Trik za neskončne sisteme NDE za $x_n(t)$: rešimo ga s pomočjo rodovne funkcije $Q(y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t)y^n$. Velja: $yQ_y = \sum_{n=1}^{\infty} nx_n(t)y^n, Q_y - Q/y = \sum_{n=1}^{\infty} nx_{n+1}y^n$. Z upoštevanjem rekurzivne zveze dobimo PDE za Q, rešimo, razvijemo rešitev v vrsto po y.
Zanimivi vzorci: $(x^2)^{\cdot} = 2x\dot{x}$, $(xy)^{\cdot} = \dot{x}y + x\dot{y}$, $(\ln x)^{\cdot} = \frac{\dot{x}}{x}$.
Če $u = u(x,y)$ določa ploskev v prostoru, je enačba tangentne ravnine na to ploskev v točki $(x, y, u(x,y))$ enaka: $u_x(X - x) + u_y(Y - y) - (U - u) = 0$ (normala ravnine je $(A, B, C) = (u_x, u_y, -1)$). Razdalja od tangentne ravnine do točke (a, b, c) je:

$$\mathrm{d}(AX + BY + CU + D = 0, (a, b, c)) = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Eksistenčni izrek za nelinearne PDE 1. reda

Izrek: Naj bo $u = u(x,y)$ rešitev začetnega problema

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad u(\alpha(s), \beta(s)) = \gamma(s), \quad \text{za } s \in \mathcal{I}.$$

Če sta $p(s) = u_x(\alpha(s), \beta(s))$ in $q(s) = u_y(\alpha(s), \beta(s))$ edini funkciji, za kateri velja:

(1) $(T) = \det \begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \\ F_p & F_q \end{bmatrix}(s) \neq 0 \quad \forall s \in \mathcal{I}$,
(2) $F(\alpha(s), \beta(s), \gamma(s), p(s), q(s)) = 0 \quad \forall s \in \mathcal{I}$,
(3) $(p(s), q(s), -1) \cdot (\alpha'(s), \beta'(s), \gamma'(s)) = 0 \quad \forall s \in \mathcal{I}$.

Potem je rešitev u enolična.

Separacija spremenljivk

$L^2([-\pi, \pi]) = \{f : [-\pi, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \,\mathrm{d}x < \infty\}$ je vektorski prostor s skalarnim produktom $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.
Množica funkcij
$\{\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\sin x, \frac{1}{\pi}\cos x, \frac{1}{\pi}\sin 2x, \frac{1}{\pi}\cos 2x, \ldots\}$. je <u>kompleten</u> (vsako funkcijo se da na enoličen način razviti v tem sistemu), <u>ortonormiran</u> sistem za ta produkt.
Fourierjev razvoj: $f \in L^2([-\pi, \pi])$:
$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$,
$a_n = \langle f, \frac{1}{\pi}\cos nx\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}_0$,
$b_n = \langle f, \frac{1}{\pi}\sin nx\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}$.
Sinusna in kosinusna vrsta: $f \in L^2([0, \pi])$. Za tako funkcijo obstaja liha in soda razširitev na $[-\pi, \pi]$. Za $\tilde{f}^S$ so $b_n = 0$, za $\tilde{f}^L$ pa $a_n = 0$.
Posledica: Na $[0, \pi]$ za f obstajata dva razvoja: **sinusna vrsta**: $\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \sin nx$ in **kosinusna vrsta**: $\tilde{f}(x) = \frac{\tilde{a}_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cos nx$, kjer sta:
$\tilde{a}_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}$,
$\tilde{b}_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}_0$.
S substitucijo lahko razvoje prevedemo na poljuben interval $[-L, L]$ oz. $[0, L]$, $L > 0$. V tem primeru je $\{\frac{1}{2L}, \frac{1}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}, \frac{1}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}, .$
KONS.
Metoda separacije: Kdaj jo uporabimo: <u>Trivialen pogoj:</u> Imamo eno spremenljivko na omejenem območju in s homogenimi robnimi pogoji, npr.
$x \in [0, L]$: $\alpha u(0, t) + \beta u_x(0, t) = 0, \quad \gamma u(,t) + \delta u_x(L, t) = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.
<u>Netrivialen pogoj:</u> Diferencialni operator, ki določa PDE, zadošča Sturm-Liouvillovi teoriji, tj. množica lastnih funkcij, ki jih dobimo iz robnega problema tvori K.O.N.S.
<u>**Štirje koraki metode:**</u>
#1: Separacija: nastavek $u(x,t) = X(x)T(t)$. (Nastavek vstavi v enačbo in loči spremenljivke, dobljeno enačbo pa enači z $\mu \in \mathbb{R}$.)
#2: Določanje lastnih funkcij $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz robnega problema za NDE. (Reši NDE za X, homogeni robni pogoji ti dajo začetne pogoje za NDE. Obravnavati moraš možnosti $\mu > 0, \mu = 0, \mu < 0$. Če je v kakšnem primeru $X \equiv 0$, lastnih funkcij v tem primeru ni. Pri izbire množice lastnih funkcij, lahko splošno konstanto za vsak člen BŠS postaviš na 1.)
#3: Iskanje pripadajočih $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. (Z μ, ki ga dobiš v #2 in določa družino lastnih funkcij, reši še NDE za T. Splošno konstanto lahko tu pustiš, lahko si misliš, za je v njej spravljena konstanta iz množice lastnih funkcij za X.)
#4: Splošna rešitev $u = \sum_{n=1}^{\infty} X_n T_n$. (Rešitev naj bi bila odvisna od števno mnogo konstant, ki jih določiš iz nehomogenega robnega pogoja. Dobro je opaziti morebitne sinusne/kosinusne vrste, ki jih dobiš z robnim pogojem, in upoštevati zvezo s koeficienti iz razvoja v sinusno/kosinusnov vrsto, torej $C_n = a_n$ ali b_n.)
Če za nobeno od spremenljivk nimamo homogenega robnega pogoja, razbijemo problem na dva dela, npr: $\triangle u = 0$ razbijemo na $u = v + w$, $\triangle v = 0$ in $\triangle w = 0$, pri čemer v-ju in w-ju damo vsakemu en homogen robni pogoj in en pogoj, ki je od u-ja.
Reševanje nehomogene enačbe s separacijo:

Naredimo #1 in #2 za homogen problem (pri drugem koraku preveri, da lastne funkcije tvorijo K.O.S., tj. $\langle X_n, X_m\rangle = c_n\delta_{n,m} = \begin{cases} c_n; & n=m \\ 0; & n\neq m\end{cases}$, korak #3 pa naredimo tako, da rešitev iz #2 vstavimo v $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$. Tu T_n ne poznamo in računamo za splošnega. Vstavimo v nehomogeno enačbo in primerjamo koeficiente s tistimi iz razvoja nehomogenega dela po $\{X_n\}$. Partikularno rešitev dobimo z nastavkom. Ko razvijamo nehomogeni del $f(x)$ po $\{X_n\}$, si napišemo $\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f, X_n\rangle}{\langle X_n, X_n\rangle} X_n$ in izračunamo koeficiente iz razvoja.

Laplace v polarnih koordinatah: $\triangle u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}$

Pri polarnih koordinatah imamo namesto homogenega robnega pogoja lahko tudi naravni pogoj: 2π-periodičnost: $u(r,0) = u(r,2\pi), u_\varphi(r,0) = u_\varphi(r,2\pi)$.

Sistem $M\vec{x} = 0$ ima netrivialne rešitve $\iff \det M = 0$.

Eksistenca:

$u_{tt} - c^2u_{xx} = 0, c \in \mathbb{R}_+$ ima pri pogojih $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$ in $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$ edino rešitev $u \equiv 0$. Za poljubne $a,b,f,g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ima $u_{tt} - c^2u_{xx} = 0, c \in \mathbb{R}_+$ enolično rešitev tudi pri pogojih $u_x(0,t) = a(t), u_x(L,t) = b(t), u(x,0) = f(x)$ in $u_t(x,0) = g(x)$

Sturm-Liouvilleova teorija

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je sebi adjungiran, če $A^T = A$, lastni vektorji tvorijo ortogonalno bazo. Velja $\langle Av, w\rangle = (Av)^Tw = v^TA^Tw = v^T(Aw) = \langle v, Aw\rangle$.

SL**-operator**: $L : \mathcal{C}^2([a,b]) \longrightarrow \mathcal{C}([a,b])$, $L(y) = \frac{1}{r(x)}[(p(x)y')' + q(x)y]$, $p, r > 0, x \in [a,b]$ + mešani ali periodični robni pogoj. Gledamo skrčitev operatorja na $V = \mathcal{C}^2(]a,b]) \cap \{\text{robni pogoji}\}$, $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)r(x)dx$, kjer je r utež.

L je sebi adjungiran za robne pogoje:

(1) $y(a) = y(b) = 0$,
(2) $y'(a) = y'(b) = 0$,
(3) $y(a) = y(b), p(a)y'(a) = p(b)y'(b)$.

Izrek (o kompletnosti lastnih funkcij)
$p \in \mathcal{C}^1([a,b]); r, q \in \mathcal{C}([a,b]); p, r > 0$. Potem ima lastni problem $L(y) = \mu y$ pri robnih pogojih
a) $\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0$ in $\gamma y(b) + \delta y'(b) = 0$; $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \gamma^2 + \delta^2 \neq 0$
b) $y(a) = y(b)$ in $\alpha y'(a) = \beta y'(b)$; $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

števno mnogo rešitev z lastnostmi:

i) $\mu_1 < \mu_2 < \ldots$, $\lim_{n\to\infty} \mu_n = \infty$
ii) $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tvorijo <u>kompleten</u> ortonormiran sistem v $L^2([a,b]) \cap \{\text{robni pogoji}\}$ in za $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)r(x)dx$.

Uporabni integrali: $\int_a^b \sin(\frac{n\pi x}{b-a})^2\,\mathrm{d}x = \int_a^b \cos(\frac{n\pi x}{b-a})^2\,\mathrm{d}x = \frac{(b-a)\left(\sin\left(\frac{2\pi an}{b-a}\right) - \sin\left(\frac{2\pi bn}{b-a}\right) + 2\pi n\right)}{4\pi n}, n \in \mathbb{C}$

$(\int_a^b x^i \sin(kx)\,\mathrm{d}x)_{1,2} = (\frac{-\sin(ak)+ak\cos(ak)+\sin(bk)-bk\cos(bk)}{k^2}, \frac{(a^2k^2-2)\cos(ak)-2ak\sin(ak)+(2-b^2k^2)\cos(bk)+2bk\sin(bk)}{k^3})$

$(\int_a^b x^i \cos(kx)\,\mathrm{d}x)_{1,2} = (\frac{-ak\sin(ak)-\cos(ak)+bk\sin(bk)+\cos(bk)}{k^2}, \frac{(2-a^2k^2)\sin(ak)-2ak\cos(ak)+(b^2k^2-2)\sin(bk)+2bk\cos(bk)}{k^3})$

$\int_a^b (x-a)(b-x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{k(a-b)(\sin(ak)+\sin(bk))+2\cos(ak)-2\cos(bk)}{k^3}$

$\int_a^b (x-a)(b-x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{k(a-b)(\cos(ak)+\cos(bk))-2\sin(ak)+2\sin(bk)}{k^3}$

$\int_a^b \sin(mx)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{-k\sin(ak)\sin(am)-m\cos(ak)\cos(am)+k\sin(bk)\sin(bm)+m\cos(bk)\cos(bm)}{k^2-m^2}$

$\int_a^b \sin(mx)\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{-m\sin(ak)\cos(am)+k\cos(ak)\sin(am)+m\sin(bk)\cos(bm)-k\cos(bk)\sin(bm)}{k^2-m^2}$

$\int_a^b \cos(mx)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{-k\sin(ak)\cos(am)+m\cos(ak)\sin(am)+k\sin(bk)\cos(bm)-m\cos(bk)\sin(bm)}{k^2-m^2}$, povsod so $m, n, k \in \mathbb{C}$

Polarne koordinate: $u_x = \cos(\varphi)u_r - \frac{\sin(\varphi)}{r}u_\varphi, u_y = \sin(\varphi)u_r + \frac{\cos(\varphi)}{r}u_\varphi$,

$u_{xx} = \cos^2(\varphi)u_{rr} - \frac{\sin(2\varphi)}{r}u_{r\varphi} + \frac{\sin^2(\varphi)}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{\sin^2(\varphi)}{r}u_r + \frac{\sin(2\varphi)}{r^2}u_\varphi$,

$u_{xy} = \frac{1}{2}\sin(2\varphi)u_{rr} + \frac{\cos(2\varphi)}{r}u_{r\varphi} - \frac{\sin(2\varphi)}{2r^2}u_{\varphi\varphi} - \frac{\sin(2\varphi)}{2r}u_r - \frac{\cos(2\varphi)}{r^2}u_\varphi$,

$u_{yy} = \sin^2(\varphi)u_{rr} + \frac{\sin(2\varphi)}{r}u_{r\varphi} + \frac{\cos^2(\varphi)}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{\cos^2(\varphi)}{r}u_r - \frac{\sin(2\varphi)}{r^2}u_\varphi, \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}$

NDE višjih redov

Ne nastopa y: uvedemo $z = y'$.

Obe strani sta odvoda nečesa: integriramo in dodamo konstanto.

Odvodi: $y'/y = (\log(y))', xy' + y = (xy)', \frac{y''y - y'^2}{y^2} = (\frac{y'}{y})', \frac{y'x - y}{x^2} = (\frac{y}{x})'$.

Ne nastopa x: uvedemo $z(y) = y'$, y neodvisna spr. $y'' = \dot{z}z$, $y''' = \ddot{z}z^2 + \dot{z}^2z$.

Homogena: $F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}) = t^kF(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$. Vpeljemo $z(x) = y'/y$. $y''/y = z' + z^2$.

Z utežjo: $F(kx, k^my, k^{m-1}y', \ldots, k^{m-n}y^{(n)}) = k^pF(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$. Uvedemo: $x = e^t, y = u(t)e^{mt}$.

Integrali in formule

$\int \ln x \,\mathrm{d}x = x\ln x - x + C$

$\int x^m \log(x)\,\mathrm{d}x = x^{m+1}\left(\frac{\log x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}\right) + C$

$\int p(x)e^{kx}\,\mathrm{d}x = q(x)e^{kx} + C,\ \mathrm{st}(q) = \mathrm{st}(p)$

$\int e^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin(bx) - b\cos(bx)) + C$

$\int e^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx) + b\sin(bx)) + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{arsh}\frac{x}{a} + C = \log|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$

$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$

$\sin^2(x/2) = (1-\cos(x))/2$

$\int \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\tan(x/2) + C$

$\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = -\log(\cot(x/2)) + C$

$\int \frac{1}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x = \log(\sin(x)) + C$

$\int \tan(x)\,\mathrm{d}x = -\log(\cos(x)) + C$

$\int x/(1+x)\,\mathrm{d}x = x - \log(x+1) + C$

$\int x/(1+x)\,\mathrm{d}x = x - \log(x+1) + C$

$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C$

$\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x + \sin x\cos x) + C$

$\cos^2(x/2) = (1+\cos(x))/2$

Faktorizacija:

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

Antifaktorizacija:

$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$

$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$

$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$

avtor: Klemen Sajovec, malo sprememb: Jure Slak