

## Premočrtno gibanje

Osnovni vektorji:  $\vec{r} = r\vec{e}_r$ ,  $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta$ ,  $\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta})\vec{e}_\vartheta$   
 $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta$  in  $\dot{\vec{e}}_\vartheta = -\dot{\vartheta}\vec{e}_r$

Newtonov zakon na krivulji:  $m(\ddot{s}\vec{e}_T + \kappa\dot{s}^2\vec{e}_N) = \vec{F} + \vec{S}$

Sila je potencialna, če je  $\vec{F} = -\text{grad } U = -\frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r$ .

Energijska enačba:  $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E_0$

Ravnovesna lega:  $U'(x) = 0$ , stabilna če  $U''(x) > 0$ .

## Relativno gibanje

Količine s' so zapisane v AKS.

$$P' = P'_0 + Q(t)(P - P_0)$$

$$W = Q^T\dot{Q}, \quad W\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{a}$$

$$\vec{\zeta} = P - P_0, \quad \vec{v}_{rel} = \dot{\vec{\zeta}}, \quad \vec{a}_{rel} = \ddot{\vec{\zeta}}$$

Newtonove enačbe v RKS:

$$m\ddot{\vec{\zeta}} = \underbrace{\vec{F}}_{(1)} - \underbrace{m\vec{a}_0}_{(2)} - \underbrace{m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta})}_{(3)} - \underbrace{m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\zeta} - 2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{\zeta}}}_{(4)}$$

(1) inercialna sila,  $a_0$  je pospešek RKS glede na AKS, določimo ga kot  $\vec{a}_0 = \ddot{\vec{r}}$ , kjer  $\vec{r}$  zapisan v AKS

(2) centrifugalna sila,

(3) inercialna sila zaradi kotnega pospeška,

(4) Coriolisova sila.

Sila vezi (če ni trenja):  $\vec{S} \cdot \vec{v}_{rel} = 0$ .

Pospešek v AKS:  $\vec{a}' = \vec{a}'_0 + \dot{\vec{\omega}}' \times \vec{\zeta}' + \vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{\zeta}') + 2\vec{\omega}' \times \dot{\vec{\zeta}}' + \vec{a}'_{rel}$

## Sistem materialnih točk in togo telo

Masno središče za sistem točk  $P_i$  z masami  $m_i$  in homogeno togo telo:

$$P_* = O + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n (P_i - O)m_i \quad P_* = \frac{1}{V} \int_B (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})dV$$

Aksiomi za togo telo:

$$m\ddot{\vec{P}}_*' = \vec{F}'$$

$$\frac{d\vec{L}'(O')}{dt} = \vec{N}'(O')$$

$$\vec{N}'(O') = \vec{N}'(P'_0) + (P'_0 - O') \times \vec{F}'$$

Za vrtilno količino velja:  $\vec{L}' = J\vec{\omega}$

Za kinetično energijo velja:  $T = T_* + T_r$ , kjer je  $T_* = \frac{1}{2}m\vec{v}_*^2$  in  $T_r = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot J\vec{\omega}$  (pri vrtenju okrog izhodišča) in

$$T = \frac{1}{2}m|\vec{v}_*|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot J(P_*)\vec{\omega}$$

Velja energijski zakon:  $T + U = E_0$ .

Navor:  $\vec{N} = \int \vec{r} \times d\vec{F}$  in npr.  $d\vec{F} = \rho_F dS$

Velja (za togo telo):  $J\dot{\vec{\omega}} = \vec{N}$

## Vztrajnostni tenzor

$$\text{Splošna formula: } J(P_0) = \int_B (|\vec{\zeta}|^2 I - \vec{\zeta} \otimes \vec{\zeta}) dm$$

Normala ravnine zrcalne simetrije telesa je glavna smer vztrajnostnega tenzorja  $J(P_0)$ , kjer je  $P_0$  na ravnini simetrije. Presek dveh ravnin zrcalne simetrije je glavna smer vztrajnostnega tenzorja.

V telesni bazi je vztrajnostni tenzor enak:

$$J = \int \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} dm$$

Znani vztrajnostni tenzorji v telesni bazi:

krogla:  $J = \frac{2}{5}mr^2I$ , sfera:  $J = \frac{2}{3}mr^2I$ , palica okrog sredine:  $J = \frac{1}{12}ml^2$ , okrog krajišča:  $J = \frac{1}{3}ml^2$ , disk okrog središča:  $J = \frac{1}{2}mr^2$ , okrog premera:  $J = \frac{1}{4}mr^2$ , obroč:  $J = mr^2$ ,

$$\text{elipsoid: } J = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}m(b^2 + c^2) & & \\ & \frac{1}{5}m(a^2 + c^2) & \\ & & \frac{1}{5}m(a^2 + b^2) \end{bmatrix}$$

stožec ( $\nabla$ ) z radijem  $r$  in višino  $h$ : 
$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5}mh^2 + \frac{3}{20}mr^2 & & \\ & \frac{3}{5}mh^2 + \frac{3}{20}mr^2 & \\ & & \frac{3}{10}mr^2 \end{bmatrix}$$

pokončen valj:  $J = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}m(3r^2 + h^2) & & \\ & \frac{1}{12}m(3r^2 + h^2) & \\ & & \frac{1}{2}mr^2 \end{bmatrix}$

kvader:  $J = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}m(h^2 + d^2) & & \\ & \frac{1}{12}m(w^2 + d^2) & \\ & & \frac{1}{12}m(w^2 + h^2) \end{bmatrix}$

V prostorsko bazo ga pretvorimo:  $J' = Q^T J Q$ .

Steinerjev izrek:  $J(P_0) = J(P_*) + m|P_* - P_0|^2 I - m(P_* - P_0) \otimes (P_* - P_0)$

Če zarotiramo koordinate (da dobimo vztrajnostne momente okoli drugih osi): nove bazne vektorje izrazimo s starimi kot  $\vec{e}_1' = \alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{12}\vec{e}_2 + \alpha_{13}\vec{e}_3$  in ostale podobno. Potem so elementi nove matrike vztrajnostnega tenzorja  $J'$  enaki:

$$J'_{ij} = \sum_k \sum_l \alpha_{ik} \alpha_{jl} J_{kl}.$$

## Rotacije

Rotacije okrog spremenljive osi:  $R(\vec{e}(t), \varphi(t))\vec{r} = \cos \varphi \vec{r} + (\vec{e}\vec{r})(1 - \cos \varphi)\vec{e} + \sin \varphi(\vec{e} \times \vec{r})$

Rotacijska matrika za rotacijo:

$$R(\vec{i}, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad R(\vec{j}, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad R(\vec{k}, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Če je dana rotacijska matrika, potem velja  $1 + 2 \cos \varphi = \text{sl}(Q)$ . Vektor rotacije je lastni vektor, smer pa določimo tako, da en vektor preslikamo.

## Eulerjeve dinamične enačbe

Vektorska oblika:  $J(P_*)\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times J(P_*)\vec{\omega} = \vec{N}(P_*)$

$$J_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (J_2 - J_3) = N_1$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 - \omega_3 \omega_1 (J_3 - J_1) = N_2$$

$$J_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 (J_1 - J_2) = N_3$$

Oblika za vrtenje okoli stalne osi,  $\vec{\omega} = \omega \vec{k} = \dot{\varphi} \vec{k}$ :

$$J_{13} \ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 J_{23} = N_1$$

$$J_{23} \ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 J_{13} = N_2$$

$$J_{33} \ddot{\varphi} = N_3$$

## Kotaljenje

Hitrost dotikališča = hitrost težišča + obodna hitrost, tj.  $\vec{v}_D = \vec{v}_* + \vec{\omega} \times \vec{r}$ .

Pogoj kotaljenja:  $\vec{v}_D = \vec{0}$

Sila trenja:  $\vec{F}_{tr} = -k \vec{F}_\perp \frac{\vec{v}_D}{|\vec{v}_D|}$

Škripec: pogoj, da vrv drsi na kolutu:  $F_2 = F_1 e^{k\vartheta}$ .