Величины, для описания которых нужно только одно число называются скалярными (температура, плотность, масса и т.п.). Если для определения величины требуется еще указать направление (скорость, напряжение, сила, перемещение и т.п.), то рассмотрение таких величин приводит к понятию вектора. Однако, понятием вектора, круг величин не ограничивается – существуют и более сложные классы величин, которые называются тензорами. Кроме того, бывает и так, что величина имеет численное значение и направление, но вектором не является.

Здесь будут собраны сведения из математики, которые пригодятся для решения задач по физике школьного уровня.

**Обозначение**

Нулевой вектор — это вектор нулевой длины. Обозначается **.**

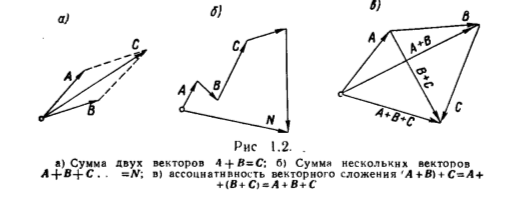
**Равенство векторов**. Векторы и равны, если имеют одинаковые длины (модули) и направления. Пишут просто

**Сложение и вычитание векторов**.

Сложение векторов вводится по правилу параллелограмма (рис.)

коммутативность:

ассоциативность:



**Умножение вектора на число**.

**Задача.** Показать, что отрезки, соединяющие середины любого четырехугольника образуют параллелограмм**.**

**\*Линейная зависимость векторов.**

Векторыназываются линейно зависимыми, если

Где – скаляры, не все равные нулю.

1. Два линейно зависимых вектора параллельны.
2. Три линейно зависимых вектора лежат в одной плоскости (компланарны).

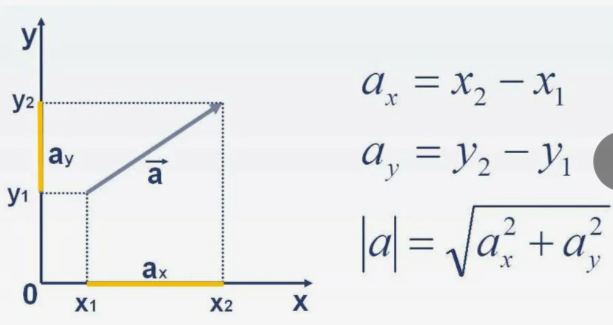
**\*Разложение вектора**.

Если два вектора и линейно независимы, то любой вектор , компланарный им, может быть единственным образом разложен по этим векторам:

Если три вектора и линейно независимы, то любой вектор , компланарный им, может быть единственным образом разложен по этим векторам:

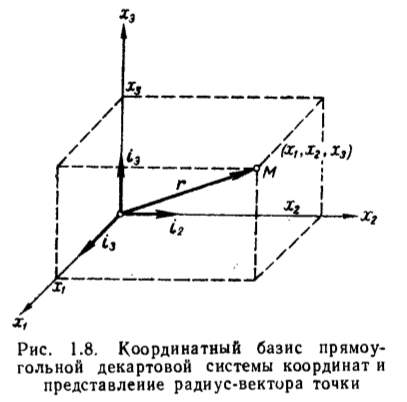
**Координаты вектора.**

Координаты вектора – длины его проекций в выбранной системе координат**.**

****

**Векторный базис**.

Радиус-вектор – это вектор, начало которого совпадает с началом системы координат. Координаты такого вектора совпадают с координатами точки на который он указывает.



Пусть векторы - орты прямоугольной системы координат.

Мы ввели правило суммирования по повторяющимся индексам – такая операция называется сверткой. Это позволяет сократить записи.

**Скалярное произведение векторов.**

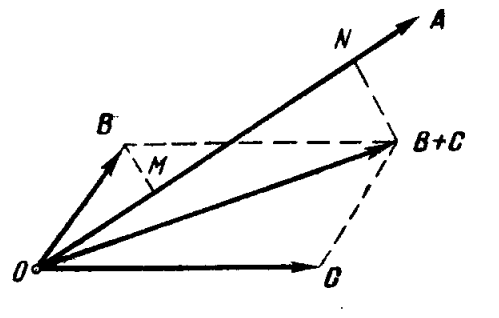
Скалярным произведением векторов называется произведение модулей этих векторов на косинус угла между ними.

Заметим, что это проекция вектора на направление вектора . Это можно записать в виде

**Свойства скалярного произведения.**

Коммутативность

Дистрибутивность

**Доказательство (рис)**:**

Из рисунка видно, что

Что и требовалось доказать.

Для того, чтобы векторы и были перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы скалярное произведение было рано нулю, т.е.

В силу этого свойства можем записать для ортов прямоугольной декартовой системы координат (ПДСК).

В прямоугольных декартовых системах координат орты будем обозначать или .

Доказательство.

В силу дистрибутивности, можем записать

Дистрибутивность очень важна в скалярном произведении.

**Примеры из геометрии**.

Пусть треугольник задан векторами и .

Тогда

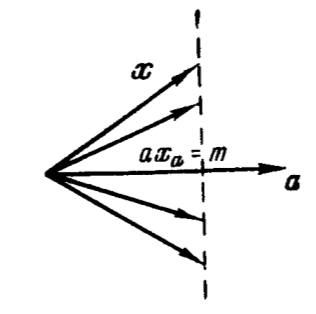
Это известная теорема косинусов.

Теорема Пифагора.

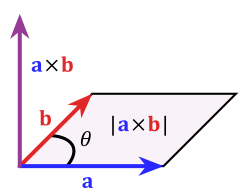
Пусть треугольник задан векторами и **,** тогда и мы сразу получим

**О делении векторов**.

Пусть . На рисунке показано, что вектор определен неоднозначно. Решений бесконечно много, поэтому операция деления не имеет практического смысла.



**Векторное произведение векторов**

Векторным произведением двух векторов называется вектор , модуль которого равен произведению длин векторов на синус угла между ними, а направление определяется правилом буравчика при вращении от вектора к вектору (на меньший угол по часовой стрелке).

Геометрически, это площадь треугольника на векторах и .

Для правой системы координат

В дальнейшем будет использована только правая система координат.

**Свойства векторного произведения.**

При доказательстве используется свойство дистрибутивности.

Другие формы записи

Можно также использовать символ Леви-Чивиты. Это внешнее произведение объектов.

**Тождество Эйлера-Лагранжа**.

**Смешанное произведение.**

Здесь это проекция на . Поэтому понятно, что смешанное произведение – объем параллелепипеда, построенного на векторах . Только следует иметь ввиду, что он определен с точностью до знака и может быть отрицательным в зависимости от угла между и .

**Свойства смешанного произведения**.

При циклической перестановке векторов значение смешанного произведения не меняется

Если два вектора одинаковы (или параллельны) смешанное произведение равно нулю.

Если три вектора компланарны (т.е. лежат в одной плоскости), смешанное произведение равно нулю.

**Двойное векторное произведение.**

**Свойства двойного векторного произведения**.

Докажем знаменитое правило «бац минус цаб».

**Направляющие косинусы.**

Рассмотрим некоторый вектор поместив его начало в начало системы координат. Если – углы между вектором и осями координат, можем записать

Величины называют направляющими косинусами.

Поскольку и , после несложных преобразований, получим

**Задача**. Показать, то если – направляющие косинусы вектора , а – направляющие косинусы вектора , то

**Решение**.

**Задача**. Найти направляющие косинусы биссектрисы угла, образованного векторами с направляющими косинусами соответсвенно.

**Решение**.