Separacija spremenljivk

$L^2([-\pi,\pi]) = \{f : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \int_{-\pi}^{\pi}|f|^2$
$dx < \infty\}$ je vektorski prostor s skalarnim produktom $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Množica funkcij $\{\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\sin x, \frac{1}{\pi}\cos x, \frac{1}{\pi}\sin 2x, \frac{1}{\pi}\cos 2x, \ldots\}$. je kompleten (vsako funkcijo se da na enoličen način razviti v tem sistemu), ortonormiran sistem za ta produkt.

Fourierjev razvoj: $f \in L^2([-\pi,\pi])$:
$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$,
$a_n = \langle f, \frac{1}{\pi}\cos nx\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}_0$,
$b_n = \langle f, \frac{1}{\pi}\sin nx\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}$.

Sinusna in kosinusna vrsta: $f \in L^2([0,\pi])$. Za tako funkcijo obstaja liha in soda razširitev na $[-\pi,\pi]$. Za $\tilde{f}^S$ so $b_n = 0$, za $\tilde{f}^L$ pa $a_n = 0$.

Posledica: Na $[0,\pi]$ za f obstajata dva razvoja: **sinusna vrsta**: $\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\tilde{b}_n \sin nx$ in **kosinusna vrsta**: $\tilde{f}(x) = \frac{\tilde{a}_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\tilde{a}_n\cos nx$, kjer sta:
$\tilde{a}_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}$,
$\tilde{b}_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}_0$.
S substitucijo lahko razvoje prevedemo na poljuben interval $[-L, L]$ oz. $[0, L]$, $L > 0$. V tem primeru je $\{\frac{1}{2L}, \frac{1}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}, \frac{1}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}, \ldots\}$ KONS.

Metoda separacije: Kdaj jo uporabimo: Trivialen pogoj: Imamo eno spremenljivko na omejenem območju in s homogenimi robnimi pogoji, npr.
$x \in [0, L]$: $\alpha u(0,t) + \beta u_x(0,t) = 0, \quad \gamma u(,t) + \delta u_x(L,t) = 0, \quad \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$.
Netrivialen pogoj: Diferencialni operator, ki določa PDE, zadošča Sturm-Liouvillovi teoriji, tj. množica lastnih funkcij, ki jih dobimo iz robnega problema tvori K.O.N.S.

Štirje koraki metode:
#1: Separacija: nastavek $u(x,t) = X(x)T(t)$. (Nastavek vstavi v enačbo in loči spremenljivke, dobljeno enačbo pa enači z $\mu \in \mathbb{R}$.)
#2: Določanje lastnih funkcij $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz robnega problema za NDE. (Reši NDE za X, homogeni robni pogoji ti dajo začetne pogoje za NDE. Obravnavati moraš možnosti $\mu > 0, \mu = 0, \mu < 0$. Če je v kakšnem primeru $X \equiv 0$, lastnih funkcij v tem primeru ni. Pri izbire množice lastnih funkcij, lahko splošno konstanto za vsak člen BŠS postaviš na 1.)
#3: Iskanje pripadajočih $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. (Z μ, ki ga dobiš v #2 in določa družino lastnih funkcij, reši še NDE za T. Splošno konstanto lahko tu pustiš, lahko si misliš, za je v njej spravljena konstanta iz množice lastnih funkcij za X.)
#4: Splošna rešitev $u = \sum_{n=1}^{\infty} X_n T_n$. (Rešitev naj bi bila odvisna od števno mnogo konstant, ki jih določiš iz nehomogenega robnega pogoja. Dobro je opaziti morebitne sinusne/kosinusne vrste, ki jih dobiš z robnim pogojem, in upoštevati zvezo s koeficienti iz razvoja v sinusno/kosinusnov vrsto, torej $C_n = a_n$ ali b_n.)
Če za nobeno od spremenljivk nimamo homogenega robnega pogoja, razbijemo problem na dva dela, npr: $\triangle u = 0$ razbijemo na $u = v + w$, $\triangle v = 0$ in $\triangle w = 0$, pri čemer v-ju in w-ju damo vsakemu en homogen robni pogoj in en pogoj, ki je od u-ja.

Reševanje nehomogene enačbe s separacijo:
Naredimo #1 in #2 za homogen problem (pri drugem koraku preveri, da lastne funkcije tvorijo K.O.S., tj. $\langle X_n, X_m\rangle = c_n\delta_{n,m} = \begin{cases} c_n; & n = m \\ 0; & n \neq m \end{cases}$, korak #3 pa naredimo tako, da rešitev iz #2 vstavimo v $u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x)T_n(t)$. Tu T_n ne poznamo in računamo za splošnega. Vstavimo v nehomogeno enačbo in primerjamo koeficiente s tistimi iz razvoja nehomogenega dela po $\{X_n\}$. Partikularno rešitev dobimo z nastavkom. Ko razvijamo nehomogeni del $f(x)$ po $\{X_n\}$, si napišemo $\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\langle f, X_n\rangle}{\langle X_n, X_n\rangle}X_n$ in izračunamo koeficiente iz razvoja.

Laplace v polarnih koordinatah: $\triangle u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}$
Pri polarnih koordinatah imamo namesto homogenega robnega pogoja lahko tudi naravni pogoj: 2π-periodičnost: $u(r,0) = u(r,2\pi), u_\varphi(r,0) = u_\varphi(r,2\pi)$.
Sistem $M\vec{x} = 0$ ima netrivialne rešitve $\iff \det M = 0$.

Eksistenca:
$u_{tt} - c^2u_{xx} = 0, c \in \mathbb{R}_+$ ima pri pogojih $u_x(0,t) = u_x(L,t) = 0$ in $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$ edino rešitev $u \equiv 0$. Za poljubne $a, b, f, g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ima $u_{tt} - c^2u_{xx} = 0, c \in \mathbb{R}_+$ enolično rešitev tudi pri pogojih $u_x(0,t) = a(t), u_x(L,t) = b(t), u(x,0) = f(x)$ in $u_t(x,0) = g(x)$

Sturm-Liouvilleova teorija

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je sebi adjungiran, če $A^T = A$, lastni vektorji tvorijo ortogonalno bazo. Velja $\langle Av, w\rangle = (Av)^T w = v^T A^T w = v^T(Aw) = \langle v, Aw\rangle$.
SL-**operator**: $L : \mathcal{C}^2([a,b]) \longrightarrow \mathcal{C}([a,b])$, $L(y) = \frac{1}{r(x)}[(p(x)y')' + q(x)y]$, $p, r > 0, x \in [a,b]$ + mešani ali periodični robni pogoj. Gledamo skrčitev operatorja na $V = \mathcal{C}^2(]a,b]) \cap \{\text{robni pogoji}\}$, $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)r(x)dx$, kjer je r utež.
L je sebi adjungiran za robne pogoje:

(1) $y(a) = y(b) = 0$,
(2) $y'(a) = y'(b) = 0$,
(3) $y(a) = y(b), p(a)y'(a) = p(b)y'(b)$.

Izrek (o kompletnosti lastnih funkcij)
$p \in \mathcal{C}^1([a,b]); r, q \in \mathcal{C}([a,b]); p, r > 0$. Potem ima lastni problem $L(y) = \mu y$ pri robnih pogojih
a) $\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0$ in $\gamma y(b) + \delta y'(b) = 0$; $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0, \gamma^2 + \delta^2 \neq 0$
b) $y(a) = y(b)$ in $\alpha y'(a) = \beta y'(b)$; $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

števno mnogo rešitev z lastnostmi:

i) $\mu_1 > \mu_2 > \dots$, $\lim_{n\to\infty} \mu_n = -\infty$

ii) $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tvorijo kompleten ortonormiran sistem v $L^2([a,b]) \cap \{\text{robni pogoji}\}$ in za $\langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)r(x)dx$.

Enačbe oblike $u_t = au_{xx} + bu_x + cu$, kjer $a,b,c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $u(o,t) = u(L,t) = 0$ lahko rešujemo s separacijo spremenljivk za poljubne koeficiente a,b,c.

$y(x) = \tilde{A}x^{ia} + \tilde{B}x^{-ia} = A\cos(a\ln x) + B\sin(a\ln x)$

Dejstvo, ali določena družina funkcij tvori K.O.S., preverjamo z identifikacijo istoležnih funkcij v $L(y) = \frac{1}{r(x)}[(p(x)y')' + q(x)y] = \mu y =$ naša enačba (npr. $L(y) = \frac{1}{r(x)}[(p(x)y')' + q(x)y] = x^2y'' + xy' = \mu y$ za reševanje enačbe $x^2y'' + xy' = \mu y$.)

Poiščemo utež r in za prostor vzamemo prostor funkcij, za katere rešujemo enačbo, presekan z robni pogoji.

Legendrova enačba

$L(y) = ((1-x^2)y')' = \mu y$, $x \in [-1,1]$. To je singularen diferencialni operator, saj $p(\pm 1) = 0$, izrek pa deluje za $p > 0$. L je omejena v $x = \pm 1$ natanko tedaj, ko je $\mu = -n(n+1), n \in \mathbb{N}$. Tedaj obstajata neodvisni polinomski rešitvi stopenj $2m$ in $2m+1$.

Kvocientni kriterij za vrsto $\sum C_n x^n$: $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}x^{n+1}}{C_n x^n}\right| < 1$, potem vrsta konvergira.

Raabejev kriterij za vrsto $\sum C_n x^n$: $\lim_{n\to\infty} n(1 - \frac{C_n x^n}{C_{n+1}x^{n+1}} < 1$, potem ta vrsta divergira.

Če gledamo operator $L(y) = ((1-x^2)y')' = \mu y$ na prostoru $\mathcal{C}^2(-1,1) \cap \{\text{omejene funkcije v } \pm 1\}$, dobimo lastne pare $(-n(n+1), P_n)$ in $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ je K.O.S.

Laplace v sferičnih koordinatah: $\triangle u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{r^2}\left[\frac{1}{\cos\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\cos\theta u_\vartheta) + \frac{1}{\cos\vartheta}u_{\varphi\varphi}\right]$, $r \in [0,\infty), \varphi \in [0,2\pi], \vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Besslova enačba

$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$, $x > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, singularna za $x = 0$. Z nastavkom $y = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+k}$, $k \in \mathbb{N}_0$, $C_0 \neq 0$ dobimo rešitev, ki je omejena v $x = 0$: $J_n(x) = C_0 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2^{2l}l!(n+l)(n+l-1)\cdots(n+1)}x^{2l}$.

Dodatek k Besslovi enačbi:

(1) Enačbo lahko obravnavamo tudi za $n \in \mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{N}_0$, vendar v eksplicitni obliki namesto $(n+l)!$ dobimo $\Gamma(n+l+1)$.
(2) Enačbo lahko obravnavamo tudi za $n \in \mathbb{R}_-$, vendar dobimo Besslove funkcije drugega reda Y_n, ki so singularne v $x = 0$.
(3) Splošna rešitev Besslove enačbe: $y(x) = AJ_n(x) + BY_n(x)$.
(4) Besslova funkcija ima števno mnogo ničel.

Fourierova transformacija in PDE

$f \in L^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; \int_{\mathbb{R}} |f| dx < \infty\}$.

$\mathcal{F}(f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{isx}ds$

$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(s)e^{-isx}ds$

Lastnosti:

(1) $\mathcal{F}$ je linearna: $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha\mathcal{F}(f) + \beta\mathcal{F}(g)$
(2) $\mathcal{F}(f')(x) = (-ix)\mathcal{F}(f)(x)$
(3) $\frac{d}{dx}[\mathcal{F}(f)(x)] = \mathcal{F}(ixf)(x)$
(4) Če je f soda funkcija, velja $\mathcal{F}^{-1}(f) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(f)$.

Nekaj izračunanih transformacij:

- $f_1(x) = \begin{cases} 1; & |x| \leq 1 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$, $\mathcal{F}(f_1) = \frac{2\sin x}{x}$
- $\mathcal{F}(e^{-a|x|})(x) = \frac{2a}{a^2+x^2}$, $a > 0$
- $\mathcal{F}(e^{-ax^2})(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}$
- $\mathcal{F}^{-1}(e^{-ax^2})(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{x^2}{4a}}$
- $f_2 = \begin{cases} 1-|x|; & |x| < 1 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$, $\mathcal{F}(f_2) = \frac{2}{x^2}(1-\cos x)$
- $\mathcal{F}(\cos(ax^2)) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\cos(\frac{x^2}{4a} - \frac{\pi}{4})$, $a > 0$

Uporaba Fourierovih transformacij v PDE

Želimo reševati PDE, v kateri je ena spremenljivka neomejena, npr. $x \in \mathbb{R}, t > 0$. $U(x,t) = \mathcal{F}(u)(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(s,t)e^{isx}ds$ (transformacija po x)

Veljajo pravila:

(1) $\mathcal{F}(\alpha u + \beta v) = \alpha\mathcal{F}(u) + \beta\mathcal{F}(v)$, $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$
(2) $\mathcal{F}(\frac{\partial^n}{\partial t^n}u) = \frac{\partial^n}{\partial t^n}\mathcal{F}(u) = \frac{\partial^n}{\partial t^n}U$
(3) $\mathcal{F}(\frac{\partial^n}{\partial x^n}u) = (-ix)^n\mathcal{F}(u) = (-ix)^n U$

Strategija: PDE z odvodi po t in x s Fourierovo transformacijo pretvorimo v NDE z odvodi po t (tudi začetne pogoje), nato pa dobljeno rešitev NDE z inverzno Fourierovo transformacijo pretvorimo v rešitev PDE.

Enačba $u_{xx} = u_t + u$ ima enolično rešitev pri pogojih $u(x,0) = g(x), \forall g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Če je g soda (oz. liha), je rešitev soda (oz. liha). (Včasih za uporabo te lastnosti lahko naše začetne podatke sodo (oz. liho) razširiti, odvisno katera razširitev nam da nov pogoj. Z razširjenim začetnim podatkom nalogo rešimo, na koncu pa vzamemo samo ustrezno polovico.)

Konvolucija: $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi$

Velja: $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$

Splošna rešitev enačbe $u_t - 2u_{xx} = 0$ pri pogoju $u(x,0) = f(x)$ je: $u(x,t) = \sqrt{\frac{1}{8\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{8t}}\,\mathrm{d}\xi$

Če iščemo splošno rešitev za poljuben začetni pogoj, se pri uporabi inverzne Fourierove transformacije splača uporabiti lastnost konvolucije in vriniti $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}$.

Diracova δ-funkcija

Diracova δ-funkcija zadošča dvema lastnostma:

(1) $\delta(x) = 0$ za $\mathbb{R}\backslash\{0\}$,
(2) $\int_{\mathbb{R}} \delta\,\mathrm{d}x = 1$.

Diracovo δ-funkcijo lahko realiziramo tudi kot limito funkcij $f_n(x) = \begin{cases} n; & |x| \le \frac{1}{2n} \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$ ali kot limito funkcij $g_n(x) = \frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2x^2}$.

Definiramo jo lahko tudi kot $\delta(x) := \mathcal{F}^{-1}(1) = \frac{1}{2\pi}\mathcal{F}(1)$.
Za $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ velja: $\int_{\mathbb{R}} \delta(x-a) f(x)\,\mathrm{d}x = f(a)$.

Poissonovo jedro in Greenova funkcija

Rešujemo za: $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega}), f \in \mathcal{C}(\Omega), g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ in Ω odprta, povezana podmnožica v $\mathbb{R}^2$.
$\triangle u = f$ je Poissonova enačba.
Robni pogoji:

(1) $u|_{\partial\Omega} = g$ Dirichletov
(2) $\partial_{\vec{n}} u|_{\partial\Omega} = g$ Neumannov.

Poseben primer tega problema za $f = 0$ so harmonične funkcije.
Izrek o povprečni vrednosti za harmonične funkcije: $u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial K((x_0,y_0),R)} u\,\mathrm{d}s$.
Šibki princip maksima: Če je Ω omejeno: $\max_\Omega v = \max_{\partial\Omega} v$ oz. $\min_\Omega v = \min_{\partial\Omega} v$
Krepki princip maksima: Če je Ω neomejeno in če harmonična funkcija doseže lokalni ekstrem v notranjosti Ω, je funkcija konstantna.
Zveza med harmoničnimi in holomorfnimi funkcijami:

(1) Če $f = u + iv$ holomorfna, potem sta u in v harmonični.
(2) Če je u harmonična, potem obstaja harmonična funkcija v, da je $f = u + iv$ holomorfna (velja samo za enostavno povezana območja Ω).

Množica harmoničnih homogenih polinomov stopnje n ($p(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n p(x,y)$) tvori vektorski prostor dimenzije 2 za vsak $n \in \mathbb{N}$.
Za omejeno območje $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ velja $\int_\Omega u \triangle u \mathrm{d}S + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla u \mathrm{d}S = \int_{\partial\Omega} u(\nabla u \cdot \vec{n})\,\mathrm{d}s$, kjer je $\vec{n}$ zunanja enotska normala na Ω.
Edina rešitev enačbe $\triangle u = \lambda u$, $\lambda \ge 0$, $u|_{\partial\Omega} = 0$ je funkcija $u \equiv 0$.
Dirichletov problem je na omejenem območju enolično rešljiv.
Krivuljni integral vektorskega polja: $\int_{\partial\Omega} \vec{V} \mathrm{d}\vec{s} = \int_\alpha^\beta \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\mathrm{d}t = \int_{\partial\Omega} \vec{V} \cdot \vec{T}\,\mathrm{d}s$, kjer je $\vec{T} = \frac{\dot{\gamma}(t)}{||\dot{\gamma}(t)||}$
$\gamma(t) = (x(t), y(t))$, normalni vektor: $(\dot{y}(t), -\dot{x}(t))$: $\int_\alpha^\beta (P,Q) \cdot (\dot{x}, \dot{y})\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta (Q,-P) \cdot (\dot{y}, -\dot{x})\mathrm{d}t$
Greenova formula za integral vektorskega polja po normali: $\int_\Omega (Q_x - P_y)\mathrm{d}S = \int_{\partial\Omega} (P,Q)\mathrm{d}\vec{s} = \int_{\partial\Omega} (Q,-P) \cdot \vec{n}\,\mathrm{d}s$, kjer $\vec{n}$ enotska normala.
Reševanje Dirichletovega problema
Rešitev je vsota dveh problemov: $\triangle v = 0, v|_{\partial\Omega} = g$ (Poissonov del) in $\triangle w = f, w|_{\partial\Omega} = 0$ (Greenov del).
Poissonov del: $v(x,y) = \int_{\partial\Omega} P(x,y,s) g(s)\,\mathrm{d}s$, $P : \Omega \times \partial\Omega \to \mathbb{R}$, $(x,y,s) \mapsto P(x,y,s)$ (Poissonovo jedro)
Greenov del: $w(x,y) = \int_\Omega G(x,y;\xi,\eta) f(\xi,\eta) \mathrm{d}S(\xi,\eta)$, $G : \Omega \times \Omega \backslash \{(p,p); p \in \Omega\} \to \mathbb{R}$, $(x,y;\xi,\eta) \mapsto G(x,y;\xi,\eta)$ (Greenova funkcija).
Greenova identiteta: $\int_\Omega (u \triangle v - v \triangle u)\mathrm{d}S = \int_{\partial\Omega} (u \partial_{\vec{n}} v - v \partial_{\vec{n}} u)\,\mathrm{d}s$, kjer $\partial_{\vec{n}} v = \langle \nabla v, \vec{n} \rangle$ in $\vec{n}$ zunanja normala.
Poissonovo jedro se vedno da izračunati iz Greenove funkcije. Velja zveza: $P(x,y,t) = \partial_{\vec{n}} G(x,y;\xi,\eta)|_{(\xi,\eta)\in\partial\Omega}$.
Kompleksni logaritem: $\log z = \ln|z| + i \arg z$
Fundamentalna rešitev: $\Gamma(x,y;\xi,\eta) = \frac{1}{4\pi} \ln((\xi - x)^2 + (\eta - y)^2) = \frac{1}{2\pi} \ln|z - q| = Re(\frac{1}{2\pi} \log(z - q))$
Greenova funkcija za:

- polravnino $\mathbb{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\} = \{Im(z) > 0\}$: $G(z,w) = \Gamma(z,w) - \Gamma(\bar{z},w) = \frac{1}{4\pi} \log\left(\frac{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}{(\xi-x)^2+(\eta+y)^2}\right)$
- enotski disk $\mathbb{D} = \{x^2 + y^2 < 1\}$: $G_{\mathbb{D}} = \frac{1}{2\pi} \ln|\frac{w-z}{1-\bar{z}w}|$
- pas $\mathbb{R} \times (-1,1)$: $G_{\mathbb{R}\times(-1,1)}(z,w) = \Gamma(e^{\frac{\pi}{2}(z+i)}, e^{\frac{\pi}{2}(w+i)}) - \Gamma(e^{\frac{\pi}{2}(\bar{z}-i)}, e^{\frac{\pi}{2}(w+i)})$
- disk z radijem R presekan s polravnino $\mathbb{H}$: $G(z,w) = \frac{1}{2\pi} \log\left|\frac{(z-w)(R^2-zw)}{(z-\bar{w})(R^2-z\bar{w})}\right|$

Poissonovo jedro za:

- polravnino $\mathbb{H}$: $P(x,y,\xi) = \frac{y}{\pi((\xi-x)^2+y^2)}$
- enotski disk: $P(r,\varphi,\vartheta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\varphi)+r^2}$

Pas $\mathbb{R} \times (-1,1)$ s preslikavo $z \mapsto (z+i)\frac{\pi}{2}$ preslikamo v pas $\mathbb{R} \times (0,\pi)$, tega pa z $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ v polravnino $\mathbb{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y > 0\}$ (ker je $y \in (0,\pi)$, je $\sin y > 0$)
Če je $\Omega \subset \mathbb{C}\backslash\mathbb{D}(a,r)$, potem obstaja natanko ena omejena rešitev Dirichletovega problema.
Vsaka rešitev enačbe $\triangle(\xi,\eta) G(x,y;\xi,\eta) = \delta(\xi - x, \eta - y)$, $G|_{(\xi,\eta)\in\partial\Omega} = 0$ je za $(x,y) \in \Omega$ Greenova funkcija.

avtor: Klemen Sajovec, popravki: Jure Slak