WYKŁAD 5

22 marca 2018

Uporządkowanie minimalnych zmian

Jeżeli T_1, T_2 są k-elementowymi podzbiorami zbioru $S = \{1, 2, \dots, n\}$ i $T_1 \neq T_2$, to

$$dist(T_1, T_2) = |T_1 \Delta T_2| \geq 2$$

Niech $\mathcal{S}_k^n$ oznacza zbiór wszystkich k-elementowych podzbiorów zbioru S (przedtem $\mathcal{S}$)

Uporządkowanie minimalnych zmian elementów zbioru $\mathcal{S}_k^n$ to takie, w którym odległość dwóch następujących po sobie zbiorów wynosi 2.

Kod Graya

Niech G^n oznacza listę złożoną z 2^n wektorów

$$G^n = (G_0^n, G_1^n, \dots, G_{2^n-1}^n)$$

zdefiniowanych rekurencyjnie w następujący sposób. Przyjmujemy, że

$$G^1 = (G_0^1, G_1^1) = (0, 1)$$

Mając daną listę G^{n-1}, listę G^n określamy jako

$$G^n = \left(0G_0^{n-1}, \dots, 0G_{2^{n-1}-1}^{n-1}, 1G_{2^{n-1}-1}^{n-1}, \dots, 1G_0^{n-1}\right)$$

Uporządkowanie minimalnych zmian zbioru $\mathcal{S}_k^n$ zapisujemy w postaci listy

$$A^{n,k} = \left(A_0^{n,k}, A_1^{n,k}, \dots, A_{\binom{n}{k}-1}^{n,k}\right)$$

Bazujemy na zależności rekurencyjnej

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

Zatem mając dane $A^{n-1,k-1}$ oraz $A^{n-1,k}$ listę $A^{n,k}$ definiujemy następująco:

$$A_0^{n-1,k}, ..., A_{\binom{n-1}{k}-1}^{n-1,k}, A_{\binom{n-1}{k-1}-1}^{n-1,k-1} \cup \{n\}, ..., A_0^{n-1,k-1} \cup \{n\}$$

dla $1 \leq k \leq n-1$

Warunki początkowe

$$A^{n,0} = (\emptyset)$$

$$A^{n,n} = (\{1, 2, \ldots, n\})$$

$$A^{3,1} = (\{1\}, \{2\}, \{3\})$$

$$A^{3,2} = (\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\})$$

$$A^{4,2} = (\{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}, \{3,4\}, \{2,4\}, \{1,4\})$$

Chcąc wyznaczyć $A^{5,3}$ musimy mieć $A^{4,2}$ i $A^{4,3}$

$$A^{4,3} = (\{1,2,3\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,4\})$$

Zatem

$$A^{5,3} = (A^{4,3}, \{1,4,5\}, \{2,4,5\}, \{3,4,5\}, \{1,3,5\}, \{2,3,5\}, \{1,2,5\})$$

$$A_0^{n,k} = \{1, 2, \ldots, k\}$$

$$A_{\binom{n}{k}-1}^{n,k} = \{1, \ldots, k-1, n\}$$

Rank

Zapiszmy podzbiór T jako $T^{\rightarrow} = \{t_1, t_2, \ldots, t_k\}$, gdzie $t_1 < t_2, \ldots < t_k$. Np. $A^{5,3}$

$\{1,2,3\}$	0
$\{1,3,4\}$	1
$\{2,3,4\}$	2
$\{1,2,4\}$	3
$\{1,4,5\}$	4
$\{2,4,5\}$	5
$\{3,4,5\}$	6
$\{1,3,5\}$	7
$\{2,3,5\}$	8
$\{1,2,5\}$	9

k nieparzyste

$$rank(T) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \binom{t_i}{i} - 1$$

Np. $A^{5,4}$

$\{1,2,3,4\}$	0
$\{1,2,4,5\}$	1
$\{2,3,4,5\}$	2
$\{1,3,4,5\}$	3
$\{1,2,3,5\}$	4

k parzyste

$$rank(T) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \binom{t_i}{i}$$

Ogólnie

$$rank(T) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} \left(\binom{t_i}{i} - 1 \right)$$