Metody numeryczne

ITERACYJNE ZGADYWANIE

KRZYSZTOF JANICKI

Iteracyjne zgadywanie jako jedna z metod rozwiązywania układu równań

Wprowadzenie

- **Metody iteracyjne**

  Obliczają one przybliżone wartości pierwiastków układu równań liniowych w szeregu kroków obliczeniowych.

<u>Od czego zacząć?</u>

- Przyjmujemy dowolny wektor $\mathbf{x}^{(0)}$ jako rozwiązanie początkowe i tworzymy kolejno ciąg wektorów:

$$\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \ldots, \mathbf{x}^{(n)}$$

Aby wektor $\mathbf{x}^{(n+1)}$ lepiej przybliżał rozwiązanie dokładne od wektora $\mathbf{x}^{(n)}$.

Liczba wykonanych działań zależy od żądanej dokładności wyniku.

Różne metody iteracyjnych

Najpopularniejsze metody iteracyjne

- Metoda Jacobiego
- Metoda Gaussa - Seidela

Metoda Jacobiego

Metoda Jacobiego

W tej metodzie przekształcamy układ równań (A) do postaci (B)

$$
\begin{array}{ccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array}
$$

<u>**A**</u>

W postaci macierzowej:

Ax = b

$$a_{ii} \neq 0$$

$$\downarrow$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
x_1 & = & g_1 & + & h_{11}x_1 & + & h_{12}x_2 & + & \dots & + & h_{1n}x_n \\
x_2 & = & g_2 & + & h_{21}x_1 & + & h_{22}x_2 & + & \cdots & + & h_{2n}x_n \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots \\
x_n & = & g_n & + & h_{n1}x_1 & + & h_{n2}x_2 & + & \cdots & + & h_{n,n}x_n
\end{array}
$$

<u>**B**</u>

W postaci macierzowej:

x = g +Hx

$$h_{ij} = \begin{cases} -\frac{a_{ij}}{a_{ii}} & : \ i \neq j \\ 0 & : \ i = j \end{cases}$$

$$g_i = \frac{bi}{a_{ii}}$$

Metoda Jacobiego

Następnie sprawdzamy zbieżność naszej metody.

Wystarczy, że dowolna norma macierzy **H** < 1

$$\|H\|_W = \max_i \sum_{j=1}^{n} |h_{ij}| < 1$$

lub

$$\|H\|_K = \max_j \sum_{i=1}^{n} |h_{ij}| < 1$$

UWAGA – Mogą zdarzyć się przypadki, kiedy pomimo braku spełnienia warunku zbieżności uzyskamy poprawny wynik.

Wskazówka – Jeżeli na przekątnych znajdują się wartości dominujące, to metoda najprawdopodobniej będzie zbieżna

- Norma macierzy (Przykład)

$$\begin{vmatrix} 5 & 2 & 4 & -4 \\ 0 & -1 & 6 & 1 \\ 1 & 7 & 5 & 3 \\ -1 & 8 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$K1 = |5| + |0| + |1| + |-1| = 7$$
$$K2 = 18$$
$$K3 = 16$$
$$K4 = 10$$
$$K2 = max$$

Metoda Jacobiego

Wyznaczanie kolejnych przybliżeń wektora *x:*

Jako początkowe przybliżenie przyjmujemy wektor $\mathbf{x}^{(0)}$ wypełniony zerami lub wyrazami wolnymi : $\mathbf{x}^{(0)} = g$

Pierwsze przybliżenie $\boldsymbol{x^{(1)} = g + H\, x^{(0)}}$

Drugie przybliżenie: $\boldsymbol{x^{(2)} = g + H\, x^{(1)}}$

Ogólnie: $\boldsymbol{x^{(k+1)} = g + H\, x^{(k)}}$, k = 0, 1, 2, ...

W formie skalarnej: $x^{k+1} = g_i + \sum_{j=1}^{n} h_{ij} x_j^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad k = 0, 1, 2, \dots$

Metoda Jacobiego

Warunek przerwania

W każdej iteracji przy wyznaczaniu wektora musimy sprawdzić nasz warunek stopu.

$$r = \sum_{i=1}^{n} r_i \qquad \text{gdzie} \qquad r_i = \left| a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n - b_i \right|$$

Działanie programu przerywamy po określonej z góry ilości iteracji bądź osiągnięciu błędu rozwiązania:

r < d gdzie d – założona dokładność

Metoda Jacobiego – Lista kroków

Lista kroków:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(k)} &= \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - a_{14}x_4^{(k-1)}}{a_{11}} \\
x_2^{(k)} &= \frac{b_2 - a_{22}x_2^{(k-1)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - a_{24}x_4^{(k-1)}}{a_{22}} \\
x_3^{(k)} &= \frac{b_3 - a_{32}x_2^{(k-1)} - a_{33}x_3^{(k-1)} - a_{34}x_4^{(k-1)}}{a_{33}} \\
x_4^{(k)} &= \frac{b_4 - a_{42}x_2^{(k-1)} - a_{43}x_3^{(k-1)} - a_{44}x_4^{(k-1)}}{a_{44}}
\end{aligned}
$$

1. Wczytanie współczynników równania - macierz **A** o wymiarach n * n.
2. Wczytanie wektora wyrazów wolnych **b**.
3. Przekształcenie układu równań
4. Sprawdzenie warunku zbieżności metody wg warunków **6**
5. Przyjęcie wektora początkowego $\mathbf{x}^{(0)}=0$ lub $\mathbf{x}^{(0)}=\mathbf{g}$
6. Iteracyjne wyznaczanie kolejnych wektorów $\mathbf{x}^{(k)}$
7. Sprawdzenie warunku stopu

Metoda Gaussa-Seidela

Metoda Gaussa-Seidela

Metoda Gaussa-Seidela jest modyfikacją metody Jacobiego.

Różni się ona od metody Jacobiego jedynie innym sposobem wyznaczania wektora $\mathbf{x}^{(k+1)}$.

Przybliżenie to obliczamy przy pomocy: $k+1$ przybliżenia zmiennych wyznaczonej w aktualnej ($k+1$) iteracji, pozostałych zmiennych z k-tej iteracji.

Wyznaczanie kolejnych przybliżeń wektora *x:*

$$x_i^{k+1} = g_i + \sum_{j<i} h_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j>i} h_{ij} x_j^{(k)}, \quad i = 1, 2, \dots \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Metoda Gaussa-Seidela – Lista kroków

Lista kroków:

1. Wczytanie współczynników równania - macierz **A** o wymiarach n * n.
2. Wczytanie wektora wyrazów wolnych **b**.
3. Przekształcenie układu równań
4. Sprawdzenie warunku zbieżności metody wg warunków
5. Przyjęcie wektora początkowego $\mathbf{x}^{(0)}=0$ lub $\mathbf{x}^{(0)}=\mathbf{g}$
6. Iteracyjne wyznaczanie kolejnych wektorów $\mathbf{x}^{(k)}$
7. Sprawdzenie warunku stopu

$$x_1^{(k)} = \frac{b_1 - a_{12}x_2^{(k-1)} - a_{13}x_3^{(k-1)} - a_{14}x_4^{(k-1)}}{a_{11}}$$

$$x_2^{(k)} = \frac{b_2 - a_{22}x_2^{(k)} - a_{23}x_3^{(k-1)} - a_{24}x_4^{(k-1)}}{a_{22}}$$

$$x_3^{(k)} = \frac{b_3 - a_{32}x_2^{(k)} - a_{33}x_3^{(k)} - a_{34}x_4^{(k-1)}}{a_{33}}$$

$$x_4^{(k)} = \frac{b_4 - a_{42}x_2^{(k)} - a_{43}x_3^{(k)} - a_{44}x_4^{(k)}}{a_{44}}$$

6

Praktyczne podejście do problemu

Metoda Jacobiego i Gaussa-Seidela – Przykłady

Układ zbieżny

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \\ 2x_1 + 9x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 5 \\ 3x_1 + 1x_2 + 12x_3 + 2x_4 = 7 \\ 4x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 15x_4 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1319}{1816} \approx 0.7263 \\ x_2 = \frac{4159}{12712} \approx 0.3271 \\ x_3 = \frac{1045}{3178} \approx 0.3288 \\ x_4 = \frac{3483}{12712} \approx 0.2740 \end{cases}$$

Układ rozbieżny (Daje dobre wyniki)

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 15 \\ -x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 10 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 = 20 \\ x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 = 12 \end{cases}$$

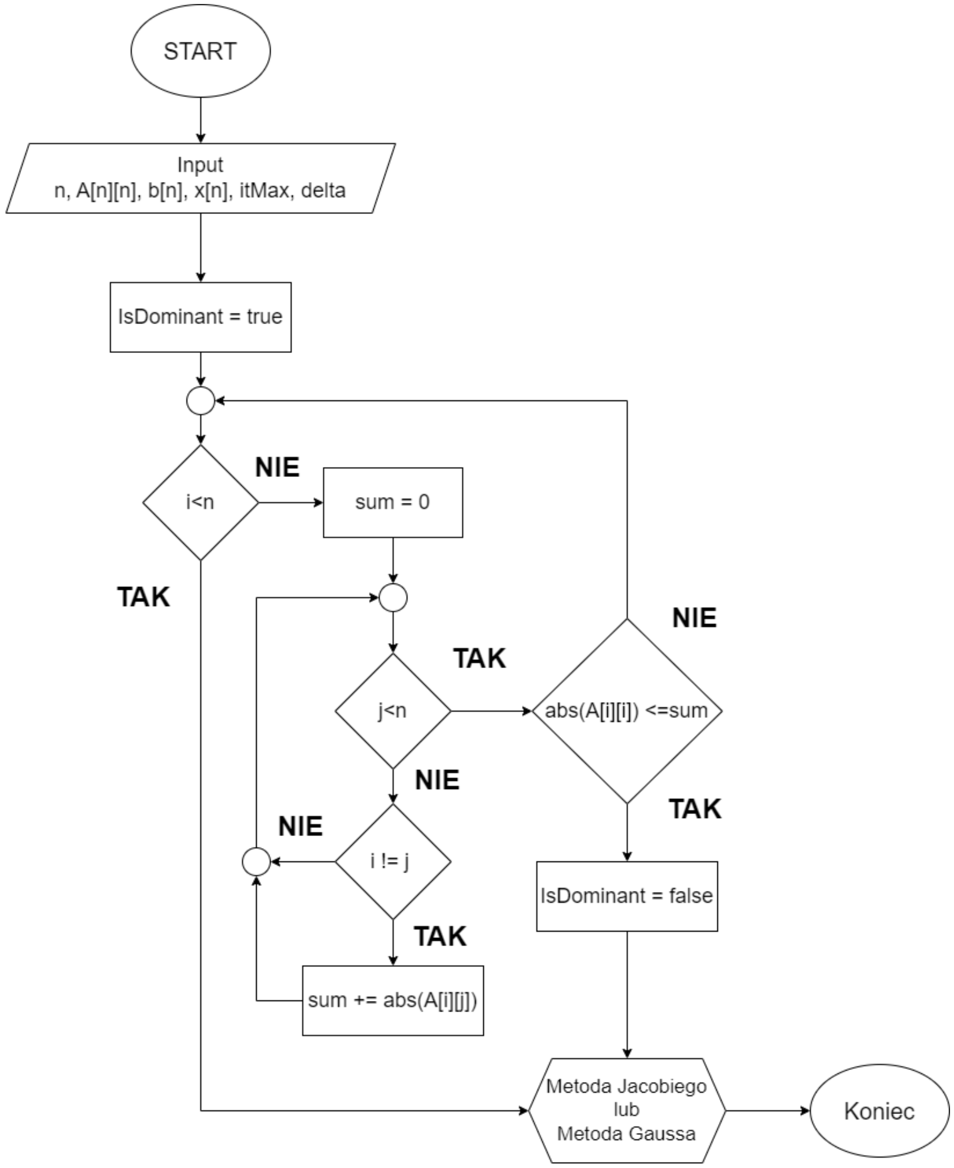
$$\begin{cases} x_1 = \frac{151}{55} \approx 2.7454 \\ x_2 = \frac{24}{11} \approx 2.1818 \\ x_3 = \frac{39}{11} \approx 3.5454 \\ x_4 = \frac{146}{55} \approx 2.6545 \end{cases}$$

Układ rozbieżny

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 1x_4 = 5 \\ 3x_1 + 1x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 7 \\ 4x_1 + 1x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{29}{95} \approx 0.3053 \\ x_2 = \frac{14}{19} \approx 0.7368 \\ x_3 = \frac{47}{95} \approx 0.4947 \\ x_4 = \frac{32}{19} \approx 1.6842 \end{cases}$$

Metoda Jacobiego i Gaussa-Seidela – Schemat blokowy



Metoda Jacobiego i Gaussa-Seidela – Algorytm