29. A4B02FYZ

5. června 2012

1 Kinematika hmotného bodu

1.1 Vztažný systém

Pohyb je relativní, a proto je nutno zavést vztažný systém (vztažnou soustavu). Se vztažným systémem spojíme pohyb tělesa. Nejznámější vztažný systém je pravoúhlý souřadný systém (kartézský).

1.2 Polohový vektor

Polohový vektor určuje polohu bodu. Jeho počáteční bod leží v počátku souřadné soustavy a jeho koncový bod splývá s polohou, kterou určuje. Velikost polohového vektoru je: $|\vec{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Jednotkový polohový vektor je definován poměrem: $\vec{r_0} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$, jeho velikost je jedna a je bezrozměrný.

1.3 Trajektorie

Množina koncových bodů polohového vektoru $\vec{r} = \vec{r}(t)$ je trajektorie. Je to křivka, po které se hmotný bod pohybuje.

1.3.1 Parametrická rovnice trajektorie

Časová závislost polohového vektoru je vektorová rovnice popisující křivku v prostoru. $\vec{r} = f(t) = [x(t); y(t); z(t)]$. Každá souřadnice vektorové funkce představuje jednu parametrickou rovnici trajektorie.

1.4 Rychlost

Okamžitá rychlost je dána změnou polohy za jednotku času. Určuje ji rovnice $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, jednotka rychlosti je m.s^{-1}.

Tato rovnice představuje tři složkové rovnice:
$v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$, $v_z = \frac{dz}{dt}$
Velikost rychlosti se zjišťuje jako velikost vektoru, tedy (kde s je délka dráhy):
$v = |\vec{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \frac{\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}}{dt} = \frac{ds}{dt}$

1.5 Zrychlení

Okamžité zrychlení je dáno změnou vektoru rychlosti za jednotku času. Určuje ho rovnice$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$ Jednotka zrychlení je m.s^{-2}.

1.5.1 Tečné a normálové zrychlení

Zrychlení často rozkládáme na tečnou $\vec{a_t}$a normálovou $\vec{a_n}$složku zrychlení. Platí, že $\vec{a} = \vec{a_t} + \vec{a_n}$. Tečná složka zrychlení má směr tečny a normálová směr normály (kolmice) k trajektorii. Velikost těchto složek je $a_t = \frac{dv}{dt}$ a $a_n = \frac{v^2}{R}$, kde v je velikost rychlosti a R je poloměr "křivosti" trajektorietrajektorie, obojí v místě rozkladu vektoru zrychlení. Velikost zrychlení se zjišťuje jako velikost vektoru nebo z tečné a normálové složky zrychlení, jako $a = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$

1.6 Klasifikace pohybů

1.6.1 Přímočarý

Vektor v má stále stejný směr, který splývá s přímkou, po níž se hmotný bod pohybuje.

Dráhou přímočarého pohybu je přímka. Proto stačí popis v souřadné soustavě s jedinou osou x. Pohyb tedy stačí popsat veličinami $x = s$, $v_x = v$, $a_x = a$. Rychlost přímočarého pohybu odvodíme z definiční rovnice zrychleni (7), stačí ji napsat pro směr x.

$a = \frac{dv}{dt} \Rightarrow dv = adt \Rightarrow_{v_0} \int^v dv =_0 \int^t adt \Rightarrow v - v_0 =_0 \int^t adt$

Pro pohyb rovnoměrně zrychlený, splňující podmínku a = konst dále platí: Rychlost přímočarého pohybu rovnoměrně zrychleného je tedy dána rovnicí:

$v =_0 \int^t adt + v_0 = a \,_0 \int^t dt + v_0 = at + v_0$

Polohu přímočarého pohybu na ose x vypočítáme, jako:

$v = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = vdt \Rightarrow_{x_0} \int^x dx =_0 \int^t vdt = x - x_0 =_0 \int^t vdt$

Pro pohyb rovnoměrně zrychlený, splňující podmínku a = konst dále platí:

$x =_0 \int^t (v_0 + at)dt + x_0 = v_0 \,_0 \int^t dt +_0 \int^t tdt + x_0 = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$, tedy $s = x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

1.6.2 Křivočarý

Vektor v r mění svůj směr, který je vždy tečný ke křivce, po níž se hmotný bod pohybuje. Speciálními křivočarými pohyby jsou kruhový pohyb a vrhy.

Ke křivočarému pohybu už musíme obecně použít vektorový popis. Bez odvození napišme, že pro popis obecného křivočarého pohybu v prostoru platí analogické rovnice jako v předchozím odstavci s tím rozdílem, že k popisu použijeme vektory. Bude tedy platit následující sestava rovnic:

Pro pohyb rovnoměrně zrychlený s konstantním zrychlením:

$\vec{v} = \vec{v_0} + \vec{a}t$

$\vec{r} = \vec{r_0} + \vec{v_0}t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$

2 Dynymika hmotného bodu

Dynamika je část mechaniky, která se zabývá příčinami pohybu a příčinami změn pohybu.

2.1 Základní veličiny dynamiky

Základní veličiny dynamiky jsou hmotnost, hybnost a síla.

2.1.1 Hmotnost

Hmotnost je skalární veličina, která vyjadřuje míru setrvačných a gravitačních vlastností tělesa. Je to jedna ze 7 základních veličin fyziky. Základní jednotkou hmotnosti je kg.

2.1.2 Hybnost

Hybnost $\vec{p}$ je vektorová veličina, která vyjadřuje míru setrvačných účinků a míru gravitačních účinků tělesa dané hmotnosti m Hybnost závisí na hmotnosti m a rychlosti $\vec{v}$ tělesa, směr hybnosti je stejný jako směr rychlosti. Hybnost se vypočítá jako$\vec{p} = m\vec{v}$. Jednotka hybnosti je kg.m.s^{-1}.

2.1.3 Síla

Síla je vektorová fyzikální veličina, která vyjadřuje míru vzájemného působení těles. Síla má za následek buďto změnu pohybového stavu těles nebo jejich deformaci. Pokud chceme sílu definovat obecně i pro relativistickou fyziku, musíme sílu definovat jako časovou derivaci hybnosti tělesa $\vec{p}$, tedy $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$. V klasické mechanice (v případech, kdy lze zanedbat změnu hmotnosti při pohybu) přejde rovnice $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ na tvar $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m\vec{a}$. Tyto vztahy představují druhý Newtonův zákon, jednotka síly je Newton N=kg.m.s^{-2}.

2.2 Newtonovy zákony

Existují tři Newtonovy pohybové zákony, které umožňují určit pohyb tělesa v inerciální vztažné soustavě, jsou-li známé síly, které působí na dané těleso.

2.2.1 první Newtonův zákon

Jestliže na těleso nepůsobí žádné vnější síly nebo výslednice sil je nulová, pak těleso setrvává v klidu nebo v rovnoměrném přímočarém pohybu.

2.2.2 druhý Newtonův zákon

Jestliže na těleso působí síla, pak se těleso pohybuje se zrychlením, které je přímo úměrné působící síle a nepřímo úměrné hmotnosti tělesa.

Což je dáno vzorcem (kde F je vektor síly m hmotnost a a vektor zrychlení):

$\vec{F} = m\vec{a}$

Obecněji se tento vztah dá zapsat, jako (kde p je vektor hybnosti, je čas a v je vektor rychlosti):

$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}$

Tento zákon lze dále použít k sestavení pohybové rovnice (kde r jevektorová funkce, která určuje polohu hmotného bodu v závislosti na čase):

$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

2.2.3 třetí Newtonův zákon

Proti každé akci vždy působí stejná reakce; jinak: vzájemná působení dvou těles jsou vždy stejně velká a míří na opačné strany.

To se dá zapsat, jako: (F_1je síla akce a F_2je síla reakce)

$F_1 = -F_2$

3 Pohybové rovnice pro inerciální a neinerciální vztažné soustavy

3.1 Inerciální vztažná soustava

Za inerciální vztažnou soustavu budeme považovat takovou, která se vzhledem ke stálici (Slunci) buď nepohybuje (v = 0), nebo se všechny její pevné body pohybují rovnoměrně přímočaře ($\vec{v} =$ konst. r). Při takovém pohybu žádný pevný bod v této soustavě nebude zakřivovat svoji trajektorii. Platí, že každá další vztažná soustava, je-li vzhledem k inerciální soustavě v klidu nebo pohybu rovnoměrném přímočarém, je rovněž inerciální. Jako příklad můžeme uvést například stěny vagonu, který se pohybuje po přímé trati stálou rychlostí. V inerciálních vztažných soustavách platí 1. Newtonův pohybový zákon - zákon setrvačnosti.

3.2 Neinerciální vztažná soustava

Všechny ostatní vztažné soustavy jsou neinerciální. V neinerciálních vztažných soustavách neplatí 1. Newtonův pohybový zákon ani 3. Newtonův pohybový zákon, tzn. že těleso, ačkoliv na ně nepůsobí žádná síla nebo výslednice sil je nulová, mění svůj pohybový stav (rychlost), tzn. pohybuje se s nenulovým zrychlením.

3.3 Posouvající se neinerciální soustava

Je to soustava, která se vzhledem k inerciální pohybuje přímočaře nerovnoměrně. Zrychlení soustavy a všech bodů na osách je stejné a nenulové. Za reprezentující bod budeme považovat počátek takové neinerciální vztažné soustavy.

Zrychlení definujeme:

$a_u \vec{=} \frac{dR}{dt}$

Pak platí, že v takto definované neinerciální soustavě vzniká setrvačná zdánlivá síla:

$\vec{F_s} = -m\vec{a_u}$

kde m je hmotnost tělesa sledovaného v neinerciální soustavě. Pokud chceme řešit pohybovou úlohu v neinerciální soustavě, musíme ke všem skutečným silám připočítat síly zdánlivé.

3.4 Rotující neinerciální soustava

Je to soustava, která vzhledem k inerciální rotuje. Je výhodné zvolit si osu rotace za osu z obou soustav, inerciální i neinerciální, jak ukazuje obr. 1. V neinerciální soustavě takového typu pak vzniknou tři zdánlivé síly.

3.4.1 Síla Eulerova

Eulerova síla je zdánlivá síla působící v rotující neinerciální soustavě, která rotuje s proměnnou úhlovou rychlostí, e $\neq 0$. Její vektorový výpočet je:

$\vec{F_E} = -m\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$

kde $\vec{r}$ je polohový vektor tělesa o hmotnosti m, nacházejícího se v rotující neinerciální soustavě, která rotuje s úhlovým zrychlením $\vec{\varepsilon}$.

3.4.2 Síla Coriolisova

Coriolisova síla je zdánlivá síla působící na tělesa pohybující se v rotující neinerciální vztažné soustavě tak, že se mění jejich vzdálenost od osy otáčení. Coriolisova síla má směr kolmý ke spojnici těleso - osa otáčení a způsobuje stáčení trajektorie tělesa proti směru otáčení soustavy.

Její vektorový výpočet je dán rovnicí:

$\vec{F_c} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v'}$

kde m je hmotnost tělesa, $\vec{v}$ je rychlost tělesa v neinerciální vztažné soustavě, $\vec{\omega}$ je vektor úhlové rychlosti otáčení neinerciální soustavy.

Velikost Coriolisovy síly spočteme jako:

$F_c = -2m\omega v' sin\alpha$

αje úhel sevřený mezi vektorem úhlové rychlosti a vektorem rychlosti.

3.4.3 Síla odstředivá

Odstředivá síla je jedna ze zdánlivých sil, které působí na těleso v otáčející se neinerciální vztažné soustavě. V inerciálních vztažných soustavách odstředivé síly nepůsobí. Důsledkem odstředivé síly je odstředivé zrychlení. Odstředivá síla je dána rovnicí:

$\vec{F_o} = -m\vec{\omega} \times \vec{\omega} \times \vec{r}$

Kde m je hmotnost tělesa, $\vec{\omega}$ je vektor úhlové rychlosti otáčející se neinerciální soustavy a $\vec{r}$ je polohový vektor tělesa, jehož počátek leží na ose rotace.

Velikost odstředivé síly je:

$F_o = m\omega^2 r$

4 Práce a Energie

4.1 Energie

Je schopnost vykonat práci. Abychom mohli vykonat práci, musíme mít energii. Celková mechanická energie objektu je součet jeho kinetické a potenciální energie. Jednotkou energie v soustavě SI je joule (J) = kgm^2 s^{-2} (1 Joule je definován jako práce, kterou koná síla 1 N působící po dráze 1 m.)

4.1.1 Kinetická energie

Kinetická energie je energie pohybová. Vyjadřuje skutečnost, že pohybující se těleso je schopné konat práci jako důsledek svého pohybu, např. nárazem na okolní objekt. Kinetická energie hmotného bodu, těles zanedbatelných rozměrů nebo těles pohybujících se bez rotace (takový pohyb se nazývá translační nebo posuvný) je definována vztahem:

$E_k = \frac{1}{2}mv^2$

4.1.2 Potenciální energie

Potenciální energie má svoji podstatu v poloze nebo konfiguraci. Ne každý objekt je však schopen vykonat práci v důsledku své polohy. V gravitačním poli Země se potencionální energie spočítá, jako:

$E_p = mgh$

4.1.3 Zákon zachování mechanické energie

Jestliže těleso nebo hmotný systém nepodléhají účinkům okolí, pak součet kinetické a potenciální energie částic, z nichž se skládá, zůstává stálý. To znamená, že v soustavě se může měnit jeden druh energie v druhý.

$E = E_p + E_k = konst.$

4.2 Práce

Působení síly na fyzikální těleso nebo na silové pole, při kterém dochází k posouvání nebo deformaci tohoto tělesa resp. ke změně rozložení potenciální energie v silovém poli.

4.2.1 Posuvný pohyb

Práce je definována následujícím vztahem:

$W = \vec{F} \cdot \vec{s} = F \cdot s \cdot cos\alpha$

Kde α je úhel mezi silou a trajektorií pohybu.

Pokud je dráha zakřivena nebo je síla proměnná, použijeme pro výpočet integrál tzv. elementárních prací:

$dW = \vec{F} \cdot d\vec{s}$, tedy $W =_0 \int^s \vec{F} \cdot d\vec{s} =_0 \int^s (F \cdot cos\alpha) d\vec{s}$

4.2.2 Otáčivý pohyb

Mechanická práce závisí na momentu síly, který na těleso působí, na úhlu, o který se těleso otočí, a na úhlu, který svírá vektor momentu síly a osa otáčení tělesa.

Otočí-li se těleso kolem neměnné osy otáčení působením konstantního momentu síly M rovnoběžného s osou otáčení tělesa o úhel α, pak lze velikost práce zapsat ve tvaru:

$W = M \cdot \alpha$

Pokud je moment síly proměnný, použijeme pro výpočet integrál tzv. elementárních prací:

$dW = \vec{M} \cdot d\vec{\alpha}$, tedy $W =_0 \int^s \vec{M} \cdot d\vec{\alpha}$

4.2.3 Moment síly

Moment síly je vektorová fyzikální veličina, která vyjadřuje míru otáčivého účinku síly. Otáčivý účinek síly se vztahuje vzhledem k danému bodu nebo přímce. Bod, ke kterému se moment síly určuje, se nazývá momentovým bodem. Kolmá vzdálenost p síly od její osy k bodu je tzv. rameno síly.

Moment síly je definován jako součin síly a kolmé vzdálenosti osy síly od daného bodu. Velikost momentu síly tedy závisí na velikosti síly a na vzdálenosti od osy otáčení (čím dále, tím větší moment síly).

4.2.4 Konzervativní silové pole

Konzervativní silové pole je silové pole, které může konat práci, ale v izolovaném systému na uzavřené křivce je celková vykonaná práce nulová. Konzervativní síly lze vyjádřit jako záporný gradient potenciální energie: F = -∇ V, proto se též nazývají potenciálové. Mezi konzervativní síly patří např. gravitační síla a elektrostatická síla.

4.2.5 Moment hybnosti

Moment hybnosti je vektorová fyzikální veličina, která popisuje rotační pohyb tělesa. Moment hybnosti má při rotačním pohybu stejný význam jako hybnost při pohybu přímočarém. Pojem momentu hybnosti je analogický pojmu hybnosti: tak jako je hybnost součinem hmotnosti a rychlosti v případě translačního pohybu, tak je moment hybnosti součinem momentu setrvačnosti a úhlové rychlosti v případě rotačního pohybu.

Moment hybnosti L je určen vektorovým součinem jako

L = r * p;

kde r je polohový vektor a p je hybnost.

Jednotka SI: kilogram krát metr na druhou za sekundu, značka jednotky: kg.m2.s-1

4.2.6 I. impulsová věta

Časová změna celkového momentu hybnosti je rovna výslednici všech vnějších sil, které na soustavu působí.

$$\dot{\vec{p}} = \sum_{k=1}^{n} \vec{F}_k$$

To také znamená, že vnitřní síly nemohou změnit pohybový stav soustavy jako celku. Je-li výslednice všech vnějších sil nulová, nemění se výsledná hybnost soustavy. V tomto případě se výsledná hybnost zachovává.

4.2.7 II. impulsová věta

Časová změna výsledného momentu hybnosti je rovna celkovému momentu vnějších sil.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{k=1}^{n} \vec{r}_k \times \vec{F}_k$$

Je-li výsledný moment vnějších sil nulový, zachovává se celkový moment hybnosti soustavy.

5 Otáčivý pohyb tuhého tělesa

Rotace je takový pohyb tuhého tělesa, při kterém se všechny body tělesa otáčejí kolem jedné společné osy otáčení se stejnou úhlovou rychlostí. Trajektoriemi jednotlivých bodů tělesa jsou soustředné kružnice. Úhlové rychlosti a úhlová zrychlení jednotlivých bodů tělesa jsou při otáčivém pohybu stejné.

5.1 Osa otáčení

Osa otáčení je přímka, kolem které se těleso při otáčivém pohybu otáčí. Body tělesa, které na ose leží, zůstávají na svých místech, jejich rychlost je nulová.

5.2 Moment setrvačnosti

Moment setrvačnosti je fyzikální veličina, která vyjadřuje míru setrvačnosti tělesa při otáčivém pohybu. Její velikost závisí na rozložení hmoty v tělese vzhledem k ose otáčení. Body (části) tělesa s větší hmotností a umístěné dál od osy mají větší moment setrvačnosti.

Moment setrvačnosti je definován vztahem:

$J =_v \int \rho r^2 dV$

Jeho jednotka je kg.m^2

Je-li tuhé těles homogení, tedy je-li jeho hustota $\rho = konst.$, pak lze moment definovat následovně:
$J = \rho\ _v \int r^2 dV$

5.2.1 Steinerova věta (Steinerův doplněk)

Pro moment setrvačnosti tuhého tělesa vzhledem k ose otáčení jdoucí mimo těžiště tělesa platí Steinerova věta:
$J = J_T + md^2$

Kde J_T je moment setrvačnosti vzhledem k ose jdoucí těžištěm tělesa, m je hmotnost tělesa a d je kolmá vzdálenost těžiště od osy otáčení.

5.3 Kinetická energie při otáčivém pohybu tělesa

Kinetická energie E_k tuhého tělesa při otáčivém pohybu je rovna $E_k = \frac{1}{2}J\omega^2$

5.4 Pohybová rovnice při otáčení tuhého tělesa

Při otáčení tuhého tělesa lze odvodit jeho pohybovou rovnici ve tvaru:
$\vec{M} = J \cdot \vec{\varepsilon}$

6 Gravitační pole a příklady jeho působení

6.1 Newtonův Gravitační zákon

Newtonův gravitační zákon je zákon, který je použitelný pouze pro slabá gravitační pole. Je formulován tak, že každá dvě tělesa o hmotnostech m_1a $m_2$na sebe působí silou přímo úměrnou hmotnostem obou těles a silou nepřímo úměrnou čtverci jejich vzdáleností, tedy:
$F_g = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$
Kde G je gravitační konstanta G=6,67·$10^{-11} m^3 kg^{-1} s^{-2}$

6.2 Intenzita Gravitačního pole

V okolí každého tělesa existuje gravitační pole, které působí na jiná tělesa. Pro porovnání silového působení v různých místech gravitačního pole je zavedena intenzita grav. pole, která je definována následujícím vztahem:
$\vec{K} = \frac{\vec{F_g}}{m}$
Její jednotkou je N.kg^{-1} (kde \mathbf{F}_g je gravitační síla a m je hmotnost hmotného bodu, na nějž těleso s intenzitou gravitačního pole \mathbf{K} působí.)

Velikost intenzity gravitačního pole $\vec{K}$ v daném místě pole určíme ze vztahu pro velikost gravitační síly vyjádřenou v gravitačním zákonu.
$K = G\frac{M}{r^2}$

6.3 Potenciál Gravitačního pole

Gravitační potenciál hmotného bodu je v newtonovské fyzice vyjádřen vzorcem:
$V = -G\frac{M}{r}$

7 Mechanické kmitavé soustavy

Těleso připevněné k pružině, která je upevněná k boční pevné stěně, těleso se pohybuje ve vodorovném směru bez tření, zvolený směr pohybu např. ve směru souřadnicové osy x. Pokud je těleso vychýleno z rovnovážné polohy, pak na něj působí síla F.

F = -k x

Kde k je tuhost pružiny.

Na základě druhého Newtonova zákona je možné sestavit pohybovou rovnici:

ma = -k x

$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$

Je možné zavédst $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, následně můžeme přepsat rovnici do tvaru:

$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$

8 Lineární harmonický oscilátor

Přes diferenciální rovnice se dojde ke vzorečku:

$u(t) = u_0 sin(\omega_0 t + \psi)$

$u_0$je amplituda harmonických kmitů, $\omega_0$je úhlová rychlost ψje fázová konstanta.

Rychlost a zrychlení kmitajícího hmotného bodu (tělesa) určíme na základě následujících vztahů:

$v(t) = \frac{du(t)}{dt} = u_0\omega_0 cos(\omega_0 t + \psi)$

$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d^2u}{dt^2} = -u_0\omega_0^2 sin(\omega_0 t + \psi)$

8.1 Tlumené kmitání

Řešení je přes diferenciální rovnice

8.1.1 Chování systému při tlumených kmitech

V závilosti na velikosti tlumení ζlze rozlišit 3 situace:

Proζ<1 systém bude oscilovat okolo rovnovážné polohy, ale amplituda bude s časem klesat. Pro úhlovou frekvenci kmitů platí vztah:

$\omega = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$

Pro ζ=1 nastane kritické tlumení, průběh oscilací je popsán rovnicí:

$x(t) = \frac{1}{2}((x(0) + \frac{\dot{x_0}}{\omega_0}e^{\omega_0 t} + (x(0) - \frac{\dot{x_0}}{\omega_0})e^{-\omega_0 t})$

Pro ζ>1 Komplikovaný průběh, jde o velmi velké tlumení a oscilace proto nelze pozorovat