

Работа 1.1.1

Определение систематических и случайных погрешностей при измерении удельного сопротивления проволоки

Работу выполнил Павлов Михаил Б01-109

Цель работы: Измерить удельное сопротивление проволоки и вычислить систематические и случайные погрешности при использовании таких измерительных приборов, как линейка, штангенциркуль, микрометр, амперметр, вольтметр и мост постоянного тока.

В работе используются: линейка, штангенциркуль, микрометр, отрезок проволоки из нихрома, амперметр, вольтметр, источник ЭДС, мост постоянного тока, реостат, ключ.

1. Аннотация

В работе измеряется удельное сопротивление тонкой проволоки круглого сечения, изготовленной из нихромового сплава. Используются следующие методы измерений сопротивления: 1) определение углового коэффициента наклона зависимости напряжения на проволоке от тока через неё, измеряемых с помощью аналоговых и цифровых вольтметров и амперметров, 2) измерение с помощью моста постоянного тока. Геометрические размеры образца измеряются с помощью линейки, штангенциркуля и микрометра. Детально исследуется систематические и случайные погрешности проводимых измерений.

2. Теоретические сведения

Удельное сопротивление однородной проволоки круглого сечения, имеющей всюду одинаковую толщину:

$$\rho = R \frac{\pi d^2}{4l}, \quad (1)$$

где R — сопротивление проволоки, d — её диаметр, l — длина. Согласно закону Ома напряжение V и ток I в образце связаны соотношением

$$V = RI. \quad (2)$$

Для измерения напряжения и тока использовалась схема рис. 1. Ввиду неидеальности используемого вольтметра необходимо учесть поправку на его конечное сопротивление R_V . Показания амперметра I_A и вольтметра V_B связаны соотношением

$$V_B = R' I_A, \quad (3)$$

где R' — сопротивление параллельно соединённых проволоки и вольтметра, причём $\frac{1}{R'} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R_V}$, и $R_V \gg R, R'$. График зависимости $V_B(I_A)$ должен представлять прямую, угловой коэффициент которой есть R' , откуда сопротивление образца может быть найдено как

$$R = \frac{R_V R'}{R_V - R'} \approx R' \left(1 + \frac{R'}{R_V}\right).$$

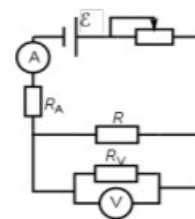


Рис. 1. Схема измерения вольт-амперной характеристики проволоки

3. Инструментальные погрешности

Линейка: $\Delta_{rul} \approx \pm 2$ мм. с учётом погрешности ± 0.5 мм. (половина цены деления линейки) и неидеальное расположение линейки относительно проволоки.

Штангенциркуль: $\Delta_{cal} = \pm 0.05$ мм (маркировка производителя)

Микрометр: $\Delta_{mcm} = \pm 0.01$ мм (маркировка производителя)

Вольтметр: Характеристика вольтметра:

| | |
|--------------------------|----------------|
| Предел измерений | 10 В |
| Внутреннее сопротивление | $R_V = 10$ МОм |

Амперметр: Характеристика амперметра:

| | |
|--------------------------|------------------------------|
| Класс точности | 0.2 |
| Предел измерений | 0.75 А |
| Внутреннее сопротивление | $R_A = 116 \text{ мОм}$ |
| Погрешность | $\pm 1.5 \text{ мА (0.2\%)}$ |

4. Результаты измерений и обработка данных

Измерение диаметра проволоки с помощью **микрометра**:

| | | | | | | |
|-------------------|------|------|------|------|------|------|
| N | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $d_1, \text{ мм}$ | 0.38 | 0.37 | 0.38 | 0.37 | 0.38 | 0.38 |

Измерение диаметра проволоки с помощью **штангенциркуля**:

| | | | | | | |
|-------------------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| N | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $d_2, \text{ мм}$ | 0.4 | 0.4 | 0.4 | 0.4 | 0.4 | 0.4 |

Получаем $\langle \bar{d}_1 \rangle = 0.377 \text{ мм}$ и $\langle \bar{d}_2 \rangle = 0.4 \text{ мм}$

При измерении диаметра проволоки штангенциркулем случайная погрешность измерения отсутствует. Следовательно, точность измерения определяется только точностью штангенциркуля (систематической погрешностью): $d_2 = (0.40 \pm 0.05) \text{ мм}$

Измерения с помощью микрометра содержат как систематическую, так и случайную погрешности.

$$\sigma_{sys} = 0.01 \text{ мм}, \sigma_{ran} = \frac{1}{N} \sqrt{\sum_{i=1}^n (d_i - \langle \bar{d} \rangle)^2} \approx 1.5 * 10^{-3} \text{ мм}$$

Поскольку $\sigma_{sys}^2 \gg \sigma_{ran}^2$, то можно считать проволоку однородной по диаметру, а погрешность определить только лишь систематической погрешностью микрометра.

Вычисление площади поперечного сечения:

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3.14 * (3.77 * 10^{-1})^2}{4} = 1.12 * 10^{-3} \text{ см}^2$$

Теперь вычислим погрешность:

$$\sigma_S = 2 \frac{\sigma_d}{\langle \bar{d} \rangle} S = 2 \frac{0.01}{0.377} * 1.12 * 10^{-3} \approx 5.9 * 10^{-5} \text{ см}^2$$

Таким образом, $S = (1.12 \pm 0.06) * 10^{-3} \text{ см}^2$

Измерение силы тока и напряжения:

Соберём схему, указанную на рисунке, и проведём опыт для трёх длин проволоки $l_1 = 20 \text{ см}$, $l_2 = 30 \text{ см}$ и $l_3 = 50 \text{ см}$. Системная погрешность измерения длины проволоки равна 0.2 см .

$l = 20 \text{ см}$:

| | | | | | | | | | | | | |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| N | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| $I, \text{ А}$ | 0.135 | 0.155 | 0.180 | 0.240 | 0.360 | 0.675 | 0.655 | 0.430 | 0.295 | 0.220 | 0.150 | 0.110 |
| $U, \text{ В}$ | 0.268 | 0.305 | 0.355 | 0.481 | 0.730 | 1.365 | 1.321 | 0.867 | 0.595 | 0.445 | 0.375 | 0.271 |
| $I, \text{ дел}$ | 27 | 31 | 36 | 48 | 72 | 135 | 131 | 86 | 59 | 44 | 30 | 22 |

$l = 30 \text{ см}$:

| | | | | | | | | | | | | |
|------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| N | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| $I, \text{ А}$ | 0.150 | 0.165 | 0.200 | 0.265 | 0.360 | 0.735 | 0.695 | 0.480 | 0.320 | 0.190 | 0.160 | 0.120 |
| $U, \text{ В}$ | 0.466 | 0.524 | 0.617 | 0.834 | 1.131 | 2.363 | 2.224 | 1.517 | 1.010 | 0.592 | 0.506 | 0.379 |
| $I, \text{ дел}$ | 30 | 33 | 40 | 53 | 72 | 147 | 139 | 96 | 64 | 38 | 32 | 24 |

$l = 50\text{см}$:

| N | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|-----------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $I, \text{А}$ | 0.100 | 0.115 | 0.130 | 0.150 | 0.165 | 0.370 | 0.420 | 0.375 | 0.320 | 0.220 | 0.150 | 0.110 |
| $U, \text{В}$ | 0.516 | 0.607 | 0.689 | 0.774 | 0.867 | 1.942 | 2.205 | 1.954 | 1.685 | 1.144 | 0.79 | 0.567 |
| $l, \text{дел}$ | 20 | 23 | 26 | 30 | 33 | 74 | 84 | 75 | 64 | 44 | 30 | 22 |

Измерение сопротивления проволоки:

Результаты измерений зависимостей показаний вольтметра V_B от показаний амперметра I_A в схеме рис. 1 при разных длинах l образца представлены в таблицах выше. Соответствующие графики зависимостей изображены на рис. 2.

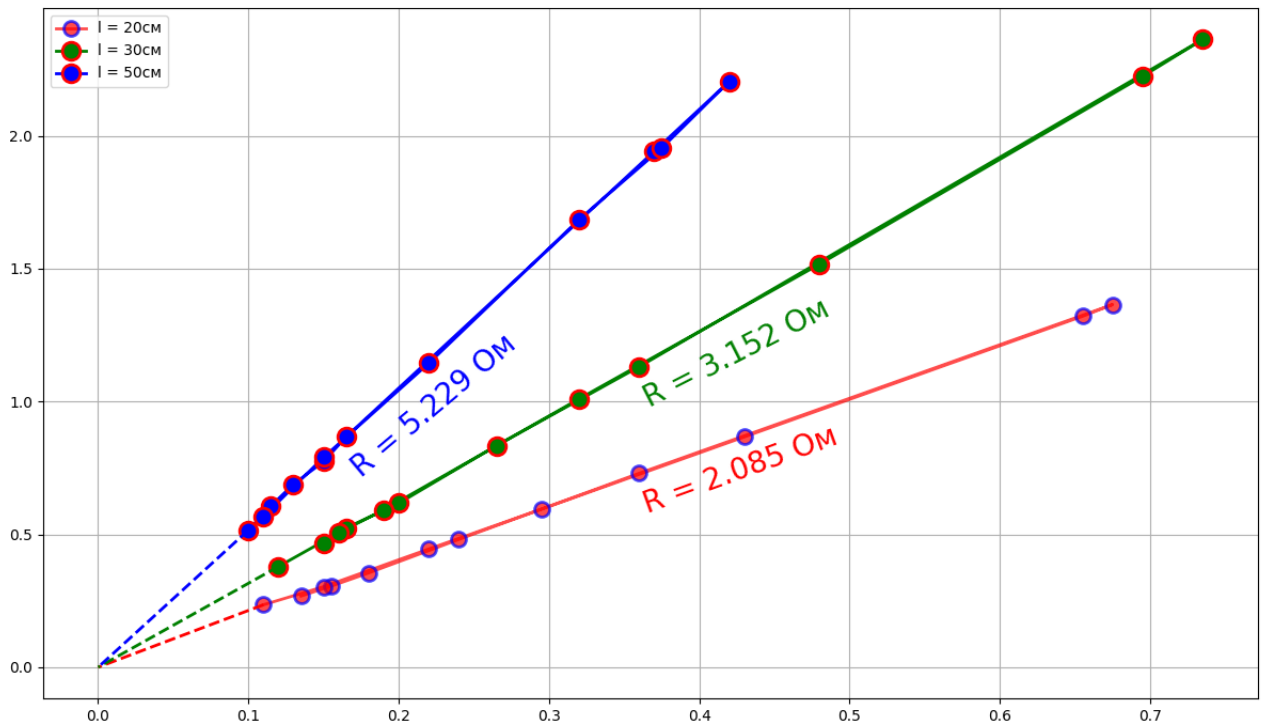


Рис. 2. Графики зависимости I от U при различных значениях R

По графику убеждаемся, что экспериментальные данные с хорошей точностью (в пределах инструментальных погрешностей опыта) ложатся на теоретическую прямую $V = RI$, исходящую из начала координат.

Пользуясь методом наименьших квадратов, строим аппроксимирующие прямые $V_B = \bar{R}I_A$, определяя их угловой коэффициент по формуле

$$\bar{R} = \frac{\langle VI \rangle}{\langle I^2 \rangle}. \quad (4)$$

Случайную погрешность определения углового коэффициента вычисляем как

$$\sigma_R^{ran} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\frac{\langle V^2 \rangle}{\langle I^2 \rangle} - \bar{R}^2 \right)}$$

Оценим возможную систематическую погрешность, обусловленную инструментальными погрешностями приборов. Предполагая, что при всех измерениях относительная погрешность приборов одинакова, оценим погрешность вычисления частного $R = V/I$ при максимальных значениях V и I :

$$\Delta_R^{sys} R \sqrt{\left(\frac{\Delta_V}{V_{max}} \right)^2 + \left(\frac{\Delta_I}{I_{max}} \right)^2}.$$

Полная погрешность измерения R не превосходит значения

$$\sigma_R^{full} \leq \sqrt{(\sigma_R^{ran})^2 + (\Delta_R^{sys})^2}.$$

Результаты сведены далее в таблице. Там же для сравнения приведены результаты измерения R с помощью моста Уинстона.

| l , см | \overline{R} , Ом | σ_R^{ran} , Ом | Δ_R^{sys} , Ом | σ_R^{full} , Ом | R_b , Ом |
|----------|---------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|-------------------|
| 50 | 5.229 | 0.016 | 0.034 | 0.037 | $5.351 \pm 0,010$ |
| 30 | 3.152 | 0.017 | 0.022 | 0.026 | $3.227 \pm 0,010$ |
| 20 | 2.085 | 0.019 | 0.014 | 0.017 | $2.153 \pm 0,010$ |

Случайная составляющая измерения сопротивления мала, а основной вклад вносят систематические приборные погрешности. Контрольные измерения с помощью моста дают завышенные результаты, но все отклонения находятся в пределах $\pm 2\sigma_R^{full}$. полн.

Вычисление удельного сопротивления:

По формуле (1) находим удельное сопротивление материала проволоки, используя значения \overline{R} , полученные выше. Сравнивая относительные величины погрешностей величин, входящих в (1), приходим к выводу, что наибольший вклад в погрешность вносит измерение диаметра проволоки ($2\sigma_d/d \sim 5.6\%$), при этом вкладом остальных измерений можно пренебречь: $\sigma_\rho \approx \frac{2\sigma_d}{d}\rho$.

| N опыта | $\rho, 10^{-6}$ Ом * м |
|---------|--------------------------------------|
| 1 | $(1.167 \pm 0.065) * 10^{-6}$ Ом * м |
| 2 | $(1.172 \pm 0.065) * 10^{-6}$ Ом * м |
| 3 | $(1.164 \pm 0.065) * 10^{-6}$ Ом * м |

Усредняя результаты опытов, окончательно получим:

$$\overline{\rho} = (1.17 \pm 0.07) * 10^{-6} \text{ Ом * м}$$

5. Обсуждение результатов и выводы

Вклад погрешности измерения площади проволоки 6%, что является основной частью погрешности. Значит, для измерения сопротивления достаточно точность 3 – 4%

Полученное значение сравнимо с табличным значением удельного сопротивления нихрома. Табличное значение = $1.1 * 10^{-6}$ Ом * м, что лежит в пределах нашей погрешности, откуда следует, что результаты равны.

Мы измерили удельное сопротивление проволоки и вычислили систематические и случайные погрешности.