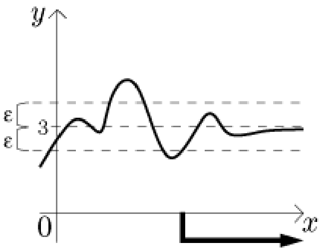
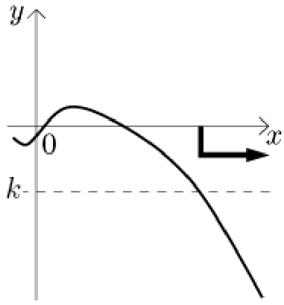
Společná část: 8 - MA2

June 6, 2012

0.1 Limita funkce a posloupnosti

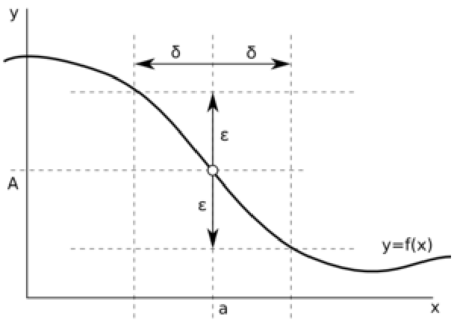
0.1.1 funkce





Definice. (limita pro vlastní bod a vlastní limitu)
Nechť f je funkce definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu $a \in I\!R$, nechť $L \in I\!R$.
Řekneme, že „L je **limita** funkce f pro x jdoucí k a“, nebo že „f jde k L pro x jdoucí k a“, jestliže $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ takové, že $\forall x$: $\big[0 < |x-a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon\big]$.

Zapisujeme to „$\lim\limits_{x \to a} \big(f(x)\big) = L$,“ popřípadě „$f(x) \to L$ pro $x \to a$“.



Definice.
Nechť $a \in I\!R$, $\varepsilon > 0$. Definujeme okolí bodu a:
$U_\varepsilon(a) = \{x \in I\!R;\ |x-a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ **ε-okolí bodu a**
$P_\varepsilon(a) = \{x \in I\!R;\ 0 < |x-a| < \varepsilon\} = (a-\varepsilon, a) \cup (a, a+\varepsilon)$ **prstencové ε-okolí bodu a**
$U^+_\varepsilon(a) = \{x \in I\!R;\ a \le x < a+\varepsilon\} = \langle a, a+\varepsilon)$ **pravé ε-okolí bodu a**
$P^+_\varepsilon(a) = \{x \in I\!R;\ a < x < a+\varepsilon\} = (a, a+\varepsilon)$ **pravé prstencové ε-okolí bodu a**
$U^-_\varepsilon(a) = \{x \in I\!R;\ a-\varepsilon < x \le a\} = (a-\varepsilon, a\rangle$ **levé ε-okolí bodu a**
$P^-_\varepsilon(a) = \{x \in I\!R;\ a-\varepsilon < x < a\} = (a-\varepsilon, a)$ **levé prstencové ε-okolí bodu a**

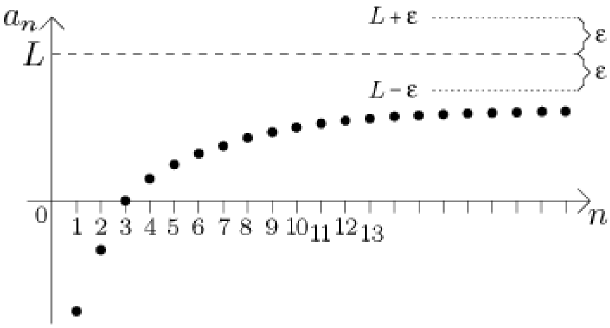
Definice. (jednostranné limity)
Nechť f je funkce definovaná na nějakém levém prstencovém okolí bodu $a \in I\!R \cup \{\infty\}$, nechť $L \in I\!R^*$.
Řekneme, že „L je **limita** funkce f pro x jdoucí k a **zleva**“,
jestliže $\forall$ okolí $U = U(L)$ $\exists$ levé prstencové okolí $P = P^-(a)$ takové, že $\forall x \in P$: $f(x) \in U$.
Říkáme také, že „f jde k L pro x jdoucí k a zleva“, nebo „f má limitu L v a zleva“, nebo že „f jde k L v a zleva“. Zapisujeme to „$\lim\limits_{x \to a^-} \big(f(x)\big) = L$,“ popřípadě zkráceně „$f(a^-) = L$“.

Nechť f je funkce definovaná na nějakém pravém prstencovém okolí bodu $a \in I\!R \cup \{-\infty\}$, nechť $L \in I\!R^*$.
Řekneme, že „L je **limita** funkce f pro x jdoucí k a **zprava**“,
jestliže $\forall$ okolí $U = U(L)$ $\exists$ pravé prstencové okolí $P = P^+(a)$ takové, že $\forall x \in P$: $f(x) \in U$.
Říkáme také, že „f jde k L pro x jdoucí k a zprava“, nebo „f má limitu L v a zprava“, nebo že „f jde k L v a zprava“. Zapisujeme to „$\lim\limits_{x \to a^+} \big(f(x)\big) = L$“, popřípadě zkráceně „$f(a^+) = L$“.

- Pokud najdeme limitu L, která je **reálné číslo**, řekneme, že je to **vlastní limita** a **že limita konverguje**. Jinak řekneme, že limita diverguje. Limita **nekonečno nebo mínus nekonečno** se nazývá **nevlastní limita**. Pokud najdeme nějakou limitu (vlastní či nevlastní), řekneme, že limita existuje. Jinak řekneme, že limita neexistuje.

Definice.
Nechť f je funkce definovaná na neprázdné množině M.
Jestliže je f omezená shora na M, definujeme její **supremum** na M, značeno $\sup\limits_M(f)$, jako nejmenší horní mez f na M. Jinak definujeme $\sup\limits_M(f) = \infty$.
Jestliže je f omezená zdola na M, definujeme její **infimum** na M, značeno $\inf\limits_M(f)$, jako největší dolní mez f na M. Jinak definujeme $\inf\limits_M(f) = -\infty$.

0.1.2 posloupnost



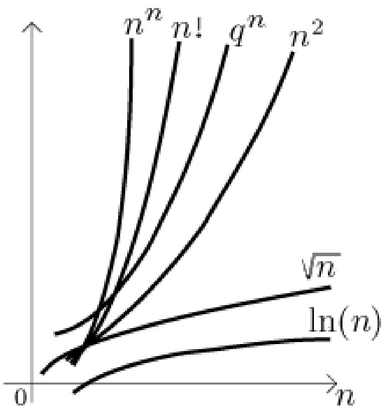
- **Definice:** Uvažujme posloupnost a_n. Řekneme, že nekonečno je limita této posloupnosti pro n jdoucí do nekonečna, nebo že posloupnost jde do nekonečna pro n jdoucí do nekonečna, jestliže pro každé reálné číslo K existuje přirozené číslo N takové, že pro všechna n = N, N + 1, N + 2,... máme $a_n > K$.
- Když má posloupnost limitu, která je reálné číslo, řekneme, že posloupnost konverguje. Taková limita se nazývá **vlastní limita**.
- Když má posloupnost limitu, která je plus či mínus nekonečno, říkáme této limitě **nevlastní limita**.
- Když má posloupnost limitu, vlastní či nevlastní, řekneme, že limita **existuje**.
- Pokud posloupnost nemá vůbec žádnou limitu, řekneme, že limita **neexistuje**.
- Posloupnosti s nevlastní limitou a bez limity se nazývají **divergentní**.

0.1.3 Rychlost růstu

škála mocnin

Fakt. (**škála mocnin v nekonečnu**)
Pro libovolná $a, b > 0$:
$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{e^{ax}}{x^b}\right) = \infty, \qquad \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^a}{\ln^b(x)}\right) = \infty.$$

Značení: $a^x \gg x^a \gg \ln^b(x)$.



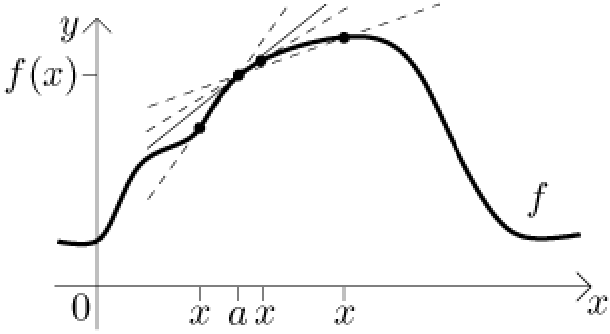
0.1.4 L'Hopitalovo pravidlo

Při hledání limity podílu dvou funkcí (i posloupností) dostaneme "neurčitý podíl" →řešíme l'Hopitalovým pravidlem

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \left\langle\!\!\left\langle \left.\begin{matrix} f(x) \to 0 \text{ pro } x \to \infty \\ g(x) \to 0 \text{ pro } x \to \infty \end{matrix}\right\} \tfrac{0}{0} \implies \text{l'H} \right\rangle\!\!\right\rangle$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right),$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \left\langle\!\!\left\langle \left.\begin{matrix} f(x) \to \pm\infty \text{ pro } x \to \infty \\ g(x) \to \pm\infty \text{ pro } x \to \infty \end{matrix}\right\} \tfrac{\infty}{\infty} \implies \text{l'H} \right\rangle\!\!\right\rangle$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right).$$

příklad
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right) = \left\langle\!\!\left\langle \tfrac{\infty}{\infty} \right\rangle\!\!\right\rangle \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x^2}\right)$$
$$= \left\langle\!\!\left\langle \left.\begin{matrix} \ln(x) \to \infty \text{ pro } x \to \infty \\ x^2 \to \infty \text{ pro } x \to \infty \end{matrix}\right\} \tfrac{\infty}{\infty} \implies \text{l'H} \right\rangle\!\!\right\rangle$$
$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}}{2x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \left\langle\!\!\left\langle \frac{1}{\infty} \right\rangle\!\!\right\rangle = 0.$$

0.2 Derivace



Definice.
Nechť f je funkce definovaná na nějakém okolí bodu a.
Řekneme, že f je **diferencovatelná** v a, jestliže $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ konverguje.
Pak definujeme **derivaci** f v a jako

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right).$$

Alternativní vzorec: $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{f(a+h)-f(a)}{h}\right)$.

Leibnizovo značení:

$$f'(a) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x=a}.$$

Věta. (derivace v bodě a skládání funkcí)
Nechť je funkce f diferencovatelná v a a funkce g diferencovatelná v $b = f(a)$.
Pak je funkce $g \circ f = g(f)$ diferencovatelná v a a platí

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a).$$

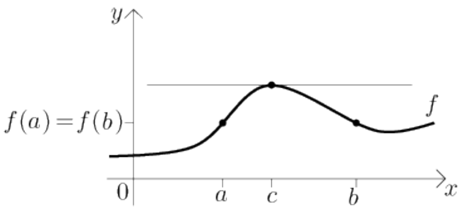
Definice.
Nechť f je funkce definovaná na nějakém pravém okolí bodu a.
Řekneme, že f je **diferencovatelná** v a **zprava**, jestliže $\lim\limits_{x\to a^+}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ konverguje.
Pak definujeme **derivaci** f v a **zprava** jako

$$f'_+(a) = \lim_{x\to a^+}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right).$$

Nechť f je funkce definovaná na nějakém levém okolí bodu a.
Řekneme, že f je **diferencovatelná** v a **zleva**, jestliže $\lim\limits_{x\to a^-}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$ konverguje.
Pak definujeme **derivaci** f v a **zleva** jako

$$f'_-(a) = \lim_{x\to a^-}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right).$$

0.2.1 vlastnosti derivace

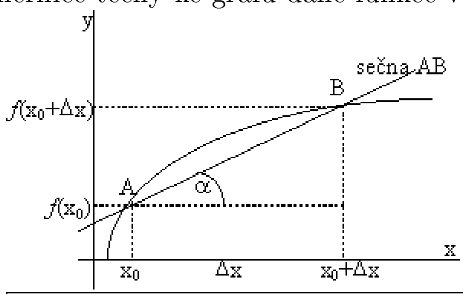
- jestliže je f diferencovatelná v a a $f'(a) \neq 0$, pak je i příslušná inverzní funkce f_{-1}diferencovatelná v b
- Jestliže je funkce f diferencovatelná v bodě a, pak je f spojitá v a.
- Nechť a < b jsou reálná čísla. Nechť f je funkce spojitá na intervalu a,b a diferencovatelná na (a,b). Jestliže f(a) = f(b), pak existuje c z (a,b) takové, že $f'(c) = 0$ (věta o střední hodnotě - **Rolleova věta**)
- 

- **Věta.** (Věta o střední hodnotě, Lagrangeova věta)
  Nechť f je spojitá na intervalu $\langle a,b\rangle$ a diferencovatelná na jeho vnitřku (a,b).
  Pak existuje $c \in (a,b)$: $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

0.2.2 význam derivace

0.2.2.1 geometrický význam

směrnice tečny ke grafu dané funkce v daném bodě



$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

0.2.2.2 fyzikální význam

- derivace podle časové proměnné, vyjadřující rychlost změny nějaké proměnné v čase (např. okamžitá rychlost: $v = \frac{ds}{dt}$)
- diferenciální rovnice

0.2.3 Monotonie

- vlastnost, označující, zda je funkce v bodě či na daném intervalu monotónní

existuje nějaké okolí U(a) bodu a takové, že pro všechna x v tomto okolí platí:
rostoucí
$x > a \Rightarrow f(x) > f(a) x < a \wedge \Rightarrow f(x) < f(a)$.
klesající
$x > a \Rightarrow f(x) < f(a) \wedge x < a \Rightarrow f(x) > f(a)$,
nerostoucí
$x > a \Rightarrow f(x) \leq f(a) \wedge x < a \Rightarrow f(x) \geq f(a)$,
neklesající
$x > a \Rightarrow f(x) \geq f(a) \wedge x < a \Rightarrow f(x) \leq f(a)$.

- typ monotonie určíme z první derivace f(x)

rostoucí pro f′(x) > 0; **klesající** pro f′(x) < 0

0.2.3.1 kritický bod

Definice: Nechť je funkce f definovaná na nějakém okolí bodu c. Řekneme, že c je **kritický bod**, jestliže f ’(c) = 0 nebo f ’(c) neexistuje.

0.2.4 Lokální extrémy

Definice.
Nechť f: $D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť $\vec{a}$ je vnitřní bod $D(f)$.
Řekneme, že f má v $\vec{a}$ **lokální maximum** nebo že $f(\vec{a})$ je lokální maximum, jestliže existuje $U = U(\vec{a})$ takové, že $f(\vec{a}) \geq f(\vec{x})$ pro všechna $x \in U$.
Řekneme, že f má v $\vec{a}$ **lokální minimum** nebo že $f(\vec{a})$ je lokální minimum, jestliže existuje $U = U(\vec{a})$ takové, že $f(\vec{a}) \leq f(\vec{x})$ pro všechna $x \in U$.
Pokud jsou v definici maxima/minima ostré nerovnosti pro $\vec{x} \neq \vec{a}$, pak se dotyčný extrém nazývá **ostrý**.

Nechť je f spojitá v c:

- Jestliže existuje pravé okolí c, na kterém je f rostoucí, a levé okolí a, na kterém je f klesající, pak má f lokální minimum v c

- Jestliže existuje pravé okolí c, na kterém je f klesající, a levé okolí a, na kterém je f rostoucí, pak má f lokální maximum v c

Definice.
Nechť f je funkce definovaná na intervalu I.
Řekneme, že f je na intervalu I **konvexní**, jestliže

$$\forall x < y < z \in I\colon\ \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

Řekneme, že f je na intervalu I **konkávní**, jestliže

$$\forall x < y < z \in I\colon\ \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq \frac{f(z)-f(y)}{z-y}.$$

inflexní bod - f přechází z konvexní na konkávní nebo naopak a je tam dvakrát diferencovatelná

0.2.5 Asymptoty

Definice.
Nechť f je funkce definovaná na nějakém jednostranném prstencovém okolí bodu $a \in \mathbb{R}$.
Řekneme, že přímka $x = a$ je **svislá asymptota** f, nebo že f má svislou asymptotu v a, jestliže

$$\lim_{x\to a^+}\big(f(x)\big) = \pm\infty \qquad \text{nebo} \qquad \lim_{x\to a^-}\big(f(x)\big) = \pm\infty.$$

Definice.
Nechť f je funkce definovaná na okolí ∞.
Řekneme, že přímka $y = B$ je **vodorovná asymptota** f v ∞,
jestliže $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x)\big) = B$.

Nechť f je funkce definovaná na okolí $-\infty$.
Řekneme, že přímka $y = B$ je **vodorovná asymptota** f v $-\infty$,
jestliže $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)\big) = B$.

Definice.
Nechť f je funkce definovaná na okolí ∞.
Řekneme, že přímka $y = Ax + B$ je **šikmá asymptota** f v ∞,
jestliže $\lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x) - (Ax+B)\big) = 0$.

Nechť f je funkce definovaná na okolí $-\infty$.
Řekneme, že přímka $y = Ax + B$ je **šikmá asymptota** f v $-\infty$,
jestliže $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x) - (Ax+B)\big) = 0$.

0.2.6 Parciální derivace

Parciální derivace funkce více proměnných představuje v matematice takovou derivaci dané funkce, při které se derivuje pouze vzhledem **k jedné z proměnných**, ostatní proměnné jsou považovány za konstanty

0.2.7 Gradient

= diferenciální operátor udávající směr růstu

Definice.
Nechť $f\colon D(f) \mapsto I\!R$ je funkce, $D(f) \subseteq I\!R^n$. Nechť $\vec{a}$ je vnitřní bod $D(f)$.
Jestliže existují všechny parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})$ pro $= 1, \dots, n$, pak definujeme **gradient** f v $\vec{a}$ jako vektor

$$\nabla f(\vec{a}) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})\Big).$$

Alternativní značení: $\nabla f(\vec{a}) = \vec{\nabla} f(\vec{a}) = \operatorname{grad}(f)(\vec{a})$.

Věta. (Sylvesterovo kritérium)
Nechť G je otevřená množina v $I\!R^n$ a $f \in C^1(G)$.
Nechť $\vec{a} \in G$ je stacionární bod f a H je Hessova matice f v $\vec{a}$. Nechť Δ_i jsou levé horní subdeterminanty H.
Jestliže $\Delta_i > 0$ pro všechna i, pak je $f(\vec{a})$ (ostré) lokální minimum.
Jestliže $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$ atd. až $(-1)^n \Delta_n > 0$, pak je $f(\vec{a})$ (ostré) lokální maximum.
Jestliže $\Delta_2 < 0$, pak je $f(\vec{a})$ **sedlový bod**.