1. Permutacijske grupe

Definicija: Naj bo G množica nekaterih permutacij nad množico X. Če G tvori grupo za komponiranje, pravimo, da je G **permutacijska grupa**, ki deluje na X.
Naj grupa G deluje na X. Definiramo relacijo: $x \sim y \iff \exists g \in G : g(x) = y$.
Trditev: $\sim$ je ekvivalenčna relacija na X.
Definicija: **Orbite** (glede na delovanje G na X) so ekvivalenčni razredi relacije $\sim$, velja torej: $Gx = \{y \in X; g(y) = x\}$.
Gx... orbita elementa x
$G(x \to y) = \{g \in G; g(x) = y\}$
G_x... stabilizator elementa x: $G(x \to x)$
Izrek: Če je G končna permutacijska grupa, ki deluje na X, tedaj je za vsak $x \in X$: $|G| = |Gx||G_x|$.
Definicija: Naj bo G grupa, ki deluje na X. Za $g \in G$ je $F(g) = \{x \in X; g(x) = x\}$ množica negibnih točk permutacije g.
Izrek: Število orbit pri delovanju G na X je enako: $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|F(g)|$.
Definicija: Naj bo G grupa in X množica. **Reprezentacija** G s permutacijami nad X je predpis $g \in G \mapsto \hat{g}$ permutacija X, tako da je $\widehat{g_1 g_2} = \widehat{g_1}\widehat{g_2}$ za vse $g_1, g_2 \in G$.
$\widehat{G} = \{\widehat{g}; g \in G\}$ je (permutacijska) grupa.
Definicija: Reprezentacija je **zvesta**, če je $\widehat{g_1} = \widehat{g_2} \iff g_1 = g_2$.
Trditev: Vsaka končna grupa premore zvesto reprezentacijo.

2. Simetrije in štetje

Naj bo α_i število disjunktnih ciklov dolžine i v π zapisanem kot produkt disjunktnih ciklov. ($\alpha_1 =$ število negibnih točk π.)
Če $|\pi| = n$, potem $\alpha_i + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n = n$.
$z(\pi; x_1, \ldots, x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ imenujemo **ciklični indeks permutacije** π
Definicija: G permutacijska grupa, tedaj je **ciklični indeks grupe** G:

$$Z(G; x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} z(g; x_1, \ldots, x_n).$$

Vrtiljaku ustreza ciklična grupa, ogrlici pa diedrska. D_{2n} je grupa simetrij pravilnega n-kotnika.
Izrek: $Z(C_n; x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \phi(d) x_d^{\frac{n}{d}}, \quad \phi(2^n) = 2^n - 1.$

Izrek: $Z(D_{2n}; x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2}Z(C_n; x_1, \ldots, x_n) + \begin{cases} \frac{1}{4}(x_1^2 x_2^{\frac{n}{2}-1} + x_2^{\frac{n}{2}}); & n \text{ sod} \\ \frac{1}{2}x_1 x_2^{\frac{n-1}{2}}; & n \text{ lih} \end{cases}$

Delovanje na ploskve nekega telesa je enako kot delovanje na oglišča dualnega telesa. Telesa in njihovi duali:

- kocka $\leftrightarrow$ oktaeder
- tetraeder $\leftrightarrow$ tetraeder
- ikozaeder (12 oglišč, ploskve trikotniki) $\leftrightarrow$ dodekaeder (20 oglišč, ploskve petkotniki)

polieder	$\lvert X\rvert$	$\lvert G\rvert$	Z
tetraeder	4	12	$\frac{1}{12}(x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2$
oktaeder	6	24	$\frac{1}{24}(x_1^6 + 6x_1^2x_4 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_2^3 + 8x_3^2$
kocka	8	24	$\frac{1}{24}(x_1^8 + 8x_1^2x_2^2 + 9x_2^4 + 6x_4^2)$
ikozaeder	12	60	$\frac{1}{60}(x_1^{12} + 24x_1^2x_5^2 + 15x_2^6 + 20x_3^4)$
dodekaeder	20	60	$\frac{1}{60}(x_1^{20} + 20x_1^2x_3^6 + 15x_2^{10} + 24x_5^4)$

3. Število neekvivalentnih barvanj

G grupa, ki deluje na X, $|X| = n$, K naj bo množica r-barv, $w : X \longrightarrow K$ je r-barvanje X, $\Omega = \{w : X \longrightarrow K\}$, $|\Omega| = r^n$
$\widehat{g} : \Omega \longrightarrow \Omega$ ($w \mapsto \widehat{g}(w)$). g je avtomorfizem grafa. Velja: $(\widehat{g}(w))(x) = w(g^{-1}(x))$.
Lema: Preslikava $\widehat{\ }$ je zvesta reprezentacija grupe G.
Grupi G in $\widehat{G} = \{\widehat{g} : \Omega \longrightarrow \Omega\}$ sta izomorfni.
Definicija: Barvanji sta **ekvivalentni**, če sta v isti orbiti grupe $\widehat{G}$, oz. število neekvivalentnih barvanj X glede na G je število orbit G.
Izrek: Naj bo G grupa, ki deluje na X in $r \geq 2$. Tedaj je število neekvivalentnih barvanj X enako $Z(G; r, \ldots, r)$.
$K = \{a, b, \ldots k\}$, $U(a, b, \ldots, k)$... rodovna funkcija za vsa neekvivalentna barvanja glede na delovanje grupe G na n-množico X.
Izrek Polya: Če G deluje na n-množico X in je $K = \{a, b, \ldots, k\}$ množica barv, tedaj je

$$U(a, b, \ldots, k) = Z(G; \sigma_1, \ldots, \sigma_n), \text{ kjer je } \sigma_i = a^i + b^i + \cdots + k^i \quad (1 \leq i \leq n)$$

4. Ramseyeva teorija

Trditev: Naj bodo povezave K_n pobarvane z dvema barvama in naj bo r_i število povezav iz i-tega vozlišča barve 1. Tedaj je število monokromatičnih trikotnikov enako $\binom{n}{3} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r_i(n - 1 - r_i)$.
Posledica: V situaciji iz zadnje trditve imamo vsaj $\binom{n}{3} - \lfloor \frac{n}{2} \lfloor (\frac{n-1}{2})^2 \rfloor \rfloor$ monokromatičnih trikotnikov.
Ramseyev izrek: Naj bo $r \geq 1$ in $a_1, a_2 \geq r$. Tedaj obstaja tako najmanjše naravno število $N(a_1, a_2; r)$, da velja naslednje: naj bo S n-množica, kjer je $n \geq N(a_1, a_2; r)$ in recimo, da smo vse njene r-podmnožice pobarvali z barvo 1 oz. barvo 2. Tedaj S premore a_1-podmnožico, tako da so vse njene r-podmnožice barve 1, ali pa S premore a_2-podmnožico, da so vse njene r-podmnožice barve 2.
Posledica: $N(a_1, a_2; r) \leq N(N(a_1 - 1, a_2; r), N(a_1, a_2 - 1; r); r - 1) + 1$.
Izrek: $N(a_1, a_2; 2) \leq \binom{a_1 + a_2 - 2}{a_1 - 1}$.

$r = 2$:

$a_1 \backslash a_2$	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	14	18	23	28	36	40/42
4		18	25	36/41	49/61	58/84	73/115	92/149
5			43/49	58/87	80/143	101/216	126/316	144/442
6				102/165	113/298	132/495	169/780	179/1171

Izrek: Če je $a \geq 3$, tedaj je $N(a, a; 2) \geq 2^{\frac{a}{2}}$.
Izrek (Erdős, Szekeres): Za vsak $n \geq 3$ obstaja tako najmanjše naravno število N, tako da če imamo N točk v ravnini v splošni legi (nobene 3 niso kolinearne), potem med njimi obstaja n točk, ki določajo konveksen n-kotnik.
Definicija: Naj bodo $G_1, \ldots, G_k$ grafi. **Grafovsko Ramseyevo število** $N(G_1, \ldots, G_k)$ je najmanjši tak N, da če povezave polnega grafa K_N pobarvamo poljubno z barvami $1, 2, \ldots, k$, tedaj v tem K_N najdemo vsaj en G_i, ki je barve i.
Izrek: Če je T drevo z n vozlišči, tedaj je $N(T, K_n) = (n-1)(n-1) + 1$.

Avtor: Klemen Sajovec, manjši popravki: Jure Slak