Take-Home Eksamen DM500 Studieintroduktion til datalogi, Efteråret 2021

Danny Nicolai Larsen (dalar21), Steffen Bach (stbac21),
Mikkel Brix Nielsen (mikke21)
Studiegruppe 11

12. november 2021

Opgave 1 - Eksamen januar 2009 opgave 1

Dem første opgave der vil blive løst kommer fra Eksamens sættet fra januar 2009, og er opgave nr.2. I denne opgaven skal vi betragte de to matricer:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad og \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Til denne opgaver forekommer 2 delopgaver. I den ene delopgave skal matricen der forekommer ved $A + B$ beregnes, og i den anden delopgave skal matricen, der forekommer ved $A * B$ beregnes.

Opgave a)

Lad matricen der forekommer ved $A + B$ være C, så kan værdien, der skal indsættes i matrice C, på index (i, j), være summen af tallene, der findes i matrice A på index (i, j) samt værdien, der findes i matrice B på index (i, j).

$$C = A + B \tag{1}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad + \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2}$$

$$= \begin{bmatrix} 1+0 & 1+2 & 2+1 \\ 0+0 & 1+0 & 0+0 \\ 1+1 & 0+0 & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Og herved er delopgave a løst, og den matrice der forekommer ved at addere matrice A med matrice B, $A + B$, vil svare til matrice C.

Opgave b)

Lad matricen der forekommer ved $A * B$ være C, så kan værdien, der skal indsættes i matricen C på index (i, j) være summen af produkterne, der optår, når index (i, j) fra matrice A multipliceres med index (j, i) fra matrice B, for alle elementer på række i fra matrice A og kolonne j fra matrice B.

$$C = A * B \tag{5}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad * \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

$$= \begin{bmatrix} 1*0+1*0+2*2 & 1*2+1*0+2*0 & 1*1+1*0+2*1 \\ 0*0+1*0+0*2 & 0*2+1*0+0*0 & 0*1+1*0+0*1 \\ 1*0+0*0+3*2 & 1*2+0*0+3*0 & 1*1+0*0+3*1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \tag{7}$$

$$C = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 2 & 4 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Og herved er delopgave b løst, og den matrice der forekommer ved at multiplicere matrice A med matrice B, $A * B$, vil svare til matrice C.

Opgave 2 - Reeksamen februar 2015 opgave 2

(a) Hvilke af følgende udsagn er sande?

$$\forall x \in \mathbb{N} \colon \exists y \in \mathbb{N} \colon x < y$$
$$\forall x \in \mathbb{N} \colon \exists! y \in \mathbb{N} \colon x < y$$
$$\exists x \in \mathbb{N} \colon \forall y \in \mathbb{N} \colon x < y$$

Første udsagn siger at for alle x, existerer der mindst et y hvorom det gælder at $x < y$
Dette er sandt, da man kan sætte $y = x + 1$

Andet udsagn siger at for alle x, eksisterer der *kun* et y hvorom det gælder at $x < y$
Dette er falsk da der findes flere tal der er større end x f.eks. $x+1, x+2$ osv.

Tredje udsagn siger at man kan vælge et enkelt x, hvor ligemeget hvilket y man vælger gælder det at $x < y$
Dette er falsk, da man ligemeget hvilket x der er valgt, vil man kunne vælge $y - 1$

(b) Angiv negeringen af udsagn 1. fra spørgsmål a).
Negerings-operatoren ($\neg$) må ikke indgå i dit udsagn.

$$\begin{aligned} &\neg(\forall x \in \mathbb{N} \colon \exists y \in \mathbb{N} \colon x < y) \Leftrightarrow \\ &\quad \exists x \in \mathbb{N} \colon \forall y \in \mathbb{N} \colon \neg(x < y) \Leftrightarrow \\ &\quad \exists x \in \mathbb{N} \colon \forall y \in \mathbb{N} \colon x \geq y \end{aligned}$$

Først negeres kvantorerne, og derefter negeres det logiske udsagn.

$$\underline{\underline{\exists x \in \mathbb{N} \colon \forall y \in \mathbb{N} \colon x \geq y}}$$

Opgave 3 - Reeksamen februar 2015 opgave 3

Lad R, S og T være binære relationer på mængden $\{1, 2, 3, 4\}$.

(a) Lad $R = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (3, 1), (3, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 4)\}$
Er R en partiel ordning?

Ja R er en partiel ordning da den er både refleksiv, transitiv og anti-symmetrisk

(b) Lad $S = \{(1,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2)\}$
Angiv den transitive lukning af S

Den transitive lukning af S er :
$\{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (4, 2), (4, 4)\}$

(c) Lad $T = \{(1,\ 1),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (2,\ 4),\ (3,\ 1),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2),\ (4,\ 4)\}$
Bemærk, at T er en ækvivalens-relation.
Angiv T's ækvivalens-klasser.

Ækvivalens-klasserne er:
$\{1, 3\}$ og $\{2, 4\}$

Opgave 4 - Reeksamen 2015 Opgave 1

Med universet

$$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$$

og mængderne

$$A = \{2n | n \in S\} \text{ og } B = \{3n + 2 | n \in S\}$$

hvor

$$S = \{1, 2, 3, 4\}.$$

ser vi at

a) $A = \{2, 4, 6, 8\}$

b) $B = \{5, 8, 11, 14\}$

c) $A \cap B = \{8\}$

d) $A \cup B = \{2, 4, 5, 6, 8, 11, 14\}$

e) $A - B = \{2, 4, 6\}$

f) $\overline{A} = \{1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$