10 Syntaxe a sémantika výrokové a predikátové logiky. Sémantický důsledek a tautologická ekvivalence. Booleovský kalkul. Rezoluční metoda (A0B01LGR)

10.1 Výroková logika

10.1.1 Výroky

Máme danou neprázdnou množinu A tzv. *atomických výroků* (též jim říkáme *logické proměnné*). Konečnou posloupnost prvků z množiny A, logických spojek a závorek nazýváme *výroková formule* (zkráceně jen *formule*), jestliže vznikla podle následujících pravidel:

1. Každá logická proměnná (atomický výrok) $a \in A$ je výroková formule.
2. Jsou-li α, β výrokové formule, pak $\neg\alpha$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$ a $(\alpha \Leftrightarrow \beta)$ jsou také výrokové formule.
3. Nic jiného než to, co vzniklo pomocí konečně mnoha použití bodů 1 a 2, není výrokové formule.

Všechny formule, které vznikly z logických proměnných množiny A, značíme $P(A)$.

Poznámka: Spojka $\neg$ se nazývá *unární*, protože vytváří novou formuli z jedné formule. Ostatní zde zavedené spojky se nazývají *binární*, protože vytvářejí novou formuli ze dvou formulí.

V dalším textu logické proměnné označujeme malými písmeny např. $a, b, c, \dots$ nebo $x, y, z, \dots$, výrokové formule označujeme malými řeckými písmeny např. $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ nebo $\varphi, \psi, \dots$. Také většinou nebudeme ve formulích psát ty nejvíc vnější závorky - tj. píšeme $a \vee (b \Rightarrow c)$ místo $(a \vee (b \Rightarrow c))$.

10.1.2 Syntaktický strom formule

To jak formule vznikla podle bodů 1 a 2, si můžeme znázornit na *syntaktickém stromu*, též *derivačním stromu* dané formule. Jedná se o kořenový strom, kde každý vrchol, který není listem je ohodnocen logickou spojkou a jedná-li se o binární spojku, má vrchol dva následníky, jedná-li se o unární spojku, má vrchol pouze jednoho následníka. Přitom pro formule $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \Rightarrow \beta)$ odpovídá levý následník formuli α, pravý následník formuli β. Listy stromu jsou ohodnoceny logickými proměnnými.

10.1.3 Podformule

Ze syntaktického stromu formule α jednoduše poznáme všechny její podformule: *Podformule* formule α jsou všechny formule odpovídající podstromům syntaktického stromu formule α.

10.1.4 Pravdivostní ohodnocení

Pravdivostní ohodnocení, též pouze *ohodnocení formulí*, je zobrazení $u : P(A) \to \{0,1\}$, které splňuje pravidla

1. $\neg\alpha$ je pravdivá právě tehdy, když α je nepravdivá, tj. $u(\neg\alpha) = 1$ právě tehdy, když $u(\alpha) = 0$;
2. $\alpha \wedge \beta$ je pravdivá právě tehdy, když α a β jsou obě pravdivá, tj. $u(\alpha \wedge \beta) = 1$ právě tehdy, když $u(\alpha) = u(\beta) = 1$;
3. $\alpha \vee \beta$ je nepravdivá právě tehdy, když α a β jsou obě nepravdivé, tj. $u(\alpha \vee \beta) = 0$ právě tehdy, když $u(\alpha) = u(\beta) = 0$;
4. $\alpha \Rightarrow \beta$ je nepravdivá právě tehdy, když α je pravdivá a β nepravdivá, tj. $u(\alpha \Rightarrow \beta) = 1$ právě tehdy, když $u(\alpha) = 1$ a $u(\beta) = 0$;
5. $\alpha \Leftrightarrow \beta$ je pravdivá právě tehdy, když buď obě formule α a β jsou pravdivé nebo obě jsou nepravdivé, tj. $u(\alpha \Leftrightarrow \beta) = 1$ právě tehdy, když $u(\alpha) = u(\beta)$.

10.1.5 Pravdivostní tabulky

Vlastnosti, které ohodnocení formulí musí mít, znázorňujeme též pomocí tzv. pravdivostních tabulek logických spojek. Jsou to:

α	$\neg\alpha$
0	1
1	0

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

10.1.6 Věta

Každé zobrazení $u_0 : A \to \{0,1\}$ jednoznačně určuje ohodnocení $u : P(A) \to \{0,1\}$ takové, že $u_0(a) = u(a)$ pro všechna $a \in A$.

10.1.7 Důsledek

Dvě ohodnocení $u, v : P(A) \to \{0,1\}$ jsou shodná právě tehdy, když pro všechny logické proměnné $x \in A$ platí $u(x) = v(x)$.

10.1.8 Tautologie, kontradikce, splnitelné formule

Formule se nazývá *tautologie*, jestliže je pravdivá ve všech ohodnoceních formulí; nazývá se *kontradikce*, jestliže je nepravdivá ve všech ohodnoceních formulí. Formule je *splnitelná*, jestliže existuje aspoň jedno ohodnocení formulí, ve kterém je pravdivá.

Příklady:

1. Formule $\alpha \vee \neg\alpha$, $\alpha \Rightarrow \alpha$, $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$ jsou tautologie.
2. Formule $a \vee b$, $(a \Rightarrow b) \Rightarrow a$ jsou splnitelné, ale ne tautologie.
3. Formule $\alpha \wedge \neg\alpha$ je kontradikce. Kontradikce je také každá negace tautologie.

10.1.9 Tautologická ekvivalence formulí

Řekneme, že formule φ a ψ jsou *tautologicky ekvivalentní* (také *sémanticky ekvivalentní*), jestliže pro každé ohodnocení u platí $u(\varphi) = u(\psi)$.

Tvrzení: Pro každé formule α, β, γ platí:

- $\alpha \mid=\mid \alpha$,
- je-li $\alpha \mid=\mid \beta$, pak i $\beta \mid=\mid \alpha$,
- je-li $\alpha \mid=\mid \beta$ a $\beta \mid=\mid \gamma$, pak i $\alpha \mid=\mid \gamma$.

Jsou-li $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ formule splňující $\alpha \mid=\mid \beta$ a $\gamma \mid=\mid \delta$, pak platí

- $\neg\alpha \mid=\mid \neg\beta$;
- $(\alpha \wedge \gamma) \mid=\mid (\beta \wedge \delta)$, $(\alpha \vee \gamma) \mid=\mid (\beta \vee \delta)$, $(\alpha \Rightarrow \gamma) \mid=\mid (\beta \Rightarrow \delta)$, $(\alpha \Leftrightarrow \gamma) \mid=\mid (\beta \Leftrightarrow \delta)$.

Příklad: Pro každou formuli α je formule $\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha)$ tautologie.

Ano, máme

$$\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha) \ \mid=\mid \neg\alpha \vee (\neg\beta \vee \alpha) \ \mid=\mid \ (\neg\alpha \vee \alpha) \vee \neg\beta,$$

kde poslední formule je tautologie.

10.1.10 Tvrzení

Pro každé formule α, β, γ platí

- $\alpha \wedge \alpha \mid=\mid \alpha$, $\alpha \vee \alpha \mid=\mid \alpha$ (idempotence $\wedge$ a $\vee$);
- $\alpha \wedge \beta \mid=\mid \beta \wedge \alpha$, $\alpha \vee \beta \mid=\mid \beta \vee \alpha$ (komutativita $\wedge$ a $\vee$);

- $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \models\mid (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma$, $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \models\mid (\alpha \vee \beta) \vee \gamma$ (asociativita $\wedge$ a $\vee$);
- $\alpha \wedge (\beta \vee \alpha) \models\mid \alpha$, $\alpha \vee (\beta \wedge \alpha) \models\mid \alpha$ (absorpce $\wedge$ a $\vee$);
- $\neg\neg\alpha \models\mid \alpha$;
- $(\alpha \Rightarrow \beta) \models\mid (\neg\alpha \vee \beta)$.

Poznámka: Platí $\alpha \models\mid \beta$ právě tehdy, když $\alpha \Leftrightarrow \beta$ je tautologie.

10.1.11 Další spojky

Každá formule s jednou (nebo žádnou) logickou proměnnou představuje zobrazení z množiny $\{0, 1\}$ do množiny $\{0, 1\}$. Existují čtyři taková zobrazení:

x	f_1	f_2	f_3	f_4
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Funkce f_1 je konstantní 0, jedná se o kontradikci a budeme ji značit **F**. Podobně funkce f_4 je tautologie (konstantní 1), značíme je **T**. Funkce f_2 je vlastně logická proměnná x a funkce f_3 je $\neg x$. Tedy nemáme další unární spojky.

10.1.12 NAND

Logická spojka $|$, nazývaná NAND (také Sheffův operátor), je definována

$$x \mid y \models\mid \neg (x \wedge y) .$$

10.1.13 NOR

Logická spojka $\downarrow$, nazývaná NOR (také Peiceova šipka), je definována

$$x \downarrow y \models\mid \neg (x \vee y) .$$

10.1.14 XOR

Lofická spojka $\bigoplus$, nazývaná XOR (také vylučovací nebo), je definována

$$x \bigoplus y \models\mid \neg (x \Leftrightarrow y) .$$

10.1.15 CNF a DNF

Každé formuli o n logických proměnných odpovídá pravdivostní tabulka. Na tuto tabulku se můžeme dívat jako na zobrazení, které každé n-tici 0 a 1 přiřazuje 0 nebo 1. Ano, řádek pravdivostní tabulky je popsán n-ticí 0 a 1, hodnota je pak pravdivostní hodnota formule pro toto dosazení za logické proměnné. Zobrazení z množiny všech n-tic 0 a 1 do množiny $\{0, 1\}$ se nazývá *Booleova funkce*. Naopak platí, že pro každou Booleovu funkci existuje formule, která této funkci odpovídá. Ukážeme v dalším, že dokonce můžeme volit formu ve speciálním tvaru, v tzv. *konjunktivním normálním tvaru* a *disjunktivním normálním tvaru*.

10.1.16 Booleova funkce

Booleovou funkcí n proměnných, kde n je přirozené číslo, rozumíme každé zobrazení $f : \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$, tj. zobrazení, které každé n-tici $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nul a jedniček přiřazuje nulu nebo jedničku (označenou $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$).

10.1.17 Disjunktivní normální tvar

Literál je logická proměnná nebo negace logické proměnné. Řekneme, že formule je v *disjunktivním normálním tvaru*, zkráceně v *DNF*, jestliže je disjunkcí jedné nebo několika formulí, z nichž každá je literálem nebo konjunkcí literálů.

Poznamenejme, že literálu nebo konjunkci literálů se také říká *minterm*. Jestliže každý minterm obsahuje všechny proměnné, říkáme, že se jedná o *úplnou DNF*.

Věta: Ke každé Booleově funkci f existuje formule v *DNF* odpovídající *f*.

Důsledek: Ke každé formuli α existuje formule β, která je v DNF a navíc $\alpha \models\mid \beta$.

10.1.18 Konjunktivní normální tvar

Řekneme, že formule je v *konjunktivním normálním tvaru*, zkráceně v *CNF*, jestliže je konjunkcí jedné nebo několika formulí, z nichž každá je literálem nebo disjunkcí literálů.

Poznamenejme, že literálu nebo disjunkci literálů se také říká *maxterm* nebo *klausule*. Jestliže každá klausule obsahuje všechny proměnné, říkáme, že se jedná o *úplnou CNF*.

Věta: Ke každé Booleově funkci f existuje formule v *CNF* odpovídající *f*.

Důsledek: Ke každé formuli α existuje formule β, která je v CNF a navíc $\alpha \models\mid \beta$.

10.1.19 Booleovský kalkul

Víme, že pro pravdivostní ohodnocení formulí platí:

$$u(a \vee b) = \max\{u(a).u(b)\} = \max\{x, y\},$$

$$u(a \wedge b) = \min\{u(a), u(b)\} = \min\{x, y\},$$

$$u(\neg a) = 1 - u(a) = 1 - x.$$

kde $x = u(a)$, $y = u(b)$.

10.1.20 Booleovské operace

To motivuje zavedení booleovských operací (pro hodnoty 0,1):

$$\text{součin} \qquad x \cdot y = \min\{x, y\},$$

$$\text{logický součet} \quad x + y = \max\{x, y\},$$

$$\text{doplněk} \qquad \bar{x} = 1 - x.$$

Pro tyto operace platí řada rovností, tak, jak je známe z výrokové logiky:
Tvrzení: Pro všechna $x, y, z \in \{0, 1\}$ platí:

1. $x \cdot x = x$, $x + x = x$;
2. $x \cdot y = y \cdot x$, $x + y = y + x$;
3. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$, $x + (y + z) = (x + y) + z$;
4. $x \cdot (y + x) = x$, $x + (y \cdot x) = x$;
5. $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$, $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$;
6. $\bar{\bar{x}} = x$;
7. $\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$, $\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$;
8. $x + \bar{x} = 1$, $x \cdot \bar{x} = 0$;
9. $x \cdot 0 = 0$, $x \cdot 1 = x$;
10. $x + 1 = 1$, $x + 0 = x$.

10.1.21 Booleovy funkce v DNF a CNF

Nyní můžeme pro Booleovu funkci psát pomocí výše uvedených operací, např.

$$f(x, y, z) = \bar{x}\bar{y}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + \bar{x}yz + x\bar{y}z$$

a říkat, že jsme Booleovu funkci napsali v *disjunktivní normální formě*. Rovnost opravdu platí; dosadíme-li za logické proměnné jakékoli hodnoty, pak pravá strana rovnosti určuje hodnotu Booleovy funkce *f*. Obdobně jako jsme Booleovu funkci f napsali v disjunktivní normální formě, můžeme ji také napsat v *konjunktivní normální formě* a to takto:

$$f(x, y, z) = (\bar{x} + y + z)(\bar{x} + \bar{y} + z)(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}).$$

Věta: Každou Booleovu funkci lze napsat v disjunktivní normální formě i v konjunktivní normální formě.

10.1.22 Sémantický důsledek

10.1.22.1 Množina formulí pravdivá v ohodnocení

Řekneme, že množina formulí S je *pravdivá* v ohodnocení u, jestliže každá formule z S je pravdivá v u, tj. je-li $u(\varphi) = 1$ pro všechna $\varphi \in S$. Jinými slovy, množina formulí S je nepravdivá v ohodnocení u, jestliže existuje formule $\varphi \in S$, která je nepravdivá v ohodnocení u.

Fakt, že množina formulí S je pravdivá v ohodnocení u zapisujeme též $u(S) = 1$, fakt, že S je nepravdivá v u, zapisujeme také $u(S) = 0$.

Poznámka: Prázdná množina formulí je pravdivá v každém ohodnocení.

10.1.22.2 Splnitelná množina formulí

Řekneme, že množina formulí S je *splnitelná*, jestliže existuje pravdivostní ohodnocení u, v němž je S pravdivá. V opačném případě se množina S nazývá *nesplnitelná*.

Poznamenejme, že prázdná množina formulí je splnitelná.

10.1.22.3 Sémantický důsledek

Řekneme, že formule φ je *konsekventem*, též *sémantickým* nebo *tautologickým důsledkem* množiny formulí S, jestliže φ je pravdivá v každém ohodnocení u, v němž je pravdivá S.

Fakt, že formule φ je konsekventem množiny S, označujeme $S \models \varphi$. Je-li množina S prázdná, píšeme $\models \varphi$ místo $\emptyset \models \varphi$. Je-li množina S jednoprvková, tj. $S = \{\alpha\}$, píšeme $\alpha \models \varphi$ místo $\{\alpha\} \models \varphi$.

10.1.22.4 Příklady

Pro každé tři formule α, β, γ platí:

1. $\{\alpha, \alpha \Rightarrow \beta\} \models \beta$.
2. $\{\alpha \Rightarrow \beta, \beta \Rightarrow \gamma\} \models (\alpha \Rightarrow \gamma)$.
3. $\{\alpha \Rightarrow \beta, \neg\beta\} \models \neg\alpha$.
4. $\{\alpha \vee \beta, \alpha \Rightarrow \gamma, \beta \Rightarrow \gamma\} \models \gamma$.

10.1.22.5 Tvrzení

1. Je-li S množina formulí a $\varphi \in S$, pak φ je konsekventem S, tj. $S \models \varphi$ pro každou $\varphi \in S$.
2. Tautologie je konsekventem každé množiny formulí S.
3. Formule φ je tautologie právě tehdy, když $\models \varphi$.
4. Každá formule je konsekventem nesplnitelné množiny formulí.

10.1.22.6 Poznámka

Uvědomme si, že $\alpha =\!| \ \beta$ právě tehdy, když platí současně $\alpha \models \beta$ a také $\beta \models \alpha$.

10.1.22.7 Tvrzení

Pro každé dvě formule α a β platí:
$\alpha \models \beta$ právě tehdy, když $\alpha \Rightarrow \beta$ je tautologie.

10.1.22.8 Věta

Pro množinu formulí S a formuli φ platí:
$S \models \varphi$ právě tehdy, když $S \cup \{\neg\varphi\}$ je nesplnitelná.

10.1.22.9 Věta o dedukci

Pro množinu formulí S a formule φ a ψ platí
$S \cup \{\varphi\} \models \psi$ právě tehdy, když $S \models (\varphi \Rightarrow \psi)$.

10.1.23 Rezoluční metoda ve výrokové logice

Rezoluční metoda rozhoduje, zda daná množina klausulí je splnitelná nebo je nesplnitelná. Tím je také "universální metodou" pro řešení základních problémů ve výrokové logice, neboť:

1. Daná formule φ je sémantickým důsledkem množiny formulí S právě tehdy, když množina $S \cup \{\neg\varphi\}$ je nesplnitelná.

2. Ke každé formuli α existuje množina klausulí S_α taková, že α je pravdivá v ohodnocení u právě tehdy, když v tomto ohodnocení je pravdivá množina S_α.

10.1.23.1 Klausule

Množinu všech logických proměnných označíme A. Připoměňme, že *literál* je buď logická proměnná (tzv. *positivní literál*) nebo negace logické proměnné (tzv. *negativní literál*). *Komplementární literály* jsou literály p a $\neg p$. *Klausule* je literál nebo disjunkce konečně mnoha literálů (tedy i žádného). Zvláštní místo mezi klausulemi zaujímá *prázdná klausule*, tj. klausule, která neobsahuje žádný literál a tudíž se jedná o kontradikci. Proto ji budeme označovat F.

Pro jednoduchost zavedeme následující konvenci: Máme dánu klausuli C a literál p, který se v C vyskytuje. Pak symbolem $C \setminus p$ označujeme klausuli, která obsahuje všechny literály jako C kromě p. Tedy např. je-li $C = \neg x \vee y \vee \neg z$, pak

$$C \setminus \neg z = \neg x \vee y.$$

10.1.23.2 Rezoloventa

Řekneme, že klausule D je rezolventou klausulí C_1 a C_2 právě tehdy, když existuje literál p takový, že p se vyskytuje v klausuli C_1, $\neg p$ se vyskytuje v klausuli C_2 a

$$D = (C_1 \setminus p) \vee (C_2 \setminus \neg p).$$

Také říkáme, že klausule D je rezolventou C_1 a C_2 podle literálu p a značíme $D = res_p (C_1, C_2)$.

10.1.23.3 Tvrzení

Máme dány dvě klausule C_1, C_2 a označme D jejich rezolventu. Pak D je sémantický důsledek množiny $\{C_1, C_2\}$.

10.1.23.4 Tvrzení

Máme dánu množinu klausulí S a označme D rezolventu některých dvou klausulí z množiny S. Pak množiny S a $S \cup \{D\}$ jsou pravdivé ve stejných ohodnoceních.

10.1.23.5 Rezoluční princip

Označme
$R(S) = S \cup \{D | D \text{ je rezoloventa některých klausulí z } S\}$
$R^0(S) = S$
$R^{i+1}(S) = R\left(R^i(S)\right)$ pro $i \in N$
$R^\star(S) = \bigcup \left\{R^i(S) | i \geq 0\right\}$.

Protože pro konečnou množinu logických proměnných existuje jen konečně mnoho klausulí, musí existovat n takové, že $R^n(S) = R^{n+1}(S)$. Pro toto n platí $R^n(S) = R^\star(S)$.

10.1.23.6 Věta (Rezoluční princip)

Množina klausulí S je splnitelná právě tehdy, když $R^\star(S)$ neobsahuje prázdnou klausuli F.

10.1.23.7 Základní postup

Předchozí věta dává návod, jak zjistit, zda daná množina klausulí je spnitelná nebo je nesplnitelná:

1. Formule množiny M převedeme do CNF a M pak nahradíme množinou S všech klausulí vyskytujících se v některé formuli v CNF. Klausule, které jsou tautologiemi, vynecháme. Jestliže nám nezbyde žádná klausule, množina M se skládala z tautologií a je pravdivá v každém pravdivostním ohodnocení.

2. Vytvoříme $R^\star(S)$.

3. Obsahuje-li $R^{\star}(S)$ prázdnou klausuli, je množina S (a tedy i množina M) nesplnitelná, v opačném případě je M splnitelná.

Je zřejmé, že konstrukce celé množiny $R^{\star}(S)$ může být zbytečná — stačí pouze zjistit, zda $R^{\star}(S)$ obsahuje F.

10.1.23.8 Výhodnější postup

Existuje ještě jeden postup, který usnadní práci s použitím rezoluční metody. Ten nejenom že nám odpoví na otázku, zda konečná množina klausulí S je splnitelná nebo nesplnitelná, ale dokonce nám umožní v případě splnitelnosti sestrojit aspoň jedno pravdivostní ohodnocení, v němž je množina S pravdivá.

Máme konečnou množinu klausulí S, kde žádná klausule není tautologií. Zvolíme jednu logickou proměnnou (označme ji x), která se v některé z klausulí z S vyskytuje. Najdeme množinu klausulí S_1 s těmito vlastnostmi:

1. Žádná klausule v S_1 neobsahuje logickou proměnnou x.

2. Množina S_1 je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná původní množina S.

Množinu S_1 vytvoříme takto: Rozdělíme klausule množiny S do tří skupin: M_0 se skládá ze všech klausulí množiny S, které neobsahují logickou proměnnou x.

M_x se skládá ze všech klausulí množiny S, které obsahují positivní literál x.

$M_{\neg x}$ se skládá ze všech klausulí množiny S, které obsahují negativní literál $\neg x$.

Označme N množinu všech rezolvent klausulí množiny S podle literálu x; tj. rezolvent vždy jedné klausule z množiny M_x s jednou klausulí z množiny $M_{\neg x}$. Všechny tautologie vyřadíme.

Položíme $S_1 = M_0 \cup N$.

Tvrzení: Množina klausulí S_1 zkonstruovaná výše je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná množina S.

Dostali jsme tedy množinu klausulí S_1, která již neobsahuje logickou proměnnou x a je splnitelná právě tehdy, když je splnitelná množina S. Navíc, množina S_1 má o jednu logickou proměnnou méně než množina S.

Nyní opakujeme postup pro množinu S_1. Postup skončí jedním ze dvou možných způsobů:

1. Při vytváření rezolvent dostaneme prázdnou kalusuli F. Tedy S je nesplnitelná.

2. Dostaneme prázdnou množinu klausulí. V tomto případě je množina S splnitelná.

10.2 Predikátová logika

10.2.1 Syntaxe predikátové logiky

Nejprve zavedeme syntaxi predikátové logiky, tj. uvedeme pravidla, podle nichž se tvoří syntakticky správné formule predikátové logiky. Význam a pravdivostní hodnota nás bude zajímat až dále.

Správně utvořené formule budou řetězce (posloupnosti) symbolů tzv. *jazyka predikátové logiky.*

10.2.1.1 Jazyk predikátové logiky $\mathcal{L}$

Jazyk predikátové logiky se skládá z

1. *logických symbolů*, tj.:
   a) spočetné množiny individuálních proměnných: $Var = \{x, y, \ldots, x_1, x_2, \ldots\}$
   b) výrokových logických spojek: $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$
   c) obecného kvantifikátoru $\forall$ a existenčního kvantifikátoru $\exists$
2. *speciálních symbolů*, tj.:
   a) množiny $Pred$ predikátových symbolů (nesmí být prázdná)
   b) množiny $Kons$ konstantních symbolů (může být prázdná)
   c) množiny $Func$ funkčních symbolů (může být prázdná)
3. pomocných symbolů, jako jsou závorky "(, [,),]" a čárka ",".

Pro každý predikátový i funkční symbol máme dáno přirozené číslo n kolika objektů se daný predikát týká, nebo kolika proměnných je daný funkční symbol. Tomuto číslu říkáme *arita* nebo též *četnost* predikátového symbolu nebo funkčního symbolu. Funkční symboly mají aritu větší nebo rovnu 1, predikátové symboly připouštíme i arity 0.

10.2.1.2 Poznámka

Predikátové symboly budeme většinou značit velkými písmeny, tj. např. $P, Q, R, \ldots, P_1, P_2, \ldots$; konstantní symboly malými písmeny ze začátku abecedy, tj. $a, b, c, \ldots, a_1, a_2, \ldots$, a funkční symboly většinou $f, g, h, \ldots, f_1, f_2, \ldots$. Formule predikátové logiky budeme označovat malými řeckými písmeny (obdobně, jako jsme to dělali pro výrokové formule). Kdykoli se od těchto konvencí odchýlíme, tak v textu na to upozorníme.

Poznamejme, že přestože často budeme mluvit o n-árních predikátových symbolech a n-árních funkčních symbolech, v běžné praxi se setkáme jak s predikáty, tak funkcemi arity nejvýše tři. Nejběžnější jsou predikáty a funkční symboly arity 1, těm říkáme též *unární*, nebo arity 2, těm říkáme též *binární*.

Predikátové symboly arity 0 představují nestrukturované výroky (netýkají se žádného objektu). Tímto způsobem se v predikátové logice dá popsat i výrok: „Prší".

10.2.1.3 Termy

Množina *termů* je definována těmito pravidly:

1. Každá proměnná a každý konstantní symbol je term.

2. Jestliže f je funkční symbol arity n a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ jsou termy, pak $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ je také term.

3. Nic, co nevzniklo konečným použitím pravidel 1 a 2, není term.

Poznámka: Term je zhruba řečeno objekt, pouze může být složitěji popsán než jen proměnnou nebo konstantou. V jazyce predikátové logiky termy vystupují jako „podstatná jména".

10.2.1.4 Atomické formule

Atomická formule je predikátový symbol P aplikovaný na tolik termů, kolik je jeho arita. Jinými slovy, pro každý predikátový symbol $P \in Pred$ arity n a pro každou n-tici termů $t_1, t_2, \ldots, t_n$ je $P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ atomická formule.

10.2.1.5 Formule

Množina *formulí* je definována těmito pravidly:

1. Každá atomická formule je formule.

2. Jsou-li φ a ψ dvě formule, pak $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \Rightarrow \psi)$, $(\varphi \Leftrightarrow \psi)$ jsou opět formule.

3. Je-li φ formule a x proměnná, pak $(\forall x\varphi)$ a $(\exists x\varphi)$ jsou opět formule.

4. Nic, co nevzniklo pomocí konečně mnoha použití bodů 1 až 3, není formule.

10.2.1.6 Konvence

1. Úplně vnější závorky nepíšeme. Píšeme tedy např. $(\exists x P(x)) \vee R(a, b)$ místo $((\exists x P(x)) \vee R(a, b))$.

2. Spojka „negace" má vždy přednost před výrokovými logickými spojkami a proto píšeme např. $\forall x (\neg P(x) \Rightarrow Q(x))$ místo $\forall x ((\neg P(x)) \Rightarrow Q(x))$.

10.2.1.7 Syntaktický strom formule

Ke každé formuli predikátové logiky můžeme přiřadit její *syntaktický strom* (též *derivační strom*) podobným způsobem jako jsme to udělali v případě výrokových formulí. Rozdíl je v tom, že kvantifikátory považujeme za unární (tj. mají pouze jednoho následníka) a také pro termy vytváříme jejich syntaktický strom. Listy syntaktického stromu jsou vždy ohodnoceny buď proměnnou nebo konstantou.

10.2.1.8 Podformule

Podformule formule φ je libovolný podřetězec φ, který je sám formulí. Jinými slovy: Podformule formule φ je každý řetězec odpovídající podstromu syntaktického stromu formule φ, určenému vrcholem ohodnoceným predikátovým symbolem, logickou spojkou nebo kvantifikátorem.

10.2.1.9 Volný a vázaný výskyt proměnné

Máme formuli φ a její syntaktický strom. List syntaktického stromu obsazený proměnnou x je výskyt proměnné x ve formuli φ. Výskyt proměnné x je *vázaný* ve formuli φ, jestliže při postupu od listu ohodnoceného tímto x ve směru ke kořeni syntaktického stromu narazíme na kvantifikátor s touto proměnnou. V opačném případě mluvíme o *volném* výskytu proměnné x.

10.2.1.10 Sentence

Formule, která má pouze vázané výskyty proměnné, se nazývá *sentence*, též *uzavřená formule*. Formuli, která má pouze volné výskyty proměnné, se říká *otevřená formule*.

10.2.1.11 Legální přejmenování proměnné

Přejmenování výskytů proměnné x ve formuli φ je legálním přejmenováním proměnné, jestliže

- jedná se o výskyt vázané proměnné ve φ;
- přejmenováváme všechny výskyty x vázané daným kvantifikátorem;
- po přejmenování se žádný dříve volný výskyt proměnné nesmí stát vázaným výskytem.

10.2.1.12 Rovnost formulí

Dvě formule považujeme za *stejné*, jestliže se liší pouze legálním přejmenováním vázaných proměnných.

Každou formuli φ lze napsat tak, že každá proměnná má ve formuli buď jen volné výskyty nebo jen vázané výskyty.

10.2.2 Sémantika predikátové logiky

Nyní se budeme zabývat sémantikou formulí, tj. jejich významem a pravdivostí.

10.2.2.1 Intepretace jazyka predikátové logiky

Interpretace predikátové logiky s predikátovými symboly $Pred$, konstantními symboly $Kons$ a funkčními symboly $Func$ je dvojice $\langle U, [-]\rangle$, kde

- U je neprázdná množina nazývaná *universum*;

- $\langle[-]\rangle$ je přiřazení, které
  1. každému predikátovému symbolu $P \in Pred$ arity n přiřazuje podmnožinu $[P]$ množiny U^n, tj. n-ární relaci na množině U.
  2. každému konstantnímu symbolu $a \in Kons$ přiřazuje prvek z U, značíme jej $[a]$,
  3. každému funkčnímu symbolu $f \in Func$ arity n přiřazuje zobrazení množiny U^n do U, značíme je $[f]$,

Množina U se někdy nazývá *domain* a označuje D.

10.2.2.2 Kontext proměnných

Je dána interpretace $\langle U, [-]\rangle$. Kontext proměnných je zobrazení ρ, které každé proměnné $x \in Var$ přiřadí prvek $\rho(x) \in U$. Je-li ρ kontext proměnných, $x \in Var$ a $d \in U$, pak

$$p[x := d]$$

označuje kontext proměnných, který má stejné hodnoty jako ρ, a liší se pouze v proměnné x, kde má hodnotu d. Kontextu proměnných $p[x := d]$ též říkáme *update* kontextu ρ o hodnotu d v x.

10.2.2.3 Interpretace termů při daném kontextu proměnných

Je dána interpretace $\langle U, [-]\rangle$ a kontext proměnných ρ. Pak termy interpretujeme následujícím způsobem.

1. Je-li term konstatní symbol $a \in Kons$, pak jeho hodnota je prvek $[a]_\rho = [a]$. Je-li term proměnná x, pak jeho hodnota je $[x]_\rho = \rho(x)$.
2. Je-li $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ term. pak jeho hodnota je

$$[f(t_1, t_2, \ldots, t_n)]_\rho = [f]\left([t_1]_\rho, \ldots, [t_n]_\rho\right).$$

   Jinými slovy, hodnota termu $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ je funkční hodnota funkce $[f]$ provedené na n-tici prvků $[t_1]_\rho, \ldots, [t_n]_\rho$ z U.

10.2.2.4 Pravdivostní hodnota formule v dané interpretaci a daném kontextu

Nejprve definujeme *pravdivost* formulí v dané interpretaci $\langle U, [-]\rangle$ při daném kontextu proměnných ρ:

1. Nechť φ je atomická formule. Tj. $\varphi = P(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, kde P je predikátový symbol arity n a $t_1, t_2, \ldots, t_n$ jsou termy. Pak φ je pravdivá v interpretaci $\langle U, [-]\rangle$ a kontextu ρ právě tehdy, když

$$\left([t_1]_\rho, \ldots, [t_n]_\rho\right) \in [P].$$

Jinými slovy: φ je v naší interpretaci pravdivá právě tehdy, když n-tice hodnot termů $\left([t_1]_\rho, \ldots, [t_n]_\rho\right)$ má vlastnost $[P\ ]$.

2. Jsou-li φ a ψ formule, jejichž pravdivost v interpretaci $\langle U, [-]\rangle$ a kontextu ρ již známe, pak
   - $\neg\varphi$ je pravdivá právě tehdy, když φ není pravdivá.
   - $\varphi \wedge \psi$ je pravdivá právě tehdy, když φ a ψ jsou pravdivé.
   - $\varphi \vee \psi$ je nepravdivá právě tehdy, když φ i ψ jsou nepravdivé.
   - $\varphi \Rightarrow \psi$ je nepravdivá právě tehdy, když φ je pravdivá a ψ je nepravdivá.
   - $\varphi \Leftrightarrow \psi$ je pravdivá právě tehdy, když buď obě formule φ a ψ jsou pravdivé, nebo obě formule φ a ψ jsou nepravdivé.
3. Je-li φ formule a x proměnná, pak
   - $\forall x \varphi(x)$ je pravdivá právě tehdy, když fromule φ je pravdivá *v každém* kontextu $p\,[x := d]$, kde d je prvek U.
   - $\exists x \varphi(x)$ je pravdivá právě tehdy, když fromule φ je pravdivá *v aspoň jednom* kontextu $p\,[x := d]$, kde d je prvek U.

10.2.2.5 Pravdivostní hodnota sentence

Sentence φ je *pravdivá v interpretaci* $\langle U, [-]\rangle$ právě tehdy, když je pravdivá v každém kontextu proměnných ρ.

Poznamenejme, že pro sentence v předchozí definici jsme mohli požadovat pravdivost v alespoň jednom kontextu.

10.2.2.6 Model sentence

Interpretace $\langle U, [-]\rangle$, ve které je sentence φ pravdivá, se nazývá *model sentence* φ.

10.2.2.7 Tautologie, kontradikce, splnitelná sentence

Sentence φ se nazývá *tautologie*, jestliže je pravdivá v každé interpretaci. Sentence se nazývá *kontradikce*, jestliže je nepravdivá v každé interpretaci. Nazývá se *splnitelná*, jestliže je pravdivá v aspoň jedné interpretaci.

Také jsme mohli formulovat předchozí definice pomocí pojmu „model”. Tautologie je sentence, pro kterou je každá interpretace jejím modelem; sentence je splnitelná, má-li model; sentence je kontradikce, nemá-li model.

Následující sentence jsou tautologie. (P je unární predikátový symbol, Q je binární predikátový symbol a a je konstantní symbol.)

1. $(\forall x P(x)) \Rightarrow P(a)$;
2. $P(a) \Rightarrow (\exists x P(x))$;

Následující sentence jsou splnitelné formule:

1. $\forall x \exists y Q(x, y)$,
2. $\forall x \forall y (x + y = y + x)$,

kde Q $=$ jsou binární predikátové symboly, $+$ je binární funkční symbol.

Zvláštní příklady kontradikcí neuvádíme. Kontradikce jsou přesně ty formule, jejichž negace je tautologie. Tak např. formule $(\forall x P(x) \wedge \neg(\forall x P(x)))$ je kontradikce. Je dobré si uvědomit, že jde o „dosazení" formule $\forall x P(x)$ do výrokové kontradikce $p \wedge \neg p$.

10.2.2.8 Splnitelné množiny sentencí

Množina sentencí M je *splnitelná* právě tehdy, když existuje interpretace $\langle U, [-]\rangle$, v níž jsou všechny sentence z M pravdivé. Takové interpretaci pak říkáme *model* množiny sentencí M.

Množina sentencí M je *nesplnitelná*, jestliže ke každé interpretaci $\langle U, [-]\rangle$ existuje formule z M, která je v $\langle U, [-]\rangle$ nepravdivá.

Z poslední definice vyplývá, že prázdná množina sentencí je splnitelná.

10.2.3 Tautologická ekvivalence

10.2.3.1 Tautologická ekvivalence sentencí

ˇekneme, že dvě sentence φ a ψ jsou *tautologicky ekvivalentní* právě tehdy, když mají stejné modely, tj. jsou pravdivé ve stejných interpretacích. Jinými slovy, mají stejnou pravdivostní hodnotu ve všech interpretacích.

Někdy se říká, že sentence jsou *sémanticky* ekvivalentní místo, že jsou tautologicky ekvivalentní.

Poznámka: Dá se jednoduše dokázat, že tautologická ekvivalence je relace ekvivalence na množině všech sentencí daného jazyka $\mathcal{L}$ a že má podobné vlastnosti jako tautologická ekvivalence formulí výrokové logiky.

10.2.3.2 Tvrzení

Nechť φ a ψ jsou sentence. Pak platí:

$\varphi \mid=\mid \psi$ právě tehdy, když $\varphi \Leftrightarrow \psi$ je tautologie.

Tautologické ekvivalence: (P a Q jsou unární predikátové symboly.)

1. $\neg(\forall x P(x)) \mid=\mid (\exists x \neg P(x))$,
2. $\neg(\exists x P(x)) \mid=\mid (\forall x \neg P(x))$.
3. $(\forall x P(x)) \wedge (\forall x Q(x)) \mid=\mid \forall x (P(x) \wedge Q(x))$;

10.2.4 Sémantický důsledek

10.2.4.1 Sémantický důsledek

Řekneme, že sentence φ je *sémantickým důsledkem*, též *konsekventem* množiny sentencí S právě tehdy, když každý model množiny S je také modelem sentence φ. Tento fakt značíme

$$S \models \varphi.$$

Můžeme též říci, že sentence φ *není* konsekventem množiny sentencí S, jestliže existuje model množiny S, který není modelem sentence φ. To znamená, že existuje interpretace $\langle U, [-] \rangle$, v níž je pravdivá každá sentence z množiny S a není pravdivá formule φ. Jedná se tedy o obdobný pojem jako ve výrokové logice, pouze místo o pravdivostním ohodnocení mluvíme o interpretaci.

10.2.4.2 Konvence

Jestliže množina sentencí S je jednoprvková, tj. $S = \{\psi\}$, pak píšeme $\psi \models \varphi$ místo $\{\psi\} \models \varphi$. Je-li množina S prázdná, píšeme $\models \varphi$ místo $\emptyset \models \varphi$.

Obdobně jako pro výrokovou logiku, dostáváme řadu jednoduchých pozorování. Pro množiny sentencí M, N a sentenci φ platí:

1. Je-li $\varphi \in M$, je $M \models \varphi$.
2. Je-li $N \subseteq M$ a $N \models \varphi$, je i $M \models \varphi$.
3. Je-li φ tautologie, pak $M \models \varphi$ pro každou množinu sentencí M.
4. Je-li $\models \varphi$, pak φ je tautologie.
5. Je-li M nesplnitelná množina, pak $M \models \varphi$ pro každou sentenci φ.

10.2.4.3 Tvrzení

Nechť φ a ψ jsou sentence. Pak platí:
$\varphi \mid\!=\!\mid \psi$ právě tehdy, když $\varphi \models \psi$ a $\psi \models \varphi$.

10.2.4.4 Tvrzení

Nechť φ a ψ jsou sentence. Pak platí:
$\varphi \models \psi$ právě tehdy, když $\varphi \Rightarrow \psi$ je tautologie.

10.2.4.5 Věta

Pro každou množinu sentencí S a každou sentenci φ platí:
$S \models \varphi$ právě tehdy, když $S \cup \{\neg\varphi\}$ je nesplnitelná množina.

10.2.5 Rezoluční metoda v predikátové logice

Rezoluční metoda v predikátové logice je obdobná stejnojmenné metodě ve výrokové logice. Ovšem vzhledem k bohatší vnitřní struktuře formulí predikátové logiky je složitější. Používá se v logickém programování a je základem programovacího jazyka Prolog.

Nejprve zavedeme literály a klausule v predikátové logice.

10.2.5.1 Literál

Literál je atomická formule (tzv. *pozitivní literál*), nebo negace atomické formule (tzv. *negativní literál*). *Komplementární literály* jsou dva literály, z nichž jeden je negací druhého.

10.2.5.2 Klausule

Klausule je sentence taková, že všechny kvantifikátory jsou obecné a stojí na začátku sentence (na jejich pořadí nezáleží) a za nimi následují literál nebo disjunkce literálů.

Ve výrokové logice jsme pro každou formuli α našli k ní tautologicky ekvivalentní množinu klausulí S_α a to tak, že α i S_α byly pravdivé ve stejných pravdivostních ohodnocení. Takto jednoduchá situace v predikátové logice není. Ukážeme si, jak k dané sentenci φ najít množinu klausulí S_φ a to tak, že φ je splnitelná právě tehdy, když množina S_φ je splnitelná.

10.2.5.3 Rezoloventy klausulí

Ve výrokové logice jsme rezolventy vytvářeli tak, že jsme si vždy vzali dvě klausule, které obsahovaly dvojici komplementárních literálů, a výsledná rezolventa byla disjunkcí všech ostatních literálů z obou klausulí. Situace v predikátové logice je složitější. Postup, jak vytváříme rezolventy v predikátové logice, si ukážeme na příkladech.

Poznámka: Ne vždy rezolventa existuje.

10.2.5.4 Příklad

Najděme rezoloventu klausulí $K_1 = \forall x \forall y \left(P\left(x\right) \vee \neg Q\left(x,y\right)\right)$ a $K_2 = \forall x \forall y \left(Q\left(x,y\right) \vee R\left(y\right)\right)$, kde P a R jsou unární predikátové symboly a Q je binární predikátový symbol, x, y jsou proměnné.

Klausule K_1 a K_2 obsahují dvojici komplementárních literálů, totiž $\neg Q\left(x,y\right)$ je literál K_1 a $Q\left(x,y\right)$ je literál K_2. Rezoloventou klausulí K_1 a K_2 je tedy $K = \forall x \forall y \left(P\left(x\right) \vee R\left(y\right)\right)$.

10.2.5.5 Unifikační algoritmus

Vstup: Dva positivní literály L_1, L_2, které nemají společné proměnné.

Výstup: Hlášení neexistuje v případě, že hledaná substituce neexistuje, v opačném případě substituce ve tvaru množiny prvků tvaru x/t, kde x je proměnná, za kterou se dosazuje, a t je term, který se za proměnnou x dosazuje.

1. Položme $E_1 := L_1, E_2 := L_2, \theta := \emptyset$

2. Jsou-li E_1, E_2 prázdné řetězce, stop. Množina θ určuje hledanou substituci. V opačném případě položíme $E_1 := E_1\theta$, $E_2 := E_2\theta$ (tj. na E_1, E_2 provedeme substituci θ).

3. Označíme X první symbol řetězce E_1, Y první symbol řetězce E_2.

4. Je-li $X = Y$, odstraníme X a Y z počátku E_1 a E_2. Jsou-li X a Y predikátové nebo funkční symboly, odstraníme i jim příslušné závorky a jdeme na krok 2.

5. Je-li X proměnná, neděláme nic.

   Je-li Y proměnná (a X nikoli), přehodíme E_1, E_2 a X, Y .

   Není-li ani X ani Y proměnná, stop. Výstup neexistuje.

6. Je-li Y proměnná nebo konstanta, položíme $\theta := \theta \cup \{X/Y\}$. Odstraníme X a Y ze začátků řetězců E_1 a E_2 (spolu s čárkami, je-li třeba) a jdeme na krok 2.

7. Je-li Y funkční symbol, označíme Z výraz skládající se z Y a všech jeho argumentů (včetně závorek a čárek). Jestliže Z obsahuje X, stop, výstup neexistuje.

   V opačném případě položíme $\theta := \theta \cup \{X/Z\}$, odstraníme X a Z ze začátků E_1 a E_2 (odstraníme čárky, je-li třeba) a jdeme na krok 2.

10.2.5.6 Rezoluční princip

Je obdobný jako rezoluční princip ve výrokové logice:
Je dána množina klausulí S. Označme
$R(S) = S \cup \{K|K$ je nejobecnější rezoloventa některých klausulí z $S\}$
$R^0(S) = S$
$R^{i+1}(S) = R\left(R^i(S)\right)$ pro $i \in \mathbb{N}$
$R^\star(S) = \bigcup \left\{R^i(S) | i \geq 0\right\}$.
Množina klausulí S je splnitelná právě tehdy, když $R^\star(S)$ neobsahuje prázdnou klausuli F.

Jestliže je množina S konečná, existuje přirozené číslo n_0 takové, že $R^{n_0}(S) = R^{n_0 1}$. Pak $R^\star(S) = R^{n_0}(S)$.