Работа 1.2.4
Определение главных моментов инерции твердых тел с помощью крутильных колебаний.

Работу выполнил Павлов Михаил Б01-109

1. Аннотация

В данной работе с помощью измерения периода крутильных колебаний находится момент инерции различных твердых тел в различных положениях. Проверяется расчет теоретической зависимости между периодами крутильных колебаний тел относительно различных осей. На основе полученных данных строятся эллипсоиды инерции.

2. Теоретические сведения

Введем некоторые основные определения:

Вращательное движение – вид механического движения. При вращательном движении материальная точка описывает окружность. При вращательном движении абсолютно твёрдого тела все его точки описывают окружности, расположенные в параллельных плоскостях. Центры всех окружностей лежат при этом на одной прямой, перпендикулярной к плоскостям окружностей и называемой **осью вращения**. Ось вращения может располагаться внутри тела и за его пределами. Ось вращения в данной системе отсчёта может быть как подвижной, так и неподвижной.

Инерционное свойство твердого тела при вращении определяет не только величина его массы но и её пространственное распределение. Последнее характеризует физическая величина которая называется тензором инерции.Рассмотрим момент импульса тела относительно центра масс.

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r_i} \times \vec{v_i} \tag{1}$$

Поскольку при вращении тела относительно неподвижной точки скорости его точек даются выраженем $\vec{v_i} = \vec{\omega} \times \vec{r_i}$, то двойное вектрное произведение преобразовано по праавилу:
$\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) = \vec{b}\ (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}\ (\vec{a} \cdot \vec{b})$:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r_i} \times (\vec{\omega} \times \vec{r_i}) = \sum_i m_i \big[\vec{\omega}\ |\vec{r_i}|^2 - \vec{r_i}(\vec{\omega} \cdot \vec{r_i})\big]$$

Из этого равенства в общем случае видно, что векторы $\vec{L}$ и $\vec{\omega}$ не параллельны.

Запишем полученное равенство в прямоугольных координатах:

$$L_x = \sum_i m_i \big[(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2)\omega_x - (x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z)x_i\big] =$$
$$= \Big[\textstyle\sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2)\Big]\omega_x + \Big[\textstyle\sum_i(-m_i x_i y_i)\Big]\omega_y + \Big[\textstyle\sum_y(-m_i x_i z_i)\Big]\omega_z.$$

С помощью циклической замены ($x \to y \to z \to x$) полчуимм другие компоненты вектора момента импульса. В итоге:
$L_x = \Big[\sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2)\Big]\omega_x + \Big[\sum_i(-m_i x_i y_i)\Big]\omega_y + \Big[\sum_y(-m_i x_i z_i)\Big]\omega_z$
$L_x = \Big[\sum_i(-m_i y_i x_i)\Big]\omega_x + \Big[\sum_i m_i(z_i^2 + x_i^2)\Big]\omega_y + \Big[\sum_y(-m_i y_i z_i)\Big]\omega_z$
$L_x = \Big[\sum_i(-m_i z_i x_i)\Big]\omega_x + \Big[\sum_i(-m_i z_i y_i)\Big]\omega_y + \Big[\sum_y m_i(x_i^2 + z_i^2)\Big]\omega_z$

Перепишем неравенства в следующей форме:
$L_x = I_{xx}\omega_x + I_{xy}\omega_y + I_{xz}\omega_z$
$L_y = I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y + I_{yz}\omega_z$
$L_z = I_{zx}\omega_x + I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$

Перепишем в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Матрица:

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i m_i(y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & \sum_i m_i(z_i^2 + y_i^2) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i y_i x_i & -\sum_i m_i z_i y_i & \sum_i m_i(x_i^2 + z_i^2) \end{pmatrix}$$

называется **тензором инерции**.

Пусть вектор угловой скорости направлен вдоль оси x: $\vec{\omega} = \vec{i}\omega_x$. Тогда $L_x = I_{xx}\omega_x$. Это означает, что величина I_{xx} представляет собой момент инерции тела при вращении относительно оси , т. е. $I_{xx} = I_x$. Аналогично, величины $I_{yy} = I_y, I_{zz} = I_z$ представляют собой соответствующие осевые моменты инерции.

Недиагональные компоненты тензора инерции называют центробежными моментами инерции. Из определения видно, что тензор инерции является симметричным, то есть $I_{ik} = I_{kj}$. Более подробно это записывается в виде $I_{xy} = I, I_{xz} = I_{zx}, I_{yz} = I_{zy}$. Таким образом, имеется всего 6 существенных компонент тензора инерции: три диагональные и три недиагональные.

Если для какой-лтбо системы координат известны все шесть элементов матрицы, то момент инерции тела относительно произвольной оси, проходящей через начало координат, может быть вычислен по формуле:

$$I = I_{xx}e_x^2 + I_{yy}e_y^2 + I_{zz}e_z^2 + 2I_{xy}e_x e_y + 2I_{yz}e_y e_z + 2I_{xz}e_x e_z, \tag{2}$$

где $e_x, e_y, e_z - -$координаты единичного вектора $\vec{e}$ и

$$\begin{array}{ll} I_{xx} = -\int(e_y^2 + e_z^2)dm & I_{xy} = I_{yx} = \int e_x e_y dm \\ I_{yy} = -\int(e_z^2 + e_x^2)dm & I_{yz} = I_{zy} = \int e_z e_y dm \\ I_{zz} = -\int(e_x^2 + e_y^2)dm & I_{xz} = I_{zx} = \int e_x e_z dm \end{array}$$

Как и всякая симметричная матрица, матрица тензора инерции может быть приведена к диагональному виду, диагональные элементы I_x, I_y, I_z которой называются главными моментами инерции тела. Геометрическим образом тензора инерции является эллипсонд, уравнение которого в главных осях имеет вид:

$$I_x x^2 + I_y y^2 + I_z z^2 = 1 \tag{3}$$

Этот эллиисоид принято называть **эллипсоидом инерции**. Эллипсоид инерции жестко связан с телом, для которого построен. Координатные оси Ox, Oy, Oz совпадают с главными осями тела. Если начало координат O совпадает с центром масс тела, то эллипсонд инерции называется **центральным**.

Знание эллинсоида инерции позволяет найти момент инерции тела относительно любой оси, проходившей через центр эллиисоида. Для этого необходимо вдоль выбранной оси провести радиус-вектор до пересечения с поверхностью эллипсоида. Длина $\vec{r}$ будет определять момент инерции тела относительно этой оси:

$$I = \frac{1}{r^2}$$

Главные оси тела часто можно определить из его симметрии. Например, оси симметрии цилиндра или шара являются главными осями, так как для всех осей, лежащих в плоскости перпендикулярной оси симметрии, моменты инерции одинаковые, и, следовательно, эллипсоид инерции обладает такой же симметрией, являясь эллипсоидом вращения относительно оси симметрии тела.
Эллипсоид инерции оказывается симметричным и для некоторых тел, не обладающих осевой симметрией. Например, для прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием и для кубика. Для последнего эллипсоид превращаетсz в сферическую поверхность, из чего следует, что величина момента инерции не зависит от направления оси, так же как в случае шара.
На рисунке 1 для прямоугольного параллелепипеда, диска и кубика нарисованы (в произвольном масштабе) центральные эллипсоиды инерции.

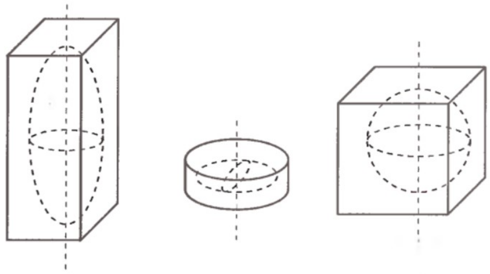

Рис. 1. Эллипсоиды инерции параллелепипеда, диска и куба

По теореме Кёнига кинетическая энергия системы материальных точек в лабораторной системе отсчёта даётся выражением

$$K_{system} = \frac{mv_c^2}{2} + K \tag{4}$$

где m – суммарная масса системы, v_c – скорость центра масс системы, а K – кинетическая энергия точек системы. относительно центра масс. Последнее слагаемое в случае твёрдого тела сводится к вращению тела как целого. Если v_i, – скорость i-й точки относительно центра масс, то

$$K = \frac{m_i v_i^2}{2}$$

Скорость v_i, можно представить в виде

$$\vec{v_i} = \vec{\omega} \times \vec{r_i}$$

Подстановки этого выражения в формулу кинетической энергии точек даёт

$$K = \frac{m_i}{2}(\omega \times r_i)^2$$

Также учтем тождество

$$(\vec{\omega} \times \vec{r_i})^2 = \omega^2 r_i^2 sin^2\varphi = \omega^2 r_i^2 (1 - cos^2\varphi) = \omega^2 r_i^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r_i})^2$$

Поэтому получаем

$$K = \sum_i \frac{m_i}{2}\Big[\omega^2 r_i^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{r_i})^2\Big] = \frac{1}{2}\vec{\omega}\sum_i m_i\Big[\vec{\omega} r_i^2 - (\vec{\omega}\vec{r_i})\vec{r_i}\Big] = \frac{1}{2}\vec{\omega}\vec{L},$$

где мы использовалт выражение для момента импульса тела

$$L = \sum_i m_i\Big[\vec{\omega} r_i^2 - (\vec{\omega}\vec{r_i})\vec{r_i}\Big] = \sum_i m_i \vec{r} \times (\vec{\omega} \times \vec{r_i}) = \sum_i m_i \vec{r} \times \vec{v_i}$$

Имея в виду связь момента импульса с угловой скоростью, перепишем выражение для кинетической энергии тела в виде

$$K = \frac{1}{2}\left(\vec{\omega}, \hat{I}\,\vec{\omega}\right)$$

Если x, y и z – главные оси инерции, то

$$K = \frac{1}{2}\left(I_x\omega_x^2 + I_y\omega_y^2 + I_z\omega_z^2\right) \tag{5}$$

В общем случае при вращении тела его главные оси также совершают поворот в пространстве. Это следует учитывать при записи уравнений, определяющих закон изменения компонент вектора угловой скорости со временем.

3. Экспериментальная установка

В данной работе используется устройство для получения крутильных колебаний, изображенных на рисунке 2. Рамка 1 жестко соединена с проволокой 2, закрепленной в специальных зажимах 3, позволяющих сообщить начальное закручивание для возбуждения крутильных колебаний вокруг вертикальной оси. В рамке с помощью планки 4, гаек 5 и винта 6 закрепляется твердое тело 7. На теле имеются специальные выемки, позволяющие его закрепить так, чтобы ось вращения проходила в теле под различными углами через центр масс.

Крутильные колебания рамки с телом описываются уравнением:

$$(I + I_p)\frac{d^2\phi}{dt^2} = -f\phi. \tag{6}$$

Здесь I и I_p — моменты инерции тела и рамки относительно оси вращения, ϕ — угол поворота рамки, меняющийся со временем t, f — модуль кручения проволоки. Период крутильных колебаний рамки с телом определяется формулой

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I + I_p}{f}}. \tag{7}$$

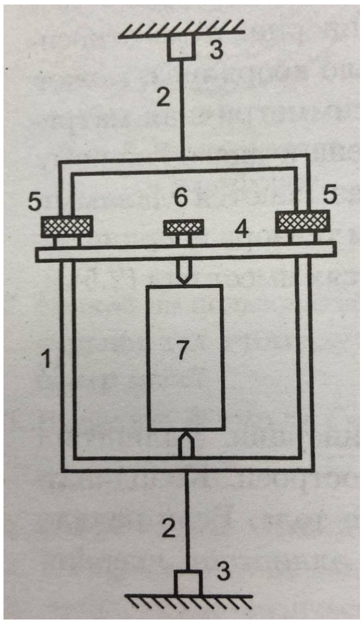

Рис. 2. Схема установки

4. Инструментальные погрешности

Линейка: $\sigma_{rul} = \pm 0.5$ мм. (половина цены деления)
Электронные весы: $\sigma_v = \pm 0.1$ г (маркировка производителя)
Секундомер: $\sigma_{cnt} = \pm 0.01c$ (цена деления)

Пробный эксперимент:

N	Ось	τ, с	n	T, с
1	Z	82.86	15	5.52
2	Z	83.68	15	5.58
3	Z	83.20	15	5.55
4	Z	83.95	15	5.60
5	Z	83.18	15	5.55
6	Z	83.70	15	5.58

Случайную погрешность вычислим по формуле

$$\sigma^{ran} = \frac{1}{N}\sqrt{\sum(T - <\overline{T}>)^2}$$

Случайная погрешность равна $\sigma_{ran} = 0.01$. Тогда полная погрешность получается равной примерно $\sigma_{full} = 0.02$. Соответственно, относительная погрешность будет равна $\epsilon_{full} = 2\%$.

5. Результаты измерений и обработка данных

Масса параллелепипеда равна:
$m = 2070,6 \pm 0,1$г.
Размеры параллелепипеда равны:
$Z = 150 \pm 0,5$мм.
$Y = 100 \pm 0,5$мм.
$X = 50 \pm 0,5$мм.

Масса куба равна:
$m = 1083,9 \pm 0,1$г.
Размеры куба равны:
$Z = 93,8 \pm 0,5$мм.
$Y = 93,9 \pm 0,5$мм.
$X = 93,9 \pm 0,5$мм.

N	Ось	τ, с	n	T, с	$\frac{1}{\sqrt{T^2-T_0^2}}$
1	Z	82.86	15	5.52	0.31
2	Z	83.68	15	5.58	0.30
3	Y	98.23	15	6.55	0.21
4	Y	97.82	15	6.52	0.21
5	X	104.07	15	6.94	0.19
6	X	105.10	15	7.00	0.19
7	AA’	89.40	15	5.96	0.25
8	BB’	90.29	15	6.02	0.25
9	CC’	89.82	15	5.98	0.25
10	DD’	89.79	15	5.98	0.25
11	EE’	86.83	15	5.79	0.27
12	FF’	86.78	15	5.79	0.27
13	PP’	88.65	15	5.91	0.26
14	QQ’	88.77	15	5.92	0.26
15	KK’	99.05	15	6.60	0.21
16	MM’	98.81	15	6.59	0.21

Таблица 1. Результаты расчета T для параллелепипеда.

Аналогичная таблица была сделана для куба:

N	Ось	τ, с	n	T, с	$\frac{1}{\sqrt{T^2-T_0^2}}$
1	Z	79.31	15	5.29	0.35
2	Y	79.77	15	5.32	0.35
3	X	79.62	15	5.31	0.36
4	AA'	79.73	15	5.32	0.35
5	BB'	79.92	15	5.33	0.35
6	CC'	79.61	15	5.31	0.35
7	DD'	79.91	15	5.33	0.35
8	EE'	79.58	15	5.31	0.35
9	FF'	80.12	15	5.34	0.34
10	PP'	79.42	15	5.29	0.35
11	QQ'	79.69	15	5.31	0.35
12	KK'	79.58	15	5.31	0.35
13	MM'	79.66	15	5.31	0.35

Таблица 2. Результаты расчета T для куба.

Далее на основе полученных данных проверяем формулы:
1)$(a^2+b^2+c^2)T_d^2 = a^2T_x^2 + b^2T_y^2 + c^2T_z^2$
2)$(b^2+c^2)T_P^2 = b^2T_y^2 + c^2T_z^2$
3)$(a^2+c^2)T_F^2 = a^2T_x^2 + c^2T_z^2$
4)$(a^2+b^2)T_M^2 = a^2T_x^2 + b^2T_y^2$

Для параллелепипеда:
1)$1.254m^2 * c^2 = 1.252m^2 * c^2$
2)$1.135m^2 * c^2 = 1.129m^2 * c^2$
3)$0.836m^2 * c^2 = 0.823m^2 * c^2$
4)$0.542m^2 * c^2 = 0.546m^2 * c^2$
Для куба:
1)$0.747m^2 * c^2 = 0.744m^2 * c^2$
2)$0.494m^2 * c^2 = 0.496m^2 * c^2$
3)$0.496m^2 * c^2 = 0.495m^2 * c^2$
4)$0.497m^2 * c^2 = 0.498m^2 * c^2$

По полученным результатам видно, что все равенства верны в пределах погрешности. Значит, полученные соотношение верны.

Построение эллипсов:
Чтобы построить сечения эллипсоида, необходимо воспользоваться формулой

$$G = \frac{1}{\sqrt{T^2 - T_0^2}}$$

где T_0 - период крутильный колебаний пустой рамки. $T_0 = 87.2c$.

6. Вывод:

В ходе данной лабораторной работы над удалось проверить соотношения периодов крутильных колебаний двух твердых тел и убедиться в их верности. В случае куба мы лишний раз убедились, что все его периоды, а вследствие чего и моменты инерции, равны.