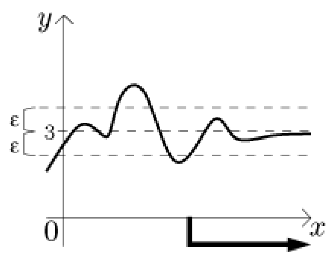
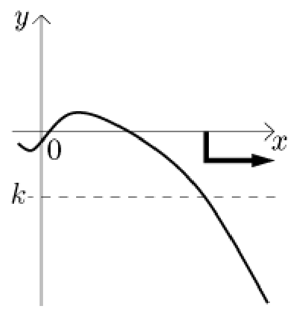
Společná část: 8 - MA2

June 2, 2012

1 Limita funkce a posloupnosti

1.1 funkce

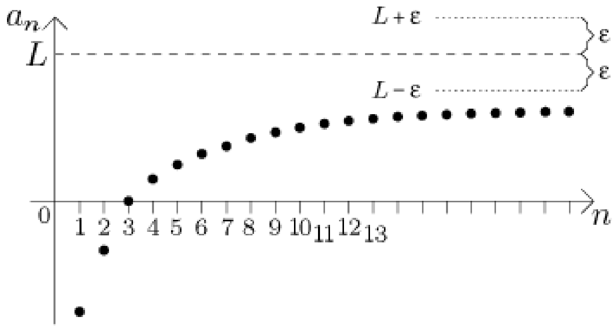




- **Definice:** Nechť f je funkce, nechť a je reálné číslo, ∞ nebo $-\infty$. Předpokládejme, že f je definovaná na nějakém prstencovém okolí bodu a. Nechť L je reálné číslo, nebo ∞ nebo $-\infty$. Řekneme, že L je limita funkce f pro x jdoucí k a, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje nějaké $\delta > 0$ tak, aby pro všechna $x \in D(f)$ splňující $x \in U_\delta(a) - a$ platilo $f(x) \in U_\varepsilon(L)$.

- Pokud najdeme limitu L, která je **reálné číslo**, řekneme, že je to **vlastní limita a že limita konverguje**. Jinak řekneme, že limita diverguje. Limita **nekonečno nebo mínus nekonečno** se nazývá **nevlastní limita**. Pokud najdeme nějakou limitu (vlastní či nevlastní), řekneme, že limita existuje. Jinak řekneme, že limita neexistuje.

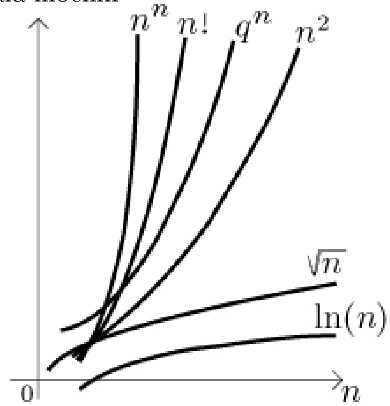
1.2 posloupnost



- **Definice:** Uvažujme posloupnost a_n. Řekneme, že nekonečno je limita této posloupnosti pro n jdoucí do nekonečna, nebo že posloupnost jde do nekonečna pro n jdoucí do nekonečna, jestliže pro každé reálné číslo K existuje přirozené číslo N takové, že pro všechna n = N, N + 1, N + 2,... máme $a_n > K$.
- Když má posloupnost limitu, která je reálné číslo, řekneme, že posloupnost konverguje. Taková limita se nazývá **vlastní limita**.
- Když má posloupnost limitu, která je plus či mínus nekonečno, říkáme této limitě **nevlastní limita**.
- Když má posloupnost limitu, vlastní či nevlastní, řekneme, že limita **existuje**.
- Pokud posloupnost nemá vůbec žádnou limitu, řekneme, že limita **neexistuje**.
- Posloupnosti s nevlastní limitou a bez limity se nazývají **divergentní**.

1.3 Rychlost růstu

škála mocnin



1.4 L'Hopitalovo pravidlo

Při hledání limity podílu dvou funkcí (i posloupností) dostaneme "neurčitý podíl" →řešíme l'Hopitalovým pravidlem

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \left\langle\!\!\left\langle \left.\begin{matrix} f(x)\to 0 \text{ pro } x\to\infty \\ g(x)\to 0 \text{ pro } x\to\infty \end{matrix}\right\}\tfrac{0}{0} \implies \text{l'H} \right\rangle\!\!\right\rangle$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \left\langle\!\!\left\langle \left.\begin{matrix} f(x)\to \pm\infty \text{ pro } x\to\infty \\ g(x)\to \pm\infty \text{ pro } x\to\infty \end{matrix}\right\}\tfrac{\infty}{\infty} \implies \text{l'H} \right\rangle\!\!\right\rangle$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right).$$

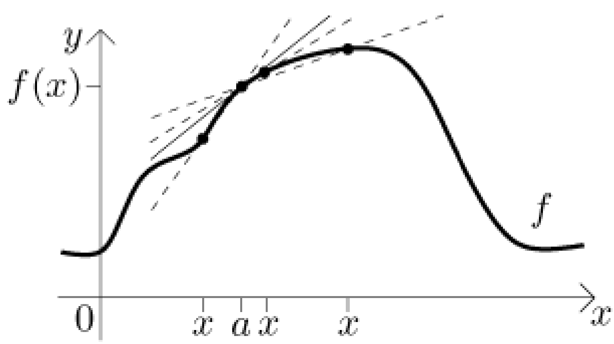
příklad

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln(n)}{n^2}\right) = \left\langle\!\!\left\langle \frac{\infty}{\infty} \right\rangle\!\!\right\rangle \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\ln(x)}{x^2}\right)$$

$$= \left\langle\!\!\left\langle \left.\begin{matrix} \ln(x)\to \infty \text{ pro } x\to\infty \\ x^2\to \infty \text{ pro } x\to\infty \end{matrix}\right\}\tfrac{\infty}{\infty} \implies \text{l'H} \right\rangle\!\!\right\rangle$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}}{2x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{2x^2}\right) = \left\langle\!\!\left\langle \frac{1}{\infty} \right\rangle\!\!\right\rangle = 0.$$

2 Derivace



Definice: Nechť f je funkce definovaná na nějakém okolí bodu a. Definujeme derivaci f v a vzorcem

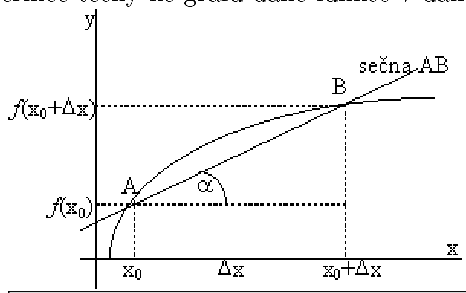
$$f'(a) = \lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$$

Jestliže konverguje, řekneme, že funkce je diferencovatelná v a.

2.1 význam derivace

2.1.1 geometrický význam

směrnice tečny ke grafu dané funkce v daném bodě



$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

2.1.2 fyzikální význam

- derivace podle časové proměnné, vyjadřující rychlost změny nějaké proměnné v čase (např. okamžitá rychlost: $v = \frac{ds}{dt}$)
- diferenciální rovnice

2.2 Monotonie

- vlastnost, označující, zda je funkce v bodě či na daném intervalu monotónní

existuje nějaké okolí U(a) bodu a takové, že pro všechna x v tomto okolí platí:

rostoucí
$x > a \Rightarrow f(x) > f(a)x < a \wedge \Rightarrow f(x) < f(a)$.
klesající
$x > a \Rightarrow f(x) < f(a) \wedge x < a \Rightarrow f(x) > f(a)$,
nerostoucí
$x > a \Rightarrow f(x) \leq f(a) \wedge x < a \Rightarrow f(x) \geq f(a)$,
neklesající
$x > a \Rightarrow f(x) \geq f(a) \wedge x < a \Rightarrow f(x) \leq f(a)$.

- typ monotonie určíme z první derivace f(x)

rostoucí pro $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) > 0$; **klesající** pro $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) < 0$

2.2.1 kritický bod

Definice: Nechť je funkce f definovaná na nějakém okolí bodu c. Řekneme, že c je **kritický bod**, jestliže f '(c) = 0 nebo f '(c) neexistuje.

2.3 Lokální extrémy

Definice.
Nechť f: $D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, kde $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť $\vec{a}$ je vnitřní bod $D(f)$.
Řekneme, že f má v $\vec{a}$ **lokální maximum** nebo že $f(\vec{a})$ je lokální maximum, jestliže existuje $U = U(\vec{a})$ takové, že $f(\vec{a}) \geq f(\vec{x})$ pro všechna $x \in U$.
Řekneme, že f má v $\vec{a}$ **lokální minimum** nebo že $f(\vec{a})$ je lokální minimum, jestliže existuje $U = U(\vec{a})$ takové, že $f(\vec{a}) \leq f(\vec{x})$ pro všechna $x \in U$.
Pokud jsou v definici maxima/minima ostré nerovnosti pro $\vec{x} \neq \vec{a}$, pak se dotyčný extrém nazývá **ostrý**.

Nechť je f spojitá v c:

- Jestliže existuje pravé okolí c, na kterém je f rostoucí, a levé okolí a, na kterém je f klesající, pak má f lokální minimum v c
- Jestliže existuje pravé okolí c, na kterém je f klesající, a levé okolí a, na kterém je f rostoucí, pak má f lokální maximum v c

2.4 Parciální derivace

Parciální derivace funkce více proměnných představuje v matematice takovou derivaci dané funkce, při které se derivuje pouze vzhledem **k jedné z proměnných**, ostatní proměnné jsou považovány za konstanty

2.5 Gradient

Definice.
Nechť f: $D(f) \mapsto \mathbb{R}$ je funkce, $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$. Nechť $\vec{a}$ je vnitřní bod $D(f)$.
Jestliže existují všechny parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\vec{a})$ pro $= 1, \ldots, n$, pak definujeme **gradient** f v $\vec{a}$ jako vektor

$$\nabla f(\vec{a}) = \Big(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\vec{a}), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\vec{a})\Big).$$

Alternativní značení: $\nabla f(\vec{a}) = \vec{\nabla} f(\vec{a}) = \mathrm{grad}(f)(\vec{a})$.

Věta. (Sylvesterovo kritérium)
Nechť G je otevřená množina v $\mathbb{R}^n$ a $f \in C^1(G)$.
Nechť $\vec{a} \in G$ je stacionární bod f a H je Hessova matice f v $\vec{a}$. Nechť Δ_i jsou levé horní subdeterminanty H.
Jestliže $\Delta_i > 0$ pro všechna i, pak je $f(\vec{a})$ (ostré) lokální minimum.
Jestliže $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$ atd. až $(-1)^n \Delta_n > 0$, pak je $f(\vec{a})$ (ostré) lokální maximum.
Jestliže $\Delta_2 < 0$, pak je $f(\vec{a})$ **sedlový bod**.