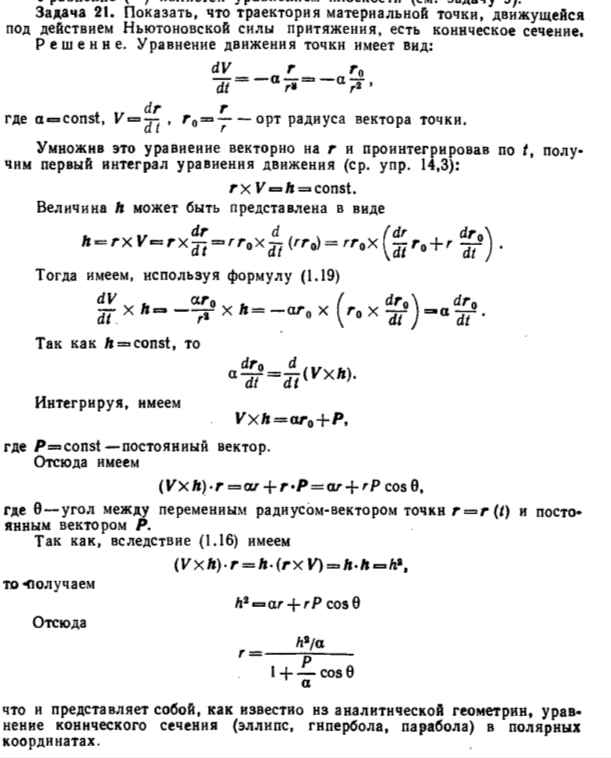
Теория (общий курс).

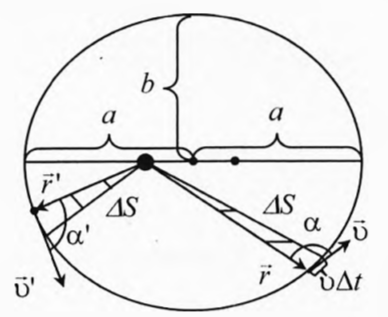
**Законы Кеплера**.

**I закон Кеплера**. Каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

**II закон Кеплера**. Каждая планета движется в плоскости, проходящей через центр Солнца, причём площадь сектора орбиты, описанной радиус-вектором, проведенным от Солнца к планете, изменяется прямо пропорционально времени.

**III закон Кеплера**. Квадраты периодов обращения планет вокруг Солнца относятся как кубы их средних расстояний (больших полуосей орбит) от Солнца.



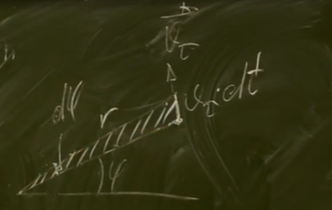
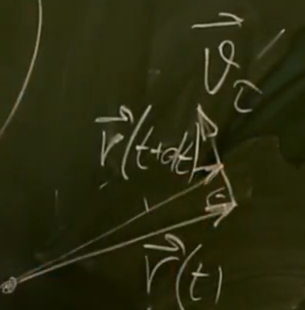
**Доказательство II закона**. Момент импульса планеты сохраняется, т.к. сила притяжения не создает не равный нулю момент сил.

В частности, это сразу доказывает, что движение тела происходит в плоскости.

Элемент площади, заметаемый радиус-вектором

Это доказывает постоянство секториальной скорости.

Запишем момент импульса иначе.

**Т.е. можно считать, что в данный момент времени происходит вращение по окружности со скоростью . С другой стороны,

Интегрируя, получим зависимость площади от времени.

**Закон сохранения энергии**.

Гравитационное поле – центральное, т.е. оно консервативно. Значит можно записать закон сохранения энергии.

Учли, что

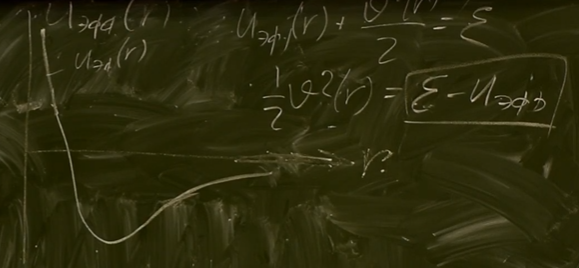
– удельная энергия. Итак

- удельный момент импульса

**Первая космическая скорость**.

Перепишем закон сохранения энергии

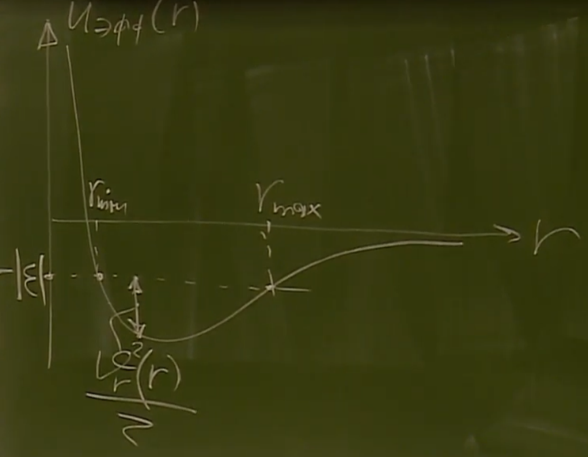
*–* эффективная потенциальная энергия, – удельная эффективная энергия

При - парабола (инфинитное движение)

При - гипербола (инфинитное движение)

При – эллипс (финитное движение)

Закон сохранения энергии для финитного движения:

**Первая космическая скорость – движение по окружности. На графике это минимум функции

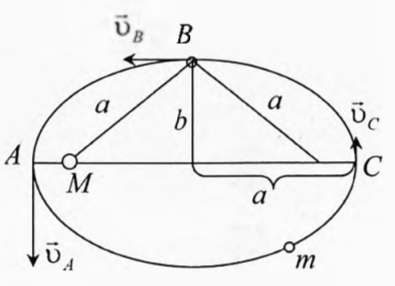
Проще перейти к другой переменной (результат не изменится)

Запишем окончательный результат в виде:

**Вторая космическая скорость**.

1. (минимум, чтобы уйти на бесконечность)
2. (движение вдоль радиус-вектора)

Предположив, что можно оценить радиус черной дыры (радиус Шварцшильда).

**Доказательство III закона**.

Весь эллипс радиус вектор заметет за время (период обращения). Площадь эллипса

В точке (рис):

По свойству эллипса можно показать, что

Закон сохранения энергии

в точках равна нулю, т.к. радиальная компонента не меняется. Поэтому

Решаем квадратное уравнение

Итак

**Теорема Гаусса**.

Поток векторного поля :

Напряжение гравитационного поля

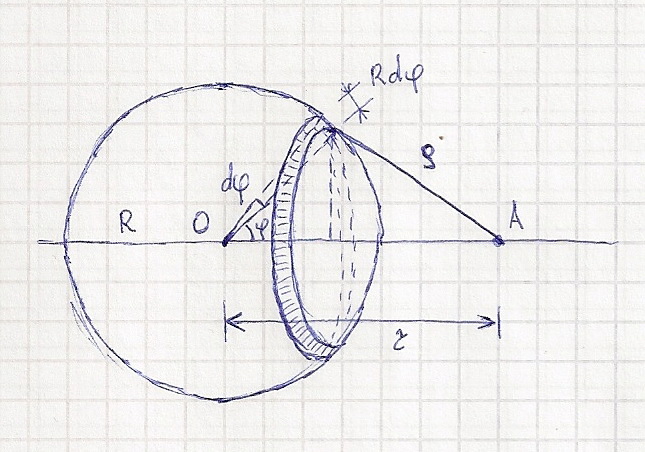
Вектор нормали по договоренности направлен наружу.

Телесный угол (измеряется в стерадианах):

Если несколько масс, то их потоки складываются (следует из принципа суперпозиции гравитационных полей) и мы просто получим, что суммарный поток гравитационного поля равен

**Задача\*\*[11]**. Найти потенциальную энергию и силу притяжения между однородной полой сферой массой и материальной точкой массой .

**Решение**. Возможны два случая – точка находится внутри сферы и вне ее. Рассмотрим тонкое кольцо на поверхности сферы (рис). Вычислим потенциальную энергию взаимодействия между кольцом и материальной точкой.



Его толщина , а площадь

Из пропорции

получаем, что масса кольца:

Точка равноудалена от кольца и сфера однородна, поэтому потенциальная энергия в точке :

Действительно, можно само кольцо мысленно разбить по его длине на малые элементы с массой . Потенциальная энергия найдется простым суммированием по всем таким элементам. И, так как расстояние одинаково, то суммироваться будут только массы . Получиться, в итоге, масса всего кольца.

Заметим, что

Поскольку

Вне сферы:

Это значит, что вне сферы ее можно считать материальной точкой, расположенной в центре сферы и с массой, равной массе сферы.

Внутри сферы:

Внутри сферы материальная точка не испытывает влияния со стороны сферы.

**Задача\*\*[11]**. Рассчитать напряженность гравитационного поля, т.е. силу, действующую на единицу массы, внутри и вне шара радиусом , заполненного веществом с постоянной объемной плотностью .

**Решение**. Вне шара его можно рассматривать как материальную точку, поэтому

Внутри шара на точку не оказывают влияния слои, расположенные над точкой. Это ясно, если мысленно разбить внешний слой на тонкие концентрические сферы и воспользоваться результатом предыдущей задачи. Поэтому

где - масса шара под точкой.

**Задача\*\*[11]**. Подсчитать гравитационную энергию шара, радиусом , равномерно заполненного веществом с объемной плотностью .

**Решение**. Гравитационная энергия шара — это работа, необходимая для его создания или полного разрушения (с обратным знаком). Рассмотрим внешний слой шара массой . Работа, необходимая для удаления этого слоя на бесконечность ( – масса оставшегося сферического слоя).

Поскольку