

Premočrtno gibanje

Osnovni vektorji: $\vec{r} = r\vec{e}_r$, $\dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta$, $\ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta})\vec{e}_\vartheta$
 $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta$ in $\dot{\vec{e}}_\vartheta = -\dot{\vartheta}\vec{e}_r$

Newtonov zakon na krivulji: $m(\ddot{s}\vec{e}_T + \kappa\dot{s}^2\vec{e}_N) = \vec{F} + \vec{S}$

Sila je potencialna, če je $\vec{F} = -\text{grad } U = -\frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r$.

Energijska enačba: $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E_0$

Ravnovesna lega: $U'(x) = 0$, stabilna če $U''(x) > 0$.

Relativno gibanje

Količine s' so zapisane v AKS.

$$P' = P'_0 + Q(t)(P - P_0)$$

$$W = Q^T\dot{Q}, \quad W\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{a}$$

Če $Q = R_2R_1$ in poznamo $\vec{\omega}_1, \vec{\omega}_2$, potem $\vec{\omega} = R_1^T\vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_1$.

$$\vec{\zeta} = P - P_0, \quad \vec{v}_{rel} = \dot{\vec{\zeta}}, \quad \vec{a}_{rel} = \ddot{\vec{\zeta}}$$

Newtonove enačbe v RKS:

$$m\ddot{\vec{\zeta}} = \vec{F} - \underbrace{m\vec{a}_0}_{(1)} - \underbrace{m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta})}_{(2)} - \underbrace{m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\zeta}}_{(3)} - \underbrace{2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{\zeta}}}_{(4)}$$

(1) inercialna sila, \vec{a}_0 je pospešek RKS glede na AKS, določimo ga kot $\vec{a}_0 = \ddot{\vec{r}}$, kjer \vec{r} zapisan v AKS

(2) centrifugalna sila,

(3) inercialna sila zaradi kotnega pospeška,

(4) Coriolisova sila.

Sila vezi (če ni trenja): $\vec{S} \cdot \vec{v}_{rel} = 0$.

Pospešek v AKS: $\vec{a}' = \vec{a}'_0 + \dot{\vec{\omega}}' \times \vec{\zeta}' + \vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{\zeta}') + 2\vec{\omega}' \times \dot{\vec{\zeta}}' + \vec{a}'_{rel}$

Sistem materialnih točk in togo telo

Masno središče za sistem točk P_i z masami m_i in homogeno togo telo:

$$P_* = O + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n (P_i - O)m_i \quad P_* = \frac{1}{V} \int_B (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})dV$$

Aksiomi za togo telo:

$$m\ddot{P}_* = \vec{F}'$$

$$\frac{d\vec{L}'(O')}{dt} = \vec{N}'(O')$$

$$\vec{N}'(O') = \vec{N}'(P'_0) + (P'_0 - O') \times \vec{F}'$$

Za vrtilno količino velja: $\vec{L} = J\vec{\omega}$

Za kinetično energijo velja: $T = T_* + T_r$, kjer je $T_* = \frac{1}{2}m\vec{v}_*^2$ in $T_r = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot J\vec{\omega}$ (pri vrtenju okrog izhodišča) in

$$T = \frac{1}{2}m|\vec{v}_*|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot J(P_*)\vec{\omega}$$

Velja energijski zakon: $T + U = E_0$.

Navor: $\vec{N} = \int \vec{r} \times d\vec{F}$ in npr. $d\vec{F} = \rho_F dS$

Velja (za togo telo): $J\dot{\vec{\omega}} = \vec{N}$

Vztrajnostni tenzor

$$\text{Splošna formula: } J(P_0) = \int_B (|\vec{\zeta}|^2 I - \vec{\zeta} \otimes \vec{\zeta}) dm$$

Normala ravnine zrcalne simetrije telesa je glavna smer vztrajnostnega tenzorja $J(P_0)$, kjer je P_0 na ravnini simetrije.

Presek dveh ravnin zrcalne simetrije je glavna smer vztrajnostnega tenzorja.

V telesni bazi je vztrajnostni tenzor enak:

$$J = \int \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} dm$$

Znani vztrajnostni tenzorji v telesni bazi:

krogla: $J = \frac{2}{5}mr^2I$, sfera: $J = \frac{2}{3}mr^2I$, palica okrog sredine: $J = \frac{1}{12}ml^2$, okrog krajišča: $J = \frac{1}{3}ml^2$,

disk okrog središča: $J = \frac{1}{2}mr^2$, okrog premera: $J = \frac{1}{4}mr^2$, obroč: $J = mr^2$,

$$\text{elipsoid: } J = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}m(b^2 + c^2) & & \\ & \frac{1}{5}m(a^2 + c^2) & \\ & & \frac{1}{5}m(a^2 + b^2) \end{bmatrix}$$

stožec (∇) z radijem r in višino h :
$$\begin{bmatrix} \frac{3}{5}mh^2 + \frac{3}{20}mr^2 & & \\ & \frac{3}{5}mh^2 + \frac{3}{20}mr^2 & \\ & & \frac{3}{10}mr^2 \end{bmatrix}$$

pokončen valj: $J = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}m(3r^2 + h^2) & & \\ & \frac{1}{12}m(3r^2 + h^2) & \\ & & \frac{1}{2}mr^2 \end{bmatrix}$

kvader: $J = \begin{bmatrix} \frac{1}{12}m(h^2 + d^2) & & \\ & \frac{1}{12}m(w^2 + d^2) & \\ & & \frac{1}{12}m(w^2 + h^2) \end{bmatrix}$

V prostorsko bazo ga pretvorimo: $J' = Q^T J Q$.

Steinerjev izrek: $J(P_0) = J(P_*) + m|P_* - P_0|^2 I - m(P_* - P_0) \otimes (P_* - P_0)$

Če zarotiramo koordinate (da dobimo vztrajnostne momente okoli drugih osi): nove bazne vektorje izrazimo s starimi kot $\vec{e}_1' = \alpha_{11}\vec{e}_1 + \alpha_{12}\vec{e}_2 + \alpha_{13}\vec{e}_3$ in ostale podobno. Potem so elementi nove matrike vztrajnostnega tenzorja J' enaki:

$$J'_{ij} = \sum_k \sum_l \alpha_{ik} \alpha_{jk} J_{kl}.$$

Rotacije

Rotacije okrog spremenljive osi: $R(\vec{e}(t), \varphi(t))\vec{r} = \cos \varphi \vec{r} + (\vec{e}\vec{r})(1 - \cos \varphi)\vec{e} + \sin \varphi(\vec{e} \times \vec{r})$

Rotacijska matrika za rotacijo:

$$R(\vec{i}, \varphi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad R(\vec{j}, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad R(\vec{k}, \varphi) = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Če je dana rotacijska matrika, potem velja $1 + 2 \cos \varphi = \text{sl}(Q)$. Vektor rotacije je lastni vektor, smer pa določimo tako, da en vektor preslikamo.

Eulerjeve dinamične enačbe

Vektorska oblika: $J(P_*)\dot{\vec{\omega}} + \vec{\omega} \times J(P_*)\vec{\omega} = \vec{N}(P_*)$

$$J_1 \dot{\omega}_1 - \omega_2 \omega_3 (J_2 - J_3) = N_1$$

$$J_2 \dot{\omega}_2 - \omega_3 \omega_1 (J_3 - J_1) = N_2$$

$$J_3 \dot{\omega}_3 - \omega_1 \omega_2 (J_1 - J_2) = N_3$$

Oblika za vrtenje okoli stalne osi, $\vec{\omega} = \omega \vec{k} = \dot{\varphi} \vec{k}$:

$$J_{13} \ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 J_{23} = N_1$$

$$J_{23} \ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 J_{13} = N_2$$

$$J_{33} \ddot{\varphi} = N_3$$

Kotaljenje

Hitrost dotikališča = hitrost težišča + obodna hitrost, tj. $\vec{v}_D = \vec{v}_* + \vec{\omega} \times \vec{r}$.

Pogoj kotaljenja: $\vec{v}_D = \vec{0}$

Sila trenja: $\vec{F}_{tr} = -k \vec{F}_\perp \frac{\vec{v}_D}{|\vec{v}_D|}$

Škripec: pogoj, da vrv drsi na kolutu: $F_2 = F_1 e^{k\vartheta}$.