Otázka č.30 - A4B02FYZ - Ondřej Smrž

Dynamický systém

- je systém, který se v čase mění v závislosti na množině pravidel, která určuje jak se jeden stav systému změní do druhého stavu.
- skládá se ze dvou částí
  - *stavového vektoru*, který popisuje stav ve kterém se právě systém nachází
  - *funkce*, která nám určuje jak se systém dostane z jednoho stavu do druhého

Klasifikace dynamického systému

- Lineární - funkce popisující lineární systém musí splňovat aditivitu a homogenitu $f(x+y)=f(x)+f(y)$ a $f(\alpha x)=\alpha f(x)$
- Nelineární - funkce nesplňují předchozí pravidla
- Autonomní - systém běžných diferenciálních rovnic, které nezávisí na nezávislé proměnné. Pokud je tato proměnná čas, systém se nazývá *time-invariant system*

  $$x_d(t) = x(t+\delta)$$
  $$y(t) = t\,x_d(t)$$
  $$y_1(t) = t\,x_d(t) = t\,x(t+\delta)$$

  $$y(t) = t\,x_d(t)$$
  $$y_2(t) = y(t+\delta) = (t+\delta)x(t+\delta)$$

  $y_1(t) \neq y_2(t)$ tzn. systém je neautonomní nebo není time-invariantní
- Neautonomní
- Diskrétní - popsán rovnicí nebo množinou rovnic. Pokud popsán pouze jednou rovnicí mluvíme o jednodimenzionální mapě. Typicky je systém popsán následovně, kde k je čas

  $$x(0) = x_0$$
  $$x(k+1) = f(x(k))$$
  $$x(k) = f^k(x_0)$$

- Continuous system - popsán jednou nebo více diferenciálníma rovnicema $x(0) = x_0$, $x' = f(x)$

- jednodimenzionální - popsán jednou funkcí

$$x(k+1) = ax(k) + b$$
$$x'(t) = ax(t) + b$$

- vícedimenzionální - popsán vektorem funkcí

$$\vec{x}(k+1) = \mathbf{A}\vec{x}(k) + \vec{\mathbf{B}}$$
$$\vec{x}'(t) = \mathbf{A}\vec{x}(t) + \vec{\mathbf{B}}$$

  Pojmy: diagonální matice,počítání vlastních čísel, vektorů, jakobian(matice parciálních derivací funkcí), stopa matice(součet prvků na hlavní diagonále),...

Fázový portrét

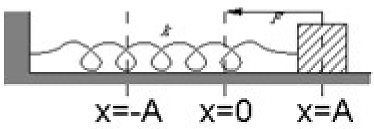
phase space(fázový prostor) - je prostor ve kterém jsou reprezentovány všechny možné stavy systému, kde každy stav odpovídá unikatnímu bodu fázového prostoru

- fázový prostor dvou dimenzionálního systému se nazývá phase plane(fázová rovina)

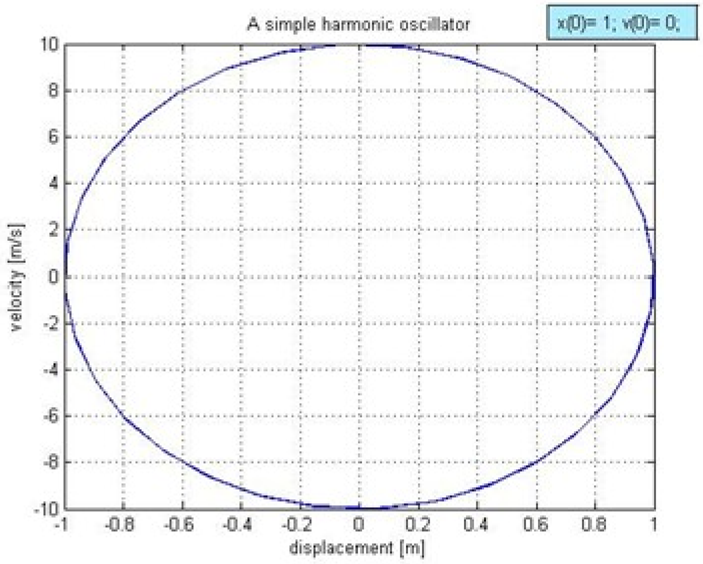
- v mechanických systémech se většinou fázový prostor skládá z proměnných vyjadřující rychlost a polohu

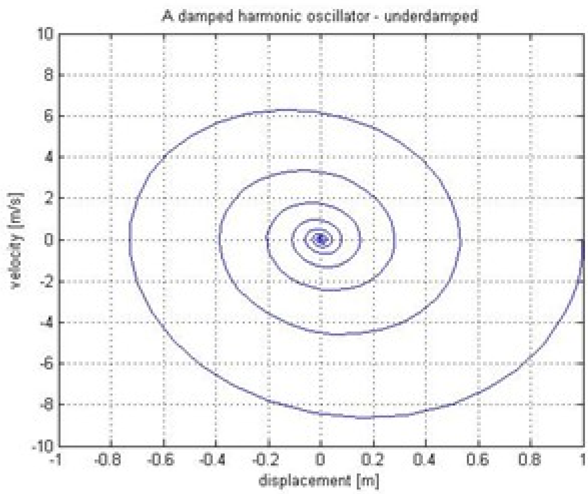
fázový portrét - graf jedné fázové křivky(nebo více) odpovídající rozdílným počátečním podmínkám dané fázové roviny

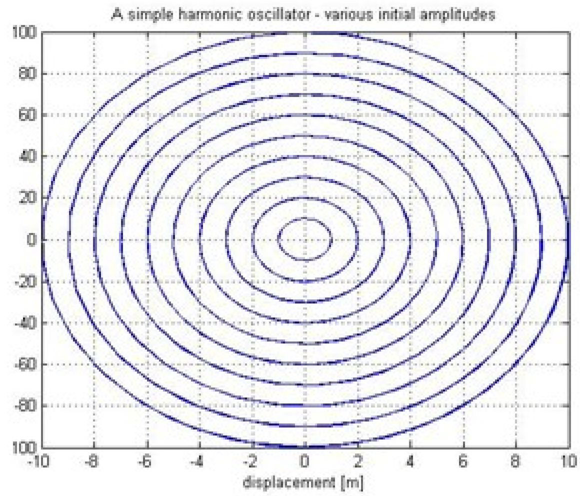
$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$



počáteční vychýlení x = 1 metr a rychlost 0







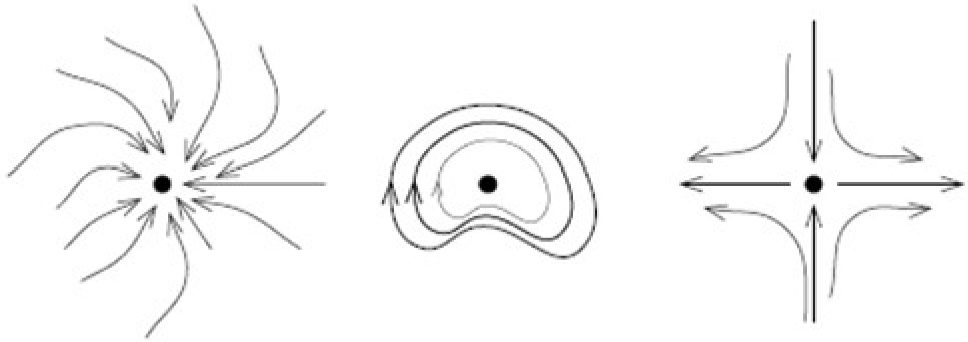
underdamped oscilátor vypadá jako spirála a jednoduchý harmonický oscilátor jako soustředné kruhy ;)

Stabilita a stacionární body

- stacionární bod - speciální bod dynamického systému, který se nemění v závislosti na čase (pro hledání položíme první derivaci rovnou nule)
- atraktor - je množina(bod, křivka,..) ke které se systém v čase vyvíjí
- stabilní stacionární bod - pro každé počáteční hodnoty systém konverguje k tomuto bodu

- částečně stabilní stacionární bod - pro počáteční hodnoty dostatečně blízko zůstává systém v okolí část.stab.bodu ale nekonverguje k němu
- nestabilní bod - pro počáteční hodnoty dostatečně blízko se systém od nestabilního bodu vzdaluje

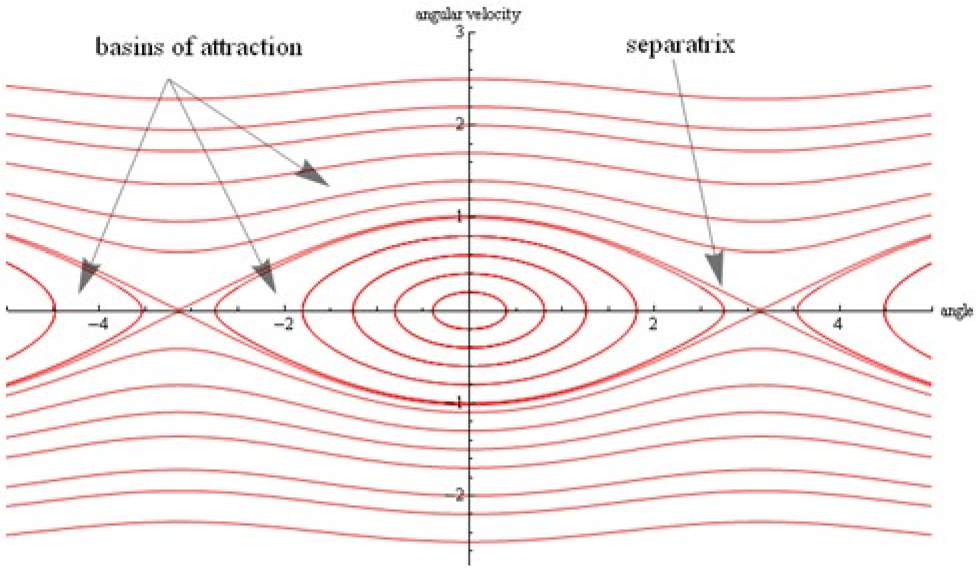
stabilní bod, částečně stabilní a nestabilní bod

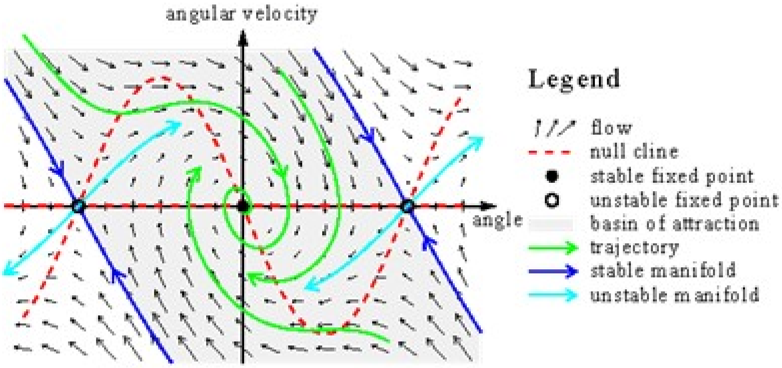


Topologická klasifikace

- basin of attraction - oblast v fázovém prostoru všech počátečních podmínek, které tíhnou k částečným řešením jako mezní cyklus, stabilní bod a jiné atraktory
- trajektorie - je řešení rovnic pohybu. Křivka ve fázovém prostoru parametrizovaná časem
- flow - výraz pro trajektorii nebo více trajektorií v dynamickém systému. Např. pohyb proměnných v čase
- nullclines - přímky kde derivace podle času jedné komponenty je rovna 0
- separatrix - hranice která odděluje dvě různá chování dynamického systému. V 2D například křivka oddělující dvě basin of attraction

$$\dot{\omega} = -0.26 \sin \varphi$$





Klasifikace - jednodimenzionální linearání systém

Time	Derivative at x~	Fixed point is
Continous	f'(x~)<0	Stable
	f'(x~)>0	Unstable
	f'(x~)=0	Cannot decide
Discrete	|f'(x~)|<1	Stable
	|f'(x~)|>1	Unstable
	|f'(x~)|=1	Cannot decide

Bacteria equation $$\frac{dx}{dt} = bx - px^2; \quad f(x) = bx - px^2$$

Derivative $$f'(x) = b - 2px$$

1st fixed point - unstable $$\tilde{x}_1 = 0; \quad f'(\tilde{x}_1) = b > 0$$

2nd fixed point - stable $$\tilde{x}_2 = \frac{b}{p}; \quad f'(\tilde{x}_2) = b - 2p\frac{b}{p} = -b < 0$$

Klasifikace - dvoudimenzionální linearání systém

Set of equations for 2D system

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$$
$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = cx_1 + dx_2$$

Jacobian matrix for 2D system

$$\mathbf{J} = \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Calculation of eigenvalues

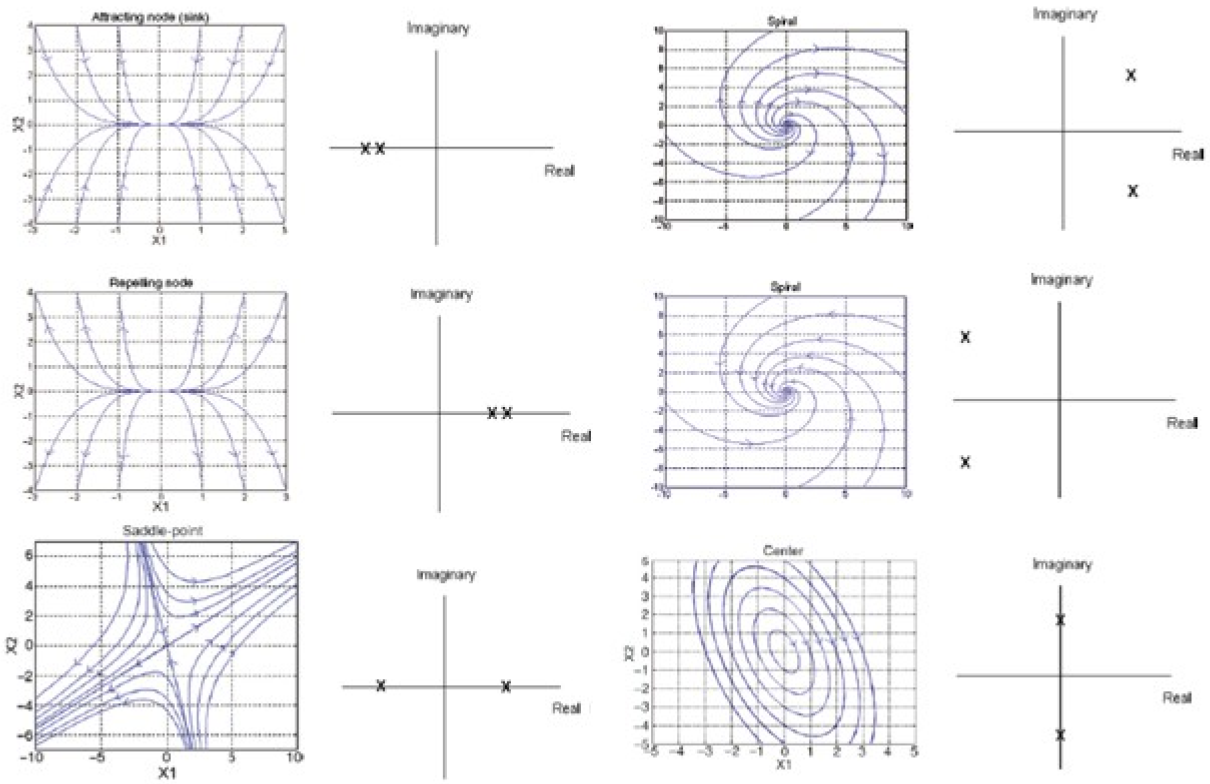
$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{E}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \det \begin{bmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{bmatrix} = 0$$
$$(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 - (a+d)\lambda + ad - bc = 0$$

Formulation using trace and determinant

$$Tr(\mathbf{A}) = a + d; \quad Det(\mathbf{A}) = ad - bc$$
$$\lambda^2 - Tr(\mathbf{A})\lambda + Det(\mathbf{A}) = 0$$
$$\lambda_{12} = \frac{Tr(\mathbf{A}) \pm \sqrt{Tr(\mathbf{A})^2 - 4Det(\mathbf{A})}}{2}$$

STRUČNÁ KLASIFIKACE DVOUDIMENZIONÁLNÍCH SYSTÉMŮ PODLE VLASTNÍCH ČÍSEL

např. atracting node má obě vlastní čísla reálná záporná



pro zvídavé(=šprty) další speciální případy lze najít ve slidech(2.) na stránce 19-21. Klasifikace vícedimenzionálních systémů je poslední slide.

STABILITA NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU

metoda linearizace = první Lyapunova metoda - hlavní myšlenka je rozepsat pravou stranu funkce v rovnici pohybu do Taylerova polynomu a zanedbat tak vyšší členy

pokud metoda linearizace nedokáže rozhoudnout musíme použít d*ruhou Lyapunovu metodu =*

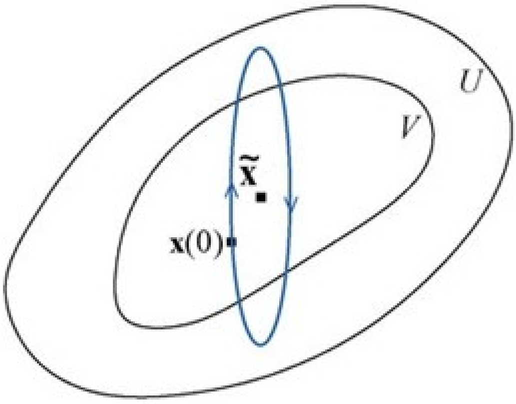
Lyapunovy funkce - příklad harmonického oscilátoru. Pokud se na harmonický tlumený oscilátor podíváme z pohledu energie. Je jasné, že v určitou chvíli se musí ustáli v ekvilibriu (bod 0,0). Princip druhé Lyapunovy metody je najít takovou funkci $V(\overrightarrow{x})$, která představuje energii a splně následující podmínky:

1. funkce je souvisle diferencovatelné v okolí stacionárního bodu
2. *pozitivně definitní* V - $V(\overrightarrow{x}) > 0$ pro všechna $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{\widetilde{x}}$ a $V(\overrightarrow{\widetilde{x}}) = 0$
3. *negativně definitní* dV/dt - $\frac{dV(\overrightarrow{x})}{dt} < 0$ ve všech stavech $\overrightarrow{x}$; $\frac{dV(\overrightarrow{\widetilde{x}})}{dt}$=0

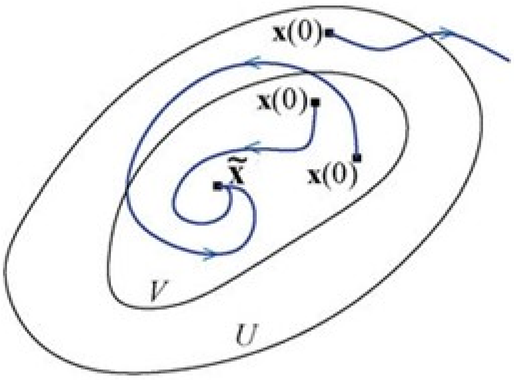
pokud lze najít takovou funkci pak je stacionární bod $\widetilde{x}$ stabilní

VYŠETŘOVÁNÍ STABILITY NELINEÁRNÍHO SYSTÉMU

- Lyapunova stabilita - stabilní bod $\widetilde{x}$je stabilní ekvilibrium pokud pro každé okolí U bodu $\widetilde{x}$ existuje takové okolí V podmnožina U, že každé řešení x(t) začínající ve V zůstane v U po celou dobu.



- Asymptoticky stabilní- stabilní bod $\widetilde{x}$ je asypmtoticky stavilní pokud je Lyapunově stabilní a další V může být vybráno tak, že $|x(t) - \widetilde{x}| \to 0$ pro $t \to \infty$ pro všechna $x(0) \in V$



- Exponencionální stabilita - pokud existuje okolí V bodu $\widetilde{x}$a a>0 že

$$\left| x(t) - \widetilde{x} \right| < e^{-at} \quad as \quad t \to \infty \quad for\ all \quad x(0) \in V$$

BIFURCATION(=?ROZDĚLENÍ?)

Rozlišujeme dvě základní:

- *global bifurcation* - occurs when larger invariant sets of the system 'collide' with each other, or with equilibria of the system. They cannot be detected purely by a stability analysis of the equilibria (fixed points). The global bifurcation includes, for example, collision of a limit cycle with a saddle point, collision of a limit cycle with a node etc
- *local bifurcation* - is a sudden change in the number or nature of the fixed and periodic points caused by a parameter change in the system. Fixed points may appear or disappear, change their stability, or even break apart into periodic points. Such bifurcation can be analysed entirely through changes in the local stability properties of equilibria, periodic orbits or other invariant sets.

Existuje 5 typů bifurcations - sadle node bif., periodic b., pitchfork b., transcritical b., hopf b.

pro zájemce více slidy 3 strana 24 a dál(popřípadě můžu doplnit, all přijde mi to zbytečné..)