Работа 1.4.8
Измерение модуля Юнга методом акустического резонанса.

Работу выполнил Павлов Михаил Б01-109

1. Аннотация

Основная цель данной лабораторной работы - поиск модуля Юнга для стержней различных материалов. Это осуществляется с помощью осциллографа, а именно экспериментатор находит такую частоту акустических колебания стержня, при которой возникает акустический резонанс, т.е. резкое увеличение амплитуды. С помощью найденной частоты и измеренной длины стержней находится скорость акустических волн. Далее с помощью небольших цилиндров того же материала с высокой точностью измеряется плотность. Зная плотность материала и скорость волны, можно уже получить модуль Юнга для наших стержней.

2. Теоретические сведения

Введение

Основной характеристикой упругих свойств твёрдого тела является его модуль Юнга E. Согласно закону Гука, если к элементу среды приложено некоторое механическое напряжение σ, действующее вдоль некоторой оси x (напряжения по другим осям при этом отсутствуют), то в этом элементе возникнет относительная деформацию вдоль этой же оси $\varepsilon = \Delta x/x_0$, определяемая соотношением

$$\sigma = \varepsilon E \tag{1}$$

Если с помощью кратковременного воздействия в некотором элементе твёрдого тела создать малую деформацию, она будет далее распространяться в среде в форме волны, которую называют акустической или звуковой. Распространение акустических волн обеспечивается за счёт упругости и инерции среды. Волны сжатия/растяжения, распространяющиеся вдоль оси, по которой происходит деформация, называются продольными. Как будет строго показано далее, скорость u распространения продольной акустической волны в простейшем случае длинного тонкого стержня определяется соотношением

$$u = \frac{E}{\rho}, \tag{2}$$

где ρ — плотность среды.

Рассмотрим стержень постоянного круглого сечения, радиус R которого много меньше его длины L. С точки зрения распространения волн стержень можно считать тонким, если длина λ

звуковых волн в нём велика по сравнению с его радиусом: $\lambda >> R$. Такая волна может свободно распространяться только вдоль стержня, поэтому можно считать, что стержень испытывает деформации растяжения и сжатия только вдоль своей оси.

Акустическая волна, распространяющаяся в стержне конечной длины L, испытает отражение от торцов стержня. Если при этом на длине стержня укладывается целое число полуволн, то отражённые волны будут складываться в фазе с падающими, что приведёт к резкому усилению амплитуды их колебаний и возникновению акустического резонанса в стержне. Измеряя соответствующие резонансные частоты, можно определить скорость звуковой волны в стержне и, таким образом, измерить модуль Юнга материала стержня. Акустический метод является одним из наиболее точных методов определения упругих характеристик твёрдых тел.

Уравнение волны в тонком стержне

Получим дифференциальное уравнение, описывающее распространение упругих волн в тонком стержне. Направим ось x вдоль геометрической оси стержня (рис. 1). Разобьём исходно недеформированный стержень на тонкие слои толщиной Δx. При продольной деформации среды границы слоёв сместятся в некоторые новые положения. Пусть плоскость среды, находящаяся исходно в точке x, сместилась к моменту t на расстояние $\xi(x,t)$. Тогда слой, занимавший исходно отрезок $[x; x+\Delta x]$, изменил свой продольный размер на величину $\Delta\xi = \xi(x+\Delta X, t) - \xi(x,t)$. Пользуясь малостью Δx и определением производной, получим $\Delta\xi = \frac{\partial\xi}{\partial x}\Delta x$. Таким образом, функция

$$\varepsilon = \frac{\partial\xi}{\partial x} \tag{3}$$

это относительное удлинение элемента стержня в точке x.

Заметим, что смещение слоёв $\xi(x,t)$ является функцией не только координаты, но и времени, поэтому мы используем обозначения для частных производных по координате и времени.

Далее, согласно закону Гука, имеем

$$\sigma = \varepsilon E = E\frac{\partial\xi}{\partial x} \tag{4}$$

Здесь напряжение равно $\sigma = F§$, где F — продольная сила, действующая на элементарный участок Δx, S — площадь поперечного сечения стержня. Напряжения, действующие на стенки рассматриваемого элемента в сечениях x и $x+\Delta x$, будут различными. Из-за этого возникнет результирующая возвращающая сила, стремящаяся вернуть элемент стержня в исходное (недеформированное и несмещённое) состояние:

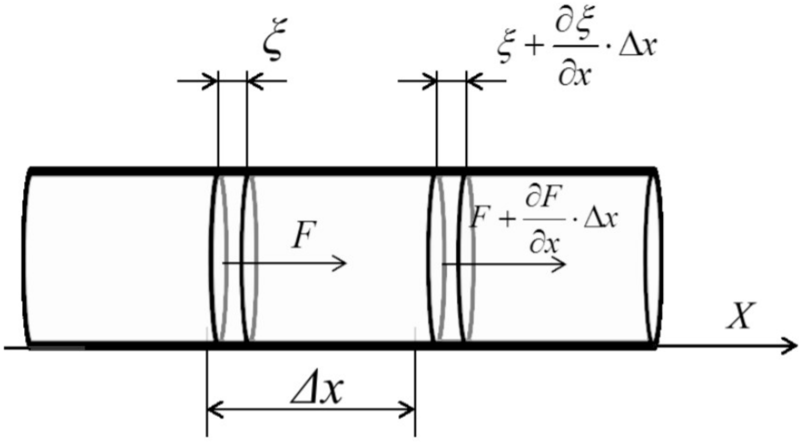

Рис. 1. Силы, действующие на элемент стержня при продольных колебаниях

$$\Delta F = S\sigma(x+\Delta x) - S\sigma(x) = \frac{\partial\sigma}{\partial x}S\Delta x = \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}ES\Delta x. \tag{5}$$

Эта сила вызовет ускорение движение элемента стержня массой $\Delta m = S\rho\Delta x$ вдоль оси x. Ускорение рассматриваемого элемента — это вторая производная по времени от смещения его границ:

$$a = \frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}$$

Тогда используя 2-ой закон Ньютона и соотношения (3) - (5), получим уравнение движения среды:

$$S\rho\Delta x\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = SE\Delta x\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}.$$

Наконец, вводя величину с размерностью скорости согласно (2), запишем полученное уравнение в окончательном виде:

$$\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = u^2\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \tag{6}$$

Это уравнение носит название волнового. Оно имеет универсальный характер и описывает волны самой разной природы: акустические волны в твёрдых телах, жидкостях и газа, волны на струне, электромагнитные волны и т.п. Как будет показано далее, величина u в уравнении (6) имеет смысл скорости распространения волны.

Бегущие акустические волны. Скорость волны

Покажем, что произвольная функция вида $\xi(x,t) = \phi(x - ut)$ — то есть функция, зависящая только от комбинации $X = x - ut$, — является решением волнового уравнения (6). Действительно, прямой подстановкой в (6), используя формулу производной сложной функции, убеждаемся, что волновое уравнение обращается в тождество при любой функции ϕ:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} \equiv u^2\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$$

Как показывается в математических курсах, общее решение дифференциального уравнения (6) представимо в виде суммы двух волн произвольной формы, бегущих в противоположные стороны со скоростями $\pm u$:

$$\xi(x,t) = \phi_1(x - ut) + \phi_2(x + ut), \tag{7}$$

где u — скорость волны, ϕ_1 и ϕ_2 — функции, вид которых в конкретной задаче определяется из начальных и граничных условий.

Собственные колебания стержня. Стоячие волны

В случае гармонического возбуждения колебаний с частотой f продольная волна в тонком стержне может быть представлена в виде суперпозиции двух бегущих навстречу гармонических волн:

$$\xi(x,t) = A_1 sin(\omega t - kx + \varphi_1) + A_2 sin(\omega t + kx + \varphi_2), \tag{8}$$

где $\omega = 2\pi f$ — циклическая частота. Коэффициент k называют волновым числом или пространственной частотой волны.

Далее, перепишем исследуемую функцию (8), используя граничные условия равенства амплитуд и фазы и формулу суммы синусов:

$$\xi(x,t) = 2A cos(kx) sin(\omega t + \varphi). \tag{9}$$

Колебания вида (9) называют гармоническими стоячими волнами.

Наконец, воспользовавшись вторым граничным условием, придем к уравнению $sinkL = 0$, решения которого определяют набор допустимых значений волновых чисел k. Выражая это все через длину волны λ, получим

$$\lambda_n = \frac{2L}{n}, n \in N \tag{10}$$

Таким образом, для возбуждения стоячей волны на длине стержня должно укладываться целое число полуволн.

Допустимые значения частот

$$f_n = \frac{u}{\lambda_n} = n\frac{u}{2L}, n \in N \tag{11}$$

называют собственными частотами колебаний стержня длиной L. Именно при совпадении внешней частоты с одной из частот f_n в стержне возникает акустический резонанс.

Точки с максимальной амплитудой называются пучностями смещения, точки с минимальной (нулевой) амплитудой — узлами смещения. Номер гармоники n определяет количество узлов смещения на стержне. Заметим, что согласно закону Гука (1) в пучности смещения имеет место узел напряжения, и, наоборот, в узлах смещения имеется пучность напряжения (в частности, на свободных торцах стержня напряжение всегда нулевое, а деформация максимальна).

3. Экспериментальная установка

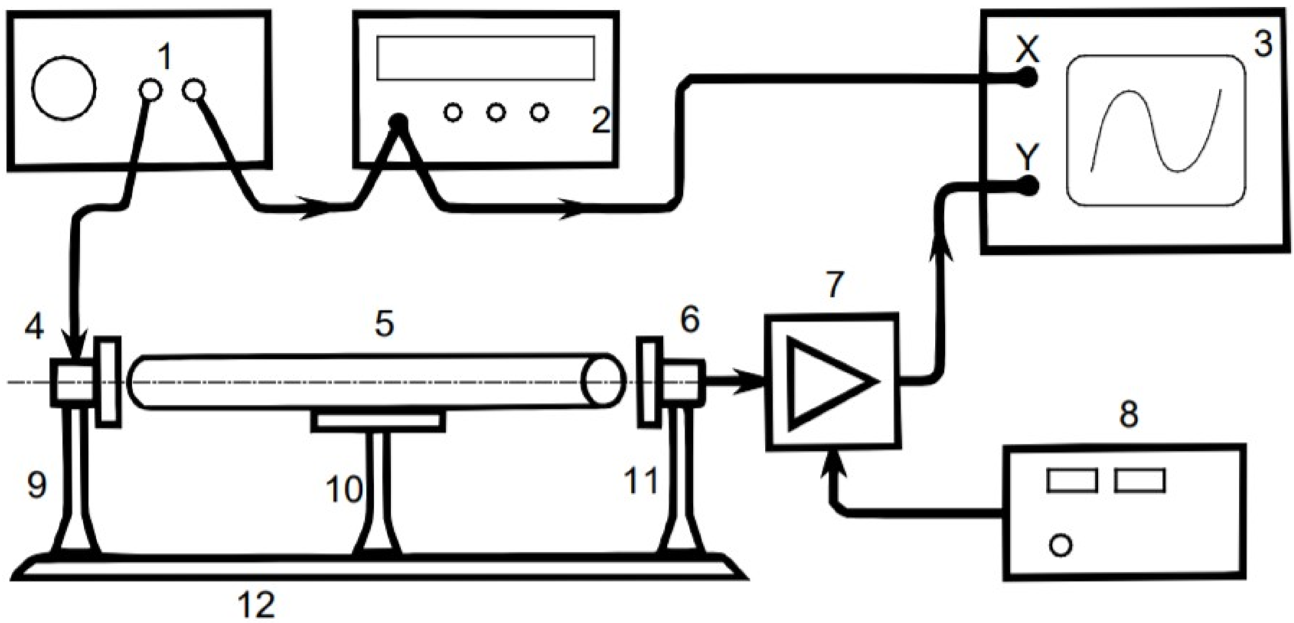

Рис. 2. Схема установки: 1 — генератор звуковой частоты, 2 — частотомер, 3 — осциллограф, 4 — электромагнит-возбудитель, 5 — образец, 6 — электромагнитприёмник, 7 — усилитель звуковой частоты, 8 — блок питания усилителя, 9, 11 — стойки крепления электромагнитов, 10 — стойка крепления образца, 12 — направляющая

Схема экспериментальной установки приведена на рис. 2. Исследуемый стержень 5 размещается на стойке 10. Возбуждение и приём колебаний в стержне осуществляются электромагнитными преобразователями 4 и 6, расположенными рядом с торцами стержня. Крепления 9, 11 электромагнитов дают возможность регулировать их расположение по высоте, а также перемещать вправо-влево по столу 12.

Электромагнит 4 служит для возбуждения упругих механических продольных колебаний в стержне. На него с генератора звуковой частоты 1 подаётся сигнал синусоидальной формы: протекающий в катушке электромагнита ток создаёт пропорциональное ему магнитное поле, вызывающее периодическое воздействие заданной частоты на торец стержня (к торцам стержней из немагнитных материалов прикреплены тонкие стальные шайбы). Рядом с другим торцом стержня находится аналогичный электромагнитный датчик 6, который служит для преобразования механических колебаний в электрические. Принцип работы электромагнитных датчиков описан подробнее ниже.

Сигнал с выхода генератора поступает на частотомер 2 и на вход канала X осциллографа 3. ЭДС, возбуждаемая в регистрирующем электромагните 6, пропорциональная амплитуде колебаний торца стержня, усиливается усилителем 7 и подаётся на вход канала Y осциллографа.

Изменяя частоту генератора и наблюдая за амплитудой сигнала с регистрирующего датчика, можно определить частоту акустического резонанса в стержне. Наблюдения в режиме X–Y позволяют сравнить сигналы генератора и датчика, а также облегчает поиск резонанса при слабом сигнале.

4. Инструментальные погрешности

Линейка: $\sigma_{rul} = \pm 0.5$ мм (половина цены деления)
Электронные весы: $\sigma_v = \pm 10^{-3}$ г (маркировка производителя)
Штангенциркуль: $\sigma_{cal} = \pm 0.1$ мм (маркировка производителя)
Частотомер: $\sigma_f = \pm 0.5$ Гц (маркировка производителя)

5. Результаты измерений и обработка данных

Измерим линейные размеры и массу образцов из меди, стали и дюраля. Данные занесем в таблицу 2. Вычислим плотность материалов, воспользовавшись формулой $\rho = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi d^2 h}$

	m, г	h, см	d, см	ρ, г/см^3	$\delta\rho$, г/см^3
Медь	39.417	3.97	1.20	8.78	0.03
Сталь	37.106	4.13	1.20	7.95	0.03
Дюраль	11.794	4.03	1.16	2.76	0.03

Таблица 1. Параметры образцов

Зависимость частоты от номера резонансного пика для трех измеряемых стержней занесем в Таблицу 2:

Таблица 2. Резонансные частоты стержней

	n	1	2	3	4	5	6	1/2
Медь	f, кГц	3.160	6.297	9.486	12.658	15.806	18.972	-
Сталь	f, кГц	4.132	8.268	12.394	16.524	20.647	24.771	2.066
Дюраль	f, кГц	4.235	8.473	12.702	16.935	21.164	25.383	2.118

По полученной таблице можем построить график зависимости собственной частоты стержня от номера гармонии.

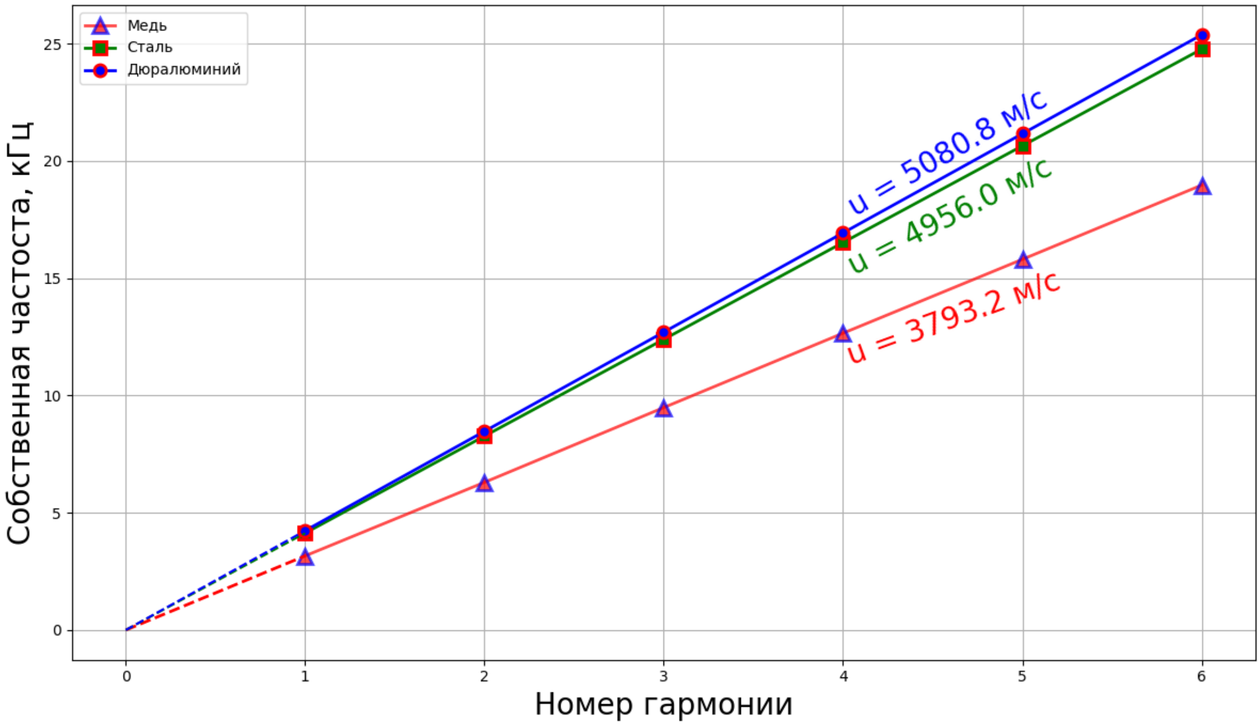

Рис. 3. График зависимости частоты от номера гармонии

Далее методом наименьших квадратов получаем:

Таблица 3. Скорости звука в стержнях

	f_1, кГц	δf_1, кГц	u_{CT}, м/с	δu_{CT}, м/с
Медь	3.161	$2 \cdot 10^{-3}$	3793.2	33
Сталь	4.130	$2 \cdot 10^{-3}$	4956.0	35
Дюраль	4.234	$2 \cdot 10^{-3}$	5080.8	36

Вычислим и занесем в Таблицу 4 модули Юнга материалов:

	E, ГПа	δE, ГПа	E_{tbl}, ГПа	$\lvert E_{tbl} - E\rvert$, ГПа
Медь	126.3	3	105-130	0
Сталь	195.3	5	200-210	4.7
Дюраль	71.3	2	70.5	0.8

Таблица 4. Модули Юнга

6. Вывод

Таким образом, все значения модуля Юнга в пределах погрешности совпали с табличными, поэтому метод акустического резонанса для металлов в целом можно назвать точным и надежным.