[**Сложение скоростей**](#Сложение_скоростей)**.**

[**Основные формулы кинематики**](#Основные_формулы_кинематики)**.**

[**Тело, брошенное под углом к горизонту**](#Тело_брошенное_под_углом_к_горизонту)**.**

[**Криволинейное движение**](#Криволин_движение)**.**

[**Вращение**](#Вращение)**.**

**Сложение скоростей.**

Истинная (мгновенная) или просто скорость, по определению

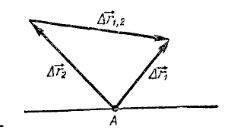
А средняя

В случае равномерного прямолинейного движения средняя скорость совпадает с мгновенной.

**Задача**. Корабль движется относительно берега со скоростью , а человек перемещается относительно корабля со скоростью . С какой скоростью двигается человек относительно берега. Движения считать поступательными (без вращений).

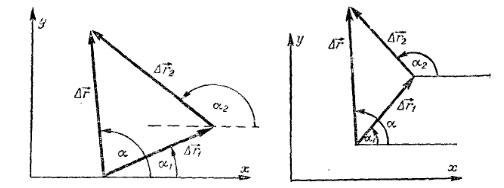
**Решение.**

**Задача**. Два корабля двигаются поступательно относительно берега со скоростями , . Найти скорость их относительного перемещения.

**Решение**.

**Задача**\*.

Тело движется половину времени со скоростью под углом к заданному направлению, а другую половину времени со скоростью и углом к заданному направлению. Найти среднюю скорость.

****

**Решение**.

По определению, мгновенная скорость это

А средняя

Заметим, что . Тогда

Так как

Эта запись корректна лишь потому, что при равномерном и прямолинейном движении средняя и мгновенная скорости совпадают. Иначе следовало бы писать .

В проекциях на указанное направление легко увидеть, что

Для этого нужно было вспомнить математическое правило сложения векторов – как сложение их одноименных координат (что эквивалентно геометрическому “правилу параллелограмма”).

**Задача**\*.

Тело совершает два последовательных, одинаковых по величине перемещения со скоростями и , и соответствующими им углами к заданному направлению. Найти среднюю скорость.

**Решение**.

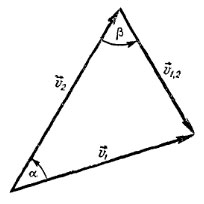
По определению средней скорости

По условию, (не путать с !!!). Для прямолинейного и равномерного движения

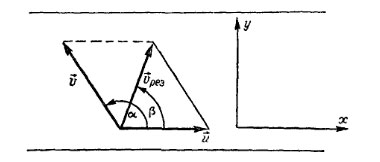
Можно, впрочем, записать формулу по-другому, если заметить, что – единичный вектор вдоль направления скорости . Если ввести для соответствующих единичных векторов обозначения ,

Тогда

**Задача**. Два корабля движутся со скоростями и под углом друг к другу. Найти скорость первого корабля относительно второго.

**Решение**.

**Задача**. Лодка передвигается относительно воды в реке со скоростью под углом к течению, скорость которого равна . Найти скорость лодки относительно берега.

**Решение**.

Проецируем на оси координат.

Теперь воспользуйтесь теоремами синусов и косинусов для решения задачи, а затем сравните результат.

**Основные формулы кинематики.**

**Задача**. Показать, что в случае равноускоренного движения имеют место соотношения:

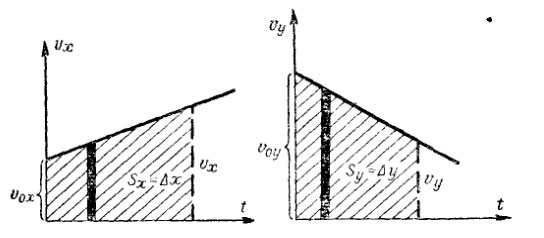
**Решение**. По определению, среднее ускорение на промежутке :

Для равноускоренного (равнопеременного) движения среднее ускорение совпадает с обычным ускорением

Средняя скорость

Теперь рассмотрим графики зависимостей

Известно, что проекция перемещения — это площади в соответствующих интервалах (площади трапеций).



С другой стороны,

Поэтому

Или

Тогда

Если использовать методы дифференциального исчисления, решение будет таким:

**Задача**. Показать, что в случае равноускоренного движения имеют место соотношения:

Можно найти связь между ускорением и перемещением для прямолинейного движения. В проекции на направление движения

Отсюда получим

тогда формулу можем записать так

Если тело двигается в произвольном направлении (не вдоль одной из осей), то в этом случае поступаем также, но в проекциях на оси. Получим два уравнения (для плоскости).

**Тело, брошенное под углом к горизонту.**

**Задача**\*.

Тело брошено под углом к горизонту с начальной скоростью . На примерах исследовать явление.

**Решение**.

**Уравнение траектории**. Естественно выбрать систему координат так, чтобы при разложении векторов часть их компонент обнулилась. Например, выбрав ось **,** мы получим .

Это парабола (уравнение вида ).

**Дальность полета S**. Без ущерба можно положить , разместив начало координат в точке броска.

В точке падения , поэтому

Это и есть дальность полета.

**Время полета T**.

Можно это вычислить иначе, заметив, что наверху . Тогда из проекции уравнения получается, что

Кроме того, можно вновь посчитать дальность полета.

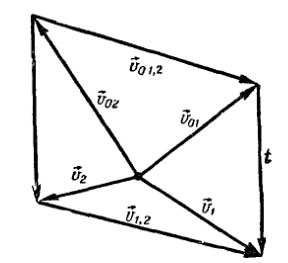
**Высота полета H**. Очевидно, ввиду симметрии параболы, она достигается в момент времени

Это можно получить из энергетических соображений.

**Угол, при котором дальность максимальна**.

**Угол, при котором время полета максимально**.

**Задача**. Два тела брошены одновременно из некоторой точки. Найти уравнение их относительного движения.

**Решение**.

Для каждого из тел можем написать

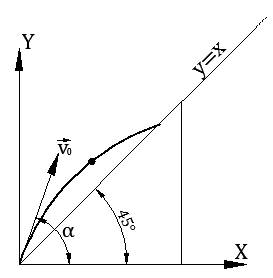
Вычитая одно из другого, находим

Поскольку , получаем, что тела двигаются относительно друг друга прямолинейно! Но, кроме того

Это означает, что тела двигаются относительно друг друга равномерно.

Нужно понимать, что сказанное справедливо до тех пор, пока не произошло падение одного из тел (скорость, по абсолютному значению, стала нулевой).

**Задача \***. Тело брошено у подножия горы (рис). Найти угол броска, при котором тело улетело бы как можно дальше.

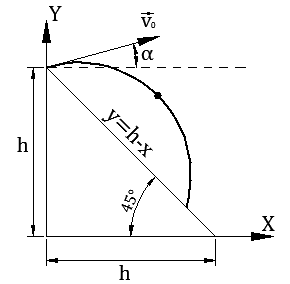
**Решение**. Траектория пересекает гору (т.е. линию ) в двух точках: . Воспользуемся этим.

Тогда уравнение траектории

В точке падения

Для , поэтому . Тогда

**Задача \***. Тело брошено со склона (рис.). Найти угол броска, при котором тело улетело бы как можно дальше.

**Решение**

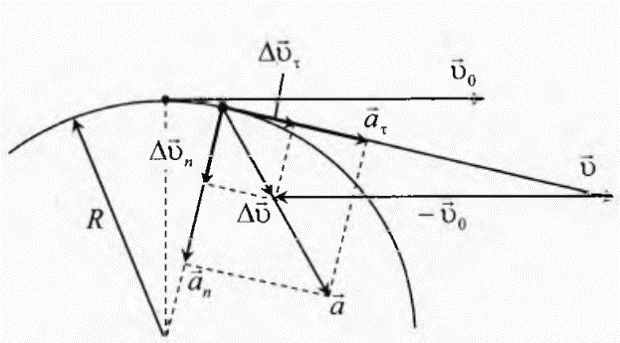
Рассуждаем аналогично. Уравнение склона: . Начало отсчета: . Уравнение траектории

В точке падения

Нетрудно убедиться, что максимальное значение будет для угла .

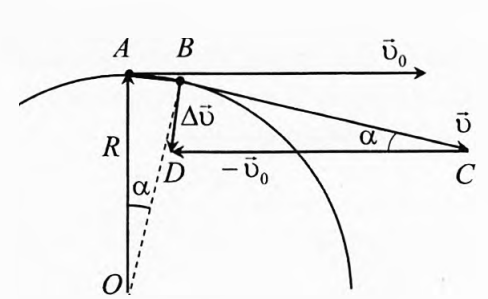
**Криволинейное движение**.

Произвольное криволинейное движение можно представить в виде дуг окружностей различного радиуса, т.е. свести к изучению вращательных движений по окружности.

Скорость при таком движении меняется как по модулю, так и по направлению, поэтому полную скорость можно разбить на две составляющие

-тангенциальное ускорение

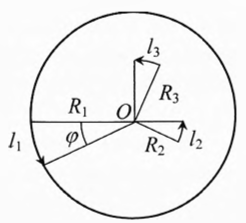
- нормальное ускорение

 Пусть тело равномерно вращается по окружности , тогда

**Вращение**.

**Частота вращения** – отношение количества оборотов, ко времени, за которое они совершаются

**Период вращения** – время , за которое совершается один оборот, т.е.

Поскольку частоту можно трактовать как число оборотов за единицу времени.

Поскольку отношение длины дуги к радиусу постоянная величина (рис), для измерения углов используется радианная мера

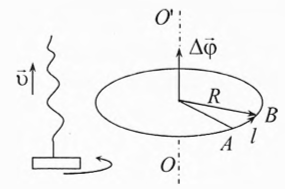
Величину называют **углом поворота**.

Для угла следовательно соответствует или

Для перевода радиан в градусы и обратно можно составлять пропорцию

Если тело совершило полных оборотов

По аналогии с тем, как это делалось при поступательных движениях, для характеристики вращательных движений вводят понятия углового перемещения, угловой скорости и углового ускорения.

**Угловое перемещение**. Угловое перемещение это разность углов между двумя положениями тела

Для решения более сложных задач вводят понятие вектора перемещения. Так называют вектор, направленный вдоль оси вращения. Его направление определяется правилом буравчика, а длина (модуль) равна величине угла поворота:

Это аналог приращения радиус-вектора , и, хотя он определен как вектор, строго говоря, это псевдовектор.

**Угловая скорость**. Определяется по аналогии с обычной скоростью

Если (период вращения), то , так что

**Угловое ускорение**. Определяется по аналогии с обычным ускорением

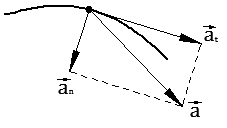
**Связь угловых и линейных характеристик**.

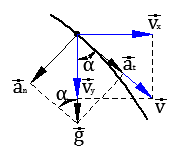
Доказательство:

Доказательство:

Поскольку угловая скорость и угловое ускорение формально введены как обычная скорость и ускорение, можно автоматически получить похожие формулы, просто заменив в формулах кинематики скорость на угловую скорость, ускорение на угловое ускорение, а перемещение на угловое перемещение

**Задача \***. Тело брошено под углом к горизонту. Найти нормальное и тангенциальное ускорение и радиус кривизны в точке.

**Решение**. Нормальное и тангенциальное ускорения получаются при разложении обычного ускорения на два вектора – касательный к траектории и нормальный в той же точке (рис). В свободном полете, когда на тело кроме силы тяжести ничего не действует , т.е. . Это заметно упрощает задачу.

Из второго рисунка можно увидеть, что

Осталось найти и . Пусть - угол, под которым тело запущено вдоль горизонта. Тогда можем написать :

Радиус кривизны, выраженный через нормальное ускорение

\*\* Радиус кривизны в общем случае

И вновь приходим к предыдущей формуле.