Společná část: 9 - MA2

June 4, 2012

Abstract

Význam integrálu, základní metody výpočtu a nevlastní integrál; řady a jejich konvergence (význam, příklady použití, geometrická řada), Taylorův polynom a řada.

1 Integrál

1.1 Neurčitý integrál

Poznámka: Habala ho ztotožňuje s Newtonovym (sou i jiný definice, ale držel bych se jeho)

= množina primitivních funkcí integrované funkce

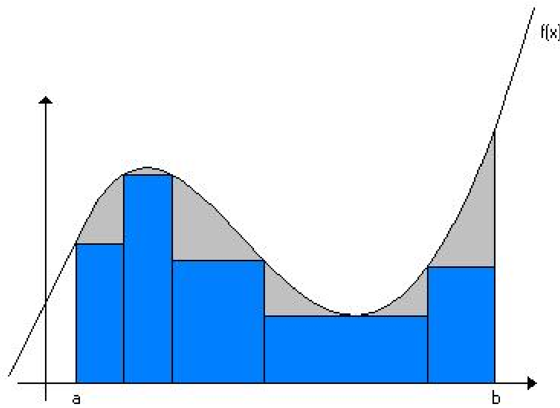
Primitivní funkce: Nechť f je funkce na intervalu I. Řekneme, že funkce F je primitivní funkce k f na I, jestliže je F spojitá na I, diferencovatelná na jeho vnitřku I^O a $F' = f$ na I^O.

Newtonův integrál: Nechť f je funkce, která má na intervalu I primitivní funkci. Definujeme neurčitý integrál f na I jako množinu všech takových primitivních funkcí. Značení: $\int f(x)dx = \{$F; F je primitivní funkce k f na I$\}$. Jestliže máme jednu takovou primitivní funkci F, pak nepřesně ale tradičně píšeme $\int f(x)dx = F(x) + C, x \in I$.

1.2 Určitý integrál

Riemannův (určitý) integrál odpovídá matematickému obsahu oblasti pod grafem f, který je roven geometrickému obsahu částí nad osou x mínus obsah částí pod osou x.

Nekonečný součet nekonečně malých (úzkých) sloupců pod křivkou



$\int_c^b f(x)dx$

1.2.1 Výpočet určitého integrálu

- Standardní způsob výpočtu určitého integrálu je založen na **základní větě integrálního počtu**

Nejprve se najde primitivní funkce F k dané funkci f na daném intervalu a,b a pak se použije Newton-Leibnizův vzorec:

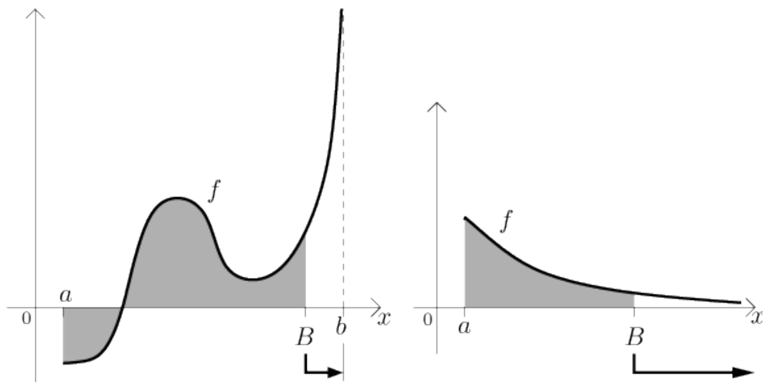
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

$$F(b) - F(a) = \Big[F(x)\Big]_a^b.$$

funguje jen pro funkce f, které jsou spojité na uzavřeném intervalu $<$a,b$>$, jinak řešíme jako **nevlastní integrál**

- při hledání primitivní funkce se používá metoda **substituce** a **per-partes**

1.3 Nevlastní integrál



Definice: Nechť a je reálné číslo, nechť $b > a$ je reálné číslo nebo $b = \infty$. Nechť f je funkce Riemannovsky integrovatelná na intervalech a, B pro všechna B z (a, b). Pak definujeme nevlastní Riemannův integrál z f od a do b jako:

o nevlastní integrál se jedná pokud:

- jedna či obě integrační meze (koncové body integračního intervalu) jsou nekonečné
- integrovaná funkce není spojitá v některých bodech integračního intervalu

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{B\to b^-}\left(\int_a^B f(x)\,dx\right)$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{A\to a^+}\left(\int_A^b f(x)\,dx\right)$$

1.4 Metody výpočtu

1.4.1 substituce

obecně

$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = \left|\begin{array}{c} y = g(x) \\ dy = g'(x)\,dx \end{array}\right| = \int f(y)\,dy$$
$$= F(y) + C = F(g(x)) + C.$$

příklad

$$\int \operatorname{cotg}(x)\,dx = \int \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\,dx = \int \frac{1}{\sin(x)}\,\cos(x)\,dx = \left|\begin{array}{c} y = \sin(x) \\ dy = \cos(x)\,dx \end{array}\right|$$
$$= \int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y| + C = \ln|\sin(x)| + C,\;\; x \neq k\pi.$$

1.4.2 per-partes

obecně

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \Big[f(x)g(x)\Big]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

příklad

$$\int_0^\pi x\cos(x)\,dx = \left| \begin{matrix} f = x & g' = \cos(x) \\ f' = 1 & g = \sin(x) \end{matrix} \right| = \Big[x\,\sin(x)\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \sin(x)\,dx$$
$$= \pi\sin(\pi) - 0 - \int_0^\pi \sin(x)\,dx = -\int_0^\pi \sin(x)\,dx.$$

1.4.3 parciální zlomky

$$\begin{aligned}\frac{p(x)}{q(x)} &= \sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{r_n}\frac{A_{n,i}}{(x-a_n)^i} + \sum_{m=1}^{M}\sum_{j=1}^{t_m}\frac{B_{m,j}x + C_{m,j}}{(x^2+b_mx+c_m)^j} \\
&= \frac{A_{1,1}}{(x-a_1)} + \frac{A_{1,2}}{(x-a_1)^2} + \ldots + \frac{A_{1,r_1}}{(x-a_1)^{r_1}} \\
&\quad + \frac{A_{2,1}}{(x-a_2)} + \ldots + \frac{A_{2,r_2}}{(x-a_2)^{r_2}} + \ldots + \frac{A_{N,1}}{(x-a_N)} + \ldots + \frac{A_{N,r_N}}{(x-a_2)^{r_N}} \\
&\quad + \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{(x^2+b_1x+c_1)} + \frac{B_{1,2}x + C_{1,2}}{(x^2+b_1x+c_1)^2} + \ldots \frac{B_{1,t_1}x + C_{1,t_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{t_1}} + \ldots \\
&\quad + \frac{B_{M,1}x + C_{M,1}}{(x^2+b_Mx+c_M)} + \ldots + \frac{B_{M,t_M}x + C_{M,t_M}}{(x^2+b_Mx+c_M)^{t_M}}.\end{aligned}$$

1.4.4 tabulkové integrály

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ x > 0; \qquad \text{pro } \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C,\ x \neq 0 \qquad \int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + C \qquad \int \frac{1}{\cos^2(x)}\,dx = \mathrm{tg}(x) + C,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2(x)}\,dx = -\mathrm{cotg}(x) + C,\ x \neq k\pi$$

$$\int \sinh(x)\,dx = \cosh(x) + C \qquad \int \frac{1}{\cosh^2(x)}\,dx = \mathrm{tgh}(x) + C$$

$$\int \cosh(x)\,dx = \sinh(x) + C \qquad \int \frac{1}{\sinh^2(x)}\,dx = -\mathrm{cotgh}(x) + C,\ x \neq 0$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \mathrm{arctg}(x) + C \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin(x) + C,\ x \in (-1,1)$$

2 Řady

Definice: Nechť $a_{k_{k \geqq n_0}}$ je posloupnost (reálných čísel). Pojmem řada (reálných čísel) rozumíme abstraktní symbol

$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$
Pro všechna celá čísla $N > n_0$ definujeme její částečné součty řady vzorcem:
$s_n = \sum_{k=n_0}^{N} a_k$

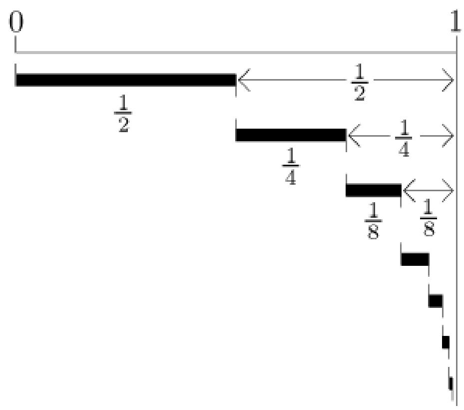
- řada konverguje k A, jestliže posloupnost s_n konverguje (k A).

$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k = a$

- řada diverguje, jestliže posloupnost s_n diverguje.

$\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k = \pm\infty$
příklad:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$$



2.0.5 Testování konvergence řad

Absolutní konvergence: Řada $\sum_{k=n_0}^{\infty} a_k$ absolutně konverguje, pokud konverguje $\sum_{k=n_0}^{\infty} |a_k|$

metody testování (všechny na http://math.feld.cvut.cz/mt/txte/2/txc3eb2.htm**)**

Věta. (**integrální kritérium**)
Nechť $f \geq 0$ je nerostoucí na $\langle n_0, \infty)$ pro $n_0 \in \mathbb{Z}$.
Řada $\sum\limits_{k=n_0}^{\infty} f(k)$ konverguje právě tehdy, když $\int\limits_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx$ konverguje.

Navíc pak platí

$$\int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{k=n_0}^{\infty} f(k) \leq f(n_0) + \int_{n_0}^{\infty} f(x)\,dx.$$

Důsledek. (p**-test**)

$\sum \frac{1}{k^p}$ konverguje tehdy a jen tehdy, když $p > 1$.

Věta. (**srovnávací kritérium**)

Uvažujme řady $\sum a_k$, $\sum b_k$.

Nechť existuje n_0 tak, aby $0 \leq a_k \leq b_k$ pro všechna $k \geq n_0$.

(i) Jestliže $\sum b_k$ konverguje, pak také $\sum a_k$ konverguje.

(ii) Jestliže $\sum a_k$ diverguje, pak také $\sum b_k$ diverguje

Symbolicky: $a_k \leq b_k \implies \sum a_k \leq \sum b_k$.

Věta. (**limitní srovnávací kritérium**)

Uvažujme řady $\sum a_k$, $\sum b_k$.

Nechť existuje $n_0 \in \mathbb{Z}$ tak, aby $a_k, b_k > 0$ pro všechna $k \geq n_0$.

Předpokládejme, že $\lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{a_k}{b_k}\right) = A > 0$. Pak

$\sum a_k$ konverguje tehdy a jen tehdy, když konverguje $\sum b_k$.

Symbolicky: $a_k \sim b_k \implies \sum a_k \sim \sum b_k$.

Věta.

Uvažujme řadu $\sum a_k$, nechť $a_k \geq 0$ pro všechna k.

(i) **(limitní) odmocninové kritérium**:

Předpokládejme, že $\varrho = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\sqrt[k]{a_k}\right)$ konverguje.

1) Jestliže $\varrho < 1$, pak $\sum a_k$ konverguje.

2) Jestliže $\varrho > 1$, pak $\sum a_k$ diverguje ($= \infty$).

(ii) **(limitní) podílové kritérium**:

Předpokládejme, že $\lambda = \lim\limits_{k\to\infty} \left(\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)$ konverguje.

1) Jestliže $\lambda < 1$, pak $\sum a_k$ konverguje.

2) Jestliže $\lambda > 1$, pak $\sum a_k$ diverguje ($= \infty$).

- pro alternující řady ("střídající $+, -+, \ldots$")

Věta. (**Leibnizovo kritérium**)
Uvažujme řadu $\sum a_k$, nechť $a_k = (-1)^k b_k$.
Předpokládejme, že $b_k \geq 0$ pro všechna k a $\{b_k\}$ je nerostoucí.
Řada $\sum (-1)^k b_k$ konverguje právě tehdy, když $\lim_{k\to\infty}(b_k) = 0$.

2.1 Geometrická řada

=součet členů geometrické posloupnosti ($a_{n+1} = a_n \cdot q$)

definice: Nechť $a, q \in R$. Řada $\sum_{k=n_0}^{\infty} a \cdot q^k$ se nazývá **geometrická řada**.

Součet geometrické řady je dán jako limita posloupnosti n-tých částečných součtů:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1}{1-q} + \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 \cdot q^n}{q-1}$$

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} \frac{a_1}{1-q} & \text{pro } |q| < 1 \\ \pm\infty, & \text{pro } q \geq 1 \\ \text{nekonverguje (osciluje)} & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$$

2.2 Aplikace řad

2.2.1 použití Fourierových řad pro frekvenční analýzu

Slouží k zápisu jakéhokoliv periodického průběhu pomocí goniometrických funkcí sinus a kosinus.

Základní myšlenka Fourierových řad je, že danou funkci vyjádříme jako kombinaci oscilací, počínaje tou, jejíž frekvence je dána zadanou funkcí (buď její periodicitou nebo délkou omezeného intervalu, na kterém je zadána), a pak se berou násobky této frekvence čili používáme dělených period.

- **zvuková komprese:** Když dostaneme zvukový vzorek, Fourierova transformace nám umožňuje jej rozložit na základní vlny a uchovat v tomto tvaru.
- **uchovávání obrazové informace** (např. databáze otisků)

2.2.2 Mocninná řada ve výpočtech

- Před rozmachem kalkulaček se při výpočtech všechny funkce nahrazovaly Taylorovými řadami, popřípadě jejich konečnými částmi - polynomy.
- **vyčíslení Pí:** Pí je transcendentní číslo, což znamená, že jej nemůžeme vyjádřit pomocí algebraických operací. Jeden způsob jeho vyčíslení nabízí řady.
- **výpočet složitých integrálů,** které nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí a obvyklých operací (včetně skládání)

- **Taylorův polynom**

2.3 Taylorův polynom a řada

Taylorův polynom aproximuje hodnoty funkce, která má v daném bodě derivaci, pomocí polynomu, jehož koeficienty závisí na derivacích funkce v tomto bodě. Čím vyšší stupeň tím vyšší přesnost pro vzdálenější body.

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \tfrac{1}{2!}f''(a)(x-a)^2 + \ldots + \tfrac{1}{n!}f^{(n)}(a)(x-a)^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Taylorova řada se liší od polynomu tím, že se jedná o **nekonečný** součet

$$T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

2.3.1 důležité řady

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}x^k = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \ldots, \qquad x \in I\!R;$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots, \qquad x \in I\!R;$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots, \qquad x \in I\!R;$$

$$\ln(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(x-1)^k$$
$$= (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots, \qquad x \in (0, 2\rangle;$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots, \qquad x \in (-1, 1);$$

$$(c+x)^A = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{A}{k} c^{A-k}x^k$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A(A-1)\cdot\ldots\cdot(A-k+1)}{k!}c^{A-k}x^k, \qquad x \in (-c, c).$$