Модель Лотки-Вольтерры

Лабораторная работа №5.

Рогожина Н.А.

2 мая 2025

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Информация

Докладчик

- Рогожина Надежда Александровна
- студентка 3 курса НФИбд-02-22
- Российский университет дружбы народов
- https://mikogreen.github.io/

Задание

Задание

Для модели «хищник-жертва»:

1. $\frac{dx}{dt} = -0.12x(t) + 0.041x(t)y(t)$
2. $\frac{dy}{dt} = 0.32y(t) - 0.029x(t)y(t)$

Постройте график зависимости численности хищников от численности жертв, а также графики изменения численности хищников и численности жертв при следующих начальных условиях: $x_0 = 6, y_0 = 11$. Найдите стационарное состояние системы.

Теоретическое введение

Простейшая модель взаимодействия двух видов типа «хищник — жертва» - модель Лотки-Вольтерры. Данная двувидовая модель основывается на следующих предположениях:

1. Численность популяции жертв x и хищников y зависят только от времени (модель не учитывает пространственное распределение популяции на занимаемой территории)
2. В отсутствии взаимодействия численность видов изменяется по модели Мальтуса, при этом число жертв увеличивается, а число хищников падает.

3. Естественная смертность жертвы и естественная рождаемость хищника считаются несущественными.
4. Эффект насыщения численности обеих популяций не учитывается.

5. Скорость роста численности жертв уменьшается пропорционально численности хищников
    - $\frac{dx}{dt} = ax(t) - bx(t)y(t)$
    - $\frac{dy}{dt} = -cy(t) + dx(t)y(t)$

В этой модели x – число жертв, y - число хищников. Коэффициент a описывает скорость естественного прироста числа жертв в отсутствие хищников, c - естественное вымирание хищников, лишенных пищи в виде жертв. Вероятность взаимодействия жертвы и хищника считается пропорциональной как количеству жертв, так и числу самих хищников (xy). Каждый акт взаимодействия уменьшает популяцию жертв, но способствует увеличению популяции хищников (члены $-bxy$ и dxy в правой части уравнения).

Стационарное состояние системы (1) (положение равновесия, не зависящее от времени решение) будет в точке: $x_0 = \frac{c}{d}, y_0 = \frac{a}{b}$. Если начальные значения задать в стационарном состоянии $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, то в любой момент времени численность популяций изменяться не будет.

Выполнение лабораторной работы

Первоначально, работа была выполнена с помощью языка `Julia` в `Jupyter notebook` с помощью следующего кода:

```
using DifferentialEquations, Plots

a = -0.12
b = -0.041
c = -0.32
d = -0.029
p = [a, b, c, d]
```

```julia
x0 = 6.0
y0 = 11.0
u0 = [x0, y0]
tspan=(0.0, 200.0)

function lw(u, p, t)
    a, b, c, d = p
    x, y = u
    dx = a*x - b*x*y
    dy = -c*y + d*x*y
    return [dx, dy]
end
```

```
prob1 = ODEProblem(lw, u0, tspan, p)
sol1 = solve(prob1, Tsit5(), saveat=0.05)
plot(sol1, label=["x" "y"], title="График изменения численности жертв и хищни
plot(sol1, idxs=(2,1), label=["phase"], title="Фазовый портрет")
```

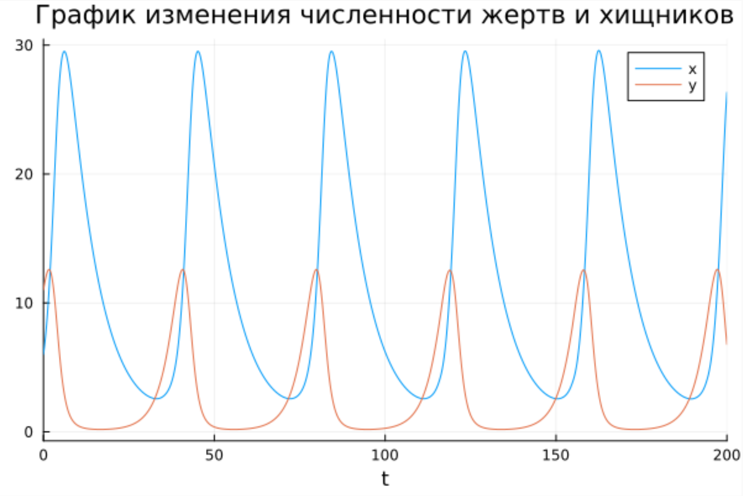

Рис. 1: Решение

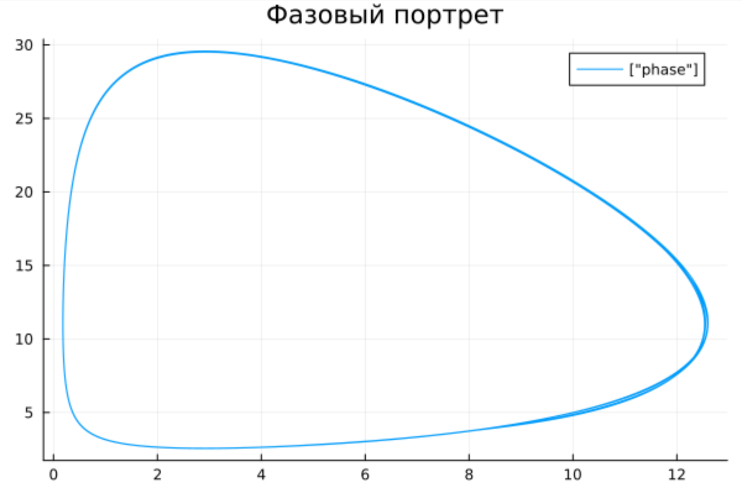

Рис. 2: Фазовый портрет

```
model lab5
  parameter Real a = -0.12;
  parameter Real b = -0.041;
  parameter Real c = -0.32;
  parameter Real d = -0.029;

  parameter Real x0 = 6;
  parameter Real y0 = 11;

  Real x(start=x0);
  Real y(start=y0);
equation
  der(x) = a*x - b*x*y;
  der(y) = -c*y + d*x*y;
end lab5;
```

Рис. 3: Код программы OpenModelica

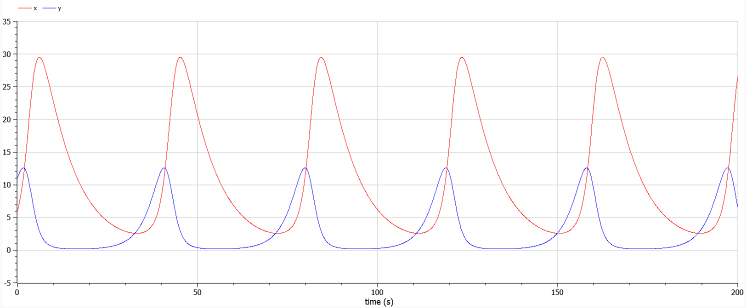

Рис. 4: Решение

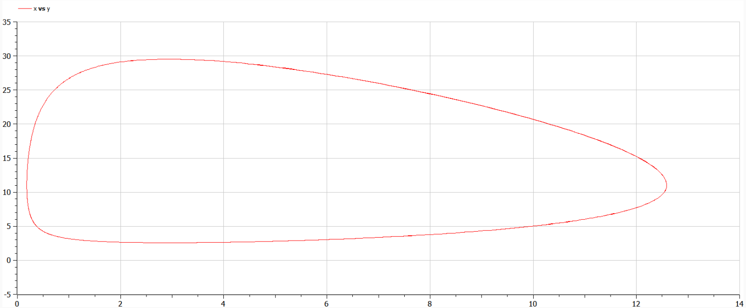

Рис. 5: Фазовый портрет

Выводы

Выводы

В ходе лабораторной работы мы смоделировали поведение модели Лотки-Вольтерры, нашли стационарное состояние ($x_0 = 11.034483, y_0 = 2.9268293$), а также построили график изменения численности популяции и фазовый портрет с помощью двух инструментов - ЯП `Julia` и `OpenModelica`.