Premočrtno gibanje

Osnovni vektorji: $\vec{r} = r\vec{e}_r$, $\quad \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta$, $\quad \ddot{\vec{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\vartheta} + r\ddot{\vartheta})\vec{e}_\vartheta$
$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\vartheta}\vec{e}_\vartheta$ in $\dot{\vec{e}}_\vartheta = -\dot{\vartheta}\vec{e}_r$
Newtonov zakon na krivulji: $m(\ddot{s}\vec{e}_T + \kappa\dot{s}^2\vec{e}_N) = \vec{F} + \vec{S}$
Sila je potencialna, če je $\vec{F} = -\operatorname{grad} U = -\frac{\partial U}{\partial r}\vec{e}_r$.
Energijska enačba: $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E_0$
Ravnovesna lega: $U'(x) = 0$, stabilna če $U''(x) > 0$.

Relativno gibanje

Količine s $'$ so zapisane v AKS.
$P' = P_0' + Q(t)(P - P_0)$
$W = Q^T\dot{Q}$, $\qquad W\vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{a}$
Če $Q = R_2R_1$ in poznamo $\vec{\omega}_1$,$\vec{\omega}_2$, potem $\vec{\omega} = R_1^T\vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_1$ in $\vec{\omega}' = \vec{\omega}_2' + R_2\vec{\omega}_1'$.
$\vec{\zeta} = P - P_0$, $\qquad \vec{v}_{\mathrm{rel}} = \dot{\vec{\zeta}}$, $\qquad \vec{a}_{\mathrm{rel}} = \ddot{\vec{\zeta}}$
Newtonove enačbe v RKS:

$$m\ddot{\vec{\zeta}} = \vec{F} - \underbrace{m\vec{a}_0}_{(1)} - \underbrace{m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\zeta})}_{(2)} - \underbrace{m\dot{\vec{\omega}} \times \vec{\zeta}}_{(3)} - \underbrace{2m\vec{\omega} \times \dot{\vec{\zeta}}}_{(4)}$$

(1) inercijska sila, a_0 je pospešek RKS glede na AKS, določimo ga kot $\vec{a}_0 = \ddot{\vec{r}}$, kjer $\vec{r}$ zapisan v AKS
(2) centrifugalna sila,
(3) inercijska sila zaradi kotnega pospeška,
(4) Coriolisova sila.

Sila vezi (če ni trenja): $\vec{S} \cdot \vec{v}_{\mathrm{rel}} = \vec{0}$.
Pospešek v AKS: $\vec{a}' = \vec{a}_0' + \dot{\vec{\omega}}' \times \vec{\zeta}' + \vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{\zeta}') + 2\vec{\omega}' \times \dot{\vec{\zeta}}' + \vec{a}_{\mathrm{rel}}'$

Sistem materialnih točk in togo telo

Masno središče za sistem točk P_i z masami m_i in homogeno togo telo:

$$P_* = O + \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{n}(P_i - O)m_i \qquad P_* = \frac{1}{V}\int_B (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k})dV$$

Aksiomi za togo telo:
$m\ddot{P}_*{}' = \vec{F}'$

$$\frac{d\vec{L}'(O')}{dt} = \vec{N}'(O')$$

$\vec{N}'(O') = \vec{N}(P_0') + (P_0' - O') \times \vec{F}'$
Za vrtilno količino velja: $\vec{\mathscr{L}} = \mathbf{J}\vec{\omega}$
Za kinetično energijo velja: $T = T_* + T_r$, kjer je $T_* = \frac{1}{2}m\vec{v}_*$ in $T_r = \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \mathbf{J}\vec{\omega}$ (pri vrtenju okrog izhodišča) in
$T = \frac{1}{2}m|\vec{v}_*|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega} \cdot \mathbf{J}(P_*)\vec{\omega}$
Velja energijski zakon: $T + U = E_0$.
Navor: $\vec{N} = \int \vec{r} \times d\vec{F}$ in npr. $d\vec{F} = \rho_F dS$
Velja (za togo telo): $\mathbf{J}\dot{\vec{\omega}} = \vec{N}$

Vztrajnostni tenzor

Splošna formula: $\mathbf{J}(P_0) = \int_B (|\vec{\zeta}|^2\mathbf{I} - \vec{\zeta} \otimes \vec{\zeta})dm$

Normala ravnine zrcalne simetrije telesa je glavna smer vztrajnostnega tenzorja $\mathbf{J}(P_0)$, kjer je P_0 na ravnini simetrije.
Presek dveh ravnin zrcalne simetrije je glavna smer vztrajnostnega tenzorja.

V telesni bazi je vztrajnostni tenzor enak:

$$\mathbf{J} = \int \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix} dm$$

Znani vztrajnostni tenzorji v telesni bazi:
krogla: $\mathbf{J} = \frac{2}{5}mr^2\mathbf{I}$, sfera: $\mathbf{J} = \frac{2}{3}mr^2\mathbf{I}$, palica okrog sredine: $J = \frac{1}{12}ml^2$, okrog krajišča: $J = \frac{1}{3}ml^2$,
disk okrog središča: $J = \frac{1}{2}mr^2$, okrog premera: $J = \frac{1}{4}mr^2$, obroč: $J = mr^2$,

elipsoid: $\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5}m(b^2 + c^2) & & \\ & \frac{1}{5}(a^2 + c^2) & \\ & & \frac{1}{5}m(a^2 + b^2) \end{bmatrix}$

stožec ($\bigtriangledown$) z radijem r in višino h: $\begin{bmatrix} \frac{3}{5}mh^2+\frac{3}{20}mr^2 & & \\ & \frac{3}{5}mh^2+\frac{3}{20}mr^2 & \\ & & \frac{3}{10}mr^2 \end{bmatrix}$

pokončen valj: $\mathbf{J}=\begin{bmatrix} \frac{1}{12}m(3r^2+h^2) & & \\ & \frac{1}{12}m(3r^2+h^2) & \\ & & \frac{1}{2}mr^2 \end{bmatrix}$

kvader: $\mathbf{J}=\begin{bmatrix} \frac{1}{12}m(h^2+d^2) & & \\ & \frac{1}{12}m(w^2+d^2) & \\ & & \frac{1}{12}m(w^2+h^2) \end{bmatrix}$

V prostorsko bazo ga pretvorimo: $\mathbf{J'}=Q^T\mathbf{J}Q$.
Steinerjev izrek: $\mathbf{J}(P_0)=\mathbf{J}(P_*)+m|P_*-P_0|^2\mathbf{I}-m(P_*-P_0)\otimes(P_*-P_0)$
Če zarotiramo koordinate (da dobimo vztrajnostne momente okoli drugih osi): nove bazne vektorje izrazimo s starimi kot $\vec{e_1}'=\alpha_{11}\vec{e}_1+\alpha_{12}\vec{e}_2+\alpha_{13}\vec{e}_3$ in ostale podobno. Potem so elementi nove matrike vztrajnostnega tenzorja $\mathbf{J}'$ enaki:

$$J'_{ij}=\sum_k\sum_l\alpha_{ik}\alpha_{jk}J_{kl}.$$

Rotacije

Rotacije okrog spremenljive osi: $\mathcal{R}(\vec{e}(t),\varphi(t))\vec{r}=\cos\varphi\,\vec{r}+(\vec{e}\cdot\vec{r})(1-\cos\varphi)\vec{e}+\sin\varphi(\vec{e}\times\vec{r})$
Rotacijska matrika za rotacijo:

$$\mathcal{R}(\vec{\imath},\varphi)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\varphi&-\sin\varphi\\0&\sin\varphi&\cos\varphi\end{bmatrix}\quad\mathcal{R}(\vec{\jmath},\varphi)=\begin{bmatrix}\cos\varphi&0&\sin\varphi\\0&1&0\\-\sin\varphi&0&\cos\varphi\end{bmatrix}\quad\mathcal{R}(\vec{k},\varphi)=\begin{bmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi&0\\\sin\varphi&\cos\varphi&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

Če je dana rotacijska matrika, potem velja $1+2\cos\varphi=\mathrm{sl}(Q)$. Vektor rotacije je lastni vektor, smer pa določimo tako, da en vektor preslikamo.

Eulerjeve dinamične enačbe

Vektorska oblika: $\mathbf{J}(P_*)\dot{\vec{\omega}}+\vec{\omega}\times\mathbf{J}(P_*)\vec{\omega}=\vec{N}(P_*)$

$$\begin{aligned}J_1\dot{\omega}_1-\omega_2\omega_3(J_2-J_3)&=N_1\\J_2\dot{\omega}_2-\omega_3\omega_1(J_3-J_1)&=N_2\\J_3\dot{\omega}_3-\omega_1\omega_2(J_1-J_2)&=N_3\end{aligned}$$

Oblika za vrtenje okoli stalne osi, $\vec{\omega}=\omega\vec{k}=\dot{\varphi}\vec{k}$:

$$\begin{aligned}J_{13}\ddot{\varphi}-\dot{\varphi}^2J_{23}&=N_1\\J_{23}\ddot{\varphi}-\dot{\varphi}^2J_{13}&=N_2\\J_{33}\ddot{\varphi}&=N_3\end{aligned}$$

Kotaljenje

Hitrost dotikališča = hitrost težišča + obodna hitrost, tj. $\vec{v}_D=\vec{v}_*+\vec{\omega}\times\vec{r}$.
Pogoj kotaljenja: $\vec{v}_D=\vec{0}$
Sila trenja: $\vec{F}_{\mathrm{tr}}=-kF_\perp\frac{\vec{v}_D}{|\vec{v}_D|}$
Škripec: pogoj, da vrv drsi na kolutu: $F_2=F_1e^{k\vartheta}$.