1.11 выполнены, т.е. $Z_d(X) <_{sl} Z(X)$. ■

Рассмотрим подкласс $\mathcal{H}'_\mu$ класса договоров $\mathcal{H}_\mu$ с одной и той же чистой премией перестрахования μ. Для заданных чисел $0 = d_0 < d_1 < d_2 \ldots < d_n$ положим

$$\mathcal{H}'_\mu = \{h \in \mathcal{H}_\mu \,:\, h(x) = \sum_{i=0}^{n} \theta_i (x - d_i)^+,\ \sum_{i=0}^{n} \theta_i \le 1,\, \theta_i \ge 0,\, i = \overline{0,n}\},$$

т.е. допустимы только те контракты перестрахования, в которых доля переданного риска растет с номером транша.

Задача 67 *Проверить, что для любого критерия, сохраняющего стоп-лосс порядок, оптимальный договор имеет вид*

$$h^*(x) = \theta_k (x - d_k)^+ + (1 - \theta_k)(x - d_{k+1})^+,$$

где k определяется из условия $d_k < d < d_{k+1}$, а d соответствует оптимальному договору по всему классу $\mathcal{H}_\mu$. Величина k определяется из условия $\mathrm{E}h^*(X) = \mu$.

Итак, установлено, что в том случае, когда риск X представляет собой суммарный возможный ущерб по всему портфелю, согласно теореме 22 договор стоп-лосс оптимален с точки зрения цедента (в предположении, что премия перестрахования фиксирована и подсчитывается по принципу среднего).

Теорема 22 позволяет также установить оптимальность договора эксцедента убытка среди тех договоров, по которым выплаты перестраховщика определяются размерами ущербов по отдельным полисам, либо по отдельным искам. Более точно, предположим, что договор перестрахования имеет вид

$$T(X_1, \ldots, X_N) = \sum_{i=1}^{N} h(X_i), \quad \text{где } h \in \mathcal{H}_\mu. \tag{78}$$

Здесь рассматривается коллективная модель риска. Как обычно, N — число происшествий, не зависящее от последовательности $\{X_i\}_{i \ge 1}$ независимых одинаково распределенных случайных величин, представляющих собой размеры отдельных убытков, а величина μ связана с размером премии следующим образом $P = (1 + \alpha)\mathrm{E}N\mu$.

Теорема 23 *Среди договоров перестрахования вида* (78) *оптимален договор* $T_d = \sum_{i=1}^{N}(X_i - d)^+$, *где* d *определяется соотношением* $\mathrm{E}(X-d)^+ = \mu$.

Доказательство. Очевидно, что для каждого индивидуального ущерба $h_d(x) = (x-d)^+$ дает наименьший (в смысле порядка стоп-лосс) удерживаемый риск. В силу инвариантности этого порядка по отношению к суммированию случайного числа случайных слагаемых (лемма 1.6) следует оптимальность T_d. ■

2.6.3 Порядок Лоренца и оптимальное перестрахование.

Сделаем следующие предположения.

Пусть премия перестрахования подсчитывается по принципу среднего (с нагрузкой α). Далее, пусть эта премия фиксирована и равна P, а цедент (соотв. перестраховщик) предпочитает среди всех договор с одинаковыми затратами тот, которому соответствует наименьший в смысле порядка стоп-лосс риск, остающийся на собственном удержании, (соотв. наименьшая перестраховая выплата – reinsurance benefit). Перестраховая выплата $\phi(x)$ – это сумма, выплачиваемая перестраховщиком, если к перестрахователю поступило требование на выплату возмещения x. Обычное предположение в теории перестрахования состоит в том, что перестраховая выплата является непрерывной неотрицательной неубывающей функцией размера требования, т.е. $0 \le \phi(x) \le x$ для любого $x \in R^+$, причем эта функция никогда не растет быстрее, чем размер требования.

В то время как в перестраховании $\phi(x)$ является выплатой перестраховщика, в обычном страховании – это компенсация, выплачиваемая страховщиком. Поскольку предполагается, что премия перестрахования P подсчитывается по принципу среднего, то для любой ϕ выполнено условие $\mathrm{E}\phi(X) = P/(1+\alpha)$, где X — это риск, принятый на гарантию непосредственным страховщиком.

Два важных типа договоров перестрахования — это *квотный договор* (quota-share treaty), для которого

$$\phi(x) = \theta x, \text{ где } \theta = P/[(1+\alpha)\mathrm{E}X] \in [0,1],$$

и стоп-лосс договор, для которого

$$\phi(x) = (x-d)^+, \text{ где приоритет (или франшиза) } d \geq 0$$
$$\text{такой, что } \mathrm{E}(X-d)^+ = P/(1+\alpha).$$

2.6.4 Точка зрения цедента

Естественно, что страховая компания желает, чтобы удельный риск, остающийся на ее долю после перестрахования, был меньше первоначального (в смысле $<_{cx}$). Иначе говоря, он желает, чтобы имело место следующее соотношение

$$X - \phi(X) <_{Lor} X.$$

Для того чтобы иметь возможность воспользоваться теоремой 1.24, рассмотрим следующий класс договоров

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(F_X, P) = \ & \{\phi : R^+ \to R^+ \,|\, \mathrm{E}\phi(X) = P/(1+\alpha), \\ & \phi \text{ непрерывна, не убывает,} \\ & \text{ почти всюду дифференцируема,} \\ & \phi'(x) \leq 1 \text{ и } \phi(x) \leq \phi'(x)x, \, \forall x > 0\}.\end{aligned}$$

Заметим, что класс $\mathcal{B}(F_X, P)$ состоит из всех тех компенсационных функций, для которых ни цедент, ни перестраховщик не выигрывают, если размер требования возрастает, при этом перестраховщик выплачивает неубывающую долю общего размера требования. В актуарной литературе функции из класса $\mathcal{B}(F_X, P)$ называются функциями Вайда (Vajda). Для любого договора из этого класса удельный риск после перестрахования предпочтительнее первоначального для всех несклонных к риску лиц.

Теорема 24 *Наименее желательным для цедента среди договоров класса $\mathcal{B}(F_X, P)$ является квотный.*

Доказательство. Нам необходимо показать, что

$$X - \phi(X) <_{cx} (1-\theta)X \text{ для всех } \phi \in \mathcal{B}(F_X, P), \tag{79}$$

где $\theta = P/[(1+\alpha)\mathrm{E}X]$. Согласно теореме 1.24 и определению класса $\mathcal{B}(F_X, P)$ для любой ϕ из этого класса

$$X - \phi(X) <_{Lor} X. \tag{80}$$

Согласно масштабной инвариантности порядка $<_{cx}$ можно получить, что из (80) следует

$$X - \phi(X) <_{cx} \left(1 - \frac{\mathrm{E}\phi(X)}{\mathrm{E}X}\right) X,$$

а значит, и (79). Тем самым доказательство закончено. ■

2.6.5 Точка зрения перестраховщика

С другой стороны, если изучается оптимальность с точки зрения перестраховщика, то естественно предположить, что удельный ущерб для перестраховщика меньше (в смысле $<_{cx}$), чем для непосредственного страховщика, т.е. $\phi(X) <_{Lor} X$. В самом деле, если бы это было не так, то перестраховщик принял бы на гарантию весь риск. Для того чтобы воспользоваться теоремой 1.24, определим следующий класс $\mathcal{R}(F_X, P)$ договоров перестрахования ϕ, представляющих интерес для перестраховщика.

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(F_X, P) = \quad & \{\phi : R^+ \to R^+ \,|\, \mathrm{E}\phi(X) = P/(1+\alpha), \\ & \phi \text{ непрерывна, не убывает,} \\ & \text{почти всюду дифференцируема,} \\ & \phi'(x) \leq 1 \text{ и } \phi(x) \geq \phi'(x)x, \ \forall x > 0\}.\end{aligned}$$

Приведем альтернативное доказательство результата, касающееся оптимальности договора стоп-лосс с точки зрения цедента. Подчеркнем, что первоначальное доказательство из [32] справедливо для более широкого класса договоров, чем $\mathcal{R}(F_X, P)$.

Теорема 25 *Среди договоров из класса $\mathcal{R}(F_X, P)$ наименее привлекательным для перестраховщика является договор стоп-лосс.*

Доказательство. Нам необходимо установить, что

$$\phi(X) <_{cx} (X - d)^+ \quad \text{для всех } \phi \in \mathcal{R}(F_X, P),$$

где d выбрано таким образом, что $\mathrm{E}(X - d)^+ = P/(1 + \alpha)$. Используем следствие 1.11, положив $g_1(x) = \phi(x)$ и $g_2(x) = (x-d)^+$. Мы получим, что для любого $\phi \in \mathcal{R}(F_X, P)$

$$\phi(X) <_{Lor} (X - d)^+, \tag{81}$$

поскольку $g_1 \circ g_2^{-1}(x) = \phi(x+d)$ очевидным образом неубывающая, а

$$\frac{\phi(x+d)}{x} = \frac{\phi(x+d)}{x+d}\frac{x+d}{x}$$

невозрастающая как произведение двух невозрастающих функций. Требуемый результат вытекает из (81), поскольку при равенстве математических ожиданий порядок Лоренца эквивалентен выпуклому. ■

Замечание 17 Интересно отметить, что квотный договор принадлежит обоим классам $\mathcal{B}(F_X, P)$ и $\mathcal{R}(F_X, P)$. Поэтому, опять-таки из следствия 1.11 получается, что с точки зрения перестраховщика

$$\alpha X <_{cx} \phi(X) <_{cx} (X-d)^+ \quad \textit{для любого } \phi \in \mathcal{R}(F_X, P).$$

2.6.6 Порядок рационального перестраховщика

Предположим, что выплата перестраховщика — непрерывная неотрицательная выпуклая и почти всюду дифференцируемая функция ϕ размера ущерба x, далее, $0 \le \phi(x) \le x$ для всех $x \in R^+$ и $\phi'(x) \le 1$, т.е. вместо условия Вайда требуется выпуклость. Условие выпуклости ϕ является естественным в контексте перестрахования. В самом деле, полезный для цедента договор перестрахования должен обеспечивать ему высокий размер перестраховых выплат, если велик уровень ущерба. Наглядно, неубывающие выпуклые функции на R^+ — это как раз те функции, которые принимают свои относительно наибольшие значения в области (b, ∞) для некоторого $b \in R^+$.

Рассмотрим перестраховщика, которому предложены два риска X и Y, причем $X <_{sl} Y$. Тогда он предпочтет перестраховать X, поскольку для любой функции выплат ϕ

$$X <_{sl} Y \Rightarrow \phi(X) <_{sl} \phi(Y)$$

(это утверждение справедливо, так как суперпозиция двух неубывающих выпуклых функций принадлежит тому же классу). Если перестраховщик рассматривает дисперсию как важный фактор риска, его может интересовать, будет ли выполнено неравенство

$$\mathrm{D}\phi(X) \le \mathrm{D}\phi(Y) \quad \text{любой } \phi.$$

Еще один порядок рисков ($<_{re}$), отражающий предпочтение любого "рационального"перестраховщика, рассматривающего дисперсию как существенный параметр риска, может быть определен следующим образом.

Определение 13 *$X <_{re} Y$, если одновременно*

$$\phi(X) <_{sl} \phi(Y) \text{ и } \mathrm{D}\phi(X) \le \mathrm{D}\phi(Y) \tag{82}$$

выполнено для всех неубывающих выпуклых функций ϕ, для которых дисперсии существуют.

Отметим, что, вообще говоря, здесь $\mathrm{E}\phi(X) \neq \mathrm{E}\phi(Y)$. (В противном случае неравенство для дисперсий автоматически вытекает из порядка стоп-лосс.) Порядок $<_{re}$ был введен в [61], в прикладной теории вероятностей он обозначается $<_{icx:icx}$.

Докажем достаточное условие выполнения $X <_{re} Y$.

Теорема 26 *Если $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y$ и $X <_{ew} Y$, то $X <_{re} Y$.*

Доказательство. Прежде всего, условие $\mathrm{E}X = \mathrm{E}Y$ вместе с $X <_{ew} Y$ (см. определение $<_{ew}$ в [1]) в силу теоремы 1.33 гарантирует $X <_{cx} Y$, а значит, и $X <_{sl} Y$, поэтому имеет место и первая часть условий (82). Далее, в [61] доказано, что для двух непрерывных рисков X и Y с равными средними

$$X <_{ew} Y \Rightarrow cov[\phi_1(X), \phi_2(X)] \le cov[\phi_1(Y), \phi_2(Y)] \tag{83}$$

для всех неубывающих и выпуклых функций ϕ_1, ϕ_2, отображающих R^+ в R, для которых существуют ковариации. В частности, из (83) следует, что $\mathrm{D}\phi(x) \le \mathrm{D}\phi(Y)$ для всех неубывающих выпуклых функций $\phi : R^+ \to R$, для которых дисперсии существуют. Тем самым доказательство закончено. ■

2.6.7 Порядки случайных векторов

Пусть R^n — это n-мерное эвклидово пространство. Введем в нем поэлементный порядок точек $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ следующим образом: $x \le y$, если $x_i \le y_i$ для любого $i = \overline{1, n}$.

Функция $f : R^n \to R^1$ называется *возрастающей* (точнее, неубывающей), если из $x \le y$ следует $f(x) \le f(y)$.

Обозначим $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$, а e_i — единичный вектор, направленный по i-й координатной оси. Введем также разностный оператор

$$\Delta_i^\varepsilon f(x) = f(x + \varepsilon e_i) - f(x).$$

Нетрудно проверить, что f возрастающая тогда и только тогда, когда $\Delta_i^\varepsilon f(x) \ge 0$ для любых $\varepsilon > 0$, $i = \overline{1, n}$ и всех $x \in R^n$.

Рассматривая вторые разности, можно ввести понятие супермодулярной функции.

Определение 14 *Функция $f : R^n \to R^1$ называется супермодулярной, если $\Delta_i^\varepsilon \Delta_j^\delta f(x) \ge 0$ для всех $x \in R^n$, $1 \le i < j \le n$ и любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$.*

(Обозначим SM — множество всех супермодулярных функций, а ISM — множество возрастающих супермодулярных функций.)

Можно дать альтернативное определение супермодулярной функции.

Определение 15 *Функция $f : R^n \to R^1$ супермодулярная, если для любых $x, y \in R^n$*

$$f(x \wedge y) + f(x \vee y) \ge f(x) + f(y),$$

здесь

$$x \wedge y = (\min(x_1, y_1), \dots, \min(x_d, y_d)),$$
$$x \vee y = (\max(x_1, y_1), \dots, \max(x_d, y_d)).$$

(*Иногда такие функции называются L-супераддитивными.*)

Задача 68 *Проверить эквивалентность определений* 14 *и* 15.

Задача 69 *Если функция f дважды дифференцируема, то она супермодулярна тогда и только тогда, когда для любых $x \in R^n$, $1 \le i < j \le n$*

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(x) \ge 0.$$

Задача 70 *Если* $g_1, \dots, g_n : R^1 \to R^1$ *— возрастающие функции, а* $f : R^n \to R^1$ *супермодулярна, то* $f(g_1(\cdot), \dots, g_n(\cdot))$ *тоже супермодулярна.*

Определение 16 *Случайный вектор* $X = (X_1, \dots, X_n)$ *меньше чем* $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ *в смысле* супермодулярного порядка*, если* $\mathrm{E}f(X) \le \mathrm{E}f(Y)$ *для любой супермодулярной функции* f*, для которой оба интеграла существуют. Обозначается этот порядок* $X \le_{sm} Y$.

Если $\mathrm{E}f(X) \le \mathrm{E}f(Y)$ *для любой* f *возрастающей супермодулярной, для которой интегралы существуют, то говорят, что* X *меньше* Y *в смысле* возрастающего супермодулярного порядка (*запись* $X \le_{ism} Y$).

Обозначим многомерную функцию распределения через $F_X(t) = \mathrm{P}(X \le t) = \mathrm{P}(X_1 \le t_1, \dots, X_d \le t_d)$, $t = (t_1, \dots, t_d) \in R^d$.

Многомерная функция дожития (survival function) определяется следующим образом $\bar{F}_X(t) = \mathrm{P}(X > t) = \mathrm{P}(X_1 > t_1, \dots, X_d > t_d)$.

Замечание 18 Важно помнить, что в многомерном случае, вообще говоря, $\bar{F}_X(t) \ne 1 - F_X(t)$.

Введем еще три порядка, связанные с функциями распределения и дожития.

Определение 17 1. *Если* $\bar{F}_X(t) \le \bar{F}_Y(t)$ *для любого* $t \in R^n$*, говорят, что* X *предшествует* Y *в смысле* верхнего ортанта (*upper orthant order*)*, запись* $X \le_{uo} Y$.

2. *Если* $F_X(t) \le F_Y(t)$ *для любого* $t \in R^n$*, то говорят, что* X *предшествует* Y *в смысле* нижнего ортанта (*lower orthant order*)*, запись* $X \le_{lo} Y$.

3. *Если одновременно* $X \le_{uo} Y$ *и* $X \le_{lo} Y$*, то говорят, что* X *предшествует* Y *в* согласованном *смысле* (*concordance order*)*, запись* $X \le_c Y$.

Как всегда записи $X \preceq Y$ и $F_X \preceq F_Y$ обозначают один и тот же порядок.

Лемма 18 *Супермодулярный порядок сильнее, порядков в смысле верхнего и нижнего ортанта, а также согласованного порядка.*

Доказательство. Первые два утверждения очевидным образом следуют из того, что функции $f = \mathbf{1}_{(t,\infty)}$ и $f = \mathbf{1}_{(-\infty,t]}$ супермодулярны. А последнее вытекает из определения согласованного порядка. ■

Задача 71 *Объяснить, почему с помощью супермодулярного* (*а также согласованного*) *порядка можно сравнивать только векторы с одинаковыми маргинальными распределениями.*

Задача 72 *Показать, что в двумерном случае нет разницы между супермодулярным порядком и порядками в смысле ортантов, т.е. для случайных векторов $X, Y \in R^2$ с одинаковыми маргинальными распределениями следующие четыре утверждения эквивалентны:* 1. $X \le_{uo} Y$, 2. $X \le_{lo} Y$, 3. $X \le_{sm} Y$, 4. $X \le_c Y$.

Теорема 27 *При $n \ge 3$ порядок $\le_{sm}$ строго сильнее, чем $\le_c$.*

Доказательство. В 1990 г. Джоу ([40]) доказал, что при $n \ge 4$ супермодулярный порядок сильнее, чем согласованный. Но случай $n = 3$ оставался нерешенным до 2000 г., когда соответствующий пример был построен Мюллером и Скарсини. Пусть вектор $X = (X_1, X_2, X_3)$ с вероятностью $1/6$ принимает каждое из следующих значений: $(2,2,1)$, $(2,1,2)$, $(1,2,2)$, $(1,1,1)$, $(0,0,2)$, $(2,0,0)$, а вектор $Y = (Y_1, Y_2, Y_3)$ значения $(2,2,2)$, $(2,1,1)$, $(1,2,1)$, $(1,1,2)$, $(2,0,2)$, $(0,0,0)$.

Тогда оба вектора имеют одинаковые маргинальные распределения. Достаточно проверить 27 точек трехмерной решетки $\{0,1,2\}^3$ и установить, что в них $\bar{F}_X(t) \le \bar{F}_Y(t)$ и $F_X(t) \le F_Y(t)$, т.е. в самом деле, $X \le_c Y$.

Однако найдутся супермодулярные функции $f : R^3 \to R^1$ такие, что $\mathrm{E}f(X) > \mathrm{E}f(Y)$. Например, $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3 - 4)^+$ — супермодулярная функция, так как это композиция выпуклой возрастающей действительной функции и возрастающей супермодулярной. Для нее

$$\mathrm{E}f(X) = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = \mathrm{E}f(Y). \ ■$$

Замечание 19 Этот пример также показывает, что из согласованного порядка случайных векторов не следует порядок стоп-лосс для сумм их компонент. Такой результат важен при подсчете премий перестрахования для портфелей зависимых рисков.

Полезные результаты, связанные с порядками случайных векторов можно найти, например, в [51] и [50]. Сформулируем ниже две интересные теоремы без доказательства.

Теорема 28 *Следующие утверждения эквивалентны:*

i) $X \le_{ism} Y$,

ii) $\mathrm{E}f(X) \le \mathrm{E}f(Y)$ *для всех непрерывных ограниченных возрастающих супермодулярных функций* f.

Теорема 29 *Утверждения*

i) $X \le_{sm}$,

ii) X *и* Y *имеют одинаковые маргинальные распределения и* $X \le_{ism} Y$,

iii) X *и* Y *имеют одинаковые средние и* $X \le_{ism} Y$,

эквивалентны.

2.6.8 Индивидуальная модель

Рассмотрим портфель страховой компании с n полисами. Пусть X_i, $i = \overline{1,n}$, — размер требования по i-му полису. Все риски предполагаются независимыми и одинаково распределенными. Договор перестрахования задается измеримой функцией $\Phi : R_n^+ \to R^+$, где $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ интерпретируется как сумма, выплачиваемая перестраховщиком, если от клиентов поступили требования $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на выплату возмещений. В таком случае $S_X^{ind} = \sum_{i=1}^n X_i$ — это общий ущерб по рассматриваемому портфелю.

Предположим, что Φ – неубывающая супермодулярная и выпуклая по каждой переменной функция. Эти предположения естественны для Φ. Действительно, неубывание означает, что перестраховая выплата не убывает с ростом размера требований, супермодулярность показывает, что последствия от возрастания одного требования тем хуже, чем выше размер остальных требований, а покоординатная выпуклость – это несклонность к риску в отношении каждого требования. Про такие функции иногда говорят, что они *возрастающие выпуклые по направлению*. Эти функции могут быть определены следующим образом:

Определение 18 *Функция* $\Phi : R_n^+ \to R$ *называется возрастающей выпуклой по направлению* (*increasing directionally convex*), *если*

$$\Phi(\underline{y}) + \Phi(\underline{z}) \le \Phi(\underline{x}) + \Phi(\underline{t})$$

для любых $\underline{x} \le \underline{y} \le \underline{t}$, $\underline{x} \le \underline{z} \le \underline{t}$ *и* $\underline{x} + \underline{t} \ge \underline{y} + \underline{z}$ (*здесь и далее* $\underline{x} \le \underline{y}$ *означает* $x_i \le y_i$ *для* $i = \overline{1,n}$).

Если Φ – дважды дифференцируема и неубывающая, то достаточно потребовать $\partial^2\Phi/\partial x_j^2 \ge 0$ для всех $j = \overline{1,n}$ и $\partial^2\Phi/\partial x_i \partial x_j \ge 0$ для всех $1 \le i < j \le n$.

Пусть теперь имеются два портфеля с наборами рисков $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ соответственно. Риски в каждом из портфелей независимы и одинаково распределены соответственно с функциями распределения F_X и F_Y.

Порядок перестраховщика для двух портфелей в индивидуальной модели определяется следующим образом.

Определение 19 $(X_1, X_2, \ldots, X_n) <_{re}^{ind} (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$, *если одновременно*

$$\begin{array}{l} \Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n) <_{sl} \Phi(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \\ \mathrm{D}\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n) \le \mathrm{D}\Phi(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \end{array}$$

для всех возрастающих выпуклых по направлению функций Φ, *для которых существуют дисперсии.*

Теорема 30 $(X_1, X_2, \ldots, X_n) <_{re}^{ind} (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ *при выполнении условия* $X_1 <_{disp} Y_1$.

Доказательство. Определение $<_{disp}$ см. в [1]. Из результатов [60] выводится, что

$$\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n) <_{st} \Phi(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$$

для любой неубывающей функции Φ, т.е. первое требование определения 19 выполнено. В [61] доказано, что

$$X_1 <_{disp} Y_1 \Rightarrow \mathrm{D}\phi[\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)] \le \mathrm{D}\phi[\Phi(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)] \tag{84}$$

для всех неубывающих выпуклых ϕ и любой Φ, возрастающей выпуклой по направлению, а это значит, что выполнено и второе требование. ■

Следствие 7 *Для любых неубывающих выпуклых договоров перестраховщика ϕ глобального типа*

$$X_1 <_{disp} Y_1 \Rightarrow \mathrm{D}\phi(S_X^{ind}) \le \mathrm{D}\phi(S_Y^{ind}) \tag{85}$$

Доказательство можно получить в качестве частного случая (84), взяв $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i$, поскольку такая функция очевидно возрастающая выпуклая по направлению. ■

2.6.9 Экспоненциальные риски

Пусть имеются два индивидуальных портфеля $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ с экспоненциально распределенными рисками, параметры которых соответственно λ_X и λ_Y.

Лемма 19 $\lambda_Y \le \lambda_X \Rightarrow X_1 <_{disp} Y_1$.

Доказательство. Поскольку

$$F_Y^{-1}(t) - F_X^{-1}(t) = \ln(1-t)\left(\frac{1}{\lambda_X} - \frac{1}{\lambda_Y}\right)$$

это неубывающая функция $t \in [0,1]$, если $\lambda_Y \le \lambda_X$, то утверждение леммы справедливо. ■

Теорема 31 *Предположим, что условие $\lambda_Y \le \lambda_X$ выполнено. Тогда $S_X^{ind} <_{re} S_Y^{ind}$.*

Доказательство. Рассмотрим глобальный договор перестрахования вида $\phi(S^{ind})$. Заметим, что $\phi(S_X^{ind}) <_{st} \phi(S_Y^{ind})$. В самом деле, с одной стороны, $X_1 <_{disp} Y_1 \Rightarrow X_1 <_{st} Y_1 \Rightarrow S_X^{ind} <_{st} S_Y^{ind}$, поскольку порядок $<_{st}$ сохраняется при взятии сверток, а с другой стороны, суперпозиция двух неубывающих функций неубывающая. Таким образом, из (85) вытекает, что $S_X^{ind} <_{re} S_Y^{ind}$. ■

Наконец, рассмотрим индивидуальный договор вида $\sum_{i=1}^n \phi(X_i)$. Для него (при $\lambda_X \le \lambda_Y$) справедливы соотношения

$$\sum_{i=1}^n \phi(X_i) <_{st} \sum_{i=1}^n \phi(Y_i) \text{ и } \mathrm{D}\sum_{i=1}^n \phi(X_i) \le \sum_{i=1}^n \phi(Y_i).$$

Неравенство для дисперсий выполнено, поскольку $\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \phi(x_i)$ будет возрастающей выпуклой по направлению, если ϕ неубывающая выпуклая.

Полученные результаты показывают, что в экспоненциальном случае предпочтение перестраховщика полностью определяется параметром распределения.

Замечание 20 О других подходах к оптимизации перестрахования можно прочитать в [8], [65], [25], [41], [57], [68], [34], [38].

Список литературы

[1] Е.В.Булинская. *Теория риска и перестрахование*, часть I, Изд-во мех-мат ф-та МГУ, 2001.

[2] В.В.Калашников, Д.Константинидис. Вероятность разорения. Фундаментальная и прикладная математика, т.2, в. 4, с.1055-1100.

[3] К.Пфайфер. *Введение в перестрахование.* М.:Анкил, 2000.

[4] Г.И.Фалин. *Математический анализ рисков в страховании.* Российский Юридический Издательский Дом, Москва, 1994.

[5] В.Феллер. *Введение в теорию вероятностей и ее приложения.* Т.2, М.:Мир, 1967.

[6] С.Я.Шоргин. Асимптотические оценки оптимальных страховых тарифов в условиях вариации страховых сумм. Обозрение прикладной и промышленной математики. 1997, т. 4, в. 1, с. 124-156.

[7] П.Эмбрехтс, К.Клюппельберг. Некоторые аспекты страховой математики. Теория вероятн. и ее примен. 1993, т. 38, в. 2, с. 375-416.

[8] K.K.Aase. Premiums in a Dynamic Model of Reinsurance Market. Scand. Actuarial J. 1993, 2, pp.134-160.

[9] E.S.Andersen. On the collective theory of risk in case of contagion between the claims. Trans. XVth International Congress of Actuaries, II, 1957, p.219-229.

[10] S.Asmussen. *Applied Probability and Queues.* Chichester: J.Wiley, 1987.

[11] B.von Bahr. Ruin probabilities expressed in terms of ladder heights distributions. Scand. Actuarial J. 1974, pp.190-204.

[12] J.Beirlant, J.Teugels, P.Vynckier. *Practical Analysis of Extreme Values.* Leuven Univ. Press, Leuven, Belgium, 1996.

[13] R.E.Beard, T.Pentikäinen, E.Pesonen. *Risk Theory.* 2nd ed. Chapman and Hall, London, 1977.

[14] H.Bühlmann, B.Gagliardi, H.Gerber, E.Straub. Some inequalities for stop-loss premiums. ASTIN Bulletin, 1977, v.9, p.75-83.

[15] J.Cai, J.Garrido. Two-sided bounds for ruin probabilities when the adjustment coefficient does not exist. Scand. Actuarial J. 1999, 1, pp.80-92.

[16] M.Denuit, C.Lefèvre, M.Shaked. The s-convex orders among real random variables, with applications. Mathematical Inequalities and their Applications, 1, 1998, pp. 585-613.

[17] M.Denuit, C.Vermandele. Lorenz and excess wealth orders, with applications in reinsurance theory. Scand. Actuarial J. 1999, pp.170-185.

[18] T.V.Doherty. Stochastic ordering of risk/insurance exchanges. Scand. Actuarial Journal, 1980, pp.203-208.

[19] N.A.Doherty, L.Eeckhoudt. Optimal insurance without expected utility: the dual theory and the linearity of insurance contracts. Journal of Risk and Uncertainty, 1995, v.10, pp.157-179.

[20] D.Dufresne. The distribution of perpetuity, with application to risk theory and pension funding. Scand. Actuarial Journal, 1, 1990, pp. 39-79.

[21] P.Embrechts, C.Goldie, N.Veraverbeke. Subexponentiality and infinite divisibility. Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete, 49, 1979, S. 335-347.

[22] P.Embrechts, C.Klüppelberg, T.Mikosh. *Modelling Extremal Evevnts.* Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[23] P.Embrechts, M.Maejima, J.Teugels. Asymptotic behaviour of compound distributions. ASTIN Bulletin, 15, 1985, pp. 45-48.

[24] P.Embrechts, N.Veraverbeke. Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims. Insurance: Mathematics and Economics. 1, 1982, pp. 55-72.

[25] L.Gajek, D.Zagrodny. Optimal Reinsurance under General Risk Mesures. Insurance: Mathematics and Economics, 2004, v.34, pp.227-240.

[26] H.U.Gerber. Martingales in risk theory. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungsmaathematiker. 1973, Band 73, Heft 2, S.205-216.

[27] H.U.Gerber. *An Introduction to Mathematical Risk Theory.* S.S.Huebner Foundation, Monograph No.8, 1979.

[28] H.U.Gerber. Error bounds for the compound Poisson approximations. Insurance: Mathematics and Economics. 1984, 3, pp. 191-194.

[29] H.Gerber, D.Jones. Some practical considerations in connection with calculation of stop-loss premiums. Transactions of the Society of Actuaries, 28, 1976, pp. 215-231.

[30] Ch.Gollier. Economic theory of risk exchanges: a review. In: G.Dionne (Ed.) *Contributions to insurance economics.* Kluwer Academic Publishers, Boston, 1992, pp.3-23.

[31] M.Hald, H.Schmidli. On the maximization of the adjusted coefficient under proportional reinsurance. ASTIN Bulletin, 2004, v.34, N 1, pp.75-83.

[32] A.E.van Heerwarden, R.Kaas, M.J.Goovaerts. Optimal reinsurance in relation to ordering of risks. Insurance: Mathematics and Economics, 1989, v.8, pp.11-17.

[33] W.-R. Heilmann, K.J.Schröter. Orderings of risks and their actuarial applications. In: K.C.Mosler, M.Scarsini (Eds.) *Stochastic Orders and Decision under Risk.* IMS Lecture Notes – Monograph Series 19, 1991, pp. 157-173.

[34] K.T.Hess, A.Liewald, K.D.Schmidt. An extension of Panher's recursion. ASTIN Bulletin, 2002, v.32, N 2, pp.283-297.

[35] K.T.Hess, K.D.Schmidt. Optimal premium plans for reinsurance with reinstatements. ASTIN Bulletin, 2004, v.34, pp.299-313.

[36] C.Hipp. Approximation of aggregate claims distributions by compound Poisson distributions. Insurance: Mathematics and Economics, 1985, v.4, p.227-232.

[37] C.Hipp. Improved approximations for the aggregate claims distribution in the individual model. ASTIN Bulletin, 1986, v.16, pp.89-100.

[38] C.Hipp, M.Vogt. Optimal Dynamic XL Reinsurance. ASTIN Bulletin, 2003, v.33, N 2, pp.193-207.

[39] R.Hogg, S.Klugman. *Loss Distributions.* Wiley, New York, 1984.

[40] H.Joe. Multivariate concordance. J. Multivariate Analysis, 1990, 35, pp.12-30.

[41] M.Kaluszka. Optimal reinsurance under mean-variance premium principles.Insurance: Mathematics and Economics, 2001, v.28, pp.61-67.

[42] S.Klugman, H.Panjer, G.Willmot. *Loss Models.* Wiley, New York, 1998.

[43] P.S.Kornya. Distribution of the aggregate claims in the individual risk theory model. Transactions of the Society of Actuaries, 1983, v.35, pp.823-836.

[44] E.Kremer. An asymptotic formula for the net premium of some reinsurance treaties. Scand. Actuarial Journal, 1984, pp. 11-22.

[45] E.Kremer. Finite formulae for the premium of the general reinsurance treaty based on order claims. Insurance: Mathematics and Economics, 1985, v. 4, pp. 233-238.

[46] C.Lefèvre, S.Utev. Comparison of individual risk models. Insurance: Mathematics and Economics. 28, 2001, pp. 21-30.

[47] J.Lemaire. Borch's theorem: a historical survey of applications. In: H.Louberge (Ed.)*Risk, Information and Insurance.* Kluwer Academic Publishers, Boston, 1991, pp.15-36.

[48] Ch.Levi. *La réassurance.* September 1996. (Курс лекций, прочитанных в МГУ)

[49] A.J.Mata. Pricing excess of loss reinsurance with reinstatements. ASTIN Bulletin. 2000, v. 30, N 2, pp.349-368.

[50] K.C.Mosler, M.Scarsini. Some theory of stochastic dominance. In:K.C.Mosler, M.Scarsini (Eds.) *Stochastic Orders and Decision under Risk.* IMS Lecture Notes – Monograph Series 19, 1991, pp.261-284.

[51] A.Müller. Stochastic orders generated by integrals: a unified study. Advances in Applied Probability, 29, 1997, pp.414-428.

[52] H.Panjer. The aggregate claims distribution and stop-loss reinsurance. Transactions of the Society of Actuaries. 1980, v. 32, pp. 523-535.

[53] H.Panjer. Recursive evaluation of a family of compound distributions. ASTIN Bulletin, 1981, v. 12, pp. 22-26.

[54] Panjer H., Lutek B. Practical aspects of stop-loss calculations. Insurance: Mathematics and Economics. 2, 1983, pp. 159-177.

[55] H.Panjer, G.Willmot. *Insurance Risk Models.* Society of Actuaries, Chicago, 1992.

[56] F.Pellerey. On the preservation of some orderings of risks under convolution. Insurance: Mathematics and Economics. 16, 1995, pp. 23-30.

[57] M.I.Pesonen. Optimal reinsurances. Scand. Actuarial Journal, 1984, pp.65-90.

[58] S.M.Pitts. A functional approach to approximations for individual risk model. ASTIN Bulletin, 2004, v.34, N 2, pp.379-397.

[59] N.De Pril, J.Dhaene. Error bounds for compound Poisson approximations of the individual risk model. ASTIN Bulletin, 1992, v.22, N 2, pp. 135-148.

[60] M.Shaked, J.G.Shantikumar. *Stochastic orders and their applications.* Academic Press. New York, 1994.

[61] M.Shaked, J.G.Shantikumar. Two variability orders. Probability in Engineering and Informational Sciences. 12, 1998, pp.1-23.

[62] Sigma, Swiss Re. No 2, 2005.

[63] S.Spaeter, P.Roger. The design of optimal insurance contracts: a topological approach. The Geneva Papers on Risk and Insurance Theory, 8, 1997, pp.5-20.

[64] B.Sundt. On multivariate Panjer recursions. ASTIN Bulletin, 29(1), 1999, pp.29-46.

[65] G.Taylor. Risk Exchange II: Optimal Reinsurance Contracts. Scand. Actuarial Journal, 1992, 1, pp.40-59.

[66] J.Teugels. Approximation and estimation of some compound distributions. Insurance: Mathematics and Economics. 4, 1985, pp. 143-153.

[67] F.E. de Vylder. *Advanced Risk Theory: A Self-contained Introduction.* Edition de l'Université Libre de Bruxelles – Swiss Association of Actuaries. Bruxelles, 1996.

[68] J.Wetzel. *Comment se réassurer au moindre coût.* Dunod, Paris, 1976.

[69] G.E.Willmot. The total claims distribution under inflationary conditions. Scand. Actuarial Journal, 1, 1989, pp. 1-12.

БУЛИНСКАЯ Екатерина Вадимовна

Теория риска и перестрахование

Часть 2.

Учебное пособие

М., Издательство Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 160 стр.

Оригинал макет изготовлен издательской группой механико-математического факультета МГУ

Подписано в печать 07.06.2006 г.
Формат 60×90 1/16. Объем 10 п.л.
Заказ 2 Тираж 150 экз.

Издательство ЦПИ при механико–математическом факультете МГУ г. Москва, Воробьевы горы.

Лицензия на издательскую деятельность
ИД № 04059 от 20.02.2001 г.

Отпечатано на типографском оборудовании механико-математического факультета