Task 1

Доказательство. Рассмотрим такие числа a и b, что $b = a^{-1}$ и $b \cdot a = e$. (такое число b найдется для любого a по условию)

Аналогично запишем для b, т.е. найдется $c = b^{-1} : c \cdot b = e$.

Далее получаем:

$$\begin{cases} c \cdot (b \cdot a) = c \cdot e \\ (c \cdot b) \cdot a = e \cdot a \end{cases}$$

По 1-ому свойству моноида $c \cdot (b \cdot a) = (c \cdot b) \cdot a$, откуда следует, что $c \cdot e = e \cdot a$.

Далее, воспользовавшись 2-ым свойством моноида, получаем $c = a$, откуда $a \cdot b = b \cdot a = e$, где $b = a^{-1}$, что является 3-им свойством группы. □

Task 2

Таблица Кэли для группы G порядка 4:

.	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Явный пример группы: (Z/4Z, |-|), где бинарный оператор |-| работает следующим образом: x |-| y = |x - y| при x + y $\neq$ 3 и |x + y| при x + y = 3.

.	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

Task 3

Ответ: нет, не образует, т.к. не выполнено 2-ое свойство группы.

Task 4

Доказательство. 1) Начнем с простого: из курса линейной алгебры нам известно, что произведение матриц ассоциативно, значит, первое свойство выполняется.

2) Второе свойство тоже очевидно и следует непосредственно из существования единичной матрицы размера n.

3) Сначала стоит вспомнить тот факт, что произведение верхней треугольной матрицы на другую верхнюю треугольную матрицу дает в результате верхнюю треугольную матрицу (в этом можно убедиться, если расписать матричное произведение: когда мы будем считать значения в ячейках нижнего треугольника, у нас в каждом слагаемом либо элемент из 1-ой матрицы будет нулевым, либо элемент из второй матрицы. В результате получится сумма из n нулей, которая, очевидно, в итоге даст 0). Также стоит отметить, что обратная матрица всегда будет

существовать, т.к. определитель любой матрицы из нашей группы ненулевой (равен 1). Значит, 3-е свойство тоже выполнено.

Поскольку все три свойства выполняются, то рассматриваемое множество образует группу по операции матричного умножения. $\square$