1 Matice, determinant, inverzní matice, vlastní čísla a vlastní vektory matice. Soustavy lineárních rovnic. (A0B01LAG)

1.1 Matice

Matice je obdélníkové či čtvercové schéma čísel nebo nějakých matematických objektů - prvků matice (též elementů matice). Obsahuje obecně m řádků a n sloupců. Hovoříme pak o matici typu $m \times n$

Zápis matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{m,n}$$

1.2 Determinant

V lineární algebře je determinant zobrazení, které přiřadí každé **čtvercové** matici $\mathbf{A}$ skalár $det(\mathbf{A})$.

1.2.1 Výpočet

$$det(\mathbf{A}) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}$$

vysvětlivky

- S_n- množina všech permutací čísel $1, 2, ..., n$, kde n je šířka (i výška) matice A; pro $n = 3$ tedy $S_n = \{[1, 2, 3], [1, 3, 2], [2, 1, 3], [2, 3, 1], [3, 1, 2], [3, 2, 1]\}$
- $sgn()$ - funkce vracející $+1$ nebo -1 (znaménko permutace). To se odvíjí od počtu prohození dvou sousední prvků v permutaci, abychom dostali základní řadu $[1, 2, ..., n]$. Pokud σ je sudá permutace, vrací funkce $+1$, naopak pokud je lichá, vrací -1. Např. pro $[2, 1, 3]$ musíme prohodit jen 2 s 1, abychom dostali [1,2,3], jedná se tedy o lichou permutaci a funkce $sgn()$ vrací -1. U permutace $[3, 2, 1]$ je prohození více: $[3, 2, 1] \rightarrow [3, 1, 2] \rightarrow [1, 3, 2] \rightarrow [1, 2, 3]$, celkem 4 prohození, proto funkce $sgn()$ vrací $+1$. Jedná se o totéž, čemu profesor Pták říkal „leftdown".

- $a_{i,\sigma(i)}$ takto nastavené indexy zaručí, že do součinu vybereme vždy právě jeden prvek z každého sloupce a řádku

1.2.2 Vlastnosti

- Při výměně dvou řádků nebo dvou sloupců se znaménko determinantu změní na opačné
- Z předchozí vlastnosti plyne, že pokud má matice $\mathbf{A}$ dva stejné řádky nebo dva stejné sloupce, tak musí platit $det(\mathbf{A}) = -det(\mathbf{A}) = 0$
- Hodnota determinantu se nezmění, zaměníme-li řádky za sloupce $det(\mathbf{A}) = det(\mathbf{A}^T)$
- Jestliže jeden řádek (sloupec) lze vyjádřit jako lineární kombinaci ostatních řádků (sloupců), je determinant nulový.
- Matice se značí pojmem **singulární**, když $det(\mathbf{A}) = 0$. Pokud $det(\mathbf{A}) \neq 0$, pak se jedná o matici **regulární.**

1.3 Inverzní matice

Inverzní matice k dané matici je taková matice, která po vynásobení s původní maticí dá jednotkovou matici.

$$\mathbf{A} \bullet \mathbf{A^{-1}} = \mathbf{A^{-1}} \bullet \mathbf{A} = 1$$

Obě rovnosti znamenají, že inverzní matice může existovat jen pro čtvercovou matici. U obdélníkové matice mluvíme o tzn. pseudoinverzi.

1.3.1 Výpočet

$$a_{i,j} = \frac{(-1)^{i+j} \mid \mathbf{A}_{j,i} \mid}{\mid \mathbf{A} \mid}$$

kde $\mid \mathbf{A}_{j,i} \mid$ je subdeterminant získaný z matice $\mathbf{A}$ vynecháním j-tého řádku a i-tého sloupce, $\mid \mathbf{A} \mid$ je determinant matice $\mathbf{A}$.

1.4 Vlastní čísla a vlastní vektory matice

Jako **vlastní vektor** dané transformace označujeme nenulový vektor, jehož směr se při transformaci nemění. Koeficient, o který se změní velikost vektoru, se nazývá **vlastní číslo** (hodnota) daného vektoru. Vyjádřeno vzorcem

$$\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$$

kde $\mathbf{A}$ je matice transformace, $\mathbf{v}$ je vlastní vektor, který je na obou stranách stejný, λ je vlastní číslo, nebo-li onen koeficient, kterým je třeba vlastní vektor vynásobit. Definice totiž říká, že se při transformaci nemění jen směr, velikost se ale lišit může.

Rovnici můžeme upravit

$$(\mathbf{A} + \lambda\mathbf{E})\mathbf{v} = 0$$

kde $\mathbf{E}$ je jednotková matice. Aby platila rovnice a my dostali netriviální řešení $\mathbf{v} \neq 0$, musí platit

$$det(\mathbf{A} + \lambda\mathbf{E}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Při výpočtu tohoto determinantu dostaneme na levé straně polynom. Ten se nazývá charakteristický polynom matice $\mathbf{A}$ a jeho kořeny jsou vlastní čísla matice $\mathbf{A}$. Výsledkem je tedy vždy n vlastních čísel, z nichž některá se mohou opakovat.

1.5 Soustavy lineárních rovnic

Soustava m lineárních rovnic s n proměnnými může být zapsána ve tvaru $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, kde $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{\mathsf{m}\times\mathsf{n}}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\mathsf{n}}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{\mathsf{m}}$. Pokud je $\mathbf{b}$ nulový vektor, mluvíme o homogenní soustavě lineárních rovnic.

Zajímá nás, jestli má soustava řešení, případně kolik. Může nastat jedna z těchto situací

- soustava nemá **žádné** řešení
- soustava má **jedno** řešení
- soustava má **nekonečně** mnoho řešení

1.5.1 Frobeniova věta

Nehomogenní soustava lineárních algebraických rovnic má řešení pouze v případě, že hodnost matice soustavy $h(\mathbf{A})$ je rovna hodnosti rozšířené matice soustavy $h([\mathbf{A}\ \mathbf{b}])$.

Dejme tomu, že máme matici $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{4\times3}$, tedy 3 neznámé, ale 4 rovnice. Je zřejmé, že taková matice může mít hodnost maximálně $h(\mathbf{A}) = 3$. Řekněme, že má skutečně hodnost 3, potom se ptáme jakou hodnost má rozšířená matice $[\mathbf{A}\ \mathbf{b}] \in \mathbb{R}^{4\times4}$. Ta už může mít hodnost 4, a pokud ji skutečně má, potom soustava nemá řešení, protože nalevo je jedna rovnice lineární kombinací zbývajících, ale napravo má řešení, které není odpovídající lineární kombinací pravých stran. Naopak, pokud $[\mathbf{A}\ \mathbf{b}]$ má stále hodnost 3, jenom se nám potvrdilo, že jedna rovnice je v soustavě zbytečná, můžeme ji vynechat a rovnice má řešení.

1.5.2 Počet řešení

Soustava lineárních rovnic má právě jedno řešení, když $h(\mathbf{A})$ je rovno počtu neznámých; pokud je $h(\mathbf{A})$ menší než počet neznámých, je řešení nekonečně mnoho.