Premočrtno gibanje

Osnovni vektorji: $\vec{r} = r\vec{e}_r$, $\quad \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta$, $\quad \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta})\vec{e}_\vartheta$
$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta$ in $\dot{\vec{e}}_\vartheta = -\dot{\vartheta}\vec{e}_r$
Newtonov zakon na krivulji: $m(\ddot{s}\vec{e}_T + \kappa\dot{s}^2\vec{e}_N) = \vec{F} + \vec{S}$
Sila je potencialna, če je $\vec{F} = -\operatorname{grad} U = -\frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r$.
Energijska enačba: $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E_0$
Ravnovesna lega: $U'(x) = 0$, stabilna če $U''(x) > 0$.

Relativno gibanje

Količine s $'$ so zapisane v AKS.
$P' = P_0' + Q(t)(P - P_0)$
$W = Q^T\dot{Q}$, $\quad W\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{a}$
Če $Q = R_2R_1$ in poznamo $\vec{\omega}_1$,$\vec{\omega}_2$, potem $\vec{\omega} = R_1^T\vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_1$ in $\vec{\omega}' = \vec{\omega}_2' + R_2\vec{\omega}_1'$.
$\vec{\zeta} = P - P_0$, $\quad \vec{v}_{\text{rel}} = \dot{\vec{\zeta}}$, $\quad \vec{a}_{\text{rel}} = \ddot{\vec{\zeta}}$
Newtonove enačbe v RKS:

$$m\ddot{\vec{\zeta}} = \vec{F} - \underbrace{m\vec{a}_0}_{(1)} - \underbrace{m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta})}_{(2)} - \underbrace{m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\zeta}}_{(3)} - \underbrace{2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{\zeta}}}_{(4)}$$

(1) inercijska sila, a_0 je pospešek RKS glede na AKS, določimo ga kot $\vec{a}_0 = \ddot{\vec{r}}$, kjer $\vec{r}$ zapisan v AKS
(2) centrifugalna sila,
(3) inercijska sila zaradi kotnega pospeška,
(4) Coriolisova sila.

Sila vezi (če ni trenja): $\vec{S} \cdot \vec{v}_{\text{rel}} = \vec{0}$.
Pospešek v AKS: $\vec{a}' = \vec{a}_0' + \dot{\vec{\omega}}' \times \vec{\zeta}' + \vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{\zeta}') + 2\vec{\omega}' \times \dot{\vec{\zeta}}' + \vec{a}_{\text{rel}}'$

Sistem materialnih točk

Masno središče za sistem točk P_i z masami m_i in homogeno togo telo:

$$P_* = O + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}(P_i - O)m_i \qquad P_* = \frac{1}{V}\int_B (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k})dV$$

Vrtilna količina za sistem: $\vec{\mathscr{L}} = \sum_{i=1}^{n}(P_i - O) \times m_i\dot{P}_i$
Prožen trk: ohranjata se gibalna količnina $\vec{p}_* = m\vec{v}_*$ in skupna kinetična energija.

Togo telo

Aksiomi za togo telo:
$m\ddot{P}_*{}' = \vec{F}'$

$$\frac{d\vec{L}'(O')}{dt} = \vec{N}'(O')$$

$\vec{N}'(O') = \vec{N}(P_0') + (P_0' - O') \times \vec{F}'$
Za vrtilno količino velja: $\vec{\mathscr{L}} = \mathbf{J}\vec{\omega}$
Za kinetično energijo velja: $T = T_* + T_r$, kjer je $T_* = \frac{1}{2}m\vec{v}_*$ in $T_r = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \mathbf{J}\vec{\omega}$ (pri vrtenju okrog izhodišča) in $T = \frac{1}{2}m|\vec{v}_*|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \mathbf{J}(P_*)\vec{\omega}$
Velja energijski zakon: $T + U = E_0$.
Navor: $\vec{N} = \int \vec{r} \times d\vec{F}$ in npr. $d\vec{F} = \rho_F dS$
Velja (za togo telo): $\mathbf{J}\dot{\vec{\omega}} = \vec{N}$
Težišče stožca je na višini $h/4$, težišče polkrogle pa v $3r/8$.

Vztrajnostni tenzor

Def: $(a \otimes b)r = (b \cdot r)a$ in $(a \otimes b)_{ij} = a_ib_j$
Splošna formula: $\mathbf{J}(P_0) = \int_B (|\vec{\zeta}|^2\mathbf{I} - \vec{\zeta} \otimes \vec{\zeta})dm$

Normala ravnine zrcalne simetrije telesa je glavna smer vztrajnostnega tenzorja $\mathbf{J}(P_0)$, kjer je P_0 na ravnini simetrije.
Vrtenje togega telesa brez navora je mogoče samo in natanko samo okoli glavnih osi $\mathbf{J}$.
Presek dveh ravnin zrcalne simetrije je glavna smer vztrajnostnega tenzorja.

V telesni bazi je vztrajnostni tenzor enak:

$$\mathbf{J} = \int \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix} dm$$

Znani vztrajnostni tenzorji v telesni bazi:
krogla: $\mathbf{J} = \frac{2}{5}mr^2\mathbf{I}$, sfera: $\mathbf{J} = \frac{2}{3}mr^2\mathbf{I}$, palica okrog sredine: $J = \frac{1}{12}ml^2$, okrog krajišča: $J = \frac{1}{3}ml^2$,
disk okrog središča: $J = \frac{1}{2}mr^2$, okrog premera: $J = \frac{1}{4}mr^2$, obroč: $J = mr^2$,
elipsoid: $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}m(b^2+c^2) & & \\ & \frac{1}{5}(a^2+c^2) & \\ & & \frac{1}{5}m(a^2+b^2) \end{bmatrix}$
stožec ($\bigtriangledown$) z radijem r in višino h okrog vrha: $\begin{bmatrix} \frac{3}{5}mh^2+\frac{3}{20}mr^2 & & \\ & \frac{3}{5}mh^2+\frac{3}{20}mr^2 & \\ & & \frac{3}{10}mr^2 \end{bmatrix}$
pokončen valj: $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}m(3r^2+h^2) & & \\ & \frac{1}{12}m(3r^2+h^2) & \\ & & \frac{1}{2}mr^2 \end{bmatrix}$
kvader: $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}m(h^2+d^2) & & \\ & \frac{1}{12}m(w^2+d^2) & \\ & & \frac{1}{12}m(w^2+h^2) \end{bmatrix}$
V prostorsko bazo ga pretvorimo: $\mathbf{J}' = Q\mathbf{J}Q^T$.
Steinerjev izrek: $\mathbf{J}(P_0) = \mathbf{J}(P_*) + m|P_* - P_0|^2\mathbf{I} - m(P_* - P_0) \otimes (P_* - P_0)$
Če zarotiramo koordinate (da dobimo vztrajnostne momente okoli drugih osi): nove bazne vektorje izrazimo s starimi kot $\vec{e_1}' = \alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{12}\vec{e}_2 + \alpha_{13}\vec{e}_3$ in ostale podobno. Potem so elementi nove matrike vztrajnostnega tenzorja $\mathbf{J}'$ enaki:

$$J'_{ij} = \sum_k \sum_l \alpha_{ik}\alpha_{jk}J_{kl}.$$

Rotacije

Rotacije okrog spremenljive osi: $\mathcal{R}(\vec{e}(t),\varphi(t))\vec{r} = \cos\varphi\,\vec{r} + (\vec{e}\cdot\vec{r})(1-\cos\varphi)\vec{e} + \sin\varphi(\vec{e}\times\vec{r})$
Rotacijska matrika za rotacijo:

$$\mathcal{R}(\vec{\imath},\varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad \mathcal{R}(\vec{\jmath},\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad \mathcal{R}(\vec{k},\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Če je dana rotacijska matrika, potem velja $1 + 2\cos\varphi = \mathrm{sl}(Q)$. Vektor rotacije je lastni vektor, smer pa določimo tako, da en vektor preslikamo.

Eulerjeve dinamične enačbe

Vektorska oblika: $\mathbf{J}(P_*)\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega}\times\mathbf{J}(P_*)\vec{\omega} = \vec{N}(P_*)$

$$\begin{aligned} J_1\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3(J_2 - J_3) &= N_1 \\ J_2\dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1(J_3 - J_1) &= N_2 \\ J_3\dot{\omega}_3 - \omega_1\omega_2(J_1 - J_2) &= N_3 \end{aligned}$$

Oblika za vrtenje okoli stalne osi, $\vec{\omega} = \omega\vec{k} = \dot{\varphi}\vec{k}$:

$$\begin{aligned} J_{13}\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 J_{23} &= N_1 \\ J_{23}\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 J_{13} &= N_2 \\ J_{33}\ddot{\varphi} &= N_3 \end{aligned}$$

Kotaljenje

Hitrost dotikališča = hitrost težišča + obodna hitrost, tj. $\vec{v}_D = \vec{v}_* + \vec{\omega}\times\vec{r}$.
Pogoj kotaljenja: $\vec{v}_D = \vec{0}$
Kaj mora veljati, da se res kotali brez drsenja: $|\vec{F}_K| \leq k|\vec{F}_P|$
Sila trenja: $\vec{F}_{\mathrm{tr}} = -k\vec{F}_\perp \frac{\vec{v}_D}{|\vec{v}_D|}$
Škripec: pogoj, da vrv drsi na kolutu: $F_2 \geq F_1 e^{k\vartheta}$.