Splošne naloge

Cauchy-Schwarzeva neenakost: $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \implies \frac{1}{n}(\sum a_i)^2 \leq \sum a_i^2$, enačaj ntk. $a_1 = \cdots = a_n$
Osnovni triki: indukcija ali minimalen protiprimer ali "kr eno shematsko risanje"
Turanov izrek: G ne vsebuje K_p, $p \geq 2 \implies |E(G)| \leq \frac{1}{2}\frac{p-2}{p-1}n^2$, enačaj ko $p-1|n$
Trik: Če moraš dokazati $t = 0$, lahko raje dokažeš $(-1)^n t > 0$.
Vsak povezan, dvodelen, r-regularen graf je 2-povezan.
Velja: $t(G) + t(\overline{G}) >\geq \frac{1}{24}n(n-1)(n-5)$
Velja: $diam(G) \geq 3 \implies diam(\overline{G}) \leq 3$

Turnirji

V turnirju vedno obstaja vozlišče, iz katerega lahko vsako drugo vozlišče dosežemo v največ 2 usmerjenih korakih.
Če turnir vsebuje usmerjen cikel, potem vsebuje usmerjen 3-cikel.
V turnirju obstaja usmerjen 3-cikel $\iff$ vsa vozlišča imajo enako izhodno stopnjo.

Kromatični polinom

$P(G,k)$ =število k-barvanj grafa G, pot $P(P_n,k) = k(k-1)^{n-1}$, drevo isto kot za pot, poln graf $P(K_n,k) = k(k-1)\cdots(k-n+1)$.
$\chi(G) =$ najmanjši k, da je $P(G,k) > 0$.
Trditev: G graf, e povezava, $P(G,k) = P(G-e,k) - P(G/e,k)$.
Lastnosti $P(G,k)$: koef. pri k^n je 1, koef. pri k^{n-1} je -m, koef. pri k^{n-2} je $\binom{m}{2} - t$ (t=št. trikotnikov), prosti člen je 0, stopnja najnižjega neničelnega člena je št. komponent grafa, predznak koeficientov alternira.
$P(G,-1) = (-1)^n a(G)\cdot$ (a(G) število acikličnih oriantacij G).

$p_G(k) = \sum_{i=0}^n a_i k^{n-i}$ je polinom, koeficienti alternirajo, $a_0 = 1, a_a = -m, a_2 = \binom{m}{2} - t, a_n = 0$
Rekurzija: $p_G(k) = p_{G-e}(k) - p_{G/e}(k)$
$\chi(G)$ je najmanjši k, za katerega je $p_G(k) > 0$
$p_G(-1) = (-1)^n a(G)$, $a(G)$ število acikličnih orientacij G
G r-vsota grafov G_1, G_2 (tj. presek je K_r): $p_G(k) = \frac{p_{G_1}(k)p_{G_2}(k)}{p_{K_r}(k)}$
G_1, G_2 disjunktna: $p_{G_1 \cup G_2}(k) = p_{G_1}(k)p_{G_2}(k)$
Razširitveni izrek: $\forall G : P_G(k) = \sum_{S \subset E(G)} (-1)^{|S|} k^{c(G[S])}$
$p_G(k) = \sum_{i=0}^n a_i(G)k^{\underline{i}}$, a_i število barvnih i-razbitji
Primeri: $p_T(k) = k(k-1)^{n-1}$, $p_{C_n}(k) = (k-1)^n + (-1)^n(k-1)$, $p_{W_n}(k) = kp_{C_n}(k-1)$, $p_{L_n}(k) = k(k-1)(k^2-3k+3)^{n-1}$
Če graf vsebuje trikotnik, potem $(k-2)|p_G(k)$
Večkratnost ničle 1 v krom. polinomu = število prereznih točk + 1 = število blokov.
Max. realna ničla $< |V(G)| - 1$

Pretoki

Γ Abelova grupa, utež $f\colon E(G) \to \Gamma$, usmeritev $D(v,u)$. $\Gamma - pretok$ je urejen par (D,f), za katerega velja pogoj: $\forall v \in V(G) : \sum_{u \in N(v)} D(v,u)f(vu) = 0$. Nosilec je množica povezav: $supp(f) = \{f(e) \neq 0, e \in E(G)\}$. Če $supp(f) = E(G)$ imamo nikjer-ničelni pretok. k-pretok je celoštevilski pretok, pri katerem je $\forall e \in E(G) : |f(e)| < k$. **Izrek(Tutte)**: Graf dopušča n-n k-pretok $\iff$ dopušča n-n $\mathbb{Z}_k$ pretok. **Pretočni polinom** je število različnih n-n Γ-pretokov za G, D, Γ, $k = |\Gamma|$. $F(G,k) =:$ (1) 0, G je povezava; (2) k-1, G je zanka; (3) (k-1)*F(G-e,k), e je zanka; (4) F(G-e,k)-F(G/e,k), e ni zanka.

Linearna algebra

Če je p polinom, λ lastna vrednost od A, potem je $p(\lambda)$ lastna vrednost matrike $p(\lambda)$.
$rang(A) = k \implies A$ ima največ k lastnih vrednosti različnih od 0.
Naj bo A $m \times n$ matrika, B pa $n \times m$: $\det(AB - \lambda I) = \lambda^{m-n}\det(\lambda I - BA)$
Lastni vektorji različnih lastnih vrednosti simetrične matrike so ortogonalni.
Naj bo A $n \times n$ matrika, $p_A(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$, če je $A[J]$ matrika, ko iz A odstranimo stolpce in vrstice iz J, velja $a_i = (-1)^{n-k}\sum_{|J|=n-k}\det(A[J])$.

Spekter grafa

Matrika sosednosti: A_G, Laplaceova matrika $L = D - A$. $p_G(x)$ karakteristični polinoma od A_G, $\lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n$.
Graf diametra d ima vsaj $d+1$ različnih lastnih vrednosti.
Če ima graf r vozlišč z istimi sosedi, je $rang(A) = n - r + 1$, zato je 0 $r-1$-kratna lastna vrednost.
Velja: $\lambda_1 \leq \sqrt{\frac{2m(n-1)}{n}}$
G graf, v vozlišče stopnje 1, $u \sim v$: $p_G(x) = xp_{G-v}(x) - p_{G-u-v}(x)$
Momenti: $\sum \lambda_i = 0, \sum \lambda_i^2 = 2m, \sum \lambda_i^3 = 6t$
Poti: $2\cos(\frac{2\pi i}{n} j)$ za $j = 0, 1, \ldots, n-1$
T gozd, $p_T(x) = x^n - a_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^{\lfloor n/2 \rfloor} a_{\lfloor n/2 \rfloor} x^{n - 2\lfloor n/2 \rfloor}$, a_i = število k prirejanj od T
W_n matrika s prvo vrstico [0,1,0, . . . , 0], potem ciklično zamaknjena. Lastne vrednosti so $\omega_j = \exp(\frac{2\pi i j}{n})$ za $j = 0, 1, \ldots, n-1$.
Če je A cirkulantna matrika s prvo vrstico $[0, a_1, \ldots, a_{n-1}]$, je $A = \sum_{i=1}^{n-1} a_i W_n^i$, njene lastna vrednosti pa so $\sum_{i=1}^{n-1} a_i \omega_j^i$
$\sum_{i=0}^{n-1} \omega_j^i = 0$ razen, če $j = 0$, potem $\sum_{i=0}^{n-1} \omega_j^i = n$.
Cikli: $2\cos(\frac{2\pi j}{n})$
H_n :$2n - 2^{(1)}$ (vektor iz samih 1), -2^{n-1} (vektorji $[1,1,0,0,\ldots,-1,-1,0,0,\ldots]$), 0^n
Najmanjša lastna vrednost $L(G)$ je -2.
P incidenčna matrika, na dol so povezave, vodoravno pa vozlišča. Potem je $A_{L(G)} = PP^T - 2I$.
$\Delta(L(G)) \leq 2\Delta(G)$
G povezan, r-regularen, potem je $\vec{1}$ lastni vektor za r, kratnosti 1.
G r-regularen, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ lastne vrednosti, m povezav: lastne vrednosti $L(G)$ so $\lambda_i + r - 2$ in še -2 kratnosti $m-n$. Uporabimo $A_G = P^T P - rI$.

$S_k(G)$ množica vseh k-podgrafov od G, katerih povezane komponente sestavljajo K_2 in cikli (k vozlišč ima)
Za $H \in S_k(G)$ je c(H) število ciklov v H in $r(H) = k - c_H$, kjer je c_H število povezanih komponent H
$p_G(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n$
Velja: $(-1)^i a_i = \sum_{H \in S_i(G)} (-1)^{r(H)} 2^{c(H)}$
Spotoma opazimo še $\det(A_G) = \sum_{H \in S_n(G)} (-1)^{r_S(H)} 2^{c(H)} = \sum_{H \in S_n(G)} (-1)^{r(H)} 2^{c(H)}$ (r_S je število sodih komponent v H)
Posledica: če je k dolžina najkrajšega lihega cikla v G, potem je število k ciklov $= \frac{-a_k}{2}$

Spekter K_n je $n - 1^{(1)}, -1^{(n-1)}$, preko $A = J - I$.
Laplaceov spekter K_n je $0^{(1)}, n^{(n-1)}$, preko $L = nI - J$.
Spekter $K_{m,n}$ je $\sqrt{mn}^{(1)}, -\sqrt{mn}^{(1)}, 0^{(n+m-2)}$.
za k-regularen graf je $\lambda_i + \mu_i = k$, k je enkratna lastna vrednost in vse lastne vrednosti $|\lambda| \leq k$
Dvodelen graf ima lastne vrednosti plus-minus po parih, ostale so 0.
$diam(G) <$ število različnih lastnih vrednosti
$f(x) = x^T A x$ doseže ekstrem v lastni vrednosti matrike A, vrednost pa je λ_1 oz. λ_n.
Velja: $\delta \leq \lambda_1 \leq \Delta$

Simetrije grafov

$Aut(G) \leq Sym(V(G))$ z operacijo $\alpha \cdot \beta = \beta \circ \alpha$, namesto $\alpha(v)$ pišemo v^α, potem je $v^{\alpha\beta} = (v^\alpha)^\beta$.
Velja: $Aut(G) = Aut(G^C)$
PP: $Aut(K_n) = S_n, Aut(K_{m,n}) = S_m \times S_n, Aut(K_{n,n}) = (S_m \times S_m) \rtimes S_2, Aut(C_n) = D_{2n}, Aut(P_n) = \mathbb{Z}_2, Aut(Petersen) = S_5$
Izrek (Frucht): Za vsako končno grupo X obstaja končen graf G, da je $Aut(G) = X$. Obstaja 3-regularen povezan graf G.
Vozliščno simetričen: če za poljubni vozlišči u, v obstaja $\alpha \in Aut(G) : u^\alpha = v$.
Primeri: $K_n, K_n^C, K_{n,n}, C_n, Q_n$, platnoska telesa, Petersenov graf.
Lema o orbiti in stabilizatorju: grupa G deluje na mn. Ω. $G_\omega = \{g \in G \ ; \ \omega^g = \omega\}$ stabilizator, $\omega^G = \{\omega^g \ ; \ g \in G\}$ orbita.
Tedaj je $|G| = |G_\omega||\omega^G|$.
Cayleyjev graf: $Cay(G; S)$, vozlišča so elementi grupe G, $h \sim g \iff hg^{-1} \in S \iff h \in Sg$.
Velja: soseščina $N(h) = Sh$, graf je $|S|$-regularen, S generira grupo $G \iff Cay(G; S)$ je povezan.
Regularno delovanje: G deluje na Ω regularno, če je G tranzitivna in je $G_\omega = 1$ za nek (in potme za vsak) $\omega \in \Omega$.
Lema: G deluje regularno $\iff$ G deluje tranzitivno in $|G| = |\Omega|$.
cayleyjev graf: graf, ki je izomorfen nekemu Cayleyjevemu grafu.
ρ: $G \to Sym(G)$, g identificiramo z ρ_g (desno množenje z g), $\rho(G) \leq Aut(Cay(G; S))$ in dejuje tranzitivno na njej.
Izrek (Sabidussi): X je Cayleyjev graf $\iff$ $Aut(X)$ premore podgrupo, ki deluje na $V(X)$ regularno.
Posledica: Vsak Cayleyjev graf je vozliščno simetričen.
Pozor: obstajajo vozliščno simetrični povezni grafi, ki niso Cayleyjevi. Npr. Petersenov graf.
Cayleyjev izrek: $n||G| \implies$ obstaja $x \in G$ reda n.

Avtorji: Vesna Iršič, et. al.