# Komentarz do wykładów 20. lutego 2024, 27. lutego 2024.

## Przestrzeń probabilistyczna

Niech $\Omega \neq \emptyset$. Zbiór $\Omega$ nazywamy przestrzenią zdarzeń (elementarnych). Intuicyjnie jest to zbiór możliwych wyników.

Drugim elementem konstrukcji jest rodzina zbiorów $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$. Elementy tej rodziny nazywamy zdarzeniami. Rodzina zdarzeń spełnia następujące warunki:

1. $\Omega \in \mathcal{F}$,
2. $A \in \mathcal{F} \Longrightarrow A^C = (\Omega \setminus A) \in \mathcal{F}$,
3. $A_i \in \mathcal{F},\ (i = 1, 2, \ldots) \Longrightarrow \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

Rodzinę zbiorów spełniającą powyższe warunki nazywamy $\sigma$-ciałem zbiorów (zdarzeń). W skrócie: zbiór $\Omega$ jest zdarzeniem, dopełnienie zdarzenia jest zdarzeniem, suma skończonej lub przeliczalnej rodziny zdarzeń jest zdarzeniem. Chodzi o to, aby elementarne operacje mnogościowe na zdarzeniach nie dawały w wyniku nie-zdarzeń.

Ostatnim elementem jest funkcja $P : \mathcal{F} \to [0, 1]$ nazywana prawdopodobieństwem lub gęstością taka, że

1. $P(\Omega) = 1$.
2. Jeżeli $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{F}$ oraz $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, to $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

**Definicja 1.** *Przestrzenią probabilistyczną nazywamy obiekt $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, gdzie $\Omega$ jest przestrzenią zdarzeń elementarnych, $\mathcal{F}$ – $\sigma$-ciałem zdarzeń, natomiast $P$ jest prawdopodobieństwem.*

## Zmienna losowa

Rozważamy zbiory otwarte na prostej rzeczywistej. Przez operację elementarną rozumiemy sumę, przekrój i dopełnienie mnogościowe.

**Definicja 2.** *$\sigma$-ciałem borelowskim $\mathcal{B}$ nazywamy klasę zbiorów otrzymanych ze zbiorów otwartych za pomocą przeliczalnej liczby operacji elementarnych. Jeżeli $B \in \mathcal{B}$ to mówimy, że zbiór $B$ jest zbiorem borelowskim.*

**Definicja 3.** *Niech będzie dana funkcja $X : \Omega \to \mathbb{R}$. $X$ nazywamy* zmienną losową *jedynie wtedy gdy $\forall\, B \in \mathcal{B}\ \ X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.*

$X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$. Słownie: przeciwobraz zbioru borelowskiego jest zdarzeniem.

## Ciągłe i dyskretne zmienne losowe

Dyskretną zmienną losową nazywamy ciąg wartości (skończony lub przeliczalny) $\{x_i\}$ oraz ciąg prawdopodobieństw $\{p_i\}$. Ten drugi powinien spełniać warunki: $p_i \geqslant 0$ oraz $\sum\limits_{i \in I} p_i = 1$. $\sigma$-ciałem zdarzeń jest najczęściej $2^I$.

**Przykłady: I**

1. Rzut kostką. Tutaj $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ oraz $p_i = 1/6$, dla $i = 1, 2, \ldots, 6$.

2. Rzut kostką z rozróżnieniem parzyste-nieparzyste. Teraz $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}$, rodziną zdarzeń jest $\mathcal{F} = \{\emptyset, \{1, 3, 5\}, \{2, 4, 6\}, \Omega\}$, $p_1 = P(\{1, 3, 5\}) = 1/2$, $p_1 = P(\{2, 4, 6\}) = 1/2$.

3. Schemat Bernoulliego. Przeprowadzamy $n$ prób, ppb[a] sukcesu w każdej próbie jest liczba $p$ taka, że $0 < p < 1$. O próbach zakładamy, że są niezależne. Na razie nie wprowadzamy formalnej definicji niezależności, zakładamy, że każda z prób jest przeprowadzana w tych samych warunkach, bez znajomości poprzednich wyników. Innymi słowy: wraz z kolejną próbą świat rozpoczyna się od nowa.

Wartością zmiennej losowej $X$ jest liczba sukcesów w $n$ próbach. Stąd $\Omega = \{0, 1, \ldots, n\}$, $p_k = P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Zwrot: zmienna losowa $X$ podlega rozkładowi Bernoulliego z parametrami $n, p$, zapisujemy krótko: $X \sim B(n, p)$.

4. Rozkład Poissona. Zliczanie zdarzeń w ustalonej jednostce czasu. Parametr rozkładu to rzeczywista, dodatnia liczba $\lambda$. $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $p_k = P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$. Oznaczenie: $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$.

[a] skrót *ppb* oznaczać będzie prawdopodobieństwo (*singularis*) natomiast *ppbsy* prawdopodobieństwa (*pluralis*).

Ciągłą zmienną losową nazywamy pewien podzbiór $A \subset \mathbb{R}$ wraz z funkcją gęstości $f(x)$ taką, że $f(x) > 0$ (dla $x \in A$) oraz $\int_A f(x)\, dx = 1$. Funkcja gęstości jest odpowiednikiem ppb. Mówimy jednak raczej o ppb zdarzeń a nie o ppb konkretnej wartości.

**Przykłady: II**

5. Rozkład jednostajny. Losujemy liczbę rzeczywistą z przedziału $[0, 1]$. Każda z liczb jest tak samo prawdopodobna. Zmienna losowa $X$ to wylosowana liczba. Tutaj: $\Omega = [0, 1]$, rodzina zdarzeń $\mathcal{F}$ to zbiory borelowskie zawarte w przedziale $[0, 1]$, funkcja gęstości to $f(x) = 1$ dla $x \in [0, 1]$. Dla przykładu"

$$P(0.5 < X < 0.75) = P(0.5 < X \leqslant 0.75) = \int_{0.5}^{0.75} f(x)\, dx = 1/4; \quad P(X = 0.5) = 0.$$

Oznaczenie: $X \sim U[0, 1]$.

6. Rozkład normalny. Funkcja gęstości to $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ dla $x \in \mathbb{R}$. Oznaczenie: $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

7. Rozkład wykładniczy. Gęstość $f(x) = \lambda \exp(-\lambda x)$ dla $x > 0$. Parametr $\lambda$ jest dodatnią liczbą rzeczywistą. Oznaczenie: $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$.

## Charakterystyki zmiennej losowej

**Definicja 4.** *Wartością oczekiwaną zmiennej losowej $X$ nazywamy liczbę $EX = E(X) = \sum_i x_i p_i$ w wypadku dyskretnym lub $E(X) = \int_{\mathbb{R}} x f(x)\, dx$ w wypadku ciągłym.*

**Definicja 5.** *Wariancją zmiennej losowej $X$ nazywamy liczbę* $VX = V(X) = \sum_i (x_i - EX)^2\, p_i$ *w wypadku dyskretnym lub* $V(X) = \int_{\mathbb{R}} (x - EX)^2 f(x)\, dx$ *w wypadku ciągłym.*

**Definicja 6.** *Momentem zwykłym rzędu $k$ zmiennej losowej $X$ nazywamy liczbę* $m_k = E(X^k)$ *czyli* $\sum_i x_i^k\, p_i$ *lub* $\int_{\mathbb{R}} x^k\, f(x)\, dx$.

**Definicja 7.** *Momentem centralnym rzędu $k$ zmiennej losowej $X$ nazywamy liczbę* $\mu_k = E((X - EX)^k)$ *czyli* $\sum_i (x_i - EX)^k\, p_i$ *lub* $\int_{\mathbb{R}} (x - EX)^k\, f(x)\, dx$.

**Definicja 8.** *Dystrybuantą zmiennej losowej $X$ nazywamy funkcję* $F(t) = F_X(t) = P(X \leqslant t)$.

**Twierdzenie 9.** *Zakładamy, że zmienna losowa $X$ ma wartość oczekiwaną $EX$. Wówczas wariancję można obliczyć wzorem*

$$V(V) = E(X^2) - (EX)^2.$$

*Dowód.* $V(X) = \sum_i (x_i - \mathrm{E}X)^2\, p_i = \sum_i x_i^2\, p_i - 2 \cdot \mathrm{E}X \sum_i x_i\, p_i + (\mathrm{E}X)^2 \cdot \sum_i p_i$.

Uwzględniając fakty: $\sum_i x_i\, p_i = EX$ oraz $\sum_i p_i = 1$ otrzymujemy tezę twierdzenia.

Dowód w wypadku ciągłym podany będzie w trakcie wykładu. □

**Przykłady: III**

Dwuwymiarowy rozkład normalny. $(X, Y) \sim N\left(\begin{bmatrix} \mu_X \\ \mu_Y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}\right)$. Gęstość zmiennej $(X, Y)$ to

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}}\ \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_X^2} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_Y^2} - \frac{2\rho(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_X\sigma_Y}\right]\right).$$

## Przykłady c.d.

**Przykłady: IV**

8. Załóżmy, że zmienna $X$ ma rozkład jednostajny na przedziale $[-1, 1]$ to znaczy gęstość ma postać $f(x) = 1/2$ dla $x \in [-1, 1]$. Jaki rozkład mają zmienne $Y = |X|$ oraz $Z = X^2$?

Najpierw objaśnienie: rozkład zmiennej losowej znamy wtedy gdy potrafimy podać wzór dystrybuanty lub gęstości.

Zmienna losowa $Y$. $F_Y(t) = P(Y < t) = P(|X| < t) = P(-t < X < t)$. Wartości $t$ są z przedziału $[0, 1]$. Stąd $F_Y(t) = P(X < t) - P(X < -t) = F_X(t) - F_X(-t)$.

Wartość $F_X(s)$ to $\int_{-1}^{s} f(x)\, dx = \int_{-1}^{s} 1/2\, dx = \dfrac{s+1}{2}$

Witold Karczewski