

Linearni sistemi

DEFINICIJA: Naj bo $\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t)$ sistem in $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n} \forall t$. Rešitev enačbe $\dot{X} = AX$, ki je obrnljiva, se imenuje **fundamentalna rešitev**. Dve fundamentalni rešitvi se razlikujeta za obrnljivo matriko. **Splošna rešitev** $\vec{x} = A\vec{c}$ je $X\vec{c}$, kjer je \vec{c} konstantni vektor.

$$X = [x_1, x_2, \dots, x_n] \quad X\vec{c} = c_1\vec{x}_1 + c_2\vec{x}_2 + \dots + c_n\vec{x}_n$$

Naj bo A matrika konstant. $\vec{x} = A\vec{x}$ ima splošno rešitev $\vec{x} = Pe^{Jt}\vec{c}$, kjer je $A = PJP^{-1}$ jordska kanonična forma.

POSTOPEK:

- Izračunaj lastne vrednosti matrike A .
 - Če so vse lastne vrednosti različne, izračunaj lastne vektorje za vse lastne vrednosti in določi J in P (pazi, da vrstni red lastnih vrednosti v J sovпада z vrstnim redom lastnih vektorjev v P)
 - Če je lastna vrednost λ večkratna in zanjo obstaja le en lastni vektor, izračunaj korenski vektor in ga preslikaj z $A - \lambda I$
- Zapiši rešitev $\vec{x} = Pe^{Jt}\vec{c} = c_1e^{\lambda_1 t}v_1 + c_2e^{\lambda_2 t}v_2 + \dots + c_ne^{\lambda_n t}v_n$, kjer $P = [v_1, v_2, \dots, v_n]$. Iz tega dobiš $X = [\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n]$, kjer $x_i = e^{\lambda_i t}v_i$.

OPOMBA: Pri kompleksnih lastnih vrednostih in vektorjih z uporabo $e^{\lambda + i\mu} = e^{\lambda}(\cos \mu + i \sin \mu)$ loči realni in imaginarni del (hočemo realne lastne vektorje, konstante pred njimi pa so lahko kompleksne).

Ko rešuješ sistem

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

iz prve enačbe izrazi y , enačbo odvajaj in vstavi dobljeni \dot{y} v drugo. Dobiš diferencialno enačbo za x , iz katere izračunaš x in y . Splošno rešitev sistema X dobiš tako, da razpišeš x in y po bazi konstant C_1, C_2 (prvi stolpec: $C_1 = 1, C_2 = 0$ in drugi stolpec: $C_1 = 0, C_2 = 1$).

LIIOUVILLEOV IZREK: Naj bo $\dot{z} = Az$ in $A : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ zvezna za vsak t . Potem obstaja fundamentalna rešitev sistema, ki je obrnljiva na $[a, b]$ $X(t)$ taka, da velja:

$$\det X(t) = \det X(t_0)e^{\int_{t_0}^t \text{sl}A(\xi)d\xi}.$$

Linearne DE višjega reda

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x)$$

Naj bo y rešitev enačbe. Potem:

$$\vec{z} = \begin{bmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix}, \quad \vec{z}' = \begin{bmatrix} y' \\ y'' \\ y''' \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ y' \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f \end{bmatrix}$$

$\vec{x} = X\vec{c} = X \int X^{-1} \vec{f} dt$, rabimo samo prvo vrstico (y).

LINEARNA NDE S KONSTANTNIMI KOEFICIENTI: $y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_0y = b(t)$, $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Homogen del: substitucija $y = e^{\lambda x}$. Dobimo $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ paroma različne.

Rešitev: $y = y_1 + \dots + y_k$, kjer y_j ustreza λ_j in $y_j = c_1e^{\lambda_j x} + c_2xe^{\lambda_j x} + \dots + c_{k_j}x^{k_j-1}e^{\lambda_j x}$, kjer je k_j večkratnost λ_j .

Partikularni del: za b oblike $e^{\mu x}q(x)$, $\mu \in \mathbb{C}$ in $q(x)$ polinom stopnje m . $y_p = p(x)e^{\mu x}x^k$, kjer k večkratnost μ kot λ in p stopnje m .

CAUCHY-EULERJEVA ENAČBA: $x^n y^{(n)} + a_{n-1}x^{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1xy' + a_0y = b$. Uvedemo novo spremenljivko $x = e^t$, enačba se prevede na enačbo s konstantnimi koeficienti. V praksi porabimo nastavek $y = x^\lambda$.

Rešitev: $y = y_1 + \dots + y_k$, kjer y_j ustreza λ_j in $y_j = c_1x^{\lambda_j} + c_2 \log(x)x^{\lambda_j} + \dots + c_{k_j} \log^{k_j-1}(x)x^{\lambda_j}$, kjer je k_j večkratnost λ_j .

Partikularni del: za b oblike $(\ln t)t^\mu$. Nastavek $y_p = q(\ln t)t^\mu \ln^k t$, kjer $\text{st}(q) = \text{st}(p)$ in k večkratnost μ med λ_i , ki rešijo "karakteristični polinom".

Variacijski račun

DEFINICIJA: Naj bo $A : X \rightarrow Y$ linearna preslikava med normiranimi vektorskima prostoroma. A je omejena, če obstaja $M \geq 0$, da velja $\|Ax\|_Y \leq M\|x\|_X$. Če je A omejena, potem $\|A\| := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\| := \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

TRDITEV: A je omejena $\iff \|Ax\|_Y \leq \|A\|\|x\|_X$ ($\|A\|$ je norma v prostoru operatorjev)

Za Banachova prostora $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ in $(C^1[a, b], \|\cdot\|_1)$ je $\|f\|_1 := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$

DEFINICIJA: Naj bosta X in Y Banachova, $\mathcal{U}^{odp} \subseteq X$ in $F : \mathcal{U} \rightarrow Y$. F je:

a) **krepro (Fréchetjevo) odvedljiva** v točki x , če obstaja $(DF)(x)$ omejen linearni operator iz X v Y , da velja:

$$\frac{\|F(x+h) - F(x) - (DF)(x)(h)\|}{\|h\|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

b) **šibko (Gâteauxjevo) odvedljiva**, če obstaja $g_x(h) := \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(x+th) - F(x)}{t}$

IZREK: Če je F krepro odvedljiva $\implies F$ šibko odvedljiva in odvoda sta enaka.

OPOMBA: Izračunamo šibkega, dobimo kandidata za krepkega. Po definiciji izračunamo limito krepkega. Dokazemo omejenost g_x .

Uporabno: $|\int (f + f')dx| \leq \int (|f| + |f'|)dx \leq \int (\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty)dx = \int \|f\|_1 dx$

TRDITEV: Naj bo X Banachov prostor in $F, G : X \rightarrow \mathbb{R}$ krepro odvedljivi v $x_0 \in X$. Potem je $FG : X \rightarrow \mathbb{R}$ krepro odvedljiva v x_0 in velja $D(FG)(x_0) = F(x_0)DG(x_0) + G(x_0)DF(x_0)$

RAZMADZEJEV IZREK: Naj bosta M in N zvezni funkciji na $[a, b]$. Denimo, da za vsako testno funkcijo $\varphi \in \mathcal{D}([a, b])$ velja:

$\int_a^b (M\varphi + N\varphi')dx = 0$. Tedaj je N odvedljiva in velja $N' = M$.

EULER-LAGRANGEJEVA ENAČBA: $L_y - \frac{d}{dx}L_{y'} = 0$

Naj velja $L_y = \frac{d}{dx}L_{y'}$ in $L_{y'}h|_a^b = 0$ za vse dopustne variacije.

- če poznamo $y(a), y(b) \implies h(a) = h(b) = 0$ za vse dopustne variacije.
- če poznamo $y(a) \implies h(a) = 0$ za vse dopustne variacije ($L_{y'}(b) = 0$).
- če poznamo $y(b) \implies h(b) = 0$ za vse dopustne variacije ($L_{y'}(a) = 0$).
- če $y(a), y(b)$ ne poznamo $\implies \dots$

KLASIČNI PROBLEM: $I[y] = \int_a^b L(x, y, y')dx$.

- Če $L = L(x, y') \implies L_{y'} = C$ (Iz te enačbe izrazi $y' = f(x)$, z integracijo izračunaš $y = \int f(c)$ in vstavi robne pogoje, da določiš konstante.)
- $L = L(y, y') \implies L - y'L_{y'} = C$ (ločljive spremenljivke, verjetno potrebna obravnava glede na vrednost C)

IzOPERIMETRIČNI POLINOM: $A : I[y] = \int_a^b L(x, y, y') dx +$ robni pogoji + dodatni pogoji: $\int_a^b G_1(x, y, y') dx = A_1, \dots, \int_a^b G_n(x, y, y') dx = A_n \implies$ obstajajo $\lambda_1, \dots, \lambda_n : \int_a^b (L - \lambda_1 G_1 - \dots - \lambda_n G_n) dx = \tilde{I}[y]$. Ekstremali za A so ekstremali za \tilde{I} z nekaterimi robnimi pogoji. (Da dobiš λ izračunaj najprej $y(x, \lambda)$, nato pa uporabi dodatni pogoj. Dodatno: Če $y(a)$ ni podan: $\tilde{L}_{y'}(a) = 0$)

$I[y] = \int_a^b L(x, y, y', \dots, y^{(n)}) dx \implies L_y - \frac{d}{dx} L_{y'} - \dots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} L_{y^{(n)}} = 0$

$I[y_1, y_2, \dots, y_n] = \int_a^b L(x, y_1, \dots, y_n, y'_1, \dots, y'_n) dx$ in podani $y_1(a), \dots, y_n(a), y_1(b), \dots, y_n(b)$. Potem za $i = 1, \dots, n$ velja: $L_{y_i} = \frac{d}{dx} L_{y'_i}$.

NELINEARNI SISTEMI: Če $\dot{x} = f(x, y), \dot{y} = g(x, y) \implies y'(x) = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}, (\frac{y}{x})' = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2}, (xy)' = \dot{x}y + x\dot{y}$

NDE 1. reda

Ločljive spremeljivke: $y' = f(x)g(y)$

Linearna: $y' = a(x)y + b(x)$, rešujemo $y_s = y_h + y_p$

Trik: $y(x) \leftrightarrow x(y) \implies y' = 1/\dot{x}$

Homogena: $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$, v posebnem $f(x, y) = f(1, x/y) \implies z = y/x, y' = z + xz' \implies$ linearna

Bernoullijeva: $y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$, rešujemo $z = y^{1-\alpha}, \implies \frac{1}{1-\alpha} z' = a(x)z + b(x)$

Ricattijeva: $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$, ena rešitev y_1 . Nova spr. $y = y_1 + \frac{1}{u}$

$y' = y'_1 - \frac{u'}{u^2}$ po pretvorbi $u' = -u(2ay_1 + b) - a$

Integrirajoči množitelj: $Pdx + Qdy = 0$, iščemo $\mu: (\mu P)_y = (\mu Q)_x$. Rešitev $u(x, y) = \int Pdx = \int Qdy = 0$

$\mu = \mu(x) \iff \frac{\mu_x}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{Q}$ odvisno samo od x . $\mu = \mu(y) \iff \frac{\mu_y}{\mu} = \frac{Q_x - P_y}{P}$ odvisno samo od y .

Če $\mu = f(x, y)$, pazi, da odvajš kot kompozitum.

Parametrično: $x = X(u, v), y = Y(u, v), y' = Z(u, v)$. Rešujemo: $dY = Z dX$

Triki: $\cos^2 + \sin^2 = 1, ch^2 - sh^2 = 1, y' = tx$.

Clairautova: $y = xy' + b(y')$. Rešitev: $y = Cx + b(C)$. Tudi singularna rešitev (ogrinjača).

Lagrangeeva: $y = a(y')x + b(y')$. Rešujemo parametrično: $X = u, Z = y' = v, Y = a(v)u + b(v) \implies$ linearna.

Če je enačba podana eksplicitno in je desna stran polinom lihe stopnje v y s koeficienti funkcijami v x uvedeš $u = y^2$.

NDE višjih redov

Ne nastopa y : uvedemo $z = y'$.

Obe strani sta odvoda nečesa: integriramo in dodamo konstanto.

Odводи: $y'/y = (\log(y))', xy' + y = (xy)', \frac{y''y - y'^2}{y^2} = (\frac{y'}{y})', \frac{y'x - y}{x^2} = (\frac{y}{x})'$.

Ne nastopa x : uvedemo $z(y) = y', y$ neodvisna spr. $y'' = \dot{z}z, y''' = \dot{z}z^2 + \dot{z}^2z$.

Homogena: $F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$. Vpeljemo $z(x) = y'/y$. $y''/y = z' + z^2$.

Z utežjo: $F(kx, k^m y, k^{m-1} y', \dots, k^{m-n} y^{(n)}) = k^p F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$. Uvedemo: $x = e^t, y = u(t)e^{mt}$.

Integrali in formule

$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$	$\int \frac{1}{\sin(x)} \, dx = \ln \tan(x/2) + C$	$t \mapsto (\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)): \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\dot{\alpha}^2 + \dot{\beta}^2 + \dot{\gamma}^2} dt$
$\int x^m \log(x) \, dx = x^{m+1} \left(\frac{\log x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2} \right) + C$	$\int \frac{1}{\cos(x)} \, dx = -\log(\cot(x/2)) + C$	$G(y) = \int_0^1 (y^2 + y'^2) dx \implies DG(y)(h) = \int_0^1 (2yh + 2y'h') dx$
$\int p(x)e^{kx} \, dx = q(x)e^{kx} + C, \text{ st}(q) = \text{st}(p)$	$\int \frac{1}{\tan(x)} \, dx = \log(\sin(x)) + C$	$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$
$\int e^{ax} \sin(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) + C$	$\int \tan(x) \, dx = -\log(\cos(x)) + C$	$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$
$\int e^{ax} \cos(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos(bx) + b \sin(bx)) + C$	$\int x/(1+x) \, dx = x - \log(x+1) + C$	$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \, dx = \operatorname{arsh} \frac{x}{a} + C = \log x + \sqrt{x^2 + a^2} + C$	$\int x/(1+x) \, dx = x - \log(x+1) + C$	$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$	$\int \sin^2(x) \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$	$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$
$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$	$\int \cos^2(x) \, dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C$	$\tan^2 x = \tan' x - 1$
$\sin^2(x/2) = (1 - \cos(x))/2$	$\cos^2(x/2) = (1 + \cos(x))/2$	

$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} \, dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \log|2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}| + C, & a > 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{-a}} \arcsin((2ax + b)/\sqrt{D}) + C, & a < 0 \end{cases}$

$\int \frac{p(x)}{(x-a)^n (x^2+bx+c)^m} \, dx = A \log|x-a| + B \log|x^2+bx+c| + C \arctan(\frac{2x+b}{\sqrt{-D}}) + \frac{\text{polinom st. ena manj kot spodaj}}{(x-a)^{n-1} (x^2+bx+c)^{m-1}}$

Substitucija: $t = \tan x, \sin^2 x = t^2/(1+t^2), \cos^2 x = 1/(1+t^2), dx = dt/(1+t^2)$

Substitucija: $u = \tan(x/2), \sin x = 2u/(1+u^2), \cos x = (1-u^2)/(1+u^2), dx = 2du/(1+u^2)$