

## Napake

Jih je veliko in so nasploh zelo depresivne in vse metode so slabe.

## Nelinearne enačbe

Iščemo ničle  $\alpha$  funkcije  $f$ . Občutljivost  $\frac{1}{f'(\alpha)}$ , za dvojno ničlo  $\sqrt{\frac{2}{f''(x)}}$ .

BISEKCIJA: razpolavljamo interval, na katerem imamo ničlo. Št korakov za natančnost  $\varepsilon$ :  $k \geq \log\left(\frac{|b-a|}{\varepsilon}\right)$ .

NAVADNA ITERACIJA: Iščemo fiksno točko  $g(\alpha) = \alpha$ . Metoda:  $x_{r+1} = g(x_r)$ . Če je  $|g'(\alpha)| < 1$  je točka privlačna, če  $|g'(\alpha)| > 1$  je odbojna. Red konvergence je  $p$ , če je  $\alpha$   $p$ -kratna ničla  $g$ .

TANGENTNA METODA:  $x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$ . Konvergenca je za enojne ničle kvadratična, za večkratne ničle linearna. Če za enostavno ničlo velja  $f''(\alpha) = 0$  je konvergenca kubična, itn. . . Vse ničle so privlačne.

SEKANTNA METODA:  $x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)(x_r - x_{r-1})}{f(x_r) - f(x_{r-1})}$ . Red konvergence:  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

LAGUERROVA METODA za iskanje ničel polinomov:  $z_{r+1} = z_r - \frac{np(z_r)}{p'(z_r) \pm \sqrt{(n-1)((n-1)p'(z_r) - np(z_r)p''(z_r))}}$

Pri stabilni metodi izberemo predznak tako, da je absolutna vrednost imenovalca največja. Če izbiramo vedno  $-$  ali  $+$  skonvergiramo k levi oz. desni ničli, če so vse ničle realne. Konvergenca v bližini enostavne ničle je kubična. Metoda najde tudi kompleksne ničle.

REDUKCIJA POLINOMA: Imamo eno ničlo, radi bi jo faktorizirali ven. Poznamo obratno in direktno redukcijo, pri katerih je stabilno izločati ničle v padajočem in naraščajočem vrstnem redu po absolutni vrednosti. V praksi uporabimo kombinirano metodo: do nekega  $r$  uporabimo z ene strani obratno, z druge pa direktno. Ta  $r$  izberemo tako, da je  $|\alpha^r a_{n-r}|$  maksimalen.

DURAND-KERNERJEVA METODA: Iščemo vse ničle naenkrat:  $x_k^{(r+1)} = x_k^{(r)} - \frac{p(x_k^{(r)})}{\prod_{j=1, j \neq k}^n (x_k^{(r)} - x_j^{(r)})}$ . Kvadratična konvergenca. Za kompleksne ničle je treba začeti s kompleksnimi približki.

## Linearni sistemi

NORME:  $\|A\|_1 = \max_{j \in \{1..n\}} (\sum_{i=1}^n |a_{ij}|)$  = največji stolpec,  $\|A\|_\infty = \|A^T\|_1$  = največja vrstica

$\|A\|_2 = \sigma_1 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^H A)}$  = največja singularna vrednost,  $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}$  = gledamo kot vektor

Neenakosti:  $\lambda \leq \|A\|$ .  $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$ .

Rešujemo sistem  $Ax = b$ . Za napako  $x$  velja ocena:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A) \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left( \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} \right)$$

Količina  $\kappa(A)$  se imenuje občutljivost matrike.  $\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\| = \frac{\sigma_1(A)}{\sigma_n(A)} \geq 1$

LU RAZCEP s kompletnim pivotiranjem: matriko  $A$  zapišemo kot  $PAQ = UL$ ,  $L$  sp. trikotna z 1 na diagonali in  $U$  zg. trikotna, ter  $P, Q$  permutacijski matriki stolpcev in vrstic. Algoritem:

```
Q = I, P = I
for j = 1 to n:
  r, q taka, da a_rq največji v podmatriki A(j+1:n)
  zamenjaj vrstici r in j v A, L, P
  zamenjaj stolpca q in j v A, L, Q
  for i = j+1 to n:
    l_ij = a_ij / a_jj
    for k = j+1 to n:
      a_ik = a_ik - l_ij * a_jk
```

Postopek na roke:

- \* Če delamo pivotiranje zamenjamo primerne vrstice in stolpce v  $A, P, Q$ , da je  $a_{00}$  največji.
- Prvi stolpec delimo z  $a_{00}$ , razen  $a_{00}$ , ki ga pustimo na miru.
- Za vsak element v podmatriki  $A(2, n)$ :  $a_{ij} = a_{ij} - a_{i1} \cdot a_{1j}$  (odštejemo produkt  $\leftarrow$  in  $\uparrow$ ).
- Ponovimo postopek na matriki  $A(2, n)$ .

Delno pivotiranje uporablja samo matriko  $P$ , za LU razcep brez pivotiranja pa preskočimo 1.

Skalarni produkt potrebuje  $2n$  operacij. Reševanje s premimi substitucijami potrebuje  $n^2$ , z obratnimi  $n^2 + n$ . Reševanje z LU razcepov potrebuje  $\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{6}n$  operacij.

Za izračunani LU razcep  $\hat{L}\hat{U} = A + E$  velja  $|E| \leq nu|\hat{L}||\hat{U}|$ .

RAZCEP CHOLESKEGA: Za spd matriko  $A$  obstaja razcep  $A = VV^T$ .

```

for k = 1 to n:
  v_kk = sqrt(a_kk - sum(v_kj^2, j=1 to k))
  for i = k+1 to n:
    v_ik = 1/v_kk * (a_ik - sum(v_ij * v_kj, j = 1 to k))

```

Postopek na roke po stolpcih:

1. Če sem diagonalen element: odštejem od sebe skalarni produkt vrstice na levo same s sabo in se korenim.
2. Če nisem diagonalni: od sebe odštejem skalarni produkt vrstice levo od sebe z vrstico levo od mojega diagonalnega. Nato se delim z diagonalnim.

Razcep stane  $\frac{1}{3}n^3$  operacij. Je obratno stabilno.

## Nelinearni sistemi

JACOBIJEVA ITERACIJA: Posplošitev navadne iteracije. Naj velja  $G(\alpha) = \alpha$ . Metoda:  $x^{(r+1)} = G(x^{(r)})$ . Točka  $\alpha$  je privlačna, če velja  $\rho(DG(\alpha)) < 1$ . Dovolj je  $\|DG(\alpha)\| < 1$ . Konvergenca je linearna.

NEWTONOVA METODA: Posplošitev tangentne metode. Metoda: reši sistem  $DF(x^{(r)})\Delta x^{(r)} = -F(x^{(r)})$ .  $x^{(r+1)} = x^{(r)} + \Delta x^{(r)}$ . Konvergenca je kvadratična.

## Problem najmanjših kvadratov

REŠEVANJE PREDOLOČENIH SISTEMOV: Za dan predoločen sistem  $Ax = b$  rešujemo normalni sistem  $A^T Ax = A^T b$ . Število operacij:  $n^2m + \frac{1}{3}n^3$ .

## Lastne vrednosti

GERSCHEGORINOV IZREK: Naj bo  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $C_i = \overline{K}(a_{ii}, r = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Potem vsaka lastna vrednost leži v vsaj enem Gerschgorinovem krogu. Če  $m$  krogov  $C_i$  sestavlja povezano množico, ločeno od ostalih  $n - m$  krogov, potem ta množica vsebuje natanko  $m$  lastnih vrednosti.

Diagonalno dominantna matrika ( $|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$ ) je obrnljiva.

## Interpolacija

LAGRANGEV INTERPOLACIJSKI POLINOM:

$$l_{n,j}(x) = \frac{\prod_{i=0, i \neq j}^n (x - x_i)}{\prod_{i=0, i \neq j}^n (x_j - x_i)}$$

Polinom:  $p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_{n,i}(x)$

DELJENE DIFERENCE:

- Če so točke paroma različne:  $D_{i,0} = y_i$ , ostalo izračunamo po rekurzivni formuli:  $D_{i,j} = \frac{D_{i,j-1} - D_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$ . Če sta dve točki na  $j$ -tem koraku enaki, je  $D_{i,j} = \frac{f^{(j)}(x_i)}{j!}$ .

Polinom:  $p(x) = D_{1,1} + D_{2,2}(x - x_0) + D_{3,3}(x - x_0)(x - x_1) + \dots + D_{n,n}(x - x_0) \dots (x - x_{n-1})$

## Integriranje

Ekvidistančne točke  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ ,  $x_i = x_0 + ih$ .

SEST. TRAPEZNO PRAVILO:  $\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{m-1}) + f(x_m)) - \frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi)$

SEST. SIMPSONOVO:  $\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \dots + 2f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m})) - \frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(\xi)$

3/8 PRAVILO:  $\int_a^b f(x)dx = \frac{3}{8}h(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)) - \frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi)$ ,  $\xi \in (x_0, x_3)$