1 Домашнее задание за 4-ую неделю

Задание 1

Поскольку N – нормальная подгруппа, то в ней определена та же операция, что и в G.

В таком случае $ab \in N, abab \in N \dots ababab \dots (mtimes)ab \in N$. Осталось доказать, что $(ab)^m = a^m b^m$. Докажем, что $abab = a^2b^2$ с помощью ММИ:

Из определения нормальной подгруппы $a^{-1} \cdot ab = ab \cdot a^{-1} \Rightarrow b = aba^{-1}$

Отсюда получаем $abab = aaba^{-1}ab = aabb = a^2b^2$. Значит, N содержит a^2b^2

Пусть верно для k. Докажем для $k+1$: $ab \cdot (ab)^k = (ab)^k \cdot ab$

$aba^kb^k = aaba^{-1}a^kb^k = a^2ba^{k-1}b^k = \dots = a^{k+1}b^{k+1} = \dots = a^kb^k \cdot ab$.

Значит, $a^{k+1}b^{k+1} \in N$

(*) Пользуемся свойством (доказано выше), что $b = a^{-1}ba$, подставляя вместо всех b это значение, и доказываем, что достигается равенство, откуда следует, что N содержит и то, и другое для любого целого m.

Задание 2!

1. Берем группу S_3 и ее подгруппу $H = e, (1,2)$

$H(1,3) = (1,3), (1,3,2)$, но $(1,3)H = (1,3), (1,2,3) \Rightarrow$ подгруппа не является нормальной.

Задание 3

Построим гомоморфизм $\phi : Z^3 \to Z : (x,y,z) \in Z^3 \to x+y+z \in Z$

Т.к. ϕ – сюръективно, то $Imf = Z$

Т.к. ϕ – гомоморфизм, то $Z^3/Ker\phi \cong Z$ – это и будет искомой факторгруппой

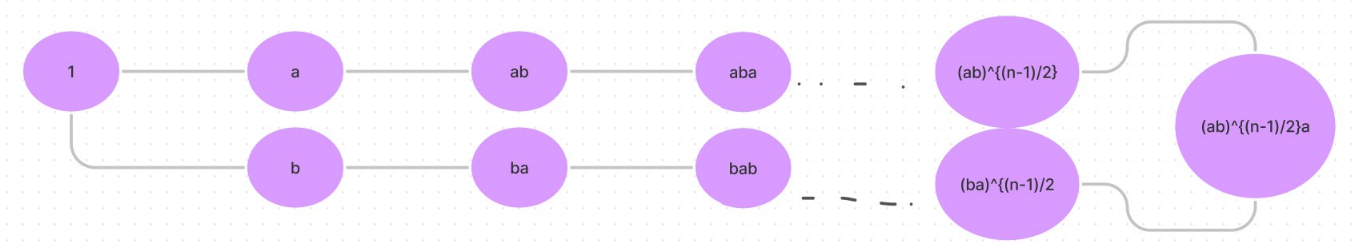
Задание 4

$(10a+3b) - (8a+9b) = 0 = 2a - 6b$

Тогда имеем из (1): $5(2a) + 3b = 5(6b) + 3b = 33b = 0$ – значит, группа конечная.

$33b = 0 \Rightarrow 34b = b$, то есть $b = 34b = 4b + 30b = 4b + 10a = b$. То есть мы не можем выразить a через b (и наоборот). Значит, группа циклической не является.

Задание 5



Комментарий: Здесь приведен случай для нечетного n. Если n будет четным, то изображение графа будет таким же, но крайней правой вершиной будет $(ab)^{\frac{n}{2}}$. В процессе решения использовалось: $b = (ab)^{n-1}a$.

2 Домашнее задание за 4-ую неделю

Задача 6

2.1

$\phi : Q \to Q : \forall x \in Q \to \phi(x) = \frac{1}{2}\{x\}$

2.2

Факт, что группа бесконечна, очевиден и следует непосредственно из теоремы о Гомоморфизме (то есть мы имеем факторгруппу по ядру, которая изоморфна гомоморфному образу группы, который в свою очередь бесконечен).

Факт, что каждый элемент группы имеет конечный порядок, следует из счетности рациональных чисел.