1 Lineární závislost a nezávislost, báze, dimenze. Lineární zobrazení, jádro a obor hodnot, skalární a vektorový součin. (A0B01LAG)

1.1 Lineární závislost a nezávislost

Prvky $v_1, v_2, ..., v_n$ množiny M se nazývají **lineárně závislé**, pokud existuje taková **netriviální lineární kombinace** těchto prvků, která vyhovuje vztahu

$$\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$$

kde a_i je skalár. V opačném případě jsou lineárně nezávislé.

- Pro **lineárně nezávislé** prvky je jediným řešením výše uvedeného vzorce triviální řešení, tedy $a_i = 0$
- Jsou-li prvky **lineárně závislé**, je možné nějaký z nich vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních prvků

1.1.1 Příklad

Lineárně zavislá množina$M$ a koeficienty netriviální lineární kombinace a

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}, a = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M \bullet a = 0$$

1.2 Báze

Lineární obal Mějme množinu M, která je podmnožinou vektorového prostoru V. Průnik všech podprostorů prostoru V, které obsahují množinu M se nazývá lineárním obalem množiny M.
Zjednodušeně - lineární obal množiny M je podprostor prostoru V. Co obsahuje? Všechny ty prvky, ke kterým se mohu dostat libovolnou lineární kombinací vektorů z množiny M.

$$\langle M \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} a_i u_i \mid u_i \in M, a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3, ..., n \right\}$$

Báze vektorového prostoru V je nejmenší množina **lineárně nezávislých vektorů** taková, že její lineární obal je roven celému prostoru V. V konečně dimenzionálním prostoru dimenze n je bází každá množina obsahující n lineárně nezávislých vektorů.

- Obal báze prostoru V tvoří celý prostor V
- Vektory báze jsou **lineárně nezávislé**.
- Prostor může mít **více bází**. Všechny ale mají **stejný počet prvků**.

1.2.1 Příklad

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matice B_1 i B_2 tvoří bázi prostoru $\mathbb{R}^2$.

1.3 Lineární zobrazení

Pojmem **lineární zobrazení** (lineární transformace) se v matematice označuje takové zobrazení mezi vektorovými prostory X a Y, které zachovává vektorové operace sčítání a násobení skalárem. Název lineární je odvozen z faktu, že grafem obecného lineárního zobrazení z reálných čísel do reálných čísel je přímka.

$$L(x+y) = L(x) + L(y)$$
$$L(\alpha x) = \alpha L(x)$$

1.4 Jádro a obor hodnot

Mějme matici A, která je zároveň maticí lineárního zobrazení $L : U \to V$, tak že $\{A \bullet x = y \mid x \in U, y \in V, A \in \mathbb{R}^{\mathsf{m} \times \mathsf{n}}\}$. Množinu tvořenou všemi řešeními $A \bullet x = 0$ nazýváme **jádro** lineárního zobrazení L, nebo-li **nulový prostor** matice A.

$$Ker(L) = null(A) = \{x \in U \mid A \bullet x = 0\}$$

Obor hodnot zobrazení L (obraz matice A) je podprostor, který obsahuje zobrazení všech prvků z prostoru U.

$$Im(L) = rng(A) = \{A \bullet x \mid x \in U\}$$

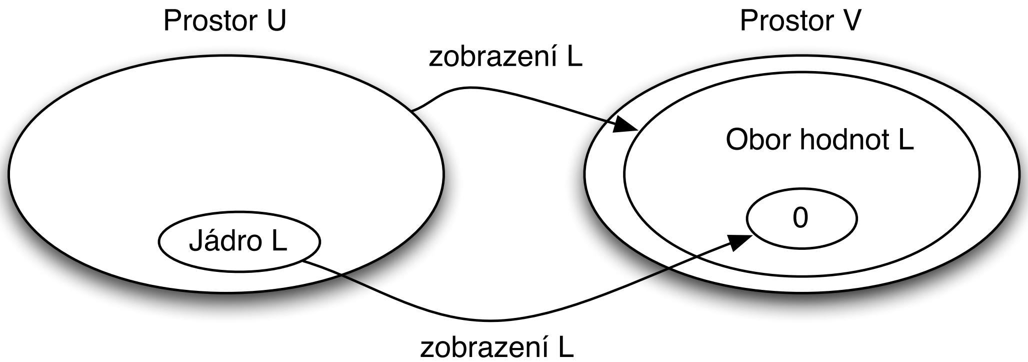

Figure 1.1: Vztah jádra a obrazu prostoru

- **Jádro** zobrazení L je podmnožinou prostoru U, ale **obor hodnot** zobrazení L je podmnožinou V
- Platí vztah $dim(Ker(L)) + dim(Im(L)) = dim(U)$ jinak $dim(null(A)) + dim(rng(A)) = n$ kde n je šířka matice A.

1.5 Skalární a vektorový součin

Skalární součin definujeme mezi dvěma vektory. Výsledkem skalárního součinu je reálné číslo, není to vektor. Máme-li dva vektory $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$ a $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, pak jejich skalární součin je roven:

$$u^T \bullet v = \mid u \mid\mid v \mid \cos\alpha$$

kde α je velikost úhlu mezi vektory u a v.

Vektorový součin je binární operace vektorů v trojrozměrném vektorovém prostoru. Výsledkem této operace je vektor, který je kolmý k oběma původním vektorům. Velikost tohoto vektoru je rovna obsahu rovnoběžníku tvořeného původními vektory. Spočítá se

$$u \times v = \begin{bmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{bmatrix} = w$$

a platí

$$u^T \bullet w = 0,\ v^T \bullet w = 0$$

1.6 TODO

lin. prostor, lin. podprostor, (netrivialni) lin. kombinace, matice lin. zobrazeni ...