### NDE 1. reda

Ločljive spremeljivke: $y' = f(x)g(y)$
Linearna: $y' = a(x)y + b(x)$, rešujemo $y_s = y_h + y_p$
Trik: $y(x) \leftrightarrow x(y) \implies y' = 1/\dot{x}$
Homogena: $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$, v posebnem $f(x, y) = f(1, x/y) \implies z = y/x, y' = z + xz' \implies$ linearna
Bernoullijeva: $y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$, rešujemo $z = y^{1-\alpha}$, $\implies \frac{1}{1-\alpha} z' = a(x)z + b(x)$
Ricattijeva: $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$, ena rešitev $y_1$. Nova spr. $y = y_1 + z \implies$ Bernoullijeva
Integrirajoči množitelj: $Pdx + Qdy = 0$, iščemo $\mu$: $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$. Rešitev $u(x, y) = \int Pdx = \int Qdy = 0$

$\mu = \mu(x) \iff \frac{\mu_x}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{Q}$ odvisno samo od $x$. $\mu = \mu(y) \iff \frac{\mu_y}{\mu} = \frac{Q_x - P_y}{P}$ odvisno samo od $y$.

Če $\mu = f(x, y)$, pazi, da odvajaš kot kompozitum.

Parametrično: $x = X(u, v), y = Y(u, v), y' = Z(u, v)$. Rešujemo: $dY = Z\,dX$

Triki: $\cos^2 + \sin^2 = 1, ch^2 - sh^2 = 1, y' = tx$.

Clairautova: $y = xy' + b(y')$. Rešitev: $y = Cx + b(C)$. Tudi singularna rešitev (ogrinjača).
Lagrangeeva: $y = a(y')x + b(y')$. Rešujemo parametrično: $X = u, Z = y' = v, Y = a(v)u + b(v) \implies$ linearna.

Singularna rešitev: poiščemo fiksne točke $a$. Če $a(t_0) = t_0 \implies y = a(t_0)x + b(t_0)$ je singularna rešitev.

Singularna rešitev: če $G(x, y, c) = 0$ splošna rešitev, sing. rešitev dobimo: $G(x, y, c) = 0, G_c(x, y, c) = 0$.

Druga možnost: če $F(x, y, y') = 0$ dana enačba, sing. rešitev dobimo: $F(x, y, y') = 0, F_{y'}(x, y, y') = 0$. Preveriti moramo, če rešitev res reši DE!!!

Iskanje ortogonalne trajektorije družine krivulj:

1. odvajaj enačbo krivulje (če se znebiš konstante, nadaljuj s korakom 3.))
2. eliminiraj konstanto iz enačbe krivulje in odvajane enačbe
3. v novi enačbi zamenjaj $y'$ z $-1/y'$ in reši dobljeno DE.

### NDE višjih redov

Ne nastopa $y$: uvedemo $z = y'$.
Obe strani sta odvoda nečesa: integriramo in dodamo konstanto.

Odvodi: $y'/y = (\log(y))', xy' + y = (xy)', \frac{y''y - y'^2}{y^2} = (\frac{y'}{y})', \frac{y'x - y}{x^2} = (\frac{y}{x})'$.

Ne nastopa $x$: uvedemo $z(y) = y'$, $y$ neodvisna spr. $y'' = \dot{z}z$, $y''' = \ddot{z}z^2 + \dot{z}^2 z$.
Homogena: $F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$. Vpeljemo $z(x) = y'/y$. $y''/y = z' + z^2$.
Z utežjo: $F(kx, k^m y, k^{m-1} y', \dots, k^{m-n} y^{(n)}) = k^p F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$. Uvedemo: $x = e^t, y = u(t)e^{mt}$.

### Geometrija

Tangenta v točki (x,y): $Y - y = y'(X - x)$
Normala v točki (x,y): $Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$

| | |
|---|---|
| Abscisa tangente: $X = x - y/y'$ | Ordinata tangente: $Y = y - xy'$ |
| Abscisa normale: $X = x + yy'$ | Ordinata normale: $Y = y + x/y'$ |

### Eksistenčni izrek

$y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$: veljati mora $f \in C([x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b])$ in $f$ Lipschitzeva na 2. spremenljivko ($\exists N > 0 : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq N|y_1 - y_2|$, dovolj je, da je $\partial f/\partial y$ definirana in zvezna na kompaktu ali omejena). Potem obstaja natanko ena $C^1$ rešitev C. naloge definirana na $[x_0 - c, x_0 + c]$, kjer $c = \min\{a, b/M\}$ in $M = \max |f|$.

$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t$

Naj bo $f \in C^1([a, b] \times \mathbb{R})$, $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$. Če obstaja rešitev C. naloge na $[a, b]$, je enolična.
Za kakšne ocene: $y(x) = \int_a^x y'(x)\,\mathrm{d}x + y(a)$
Rešitev na robu maksimalnega intervala pobegne iz vsakega kompakta.

Triki: Če želimo pokazati, da ima Cauchyjeva naloga rešitev na $\mathbb{R}$, potem je dovolj, če je $y' = f(x,y), f \in C^1(\mathbb{R}^2)$, pokazati, da je $f$ omejena (ker potem tisti $c = \min\{a, b/M\}$ navzdol omejen), to pokažemo s kako radialno limito ipd. Če želimo enoličnost (in vemo, da nek $y$ reši, si zamislimo drugo Cauchyjevo nalogo z enako DE in drugim začetnim pogojem, ki jo bo $y$ tudi rešila pa še ena (morda konstantna) funkcija, tam pa imamo lokalno enoličnost...

**Integrali**

$\int \log(x)\,\mathrm{d}x = x\log(x) - x + C$
$\int x^m \log(x)\,\mathrm{d}x = x^{m+1}\left(\frac{\log x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}\right) + C$
$\int p(x)e^{kx}\,\mathrm{d}x = q(x)e^{kx} + C$, $\mathrm{st}(q) = \mathrm{st}(p)$
$\int e^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x = e^{ax}/(a^2+b^2)(a\sin(bx) - b\cos(bx)) + C$
$\int e^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x = e^{ax}/(a^2+b^2)(a\cos(bx) + b\sin(bx)) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{arsh}\,\frac{x}{a} + C = \log|x + \sqrt{x^2+1}| + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}$
$\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}}\log|2ax+b+2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}|, & a>0 \\ \frac{-1}{\sqrt{-a}}\arcsin((2ax+b)/\sqrt{D}), & a<0 \end{cases}$
$\int \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \log(\tan(x/2)) + C$
$\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = -\log(\cot(x/2)) + C$
$\int \frac{1}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x = \log(\sin(x)) + C$
$\int \frac{1}{\cot(x)}\,\mathrm{d}x = -\log(\cos(x)) + C$
$\int \frac{p(x)}{(x-a)^n(x^2+bx+c)^m}\,\mathrm{d}x = A\log|x-a| + B\log|x^2+bx+c| + C\arctan(\frac{2x+b}{\sqrt{-D}}) + \frac{\text{polinom st. ena manj kot spodaj}}{(x-a)^{n-1}(x^2+bx+c)^{m-1}} + D$
$\sin^2(x/2) = (1-\cos(x))/2$
$\cos^2(x/2) = (1+\cos(x))/2$
Substitucija: $t = \tan x, \sin^2 x = t^2/(1+t^2), \cos^2 x = 1/(1+t^2)$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/(1+t^2)$
Substitucija: $u = \tan(x/2), \sin x = 2u/(1+u^2), \cos x = (1-u^2)/(1+u^2)$, $\mathrm{d}x = 2du/(1+u^2)$