

## 24 Turingovy stroje. (A4B01JAG)

Turingův stroj si můžeme představit takto: skládá se

- z řídicí jednotky, která se může nacházet v jednom z konečně mnoha stavů,
- potenciálně nekonečné pásky rozdělené na jednotlivá pole a
- hlavy, která umožňuje číst obsah polí a přepisovat obsah polí pásky.

Na základě informace  $X$ , která je přečtena na pásce, a na základě stavu  $q$ , ve kterém se nachází řídicí jednotka Turingova stroje, se řídicí jednotka přesune do stavu  $p$ , pole pásky přepíše na  $Y$  a hlava se přesune buď doprava nebo doleva (tato akce je popsána tzv. přechodovou funkcí).

### 24.1 Formální definice

Turingův stroj je sedmice  $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, B, F)$ , kde

- $Q$  je konečná množina stavů,
- $\Sigma$  je konečná množina vstupních symbolů,
- $\Gamma$  je konečná množina páskových symbolů, přitom  $\Sigma \subset \Gamma$ ,
- $B$  je prázdný symbol (též nazývaný *blank*), jedná se o páskový symbol, který není vstupním symbolem, (tj.  $B \in \Gamma \setminus \Sigma$ ),
- $\delta$  je přechodová funkce, tj. parciální zobrazení z množiny  $Q \times \Gamma$  do množiny  $Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ , (zde  $L$  znamená pohyb hlavy o jedno pole doleva,  $R$  znamená pohyb hlavy o jedno pole doprava),
- $q_0 \in Q$  je počáteční stav a
- $F \subseteq Q$  je množina koncových stavů.

### 24.2 Konfigurace

Konfiguraci Turingova stroje plně popisuje páska, pozice hlavy na pásce a stav, ve kterém se nachází řídicí jednotka. Jestliže na pásce jsou v prvních  $k$  polích symboly  $X_1 X_2 \dots X_k$ , všechna pole s větším číslem již obsahují pouze  $B$ , řídicí jednotka je ve stavu  $q$  a hlava čte symbol  $X_i$ , tak danou konfiguraci zapisujeme

$$X_1 X_2 \dots X_{i-1} q X_i X_{i+1} \dots X_k.$$

## 24.3 Počátek práce Turingova stroje

Na začátku práce se Turingův stroj nachází v počátečním stavu  $q_0$ , na pásce má na prvních  $n$  polích vstupní slovo  $a_1 a_2 \dots a_n$  ( $a_i \in \Sigma$ ), ostatní pole obsahují blank  $B$  a hlava čte první pole pásky, tj. symbol  $a_1$ . Tedy formálně je počáteční konfigurace  $q_0 a_1 \dots a_n$ .

## 24.4 Krok Turingova stroje

Předpokládejme, že se Turingův stroj nachází v konfiguraci  $X_1 X_2 \dots X_{i-1} q X_i \dots X_k$ . Pak v jednom kroku udělá následující:

Jestliže  $\delta(q, X_i) = (p, Y, R)$ , stroj se přesune do stavu  $p$ , na pásku napíše symbol  $Y$  a hlavu posune o jedno pole doprava. Formálně to zapisujeme:

$$X_1 X_2 \dots X_{i-1} q X_i \dots X_k \vdash X_1 X_2 \dots X_{i-1} Y p X_{i+1} \dots X_k.$$

Jestliže  $\delta(q, X_i) = (p, Y, L)$ , a hlava nečte nejlevnější pole, stroj napíše na pásku  $Y$  (místo  $X_i$ ) a posune hlavu o jedno pole doleva. Formálně to zapisujeme:

$$X_1 X_2 \dots X_{i-1} q X_i \dots X_k \vdash X_1 X_2 \dots X_{i-2} p X_{i-1} Y X_{i+1} \dots X_k.$$

Jestliže  $\delta(q, X_i) = (p, Y, L)$ , a hlava čte první pole pásky, tj. pole, které je “nejvíce vlevo”, nebo jestliže  $\delta(q, X_i)$  není definováno, stroj se neúspěšně zastaví.

## 24.5 Výpočet Turingova stroje

je posloupnost jeho kroků, která začíná v počáteční konfiguraci. Tedy jedná se o reflexivní a tranzitivní uzávěr  $\vdash^*$  relace  $\vdash$  (na množině všech konfigurací daného Turingova stroje).

## 24.6 Jazyk přijímaný Turingovým strojem

Vstupní slovo  $w \in \Sigma^*$  je *přijato* Turingovým strojem právě tehdy, když se Turingův stroj při práci na slově  $w$  dostane do koncového stavu. Tedy formálně: slovo  $w \in \Sigma^*$  je *přijato Turingovým strojem* právě tehdy, když

$$q_0 w \vdash^* \alpha q \beta \quad \text{pro nějaké } q \in F \text{ a } \alpha, \beta \in \Gamma^*.$$

Množina slov  $w \in \Sigma^*$ , které Turingův stroj přijímá, se nazývá *jazyk přijímaný* Turingovým strojem  $M$  a značíme ho  $L(M)$ .

Věta: Turingovy stroje přijímají právě třídu jazyků typu 0. Přesněji:

Ke každé gramatice  $G$  typu 0 existuje Turingův stroj  $M$  takový, že

$$L(G) = L(M).$$

Ke každému stroji  $M$  existuje gramatika  $G$  typu 0 taková, že

$$L(M) = L(G).$$