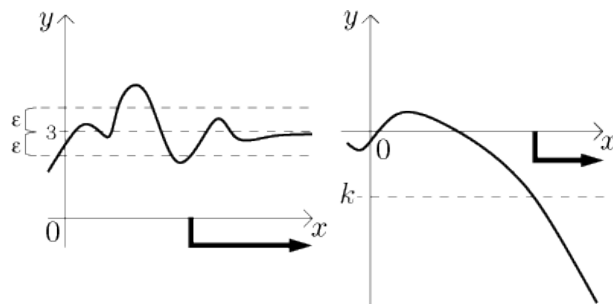


## Společná část: 8 - MA2

June 6, 2012

## 0.1 Limita funkce a posloupnosti

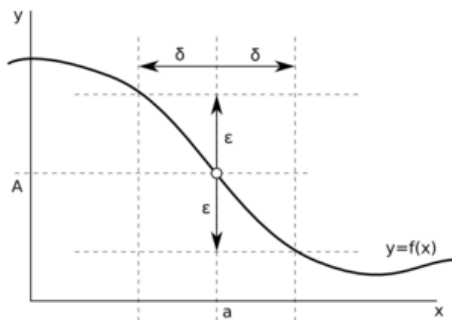
### 0.1.1 funkce



**Definice.** (limita pro vlastní bod a vlastní limitu)

Nechť  $f$  je funkce definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu  $a \in \mathbb{R}$ , nechť  $L \in \mathbb{R}$ . Řekneme, že „ $L$  je **limita** funkce  $f$  pro  $x$  jdoucí k  $a$ “, nebo že „ $f$  jde k  $L$  pro  $x$  jdoucí k  $a$ “, jestliže  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$  takové, že  $\forall x: [0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon]$ .

Zapíšeme to „ $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)) = L$ “, popřípadě „ $f(x) \rightarrow L$  pro  $x \rightarrow a$ “.



**Definice.**

Nechť  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon > 0$ . Definujeme okolí bodu  $a$ :

$U_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R};  x - a  < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$	$\varepsilon$ -okolí bodu $a$
$P_\varepsilon(a) = \{x \in \mathbb{R}; 0 <  x - a  < \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a) \cup (a, a + \varepsilon)$	prstencové $\varepsilon$ -okolí bodu $a$
$U_\varepsilon^+(a) = \{x \in \mathbb{R}; a \leq x < a + \varepsilon\} = [a, a + \varepsilon)$	pravé $\varepsilon$ -okolí bodu $a$
$P_\varepsilon^+(a) = \{x \in \mathbb{R}; a < x < a + \varepsilon\} = (a, a + \varepsilon)$	pravé prstencové $\varepsilon$ -okolí bodu $a$
$U_\varepsilon^-(a) = \{x \in \mathbb{R}; a - \varepsilon < x \leq a\} = (a - \varepsilon, a]$	levé $\varepsilon$ -okolí bodu $a$
$P_\varepsilon^-(a) = \{x \in \mathbb{R}; a - \varepsilon < x < a\} = (a - \varepsilon, a)$	levé prstencové $\varepsilon$ -okolí bodu $a$

**Definice.** (jednostranné limity)

Nechť  $f$  je funkce definovaná na nějakém levém prstencovém okolí bodu  $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , nechť  $L \in \mathbb{R}^*$ .

Řekneme, že „ $L$  je **limita** funkce  $f$  pro  $x$  jdoucí k  $a$  **zleva**“,

jestliže  $\forall$  okolí  $U = U(L) \exists$  levé prstencové okolí  $P = P^-(a)$  takové, že  $\forall x \in P: f(x) \in U$ .

Říkáme také, že „ $f$  jde k  $L$  pro  $x$  jdoucí k  $a$  zleva“, nebo „ $f$  má limitu  $L$  v  $a$  zleva“, nebo že „ $f$  jde k  $L$  v  $a$  zleva“. Zapisujeme to „ $\lim_{x \rightarrow a^-} (f(x)) = L$ “, popřípadě zkráceně „ $f(a^-) = L$ “.

Nechť  $f$  je funkce definovaná na nějakém pravém prstencovém okolí bodu  $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ , nechť  $L \in \mathbb{R}^*$ .

Řekneme, že „ $L$  je **limita** funkce  $f$  pro  $x$  jdoucí k  $a$  **zprava**“,

jestliže  $\forall$  okolí  $U = U(L) \exists$  pravé prstencové okolí  $P = P^+(a)$  takové, že  $\forall x \in P: f(x) \in U$ .

Říkáme také, že „ $f$  jde k  $L$  pro  $x$  jdoucí k  $a$  zprava“, nebo „ $f$  má limitu  $L$  v  $a$  zprava“, nebo že „ $f$  jde k  $L$  v  $a$  zprava“. Zapisujeme to „ $\lim_{x \rightarrow a^+} (f(x)) = L$ “, popřípadě zkráceně „ $f(a^+) = L$ “.

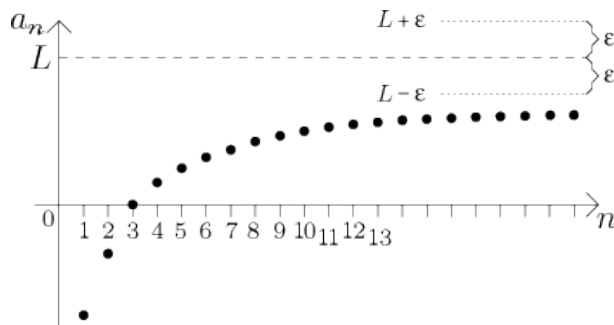
- Pokud najdeme limitu  $L$ , která je **reálné číslo**, řekneme, že je to **vlastní limita** a že **limita konverguje**. Jinak řekneme, že **limita diverguje**. Limita **nekonečno** nebo **mínus nekonečno** se nazývá **nevlastní limita**. Pokud najdeme nějakou limitu (vlastní či nevlastní), řekneme, že **limita existuje**. Jinak řekneme, že **limita neexistuje**.

**Definice.**

Nechť  $f$  je funkce definovaná na neprázdné množině  $M$ .

Jestliže je  $f$  omezená shora na  $M$ , definujeme její **supremum** na  $M$ , značeno  $\sup_M(f)$ , jako nejmenší horní mez  $f$  na  $M$ . Jinak definujeme  $\sup_M(f) = \infty$ .

Jestliže je  $f$  omezená zdola na  $M$ , definujeme její **infimum** na  $M$ , značeno  $\inf_M(f)$ , jako největší dolní mez  $f$  na  $M$ . Jinak definujeme  $\inf_M(f) = -\infty$ .

**0.1.2 posloupnost**

- **Definice:** Uvažujme posloupnost  $a_n$ . Řekneme, že nekonečno je limita této posloupnosti pro  $n$  jdoucí do nekonečna, nebo že posloupnost jde do nekonečna pro  $n$  jdoucí do nekonečna, jestliže pro každé reálné číslo  $K$  existuje přirozené číslo  $N$  takové, že pro všechna  $n = N, N + 1, N + 2, \dots$  máme  $a_n > K$ .
- Když má posloupnost limitu, která je reálné číslo, řekneme, že posloupnost konverguje. Taková limita se nazývá **vlastní limita**.
- Když má posloupnost limitu, která je plus či minus nekonečno, říkáme této limitě **nevlastní limita**.
- Když má posloupnost limitu, vlastní či nevlastní, řekneme, že limita **existuje**.
- Pokud posloupnost nemá vůbec žádnou limitu, řekneme, že limita **neexistuje**.
- Posloupnosti s nevlastní limitou a bez limity se nazývají **divergentní**.

**0.1.3 Rychlost růstu**

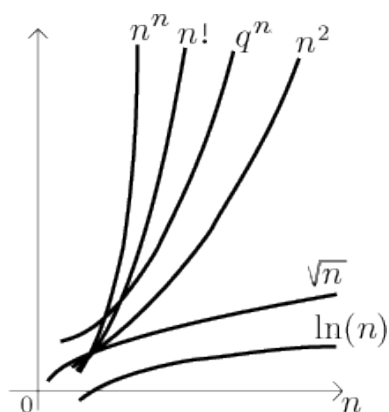
škála mocnin

**Fakt.** (škála mocnin v nekonečnu)

Pro libovolná  $a, b > 0$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{e^{ax}}{x^b} \right) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^a}{\ln^b(x)} \right) = \infty.$$

Značení:  $a^x \gg x^a \gg \ln^b(x)$ .



#### 0.1.4 L'Hopitalovo pravidlo

Při hledání limity podílu dvou funkcí (i posloupností) dostaneme “neurčitý podíl”  $\rightarrow$ řešíme l'Hopitalovým pravidlem

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \left\langle \left\langle \begin{array}{l} f(x) \rightarrow 0 \text{ pro } x \rightarrow \infty \\ g(x) \rightarrow 0 \text{ pro } x \rightarrow \infty \end{array} \right\rangle \frac{0}{0} \right\rangle \Rightarrow \text{l'H} \rangle \rangle$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f'(x)}{g'(x)} \right),$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{a_n}{b_n} \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f(x)}{g(x)} \right) = \left\langle \left\langle \begin{array}{l} f(x) \rightarrow \pm \infty \text{ pro } x \rightarrow \infty \\ g(x) \rightarrow \pm \infty \text{ pro } x \rightarrow \infty \end{array} \right\rangle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle \Rightarrow \text{l'H} \rangle \rangle$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{f'(x)}{g'(x)} \right).$$

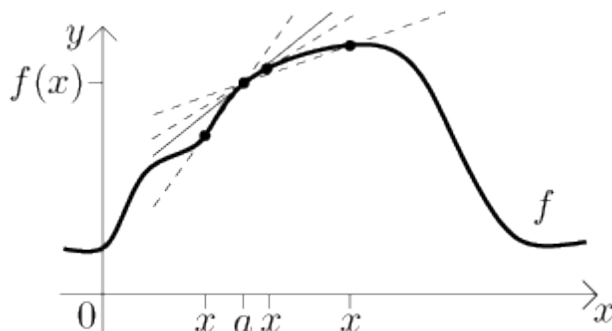
**příklad**

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(n)}{n^2} \right) = \left\langle \left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle \right\rangle \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\ln(x)}{x^2} \right)$$

$$= \left\langle \left\langle \begin{array}{l} \ln(x) \rightarrow \infty \text{ pro } x \rightarrow \infty \\ x^2 \rightarrow \infty \text{ pro } x \rightarrow \infty \end{array} \right\rangle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle \Rightarrow \text{l'H} \rangle \rangle$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{1}{x}}{2x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2x^2} \right) = \left\langle \left\langle \frac{1}{\infty} \right\rangle \right\rangle = 0.$$

## 0.2 Derivace



### Definice.

Nechť  $f$  je funkce definovaná na nějakém okolí bodu  $a$ .

Řekneme, že  $f$  je **diferencovatelná** v  $a$ , jestliže  $\lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$  konverguje.

Pak definujeme **derivaci**  $f$  v  $a$  jako

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right).$$

Alternativní vzorec:  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \right)$ .

Leibnizovo značení:

$$f'(a) = \frac{df}{dx}(a) = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a}.$$

### Věta. (derivace v bodě a skládání funkcí)

Nechť je funkce  $f$  diferencovatelná v  $a$  a funkce  $g$  diferencovatelná v  $b = f(a)$ .

Pak je funkce  $g \circ f = g(f)$  diferencovatelná v  $a$  a platí

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

### Definice.

Nechť  $f$  je funkce definovaná na nějakém pravém okolí bodu  $a$ .

Řekneme, že  $f$  je **diferencovatelná v  $a$  zprava**, jestliže  $\lim_{x \rightarrow a^+} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$  konverguje.

Pak definujeme **derivaci**  $f$  v  $a$  **zprava** jako

$$f'_+(a) = \lim_{x \rightarrow a^+} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right).$$

Nechť  $f$  je funkce definovaná na nějakém levém okolí bodu  $a$ .

Řekneme, že  $f$  je **diferencovatelná v  $a$  zleva**, jestliže  $\lim_{x \rightarrow a^-} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$  konverguje.

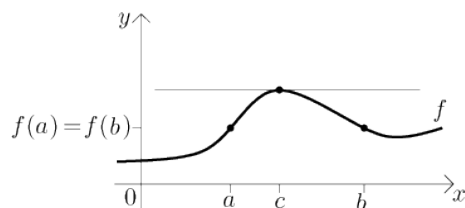
Pak definujeme **derivaci**  $f$  v  $a$  **zleva** jako

$$f'_-(a) = \lim_{x \rightarrow a^-} \left( \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right).$$

### 0.2.1 vlastnosti derivace

- jestliže je  $f$  diferencovatelná v  $a$  a  $f'(a) \neq 0$ , pak je i příslušná inverzní funkce  $f^{-1}$  diferencovatelná v  $b$
- Jestliže je funkce  $f$  diferencovatelná v bodě  $a$ , pak je  $f$  spojitá v  $a$ .

- Necht'  $a < b$  jsou reálná čísla. Necht'  $f$  je funkce spojitá na intervalu  $a, b$  a diferencovatelná na  $(a, b)$ . Jestliže  $f(a) = f(b)$ , pak existuje  $c$  z  $(a, b)$  takové, že  $f'(c) = 0$  (věta o střední hodnotě - **Rolleova věta**)

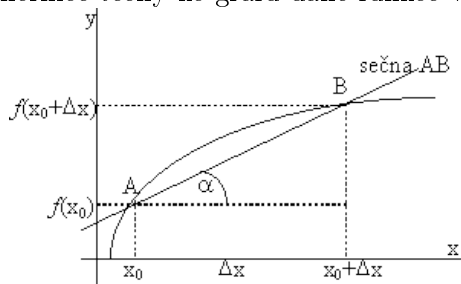


- **Věta.** (Věta o střední hodnotě, Lagrangeova věta)  
Necht'  $f$  je spojitá na intervalu  $(a, b)$  a diferencovatelná na jeho vnitřku  $(a, b)$ .  
Pak existuje  $c \in (a, b)$ :  $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

## 0.2.2 význam derivace

### 0.2.2.1 geometrický význam

směrnice tečny ke grafu dané funkce v daném bodě



$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

### 0.2.2.2 fyzikální význam

- derivace podle časové proměnné, vyjadřující rychlost změny nějaké proměnné v čase (např. okamžitá rychlost:  $v = \frac{ds}{dt}$ )
- diferenciální rovnice

## 0.2.3 Monotonie

- vlastnost, označující, zda je funkce v bodě či na daném intervalu monotónní

existuje nějaké okolí  $U(a)$  bodu  $a$  takové, že pro všechna  $x$  v tomto okolí platí:

**rostoucí**

$$x > a \Rightarrow f(x) > f(a) \quad x < a \Rightarrow f(x) < f(a).$$

**klesající**

$$x > a \Rightarrow f(x) < f(a) \quad x < a \Rightarrow f(x) > f(a),$$

**nerostoucí**

$$x > a \Rightarrow f(x) \leq f(a) \wedge x < a \Rightarrow f(x) \geq f(a),$$

**neklesající**

$$x > a \Rightarrow f(x) \geq f(a) \wedge x < a \Rightarrow f(x) \leq f(a).$$

- typ monotonie určíme z první derivace  $f'(x)$

**rostoucí** pro  $f'(x) > 0$ ; **klesající** pro  $f'(x) < 0$

### 0.2.3.1 kritický bod

**Definice:** Necht' je funkce  $f$  definovaná na nějakém okolí bodu  $c$ . Řekneme, že  $c$  je **kritický bod**, jestliže  $f'(c) = 0$  nebo  $f'(c)$  neexistuje.

### 0.2.4 Lokální extrémy

**Definice.**

Necht'  $f: D(f) \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce, kde  $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ . Necht'  $\bar{a}$  je vnitřní bod  $D(f)$ .

Řekneme, že  $f$  má v  $\bar{a}$  **lokální maximum** nebo že  $f(\bar{a})$  je lokální maximum, jestliže existuje  $U = U(\bar{a})$  takové, že  $f(\bar{a}) \geq f(\bar{x})$  pro všechna  $\bar{x} \in U$ .

Řekneme, že  $f$  má v  $\bar{a}$  **lokální minimum** nebo že  $f(\bar{a})$  je lokální minimum, jestliže existuje  $U = U(\bar{a})$  takové, že  $f(\bar{a}) \leq f(\bar{x})$  pro všechna  $\bar{x} \in U$ .

Pokud jsou v definici maxima/minima ostré nerovnosti pro  $\bar{x} \neq \bar{a}$ , pak se dotyčný extrém nazývá **ostrý**.

Necht' je  $f$  spojitá v  $c$ :

- Jestliže existuje pravé okolí  $c$ , na kterém je  $f$  rostoucí, a levé okolí  $a$ , na kterém je  $f$  klesající, pak má  $f$  lokální minimum v  $c$
- Jestliže existuje pravé okolí  $c$ , na kterém je  $f$  klesající, a levé okolí  $a$ , na kterém je  $f$  rostoucí, pak má  $f$  lokální maximum v  $c$

**Definice.**

Necht'  $f$  je funkce definovaná na intervalu  $I$ .

Řekneme, že  $f$  je na intervalu  $I$  **konvexní**, jestliže

$$\forall x < y < z \in I: \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Řekneme, že  $f$  je na intervalu  $I$  **konkávní**, jestliže

$$\forall x < y < z \in I: \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

**inflexní bod** -  $f$  přechází z konvexní na konkávní nebo naopak a je tam dvakrát diferencovatelná

### 0.2.5 Asymptoty

#### **Definice.**

Nechť  $f$  je funkce definovaná na nějakém jednoduše

Řekneme, že přímka  $x = a$  je **svislá asymptota**

$$\lim_{x \rightarrow a^+} (f(x)) = \pm\infty \quad \text{nebo} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} (f(x)) = \pm\infty$$

#### **Definice.**

Nechť  $f$  je funkce definovaná na okolí  $\infty$ .

Řekneme, že přímka  $y = B$  je **vodorovná asymptota**

$$\text{jestliže } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x)) = B.$$

Nechť  $f$  je funkce definovaná na okolí  $-\infty$ .

Řekneme, že přímka  $y = B$  je **vodorovná asymptota**

$$\text{jestliže } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x)) = B.$$

#### **Definice.**

Nechť  $f$  je funkce definovaná na okolí  $\infty$ .

Řekneme, že přímka  $y = Ax + B$  je **šikmá asymptota**  $f$  v  $\infty$ ,

$$\text{jestliže } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (Ax + B)) = 0.$$

Nechť  $f$  je funkce definovaná na okolí  $-\infty$ .

Řekneme, že přímka  $y = Ax + B$  je **šikmá asymptota**  $f$  v  $-\infty$ ,

$$\text{jestliže } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (Ax + B)) = 0.$$

### 0.2.6 Parciální derivace

Parciální derivace funkce více proměnných představuje v matematice takovou derivaci dané funkce, při které se derivuje pouze vzhledem k **jedné z proměnných**, ostatní



proměnné jsou považovány za konstanty

## 0.2.7 Gradient

**Definice.**

Nechť  $f: D(f) \mapsto \mathbb{R}$  je funkce,  $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ . Nechť  $\vec{a}$  je vnitřní bod  $D(f)$ .

Jestliže existují všechny parciální derivace  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})$  pro  $i = 1, \dots, n$ , pak definujeme **gradient**  $f$  v  $\vec{a}$  jako vektor

$$\nabla f(\vec{a}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a}) \right).$$

Alternativní značení:  $\nabla f(\vec{a}) = \vec{\nabla} f(\vec{a}) = \text{grad}(f)(\vec{a})$ .

**Věta.** (Sylvesterovo kritérium)

Nechť  $G$  je otevřená množina v  $\mathbb{R}^n$  a  $f \in C^1(G)$ .

Nechť  $\vec{a} \in G$  je stacionární bod  $f$  a  $H$  je Hessova matice  $f$  v  $\vec{a}$ . Nechť  $\Delta_i$  jsou levé horní subdeterminanty  $H$ .

Jestliže  $\Delta_i > 0$  pro všechna  $i$ , pak je  $f(\vec{a})$  (ostré) lokální minimum.

Jestliže  $\Delta_1 < 0$ ,  $\Delta_2 > 0$ ,  $\Delta_3 < 0$  atd. až  $(-1)^n \Delta_n > 0$ , pak je  $f(\vec{a})$  (ostré) lokální maximum.

Jestliže  $\Delta_2 < 0$ , pak je  $f(\vec{a})$  **sedlový bod**.