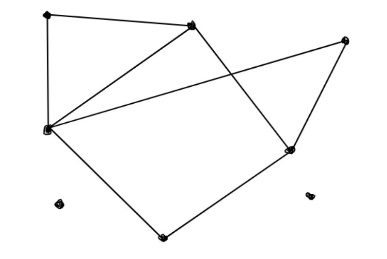
**Графы**

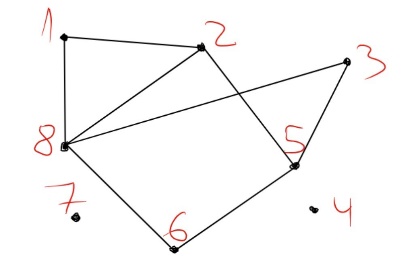
**Граф** — это множество вершин, некоторые из которых соединены рёбрами.

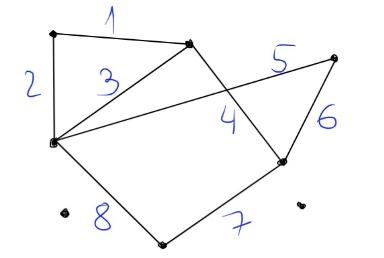
Например, компанию людей можно рассмотреть, как граф. Вершинами будут люди, а соединять людей будем, если они знакомы друг с другом. Таким образом, рёбра — это знакомства.

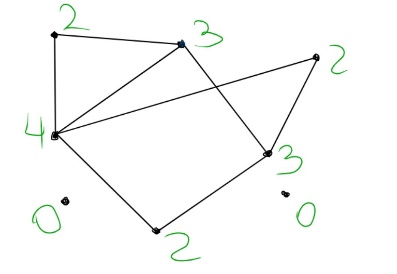
**Степенью вершины графа** называется число выходящих из него рёбер. В нашем примере выше, степень вершины — количество знакомых в этой компании.

Графы очень удобно изображать на плоскости. Вершины изображать в виде точек, а рёбра в виде отрезков или кривых. Естественно, граф можно изобразить большим количеством способов. Но выводы можно сделать по любому изображению.

Пример изображения некоторого графа.

Видно, что в этом графе 8 вершин. (V=8)

 8 рёбер.

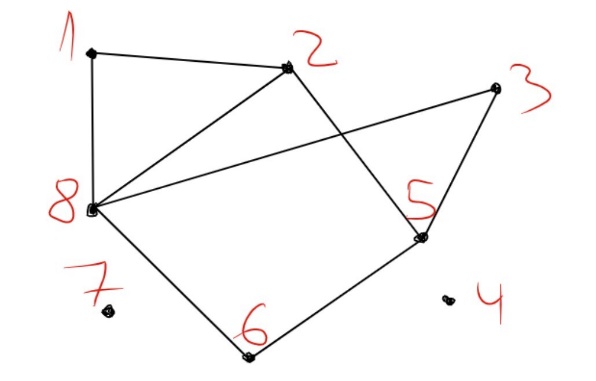
Степени вершин равны соответственно 2,3,4,2,3,2,0,0

Ребра, соединяющие одни и те же вершины называются **кратными**.

**Теорема:** сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству ребер (=2R)

В нашем примере:

Путь в графе — последовательность вершин, в которой каждая вершина соединена со следующей ребром. Например, в нашем графе вершины 1,2,5,3 образуют путь.

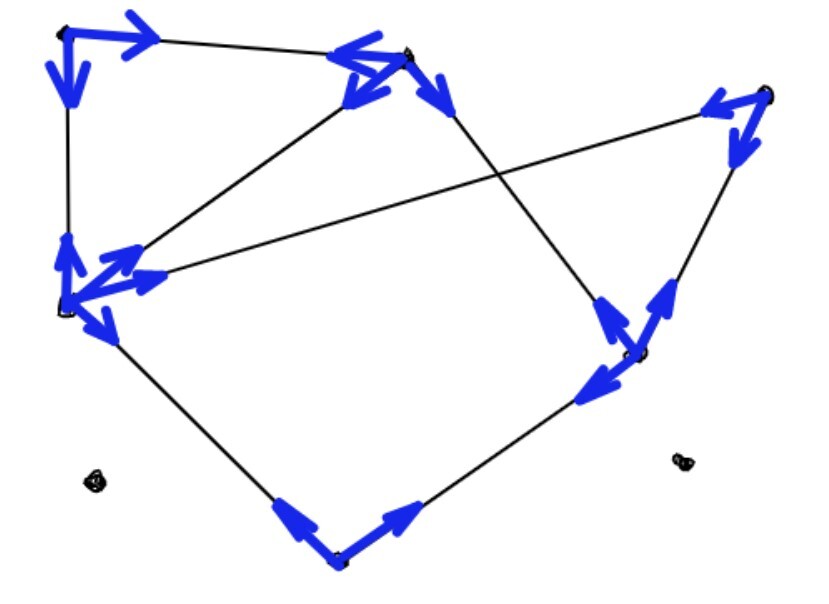


Цикл в графе — замкнутый путь. Например, вершины 2,5,6,8,2 образуют цикл.

**Лемма о рукопожатиях**

Сумма степеней всех вершин графа равна удвоенному количеству рёбер.

Для доказательства, нарисуем на каждом ребре по две стрелочки, как показано на рисунке.



Тогда заметим, что количество стрелочек, исходящих из вершины равно её степени. Значит, общее количество стрелочек равно сумме степеней всех вершин. С другой стороны, на каждом ребре нарисовано по две стрелочки. Значит, количество стрелочек равно удвоенному количеству рёбер.

**Следствие.** В графе чётное число вершин нечётной степени.

Действительно, если в графе нечётное число вершин нечётной степени, то сумма степеней всех вершин нечётна, чего быть не может.

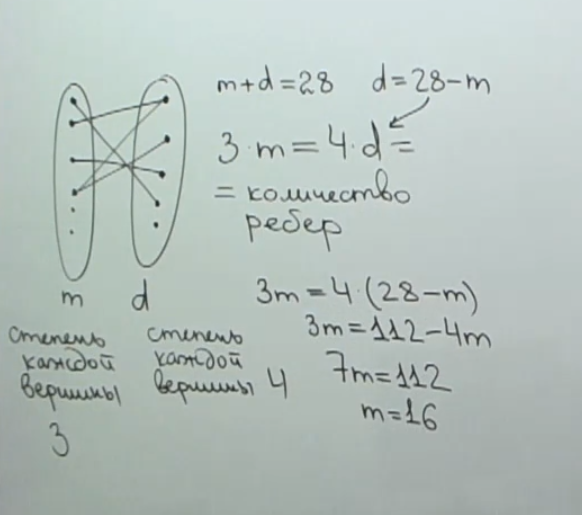
Пример. Нарисуйте на плоскости 5 точек и соедините некоторые из них так, чтобы каждая была соединена ровно с тремя.

Пусть это возможно, тогда получится граф с 5 вершинами, степень каждой равна 3. Тогда в нём будет  рёбер. Противоречие.

**Задачи по теме Графы**



Решение и ответ: Идея, построить граф дружбы.



**Циклы, деревья.**

**Циклы и пути**

**Путь в графе**— это последовательность вершин, в которой каждая вершина соединена со следующей ребром.

**Цикл** — это замкнутый путь, не проходящий ни по какому ребру графа два раза.

**Связность**

Граф называется *связным*, если между любыми двумя его вершинами есть путь.

Любой несвязный граф состоит из связных компонент.

**Компонента связности** — это максимальный по включенности связный подграф.

**Дерево**

Связный граф называется *деревом*, если в нём нет циклов.

Оказывается, такая структура встречается достаточно часто и обладает большим количеством свойств.

Свойства деревьев:

1) В любом дереве, в котором хотя бы 2 вершины есть 2 вершины степени 1(такие вершины называются висячими).

2) В дереве на n вершинах n - 1 ребро.

3) В любом связном графе можно выделить остовное дерево (подграф, содержащий все вершины исходного графа и являющийся деревом).

4) Если связном графе n вершин и n - 1 ребро, то он – дерево.

Из третьего свойства следует важный факт: в любом связном графе есть дерево. А из дерева нельзя исключить ребро так, что оно останется связным. Поэтому, дерево — это наименьший по включенности связный граф.

Если мы хотим соединить точки друг с другом т.е. получить связный граф, то минимальное количество проводимых рёбер равно n - 1. Действительно, если граф получился связный, то он минимум дерево, а значит, имеет хотя бы n - 1 ребро.