

Формальная постановка задачи составления расписания с применением алгоритма имитации отжига

Ефанов Михаил Михайлович

31 октября 2025 г.

Формальная постановка задачи

Исходные данные:

- N – общее количество работ;
- $J = \{j_1, j_2, \dots, j_N\}$ – множество всех работ;
- $\tau = \{t_1, t_2, \dots, t_N\}$ – множество времен выполнения соответствующих работ j_i , где $\forall i \in \overline{1, N}$ выполняется $t_i > 0$;
- M – количество доступных процессоров;
- $P = \{p_1, p_2, \dots, p_M\}$ – множество процессоров для выполнения работ.

Определение расписания:

Расписание представляется в виде матрицы $S \in \mathbb{Z}^{M \times N}$, где каждый элемент s_{jk} обозначает порядковый номер работы, выполняемой на процессоре j в позиции k , при этом:

- $j \in \overline{1, M}$ – индекс процессора
- $k \in \overline{1, L_j}$ – порядковая позиция в очереди процессора j
- L_j – количество работ, назначенных на процессор j
- $s_{jk} \in \overline{1, N} \cup \{0\}$, где 0 означает отсутствие работы в данной позиции

Условия корректности расписания:

1. **Полнота выполнения:** Все работы должны быть назначены:

$$\bigcup_{j=1}^M \{s_{jk} \mid k = 1, \dots, L_j, s_{jk} \neq 0\} = \{1, 2, \dots, N\}$$

2. **Уникальность назначения:** Каждая работа выполняется ровно на одном процессоре:

$$\forall i \in \overline{1, N} \exists! (j, k) : s_{jk} = i$$

3. **Непересекаемость выполнения:** На каждом процессоре работы выполняются последовательно без перекрытий:

$$\forall j \in \overline{1, M} \forall k_1 \neq k_2 : s_{jk_1} \neq s_{jk_2}$$

Цель задачи:

Требуется найти такое расписание S , которое минимизирует заданный критерий качества при выполнении всех указанных условий.

Минимизируемый критерий:

На основе значения $CRC32 = 1077734097$ выбран первый критерий для реализации.

- Критерий K_1 (критерий разбалансированности расписания)

Формулировка критерия разбалансированности:

Пусть $G_j = \{s_{jk} \mid k = 1, \dots, L_j, s_{jk} \neq 0\}$ – множество работ, назначенных на j -й процессор. Тогда:

$$T_j = \sum_{i \in G_j} t_i$$

представляет собой общее время выполнения всех работ на процессоре j .

Критерий разбалансированности определяется как:

$$K_1 = T_{\max} - T_{\min}$$

где:

$$T_{\max} = \max_{j \in \overline{1, M}} T_j$$

$$T_{\min} = \min_{j \in \overline{1, M}} T_j$$

Ограничения модели

- Каждый процессор $p_j \in P$ может одновременно выполнять не более одной работы;
- Выполнение работ происходит без прерываний;
- Переключение между работами на процессоре происходит мгновенно;
- Время выполнения $t_i \in \tau$ является фиксированной величиной;
- Работы на каждом процессоре выполняются в порядке, заданном матрицей расписания S .