Лекция по вычислительной математике №1.

Список литературы:

Учебное пособие. Пак. В. Г., Черкассова
Демидович Б. П. - Основы вычислительной математики
Амосов. А. А. - Вычислительные методы для инженеров
Мысовских И. П. - Лекции по методам вычислений
Фаддеев Д. К. - Вычислительные методы линейной алгебры

Задачники:
Бахвалов Н. С. - Численные методы в задачах и упражнениях
Копчёнова Н. В. - Вычислительная математика в примерах и задачах

Введение

Вычислительная математика - прикладной раздел математики, в котором разрабатываются и исследуются методы численного решения типовых математических задач с применением компьютеров.

Особенности современных прикладных вычислительных задач:

1. Сложность математических моделей, реальных объектов, систем, процессов
2. Значительно возросший объём обрабатываемых данных и необходимых вычислений
3. Сложность применяемых методов вычислений и широкое использование алгоритмов модульной структуры

Этапы численного решения прикладной вычислительной задачи:

1. Постановка задачи (Формулировка на языке предметной области этой задачи)
2. Математическое моделирование задачи (Перевод на математический язык)
3. Постановка вычислительной задачи - конкретизация и выделение вычислительных свойств, точная формулировка требуемого результата
4. Выбор (создание) численного метода решения
5. Алгоритмизация и программирование
6. Получение и анализ результата
7. Коррекция математической модели или исходной задачи (При неудовлетворительном результате)

Элементарная теория погрешностей.

Все величины с которыми приходится иметь дело в вычислительной математике - являются приближёнными.

1.1 Источники и классификация погрешностей численных значений

Источники погрешностей:
1. Приближённость математических моделей
2. Погрешности исходных данных
3. Приближённость методов численного решения

4. Неизбежные потери точности при машинном представлении чисел и арифметических операциях над ними
Погрешности результатов делятся на устранимые (причины 1 и 2) и неустранимые (причины 3 и 4).

1.3 Абсолютные и относительные погрешности

Пусть a - точное, a^* - приближённое значение некоторой скалярной величины.

Определение. Погрешностью приближённого значения a^* называется:
$\varepsilon a^* = a - a^*$

Определение. Абсолютной погрешностью a^* называется:
$\Delta a^* = |\varepsilon a^*| = |a - a^*|$

Верхняя оценка абсолютной погрешности обозначается $\bar{\varepsilon} a^*$, то есть $\bar{\varepsilon} a^*$ - такое число, про которое заведомо известно, что $\varepsilon a \leq \bar{\varepsilon} a*$

Определение. Относительной погрешностью приближённого значения a^* называется отношение величин:
$\delta a^* =$

1.4 Значащие цифры в десятичной записи числа

Приближённые числа записываются в виде конечныых десятичных дробей, возможно с порядком, т.е. в виде:
$\frac{a_n a_{n-1} \ldots a_0 \beta}{m}$
Значащими цифрами считаются все цифры мантиссы, начинающиеся с первой ненулевой слева.
Замечание - нули справа убирать нельзы, поскольку они означают разряды числа, например, $0,56$ и $0,560$ - разные приближённые числа, так как первое дано с двумя знаками после запятой, а второе - с тремя.

Есть два правила округления:
По усечению - просто отсечение всех цифр, до которой мы округляем
По дополнению - когда также отбрасываются все значащие цифры правее той, до которой производится округление, при необходимости изменяется порядок, при этом руководствуются правилами:
1. если первая слева отбрасываемая цифра меньше пяти, то оставшиеся не меняются , как при усечении
2. если эта цифра больше пяти или она равна пяти и среди остальных отбрасываемых есть ненулевые, то последняя сохраняемая цифра увеличивается на единицу:
3. если эта цифра равна пяти и все остальные отбрасываемые есть нули, то последняя сохраняемая цифра не меняется, если она чётная, и увеличивается на единицу, если она нечётная.

Для выявления верных цифр существует простое правило, которое позволяет сразу их находить, не проверяя каждую значащую цифру. Оно формулируется следующим образом:
1. абсолютная погрешность округляется с избытком до одной значащей цифры;
2. если эта цифра не превосходит пяти, то все разряды левее её разряда считаем верными, если же она больше пяти, то соседний слева разряд будет сомнительным, все остальные левее него — верными.

1.5 Правила записи приближённых чисел

При приближённых вычислениях руководствуются следующими правилами:
1. В промежуточных результатах оставляют, кроме верных, одну-две сомнительные цифры;
2. Окончательный результат округляют с сохранением не более одной сомнительной цифры.

1.6 Погрешности арифметических операций

Теорема №1: Для абсолютных погрешностей суммы и разности имеет место следующая оценка:
$\Delta(a \pm b) \leq \Delta a \pm \Delta b$
Доказательство:
$\Delta(a \pm b) = |(a \pm b) - (a \pm b)^*| = |(a \pm b) - (a^* \pm b^*)| = |(a - a^*) \pm (b - b^*)|$
Далее, применяя известное свойство модуля $|x \pm y| \leq |x| + |y|$, получаем:
$\Delta(a \pm b)^* = |(a - a^*) \pm (b - b^*)| \leq |a - a^*| + |b - b^*| = \Delta a^* + \Delta b^*$

Теорема №2: Если a, b - ненулевые числа одного знака, то:
1. Для относительной погрешности суммы имеет место оценка:
$\delta(a + b)^* \leq M$, где $M = max(\delta a^*, \delta b^*)$ 2. Для относительной погрешности разности имеет место оценка: $\delta(a + b)^* \leq M \cdot \theta$, где $\theta = |\frac{a+b}{a-b}|$

Теорема №3: Для относительной погрешности произведения имеет место

оценка:
$\delta(ab)^* \leq \delta a^* + \delta b^* + \delta a^* \cdot \delta b^*$

Теорема №4: Если b^* - ненулевое число и $\delta b^* < 1$, то для относительной погрешности частного имеет место оценка:
$\delta(\frac{a}{b})^* \leq \frac{\delta a^* + \delta b^*}{1 - \delta b^*}$