1. Игрок играет в казино в следующую игру. Делает ставку c, говорит крупье число от 1 до 6, после чего бросает три кубика. Если его число не выпало, то игрок ничего не получает, т. е. проигрывает 100 рублей; считаем, что в этом случае его выигрыш равен -100. Если же число выпало, то игрок получает свою ставку обратно и получает выигрыш — за каждое выпадание числа, казино платит игроку ставку, которую он поставил. Так, если игрок поставил сто рублей и его число выпало два раза, то игрок получит выигрыш 200 рублей, а если не выпало ни разу, то его выигрыш равен -100 рублей. Найдите математическое ожидание выигрыша игрока, при ставке 100 рублей.

По формуле мат. ожадания $E = 3\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot 100 + 3\cdot 200\frac{1}{36}\cdot\frac{5}{6} + 300\frac{1}{216} - 100\frac{125}{216} = -\frac{1700}{216} = -\frac{425}{54}$

2. В лотерее на выигрыши уходит 40% от стоимости проданных билетов. Каждый билет стоит 100 рублей. Докажите, что вероятность выиграть 5000 рублей (или больше) меньше 1%.

Доказательство. Докажем от противного:

Пусть 1% или больше. В таком случае математическое ожидание выигрыша равно $E_0 \cdot 0.99 + 0.01 \cdot 5000 \geq 50$.

Но в таком случае получается, что на каждый билет в среднем ожидается как минимум 50 рублей выигрыша, т.е. 50% стоимости билета, откуда становится ясно, что на все выигрыши уходит более 50% стоимости проданных билетов, что противоречит условию.

Значит, предположение неверно и вероятность выиграть $\geqslant 5000$ рублей менее процента.

□

Замечание. Подробности о проведении лотереи неизвестны. Приведённой информации в условии достаточно для решения задачи.

3. Выбирается случайное слово длины 20 в алфавите $\{a, b\}$ (все слова равновозможны). Найдите математическое ожидание числа подслов ab в этом слове.

Решим задачу через рекурсию, найдя количество подслов ab.

Заметим, что при выделении подслова ab, мы будем решать аналогичную задачу, но уже для слова длины $n-2$. Это слово может стоять на $n-1$-ой позиции.

Таким образом, число вхождений подслова ab равно $(n-1)\cdot 2^{n-2}$. Общее же количество слов 2^n.

Тогда мат ожидание равно $\frac{(n-1)\cdot 2^{n-2}}{2^n} = \frac{n-1}{4}$.

4. *Инверсией* в перестановке $a_1a_2\ldots a_n$ называется такая пара индексов $i < j$, что $a_i > a_j$. Пусть π — случайная перестановка (все перестановки равновозможны). Найдите математическое ожидание $\mathrm{E}[I(\pi)]$ количества инверсий $I(\pi)$.

Поскольку из курса ОВАиТК мы знаем, что для каждой перестановки существует обратная, то, очевидно, вероятность встретить инверсию равна $\frac{1}{2}$.

В таком случае мат ожидание количества инверсий равно $\frac{1}{2}\frac{n\cdot(n-1)}{2} = \frac{n\cdot(n-1)}{4}$.

5. Вероятностное пространство — перестановки $(x_1, \ldots, x_n)$ элементов от 1 до n. Найдите математическое ожидание чисел, не поменявших своё место. Формально, случайная величина — количество элементов множества $\{i \mid x_i = i\}$.

Можно заметить, что эта задача изоморфна задаче о рассеянной секретарше, которая разбиралась в курсе АЛКТГ. То есть здесь вероятность, что число не поменяло свое место это вероятность, что письмо дойдет до адресата в задаче о секретарше, т.е. $\frac{1}{n}$.

В таком случае математическое ожидание будет равно $\sum_1^n \frac{1}{n} = 1$.

6. Пусть X — неотрицательная случайная величина. Известно, что $\mathrm{E}[2^X] = 5$. Докажите, что

$$\mathsf{P}[X \geqslant 6] < 1/10.$$

Доказательство. Вновь попробуем доказать от противного:

Пусть вероятность числа $\geqslant 6$ больше или равна $\frac{1}{10}$.

В таком случае математическое ожидание будет равно $E_0 + (\frac{1}{10} + \alpha)2^{6+\beta} \geqslant E_0 + \frac{1}{10}2^6 = E_0 + 6.4 > 5$, что противоречит условию. Значит, предположение неверно и вероятность, что $X \geqslant 6 < \frac{1}{10}$. $\square$

7. В неориентированном графе без петель и кратных ребер графе n вершин и $nd/2$ рёбер (то есть средняя степень вершины равна d), $d \geqslant 1$. Докажите, что в графе есть независимое множество размера не меньше $n/2d$.

И вновь воспользуемся нашими знаниями из курса АЛКТГ.

Мы доказывали следующую теорему: $\chi(G) \geqslant \frac{n}{\alpha(G)}$, где χ – это хроматическое число, а $\alpha(G)$ – число независимости.

Из этой теоремы $\alpha(G) \geqslant \frac{n}{\chi(G)}$.

Очевидно, что при средней степени вершины d максимальное значение хроматического числа при наличии клики K_{2d}, т.е. максимально возможное хроматическое число для графа с таким количество вершин равно $2d$.

Значит, $\alpha(G) \geqslant \frac{n}{2d}$, т.е. в графе найдется независимое множество не меньше $\frac{n}{2d}$.

Подсказка. В решении этой задачи поможет случайное множество V_p, в которое каждая вершина входит с вероятностью p независимо от других вершин. (При подходящем значении параметра p.)