**Блок 2. Занятие 1.1 Комбинаторика.**

Пример конечных множеств:

– элемент 2 принадлежит множеству А

– элемент 10 не принадлежит множеству А

Количество элементов в множестве:

**Операции над множествами**

**Объединение множеств**

**Пересечение множеств**

Пусть

Тогда

**Правило сложения**.

Если

То

**Декартово произведение**

Пусть

Тогда

Декартово произведение — это множество всех пар, в которой первый элемент из множества , а второй из множества .

**Правило умножения**:

**Задача** – Сколько всего четырёхзначных чисел?

**Решение**. Запишем все четырехзначные числа в виде:

Тогда

**Задача** – Сколько четырёхзначных чисел, в записи которых нет цифры 5?

**Решение**. Запишем все четырехзначные числа в виде:

Тогда

**Метод дополнения**

Часто в задачах будет так, что напрямую посчитать количество объектов в нужном множестве будет сложно или вообще невозможно. В таких случаях может помочь следующий трюк. Вместо того чтобы в лоб считать то, что просят, достаточно посчитать то, что осталось. А затем из общего количества объектов "вычесть" лишние.

**Задача**. Сколько существует четырехзначных чисел, в которых есть цифра 3?

**Решение**. Прямое решение задачи чревато ошибками. Проще узнать сколько четырехзначных чисел без цифры 3, а потом вычесть из общего количества (см. в предыдущих задачах).

**Формула включений-исключений**

Для того чтобы посчитать общее количество объектов в двух множествах, нельзя просто сложить количество объектов в каждом из них, ведь эти множества могут пересекаться.

Например, хотим посчитать сколько людей ходит в математический или лингвистический кружок.

Пусть мы знаем, что в математический ходит 15 человек, а в лингвистический ходит 10 человек. А в оба кружка ходит 3 человека.

Теперь, если просто сложить 15 и 10, то тех ребят, которые ходят и туда, и туда мы учитываем по два раза. Для того чтобы посчитать верный ответ, достаточно просто вычесть тех людей, которые ходят в оба кружка. Т.е. 15+10-3=22 человека.

В общем виде, формула работает также. Чтобы посчитать количество людей в двух группах, достаточно сложить количество людей в этих группах и вычесть количество людей в пересечении этих групп.

Замечание. Для других объектов формула работает аналогично.

**Факториал**

Для целого положительного числа определим число (читается: "эн" факториал), равное количеству способов расставить в ряд различных предметов.

Вычислим для произвольного . Всего в ряду будет мест, на каждое из которых мы должны поставить один из наших предметов.

Для первого предмета всего свободных мест, можно поставить его на любое из них. Для каждого из способов поставить первый предмет есть способ поставить второй предмет. Действительно, для второго предмета осталось свободное место. Продолжая рассуждение, таким образом получаем, что всего способов расставить предметы в ряд: .

Получили, что равно произведению всех чисел от 1 до . Например,

Отдельно стоит рассмотреть случай, когда . В этом случае равен количеству способов расставить 0 предметов в ряд. Это можно сделать единственным способом (считайте, что они уже расставлены). Поэтому, 0! = 1.

**Перестановки**

**Перестановка без повторений**. [Справка](https://reshator.com/sprav/algebra/9-klass/perestanovki/).

Обозначим количество способов переставить друг с другом предметов за (читается: "пэ энтое"). Заметим, что переставить предметы это то же самое, что и расставить их в ряд. Поэтому, .

Замечание, не очень "важное" обозначение, ведь оно в точности равно факториалу. Поэтому им практически не пользуются.

**Пример**. Сколькими способами можно расставить 10 книг на полке?

**Решение**. На первое место можно поставить одну из 10 книг, на второе – одну из оставшихся 9 книг, на третье – из 8 книг, и т.д.

Всего вариантов

**Перестановка с повторениями**.

Перестановка с повторениями – это упорядоченная – выборка с повторениями, в которой элемент повторяется раз, элемент повторяется раз, и так далее, до последнего элемента , который повторяется раз . При этом

**Пример**. Сколько различных 6-тибуквенных слов можно написать из 3 букв , если буква a должна повторяться 3 раза, буква b – 2 раза, буква c – 1 раз.

**Решение**. Пример такого слова: – это – выборка с повторениями.

По условию

Всего – 60 слов.

Общее количество перестановок с повторениями:

**Размещения**

**Размещения без повторений**.

**Пример**. Для создания 2-значного пароля используются символы из алфавита .

Сколько всего паролей без повторения символов можно составить?

**Решение**. Результат можно получить непосредственно из правила произведения. Действительно, на первой позиции – 3 варианта символов, на второй – 2 оставшихся. Итого, по правилу произведения: 3 · 2 = 6 паролей.

Вот они:

Отметим, что пары вида считаются различными, т.е. порядок выбора важен.

Обозначим количество способов расставить различных предметов на мест за (читается: "а" из "эн" по "ка").

Вычислим . Всего у нас мест. На первое место можно выбрать любой из предметов. На второе место можно выбрать любой из оставшихся. И так далее, пока места не закончатся. Получаем всего способов.

Например, ,

Замечание, если, то предметов не хватает т.е. сделать это невозможно. Такое число будет равно нулю.

**Размещения с повторениями**.

**Пример**. Для создания 2-значного пароля используются символы из алфавита .

Сколько всего паролей можно составить?

**Решение**. Результат можно получить непосредственно из правила произведения. Действительно, на первой позиции 3 варианта символов, на второй – 3 варианта. Итого, по правилу произведения: 3 · 3 = 9 паролей.

Вот они:

В общем виде размещение с повторениями записывается в виде

**Сочетания.**

Главное отличие сочетаний от размещений – неупорядоченность выборок. Другими словами, если в размещениях пары считались различными (порядок важен), то в сочетаниях считается, что они равны . [Справка](https://reshator.com/sprav/algebra/9-klass/sochetaniya/).

**Сочетание без повторений**.

**Пример**. Для создания 2-значного пароля используются символы из алфавита .

Сколько всего паролей без повторения символов можно составить? Порядок выбора не важен.

**Решение**.

Можно заметить, что

Поэтому

Вот они:

Отметим, что пары вида считаются равными, т.е. порядок выбора не важен.

**Сочетание с повторениями**.