Homework 4

1.Линейная алгебра

1. Даны матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ -3 & -4 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ 4 & -5 & 2 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Посчитайте матрицу $D = A^\top C - 2A^\top B^\top$. Приведите полную последовательность вычислений.

$$= \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -3 & 9 \\ -4 & -5 & 2 \\ 8 & 1 & 5 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -4 & 2 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -24 & 23 \\ -32 & -37 & 18 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} -9 & 6 & -1 \\ -18 & 32 & -28 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -24 & 23 \\ -32 & -37 & 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -18 & 12 & -2 \\ -36 & 64 & -56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & -36 & 25 \\ 4 & -101 & 74 \end{pmatrix}$$

Дано выражение:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} x & 2 & 3 \\ -1 & y & 4 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -6 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & v & -1 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

Найдите значения x, y, z и v, при которых выражение верно.

$$3 \begin{pmatrix} x & 2 & 3 \\ -1 & y & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x & 6 & 9 \\ -3 & 3y & 12 \end{pmatrix}$$

$$2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 2 & -6 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 \\ 4 & -12 & 2z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x & 6 & 9 \\ -3 & 3y & 12 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 & -10 \\ 4 & -12 & 2z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3x+2 & 10 & -1 \\ 1 & 3y-12 & 12+2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & v & -1 \\ 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x+2 = 8 \\ 10 = v \\ -1 = -1 \\ 1 = 1 \\ 3y-12 = 6 \\ 12+2z = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 2 \\ v = 10 \\ y = 6 \\ z = -4 \end{cases}$$

3. Укажите те значения параметров p и q, при которых ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 6 & p \\ 5 & 10 & q \end{pmatrix}$ равен единице.

[$\det(A) = |1, 2, 3\ 3, 6, p\ 5, 10, q| = (6q - 10p) - (18 - 15) - (30 - 20p) = 0$]

[$6q - 10p - 3 - 30 + 20p = 0$]

[$6q - 13 = 0$]

[$q = \frac{13}{6}$]

[$k \cdot (1, 2, 3) = (3, 6, p)$] $\Rightarrow$ [$k = 3,\ p = 9$] $\Rightarrow$ ($p = 9,\ q = \frac{13}{6}$)

4. Относительно канонического (стандартного) базиса в $\mathbb{R}^2$ даны три вектора $a_1 = (2, -5)^\top$, $a_2 = (-1, 3)^\top$, и $x = (1, -4)^\top$. Примите векторы a_1, a_2 за новый базис B, предварительно проверив, что они линейно независимы.

   (a) Найдите координаты $[x]_B$ вектора x в новом базисе.

   (b) Предположим, что координаты вектора y в базисе B заданы $[y]_B = (1, 1)^T$. Найдите координаты вектора y в стандартном базисе.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - (-1) \cdot (-5) = 6 - 5 = 1 \neq 0$$

$$\begin{cases} -1 = 2c_1 - c_2 \\ 4 = -5c_1 + 3c_2 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow c_1 = 0,\ c_2 = -3$

$[x]B = (0, -3)^T \cdot [x]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$

$[y]B = (1, 1)^T$

$\Rightarrow y = c_1 \cdot a_1 + c_2 \cdot a_2$, где $c_1 = 1, c_2 = 1$

$y = 1 \cdot a_1 + 1 \cdot a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

координаты вектора y в стандарт. базисе $\cdot [y] = (1, -2)^T$

$[y] = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

2.Начала мат. Анализа и оптимизация

1. Посчитайте матрицу Гессе следующей функции:

$$f(x) = x_1^3 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 - 2x_2, \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Найдите критические точки x_c, такие что $\nabla f(x_c) = 0$.

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2}(x_1^3 - 2x_1x_2 + x_2^3 - 3x_1 - 2x_2) & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}(x_1^3 - 2x_1x_2 + x_2^3 - 3x_1 - 2x_2) \\ \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1}(x_1^3 - 2x_1x_2 + x_2^3 - 3x_1 - 2x_2) & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}(x_1^3 - 2x_1x_2 + x_2^3 - 3x_1 - 2x_2) \end{pmatrix}$$

$$H(f) = \begin{pmatrix} 6x_1 - 2x_2 - 3 & -2x_1 + 6x_2 - 2 \\ -2x_1 + 6x_1 - 2 & 6x_1 - 2x_2 + 6 \end{pmatrix}$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}(x_1^3 - 2x_1x_2 + x_2^3 - 3x_1 - 2x_2) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}(x_1^3 - 2x_1x_2 + x_2^3 - 3x_1 - 2x_2) \end{pmatrix}$$

$$\nabla f = \begin{pmatrix} 3x_1^2 - 2x_2 - 3 \\ -2x_1 + 3x_2^2 - 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x_1^2 - 2x_2 - 3 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2^2 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$x_2 = \frac{3x_1^2 - 3}{2} \quad -2x_1 + 3\left(\frac{3x_1^2 - 3}{2}\right)^2 - 2 = 0$$

$$-2x_1 + \frac{27}{4}x_1^4 - \frac{27}{2}x_1^2 + \frac{27}{4} - 2 =$$

$$= 0 \quad \frac{27}{4}x_1^4 - \frac{27}{2}x_1^2 - 2x_1 + \frac{19}{4} = 0$$

$x_1 = -1$ или $x_1 = 0,5$ или $x_1 \approx 0,667$

$$x_1 = -1, \quad x_2 = \frac{3\cdot(-1)^2 - 3}{2} = 0$$

$$x_1 = 0,5 \quad x_2 = \frac{3\cdot(0,5)^2 - 3}{2} = -1,125$$

$$x_1 \approx 0,667 \quad x_2 \approx \frac{3\cdot(0,667)^2 - 3}{2} \approx -0,778$$

$(x_1, x_2) = (-1, 0)$ или $(0,5, -1,13)$ или $(0,67, -0,78)$