1. 24 числа

Количество перестановок – 24!.

Составим условие для эквивалентной задачи: найти вероятность, что число 24 находится среди первых 12-ти чисел. Эта задача действительно эквивалентна, поскольку число 24 в любом случае будет присутствовать либо среди первых 12 чисел, либо среди последних 12, и "победит"та половина, в которой есть число 24 (т.к. оно наибольшее при любом раскладе).

Таким образом, искомая вероятность равна вероятности, что число 24 находится среди первых 12 чисел, т.е. $P = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$ – это итоговый ответ.

2. Чет-нечет

Среди чисел от 1 до 100 на 3 делится ровно 33, из которых 16 четных.

Вероятность, что число делится на 2 при условии, что оно делится на 3, будет равна $\frac{16}{33}$

3. Лото

Всего исходов – C_{36}^5

Рассчитаем вероятности:

1) Среди выбранных чисел есть 2: $\frac{C_{35}^4}{C_{36}^5} = \frac{5}{36}$ (вероятность, что среди чисел есть 3 такая же).

2) Среди выбранных чисел есть 3 при условии, что среди них есть 2: $\frac{C_{34}^3}{C_{35}^4} = \frac{4}{35}$.

Т.к. $\frac{4}{35} \neq \frac{5}{36}$, то рассматриваемые события не являются независимыми.

4. Всюду определенная функция

Если f инъективна или если f не инъективна, то событие $f(1) = x$ для всех x равновероятно вне зависимости от первого события.

Значит, рассматриваемые собылия не независимы.

5. Коррумпированное жюри

Рассмотрим возможные вероятности при выборе решения первых двух членов жюри:

1) Оба выбрали правильное: p^2.

2) Один выбрал правильное, а другой – неправильное: $2 \cdot p(1-p)$.

3) Оба выбрали неправильное: $(1-p)^2$

(Несложно убедиться, что сумма всех этих вот вероятностей равна 1, что не противоречит законам теории вероятности и элементарной логиики).

Запишем формулу расчета вероятности с учетом третьего члена жюри:

$p^2 \cdot 1 + 2 \cdot p(1-p) \cdot \frac{1}{2} + (1-p)^2 \cdot 0 = p^2 + p - p^2 = p.$

Можно заметить, что эта вероятность совпадаем с вероятностью принятия правильного решения одним честным членом жюри.

6. Казнить нельзя помиловать!

Вроде бы ответ очевиден, но нужно придумать доказательство...

Если f – вероятность вытащить белый шар из первой коробки, а s – вероятность вытащить белый шар из второй коробки, то вероятность вытащить белый шар будет равна $\frac{1}{2}f + \frac{1}{2}s = \frac{1}{2}(f+s)$.

Таким образом, нам нужно добиться, чтобы сумма $f + s$ была максимальной.

$f = \frac{f_n}{f_d}, s = \frac{s_n}{s_d}$, причем $f_d + s_d = 20$ и $f_n + s_n = 10$.

Таким образом $f + s = \frac{f_n}{f_d} + \frac{10-f_n}{20-f_d} = \frac{f_n \cdot (20-f_d) + f_d \cdot (10-f_n)}{f_d \cdot (20-f_d)}$.

Если рассматривать $f = f(f_d)$, то при $f_d = 20$ или $f_d = 0$. (достаточно очевидно, чтобы не показывать вычисления)

Таким образом, мы достигнем идеала (в смысле идеальной для нас ситуации), если в одной из коробок будет 10 белых шаров и 20 шаров всего, а во второй - 0 шаров. Но абсолютный идеал в условиях данной задачи недостижим, поэтому мы кладем 1 белый шар во вторую коробку, где он будет скучать в одиночестве.

Тогда вероятность будет равна $\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{19} = \frac{14}{19}$ – именно с такой вероятностью узника казнят!

7. 20-типартийный матч

Итак, у нас осталось как максимум 5 партий до конца игры, поэтому хочется сказать, что количество вариантов развития событий – 2^5, но, увы, это не так, ведь если первый игрок выиграет 2 партии, то он побеждает в матче (т.к. у него наберется 10 побед). И аналогично второй игрок побеждает, если выиграет 3 партии.

Посчитаем общее количество исходов:

1) Первый выиграл 0 партий: 1 исход

2) Первый выиграл 1 партию (значит, второй выиграл 3): $C_3^1 = 3$ исходов.

3) Первый выиграл 2 партии (второй выиграл не более двух): $1! + 2! + C_3^1 = 6$ исходов.

Итого <u>10</u> исходов.

Нас устраивает, когда первый выиграл 2 партии (6 исходов) $\Rightarrow P(W2) = \frac{6}{10}$ – это ответ.

8. Бой яиц

Назовем игроков по классике Петей (первый игрок) и Васей (второй игрок).

Пусть Петя победил в первых n раундах. В таком случае, если рассматривать первые $n+1$ яиц, то Петино яйцо самое крепкое из них. Значит, если Вася возьмет в $n+1$-ом раунде $n+2$-ое яйцо, то оно по прочности может занять с равной вероятностью (по условию задачи) любое из $n+2$-ух мест. Причем его яйцо будет прочнее Васиного только в том случае, если оно займет позицию по прочности на самом верху (то есть 1 благоприятный исход из $n+2$). Но мы вроде ищем вероятность победы Васи. Поскольку ничья невозможно, то кто-то из них победит с вероятностью 1, значит, Вася победит с вероятностью $1 - \frac{1}{n+2} = \frac{n+1}{n+2}$ – это и будет ответом.

9. Двоичные слова

Количество исходов всего – 2^21. Но нам это число не пригодится, потому что мы будем решать задачу из соображения симметрии.

Заметим, что для любого набора нулей и единиц, который нам подходит, найдется набор (если инвертировать число), который нам не подходит. И аналогично для каждого набора, который нам не подходит, существует набор (если инвертировать число), который нам подходит.

Таким образом, инвертирование числа биективно, откуда следует, что количества благоприятных и неблагоприятных исходов равны.

Значит, искомая вероятность – $\frac{1}{2}$.