Linearni sistemi

Definicija: Naj bo $\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t)$ sistem in $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n} \forall t$. Rešitev enačbe $\dot{X} = AX$, ki je obrnljiva (stolpci so neodvisni), se imenuje **fundamentalna rešitev**. Dve fundamentalni rešitvi se razlikujeta za obrnljivo matriko. **Splošna rešitev** $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ je $X\vec{c}$, kjer je $\vec{c}$ konstantni vektor. X je fundamentalna rešitev tam, kjer je $\det X \neq 0$.

$X = [x_1, x_2, \dots x_n] \qquad X\vec{c} = c_1\vec{x_1} + c_2\vec{x_2} + \cdots c_n\vec{x_n}$

Naj bo A matrika konstant. $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ ima splošno rešitev $\vec{x} = Pe^{Jt}\vec{c}$, kjer je $A = PJP^{-1}$ jordanska kanonična forma.

Postopek:

(1) Izračunaj lastne vrednosti matrike A.
- Če so vse lastne vrednosti različne, izračunaj lastne vektorje za vse lastne vrednosti in določi J in P (pazi, da vrstni red lastnih vrednosti v J sovpada z vrstnim redom lastnih vektorjev v P)
- Če je lastna vrednost λ večkratna in zanjo obstaja le en lastni vektor, izračunaj korenski vektor in ga preslikaj z $A - \lambda I$

(2) Zapiši rešitev $\vec{x} = Pe^{Jt}\vec{c} = c_1e^{\lambda_1 t}v_1 + c_2e^{\lambda_2 t}v_2 + \cdots c_n e^{\lambda_n t}v_n$, kjer $P = [v_1, v_2, \dots, v_n]$. Iz tega dobiš $X = [\vec{x_1}, \vec{x_2}, \dots, \vec{x_n}]$, kjer $x_i = e^{\lambda_i t}v_i$.

Opomba: Pri kompleksnih lastnih vrednostih in vektorjih z uporabo $e^{\lambda + i\mu} = e^{\lambda}(\cos\mu + i\sin\mu)$ loči realni in imaginarni del (hočemo realne lastne vektorje, konstante pred njimi pa so lahko kompleksne). Če λ in $\overline{\lambda}$ lastni vrednosti, sta lastna vektorja v in $\overline{v}$.

Ko rešuješ sistem
$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a(t) & b(t)\\ c(t) & d(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix},$$
iz prve enačbe izrazi y, enačbo odvajaj in vstavi dobljeni $\dot{y}$ v drugo. Dobiš diferencialno enačbo za x, iz katere izračunaš x in y. Splošno rešitev sistema X dobiš tako, da razpišeš x in y po bazi konstant C_1, C_2 (prvi stolpec: $C_1 = 1, C_2 = 0$ in drugi stolpec: $C_1 = 0, C_2 = 1$).

Liouvilleov izrek: Naj bo $\dot{\vec{z}} = A\vec{z}$ in $A : [a, b] \to \mathbb{R}^{n\times n}$ zvezna za vsak t. Potem obstaja fundamentalna rešitev sistema, ki je obrnljiva na $[a, b]$ $X(t)$ taka, da velja (to uporabiš, če imaš sistem in poznaš eno rešitev!):
$$\det(X(t)) = \det(X(t_0))e^{\int_{t_0}^{t} \mathrm{sl}A(\xi)d\xi}.$$

Nehomogena: $\vec{x} = X\vec{c} = X\int X^{-1}\vec{f}dt$

Linearne DE višjega reda

$a_n(x)y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$

Naj bo y rešitev enačbe. Potem:
$$\vec{z} = \begin{bmatrix} y\\ y'\\ y''\\ \vdots\\ y^{(n-1)}\end{bmatrix}, \quad \vec{z}' = \begin{bmatrix} y'\\ y''\\ y'''\\ \vdots\\ y^{(n)}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\\ -a_0/a_n & -a_1/a_n & -a_2/a_n & \cdots & -a_{n-1}/a_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix} y\\ y'\\ \vdots\\ y^{(n-2)}\\ y^{(n-1)}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0\\ 0\\ 0\\ \vdots\\ f/a_n\end{bmatrix}$$

$\vec{x} = X\vec{c} = X\int X^{-1}\vec{f}dt$, rabimo samo prvo vrstico (y).

Linearna NDE s konstantnimi koeficienti: $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_0y = b(t)$, $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Homogen del: substitucija $y = e^{\lambda x}$. Dobimo $\lambda_1, \dots \lambda_k$ paroma različne.

Rešitev: $y = y_1 + \cdots + y_k$, kjer y_j ustreza λ_j in $y_j = c_1e^{\lambda_j x} + c_2xe^{\lambda_j x} + \cdots + c_{k_j}x^{k_j-1}e^{\lambda_j x}$, kjer je k_j večkratnost λ_j.

Partikularni del: za b oblike $e^{\mu x}q(x)$, $\mu \in \mathbb{C}$ in $q(x)$ polinom stopnje m. $y_p = p(x)e^{\mu x}x^k$, kjer k večkratnost μ kot λ in p stopnje m.

Par $x^ke^{(a+bi)x}, x^ke^{(a-bi)x}$ gre v $x^ke^{ax}\cos(bx), x^ke^{ax}\sin(bx)$.

Za b oblike $e^{ax}(p_{m1}(x)\cos(bx) + p_{m2}\sin(bx))$, kjer $a + bi$ k-kratna ničla in $m = \max m1, m2$ stopnja pol.: $y_p = x^ke^{ax}(q_m(x)\cos(bx) + r_m\sin(bx))$.

Cauchy-Eulerjeva enačba: $x^ny^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1xy' + a_0y = b$. Uvedemo novo spremenljivko $x = e^t$, enačba se prevede na enačbo s konstantnimi koeficienti. V praksi porabimo nastavek $y = x^{\lambda}$.

Rešitev: $y = y_1 + \cdots + y_k$, kjer y_j ustreza λ_j in $y_j = c_1x^{\lambda_j} + c_2\log(x)x^{\lambda_j} + \cdots + c_{k_j}\log^{k_j-1}(x)x^{\lambda_j}$, kjer je k_j večkratnost λ_j.

Partikularni del: za b oblike $p(\ln t)t^{\mu}$. Nastavek $y_p = q(\ln t)t^{\mu}\ln^k t$, kjer $\mathrm{st}(q) = \mathrm{st}(p)$ in k večkratnost μ med λ_i, ki rešijo "karakteristični polinom".

Par $Ax^i + Bx^{-i} = Ae^{i\log x} + Be^{-i\log x}$ gre v $(A + B)\cos(\log x) + (iA - iB)\sin(\log x)$.

Par $(\log x)^kx^{a+bi}, (\log x)^kx^{a-bi}$ gre v $(\log x)^kx^a\cos(b\log x), (\log x)^kx^a\sin(b\log x)$.

Variacijski račun

Definicija: Naj bo $A : X \longrightarrow Y$ linearna preslikava med normiranima vektorskima prostoroma. A je omejena, če obstaja $M \geq 0$, da velja $\|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X$. Če je A omejena, potem $\|A\| := \sup_{x\neq 0}\frac{\|Ax\|}{\|x\|} := \sup_{\|x\|\leq 1}\|Ax\| := \sup_{\|x\|=1}\|Ax\|$.

Trditev: A je omejena $\Longleftrightarrow$ A zvezna. $\|Ax\|_Y \leq \|A\|\|x\|_X$ ($\|A\|$ je norma v prostoru operatorjev)

Za Banachova prostora $(C[a, b], \|.\|_\infty)$ in $(C^1[a, b], \|.\|_1)$ je $\|f\|_1 := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$

Definicija: Naj bosta X in Y Banachova, $\mathcal{U}^{odp} \subseteq X$ in $F : \mathcal{U} \longrightarrow Y$. F je:

a) **krepko (Fréchetjevo) odvedljiva** v točki x, če obstaja $(DF)(x)$ omejen linearni operator iz X v Y, da velja:
$$\frac{\|F(x + h) - F(x) - (DF)(x)(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

b) **šibko (Gâuteauxjevo) odvedljiva**, če obstaja $g_x(h) := \lim_{t\to 0}\frac{F(x+th)-F(x)}{t} = (\frac{d}{dt}F(x + th))|_{t=0}$

Izrek: Če je F krepko odvedljiva $\Longrightarrow$ F šibko odvedljiva in odvoda sta enaka.

Opomba: Izračunamo šibkega, dobimo kandidata za krepkega. Po definiciji izračunamo limito krepkega. Dokažemo omejenost g_x.

Uporabno: $|\int(f + f')dx| \leq \int(|f| + |f'|)dx \leq \int(\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty)dx = \int\|f\|_1dx$ in I in $f(I)$, kjer f strogo naraščajoča, imata pri istih robnih pogojih iste ekstremale.

Trditev: Naj bo X Banachov prostor in $F, G : X \longrightarrow \mathbb{R}$ krepko odvedljivi v $x_0 \in X$. Potem je $FG : X \longrightarrow \mathbb{R}$ krepko odvedljiva v x_0 in velja $D(FG)(x_0) = F(x_0)DG(x_0) + G(x_0)DF(x_0)$ in (druge predpostavke) $(D(G \circ F))(h) = DG(F(h)) \cdot DF(h)$.

Razmadzejev izrek: Naj bosta M in N zvezni funkciji na $[a, b]$. Denimo, da za vsako testno funkcijo $\varphi \in \mathcal{D}([a, b])$ velja: $\int_a^b(M\varphi + N\varphi')dx = 0$. Tedaj je N odvedljiva in velja $N' = M$.

Euler-Lagrangeeva enačba: $L_y - \frac{d}{dx}L_{y'} = 0$ + robni pogoji $L_{y'}|_a^b = 0$

Naj velja $L_y = \frac{d}{dx}L_{y'}$ in $L_{y'}h|_a^b = 0$ za vse dopustne variacije.
- če poznamo $y(a), y(b) \Longrightarrow h(a) = h(b) = 0$ za vse dopustne variacije.
- če poznamo $y(a) \Longrightarrow h(a) = 0$ za vse dopustne variacije ($L_{y'}(b) = 0$).
- če poznamo $y(b) \Longrightarrow h(b) = 0$ za vse dopustne variacije ($L_{y'}(a) = 0$).
- če $y(a), y(b)$ ne poznamo $\Longrightarrow L_{y'}(a) = 0$ in $L_{y'}(b) = 0$ (?????)
- če $y(a) = y(b) \Longrightarrow L_{y'}(a) = L_{y'}(b)$

Klasični problem: $I[y] = \int_a^bL(x, y, y')dx$.

(1) Če $L = L(x, y') \Longrightarrow L_{y'} = C$ (Iz te enačbe izrazi $y' = f(x)$, z integracijo izračunaj $y = \int f(c)$ in vstavi robne pogoje, da določiš konstante.)

(2) $L = L(y, y') \Longrightarrow L - y'L_{y'} = C$ (ločljive spremenljivke, verjetno potrebna obravnava glede na vrednost $C = 0, > 0, < 0$)

Izoperimetrični polinom: $A : I[y] = \int_a^b L(x, y, y')dx +$ robni pogoji + dodatni pogoji: $\int_a^b G_1(x, y, y')dx = A_1, \ldots \int_a^b G_n(x, y, y')dx = A_n \Longrightarrow$ obstajajo $\lambda_1, \ldots \lambda_n : \int_a^b (L - \lambda_1 G_1 - \cdots \lambda_n G_n)dx = \tilde{I}[y]$. Ekstremali za A so ekstremali za $\tilde{I}$ z nekaterimi robnimi pogoji. (Da dobiš λ izračunaj najprej $y(x, \lambda)$, nato pa uporabi dodatni pogoj. Dodatno: Če $y(a)$ ni podan: $\tilde{L}_{y'}(a) = 0$)

$I[y] = \int_a^b L(x, y, y', \ldots, y^{(n)})dx \Longrightarrow L_y - \frac{d}{dx}L_{y'} - \cdots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} L_{y^{(n)}} = 0$ in $(DI)[y](h) = \int_a^b (L_y h + L_{y'}h' + \cdots + L_{y^{(n)}}h^{(n)})dx = 0$ + dodatni robni pogoji, ki jih dobiš s per partesom (npr. za $n = 2$ pride $((L_{y'} - \frac{d}{dx}L_{y''})h + L_{y''}h')|_a^b = 0$)

$I[y_1, y_2, \ldots, y_n] = \int_a^b L(x, y_1, \ldots y_n, y_1', \ldots y_n')dx$ in podani $y_1(a), \ldots y_n(a), y_1(b), \ldots y_n(b)$. Potem za $i = 1, \ldots, n$ velja: $L_{y_i} = \frac{d}{dx}L_{y_i'}$ + per partes za ostale robne pogoje.

Neklasična naloga: kaj so dopustne variacije + $(DI)[y](h) = 0(\star)$ za vse dop. var. + $(\star)$ obstreljuješ s testnimi funk. + Razmadze, da dobiš DE za ekstremale + uporabiš vezi in $(\star)$ obstreljuješ z izbranimi dop. var.

Nelinearni sistemi: Če $\dot{x} = f(x, y), \dot{y} = g(x, y) \Longrightarrow y'(x) = \frac{g(x,y)}{f(x,y)}$, $(\frac{y}{x})^{\cdot} = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2}$, $(xy)^{\cdot} = \dot{x}y + x\dot{y}$

NDE 1. reda

Ločljive spremeljivke: $y' = f(x)g(y)$
Linearna: $y' = a(x)y + b(x)$, rešujemo $y_s = y_h + y_p$
Trik: $y(x) \leftrightarrow x(y) \implies y' = 1/\dot{x}$
Homogena: $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$, v posebnem $f(x, y) = f(1, x/y) \implies z = y/x, y' = z + xz' \implies$ linearna
Bernoullijeva: $y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$, rešujemo $z = y^{1-\alpha}$, $\implies \frac{1}{1-\alpha}z' = a(x)z + b(x)$
Ricattijeva: $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$, ena rešitev y_1. Nova spr. $y = y_1 + \frac{1}{u}$
$y' = y_1' - \frac{u'}{u^2}$ po pretvorbi $u' = -u(2ay_1 + b) - a$
Integrirajoči množitelj: $Pdx + Qdy = 0$, iščemo μ: $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$. Rešitev $u(x, y) = \int P dx = \int Q dy = 0$
$\mu = \mu(x) \iff \frac{\mu_x}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{Q}$ odvisno samo od x. $\mu = \mu(y) \iff \frac{\mu_y}{\mu} = \frac{Q_x - P_y}{P}$ odvisno samo od y.
Če $\mu = f(x, y)$, pazi, da odvajaš kot kompozitum.
Parametrično: $x = X(u, v), y = Y(u, v), y' = Z(u, v)$. Rešujemo: $dY = Z\,dX$
Triki: $\cos^2 + \sin^2 = 1, ch^2 - sh^2 = 1, y' = tx$.
Clairautova: $y = xy' + b(y')$. Rešitev: $y = Cx + b(C)$. Tudi singularna rešitev (ogrinjača).
Lagrangeeva: $y = a(y')x + b(y')$. Rešujemo parametrično: $X = u, Z = y' = v, Y = a(v)u + b(v) \implies$ linearna.

Če je enačba podana eksplicitno in je desna stran polinom lihe stopnje v y s koeficienti funkcijami v x uvedeš $u = y^2$.

NDE višjih redov

Ne nastopa y: uvedemo $z = y'$.
Obe strani sta odvoda nečesa: integriramo in dodamo konstanto.
Odvodi: $y'/y = (\log(y))', xy' + y = (xy)'$, $\frac{y''y - y'^2}{y^2} = (\frac{y'}{y})'$, $\frac{y'x - y}{x^2} = (\frac{y}{x})'$.
Ne nastopa x: uvedemo $z(y) = y'$, y neodvisna spr. $y'' = \dot{z}z$, $y''' = \ddot{z}z^2 + \dot{z}^2 z$.
Homogena: $F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$. Vpeljemo $z(x) = y'/y$. $y''/y = z' + z^2$.
Z utežjo: $F(kx, k^m y, k^{m-1}y', \ldots, k^{m-n}y^{(n)}) = k^p F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$. Uvedemo: $x = e^t, y = u(t)e^{mt}$.

Integrali in formule

$\int \ln x \,\mathrm{d}x = x \ln x - x + C$
$\int x^m \log(x)\,\mathrm{d}x = x^{m+1}\left(\frac{\log x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}\right) + C$
$\int p(x)e^{kx}\,\mathrm{d}x = q(x)e^{kx} + C$, $\mathrm{st}(q) = \mathrm{st}(p)$
$\int e^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin(bx) - b\cos(bx)) + C$
$\int e^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx) + b\sin(bx)) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{arsh}\,\frac{x}{a} + C = \log|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$
$\sin^2(x/2) = (1 - \cos(x))/2$
Ločna dolžina: $\int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x$

$\int \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \ln\tan(x/2) + C$
$\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = -\log(\cot(x/2)) + C$
$\int \frac{1}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x = \log(\sin(x)) + C$
$\int \tan(x)\,\mathrm{d}x = -\log(\cos(x)) + C$
$\int x/(1+x)\,\mathrm{d}x = x - \log(x+1) + C$
$\int x/(1+x)\,\mathrm{d}x = x - \log(x+1) + C$
$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C$
$\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x + \sin x\cos x) + C$
$\cos^2(x/2) = (1 + \cos(x))/2$
$d(T_0, p) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$t \mapsto (\alpha(t), \beta(t), \gamma(t))$:$\int_{t_o}^{t_1}\sqrt{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2}dt$ (dol. krivulje)
$G(y) = \int_0^1 (y^2 + y'^2)dx \Longrightarrow DG(y)(h) = \int_0^1 (2yh + 2y'h')dx$
$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{\mathbf{2i}}$
$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
$\tan^2 x = \tan' x - 1$

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}}\log|2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}| + C, & a > 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{-a}}\arcsin((2ax + b)/\sqrt{D}) + C, & a < 0 \end{cases}$$

$\int \frac{p(x)}{(x-a)^n(x^2+bx+c)^m}\,\mathrm{d}x = A\log|x - a| + B\log|x^2 + bx + c| + C\arctan(\frac{2x+b}{\sqrt{-D}}) + \frac{\text{polinom st. ena manj kot spodaj}}{(x-a)^{n-1}(x^2+bx+c)^{m-1}}$

$$\frac{d}{dx}\int_{a(t)}^{b(t)} f(t)dt = f(b(x)b'(x) - f(a(x))a'(x))$$

Substitucija: $t = \tan x, \sin^2 x = t^2/(1 + t^2), \cos^2 x = 1/(1 + t^2)$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/(1 + t^2)$
Substitucija: $u = \tan(x/2), \sin x = 2u/(1 + u^2), \cos x = (1 - u^2)/(1 + u^2)$, $\mathrm{d}x = 2du/(1 + u^2)$

Abscisa tangente: $X = x - y/y'$ Ordinata tangente: $Y = y - xy'$ Tangenta v točki (x, y): $Y - y = y'(X - x)$
Abscisa normale: $X = x + yy'$ Ordinata normale: $Y = y + x/y'$ Normala v točki (x, y): $Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$

dolžina loka	ploščina izseka	prostornina vrtenine (okoli x osi)	površina vrtenine (okoli x osi)
$s = \int \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt$	$p = 1/2\int(x\dot{y} - y\dot{x})dt$	$V = \pi\int y^2\dot{x}dt$	$P = 2\pi\int y\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}dt$
$s = \int \sqrt{r^2 + \dot{r}^2}dt$	$p = 1/2\int r^2 dt$	$V = \pi\int r^2\sin^2(t)(\dot{r}\cos(t) - r\sin(t))dt$	$P = 2\pi\int r\sin(t)\sqrt{r^2 + \dot{r}^2}dt$