WYKŁAD 6

29 marca 2018

Podziały zbiorów

Liczby Stirlinga drugiego rodzaju

Niech $S(n,k)$ będzie liczbą podziałów n-elementowego zbioru na k niepustych podzbiorów, których kolejność nie jest istotna.

Z definicji wynika, że $S(n,k)=0$, gdy $n<k$. Ponadto przyjmujemy, że

$$S(n,0)=\begin{cases} 1, & \text{gdy } n=0 \\ 0, & \text{gdy } n>0 \end{cases}$$

$S(4,2)=7$: są trzy podziały typu $2+2$, jak na przykład

$$\{1,2\}\cup\{3,4\}$$

i cztery typu $3+1$, na przykład

$$\{1,2,3\}\cup\{4\}$$

Liczby $S(n,k)$ noszą nazwę *liczb Stirlinga drugiego rodzaju.*
Równanie rekurencyjne o dwóch parametrach (n oraz k)

Twierdzenie. *Dla wszystkich* $n \geq 1$ *oraz* $k = 1, 2, ..., n$

$$S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k)$$

Dowód. Stosując klasyczne prawo dodawania, rozbijmy wszystkie podziały na dwie klasy.

Do pierwszej z nich zaliczamy te podziały, które zawierają podzbiór jednoelementowy $\{1\}$, a do drugiej te, które go nie zawierają

Tych pierwszych jest $S(n-1,k-1)$ bo pozostałe $n-1$ elementy trzeba podzielić na $k-1$ niepustych podzbiorów.

W drugim przypadku najpierw dzielimy zbiór $\{2, 3, ..., n\}$ na k niepustych podzbiorów, można to uczynić na $S(n-1,k)$ sposobów, a następnie dołączamy element 1 do któregoś z tych podzbiorów (na k sposobów), tj. $kS(n-1,k)$

Związek $S(n,k)$ z liczbą suriekcji

$s_{n,k}$ – liczba suriekcji działających ze zbioru mocy n **na** zbiór mocy k

Przeciwobrazy surjekcji tworzą podziały zbioru mocy n na k niepustych podzbiorów, z tą tylko różnicą, że w tym przypadku kolejność podzbiorów jest istotna.

Zatem suriekcji jest $k!$-krotnie więcej niż podziałów liczonych przez ciąg $S(n,k)$

$$s_{n,k} = k!S(n,k)$$

Uwaga. Stosując zasadę włączania i wyłączania można podać dokładny wzór na liczbę suriekcji działających ze zbioru mocy n na zbiór mocy k, mianowicie

$$s_{n,k} = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$$

Rozważmy wszystkie funkcje

$$f : [n] \to [m]$$

Jest ich oczywiście m^n. Ponieważ każda funkcja obcięta do swojego zbioru wartości $f([n])$ jest suriekcją, zachodzi następująca równość

$$\sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} s_{n,k} = m^n$$

Biorąc pod uwagę zależność

$$s_{n,k} = k!S(n,k)$$

i zmieniając zakres sumowania do $0, \ldots, n$ otrzymujemy, że dla każdego $n = 0, 1, 2, ...$ i każdego $m = 1, 2, ...$

$$\sum_{k=0}^{n} S(n,k)(m)_k = m^n$$

gdzie $(m)_k = m(m-1)\ldots(m-k+1)$, przy czym $(m)_0 = 1$

Dwa wielomiany stopnia n są zgodne w więcej niż n punktach, a zatem są sobie równe. Mamy więc tożsamość dla wielomianów o współczynnikach będących liczbami $S(n,k)$

$$\sum_{k=0}^{n} S(n,k)(x)_k = x^n$$

dla wszystkich liczb rzeczywistych x. Często ta właśnie tożsamość służy jako *definicja liczb Stirlinga drugiego rodzaju*

Definicja liczb Stirlinga drugiego rodzaju opierająca się na tej tożsamości jest dobrze określona, ponieważ ciąg wielomianów $(x)_n$, $n = 0, 1, ...$, tworzy bazę w przestrzeni liniowej wielomianów, a więc każdy element tej przestrzeni, w tym wielomian x^n, można jednoznacznie przedstawić w postaci kombinacji liniowej wielomianów bazowych.

Bardziej naturalną bazę tej przestrzeni stanowią jednak wielomiany x^n, $n = 0, 1, ...$, tzn. w takim przypadku to wielomian $(x)_n$ można jednoznacznie wyrazić jako kombinację liniową tych właśnie wielomianów. Współczynniki tej kombinacji nazywane są *liczbami Stirlinga pierwszego rodzaju* i oznaczane są przez $s(n,k)$.

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k = (x)_n$$

gdzie

$$s(n,0) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } n = 0 \\ 0, & \text{gdy } n > 0 \end{cases}$$

Zależność rekurencyjna dla liczb Stirlinga pierwszego rodzaju

Porównajmy współczynniki przy x^k po obu stronach tożsamości

$$(x)_n = (x)_{n-1}(x - n + 1)$$

mianowicie

$$\sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k = \sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)x^k(x - n + 1)$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)x^k(x - n + 1)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)x^{k+1} - (n-1)\sum_{k=0}^{n-1} s(n-1,k)x^k$$

więc

$$coeff(x^k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k)$$

Twierdzenie. *Dla wszystkich* $n \geq 1$ *oraz* $k = 1, 2, ..., n$

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k)$$

Uwaga: co druga liczba $s(n,k)$ jest ujemna – dokładniej, $s(n,k) < 0$, gdy $n - k$ jest liczbą nieparzystą

$$|s(n,k)| = (-1)^{n-k} s(n,k)$$

Niech $C(n,k)$ będzie liczbą permutacji n-elementowych o dokładnie k cyklach. Przyjmujemy, że

$$C(n,0) = \begin{cases} 1, & \text{gdy } n = 0 \\ 0, & \text{gdy } n > 0 \end{cases}$$

Twierdzenie. $|s(n,k)| = C(n,k)$

Dowód. Pokażemy, że oba ciągi spełniają to samo równanie rekurencyjne z tymi samymi warunkami początkowymi.

Podzielmy wszystkie permutacje n-elementowe o k cyklach na te, w których 1 jest punktem stałym (jest ichd okładnie $C(n-1,k-1)$) i na pozostałe.

Aby otrzymać permutację drugiego typu, trzeba wziąć permutację zbioru $\{2,3,...,n\}$ o k cyklach ($C(n-1,k)$ możliwości) i wstawić element 1 na dowolne miejsce w dowolnym cyklu (na $n-1$ sposobów). Zatem

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + (n-1)C(n-1,k)$$

Mnożąc stronami równanie

$$s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k)$$

przez $(-1)^{n-k}$ i przywołując zależność

$$|s(n,k)| = (-1)^{n-k} s(n,k)$$

dochodzimy do wniosku, że liczby $|s(n,k)|$ spełniają równanie rekurencyjne dla $C(n,k)$

$$C(n,k) = C(n-1,k-1) + (n-1)C(n-1,k)$$

z tymi samymi warunkami początkowymi. Zatem

$$|s(n,k)| = C(n,k)$$

Liczby Bella

Liczba wszystkich podziałów zbioru n-elementowego

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} S(n,k)$$

Ponieważ $S(0,0) = 1$ zatem $B_0 = 1$

Zależność rekurencyjna

Rozważmy zbiór $\{1, 2, \ldots, n, n+1\}$. Rozważmy podzbiór zawierający element $n+1$. Wówczas

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} B_{n-i}$$

Stąd

$$B_{n+1} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{n-i} B_{n-i}$$

Ostatecznie

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

z warunkiem początkowym $B_0 = 1$