1. Konveksnost

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ je konveksna, če za vsaka $x, y \in A$ in vsak $\lambda \in [0,1]$ velja: $\lambda x + (1-\lambda)y \in A$.

Naj bodo $k \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n, \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Potem je *konveksna kombinacija* $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i$, pri čemer je $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

Lastnosti konveksnih množic:

- A, B konveksni $\Longrightarrow A \cap B$ konveksen.
- $\forall \lambda \in \mathcal{J} : A_\lambda$ konveksna $\Longrightarrow \cap_{\lambda \in \mathcal{J}} A_\lambda$ konveksna.
- A, B konveksni $\Longrightarrow A + B = \{x + y | x \in A, y \in B\}$konveksna (vsota Minkowskega).
- Konveksna množica vsebuje vse konveksne kombinacije svojih elementov.
- $A \subseteq \mathbb{R}^n \Longleftrightarrow \forall \alpha, \beta \geq 0$ velja: $\{\alpha x + \beta y | x, y \in A\} = \{(\alpha + \beta)z | z \in A\}$.
- $A \subseteq \mathbb{R}^m, B \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksni $\Longrightarrow A \times B$ konveksna.
- $A \times B$ konveksna in A, B neprazni $\Longrightarrow A, B$ konveksni.
- $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksni $\Longrightarrow A + B$ konveksna (vsota Minkowskega).
- $\mathcal{C}(A + B) = \mathcal{C}(A) + \mathcal{C}(B)$ (vsota Minkowskega).
- $A, B \subseteq \mathbb{R}^n \Longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{C}(A) \cup \mathcal{C}(B)) = \mathcal{C}(A \cup B)$.

$A \subseteq \mathbb{R}^n$. Konveksna ovojnica množice A je $\mathcal{C}(A) = \cap\{K \subseteq \mathbb{R}^n | K$ konveksna, $A \subseteq K\}$.

Lastnosti konveksnih ovojnic:

- $A \subseteq \mathcal{C}(A)$.
- $\mathcal{C}(A)$ je konveksna.
- $A \subseteq B$, B konveksna $\Longrightarrow \mathcal{C}(A) \subseteq B$.
- Konveksna ovojnica množice A je najmanjša konveksna množica, ki vsebuje A.
- $\mathcal{C}(A)$ je množica vseh konveksnih kombinacij elementov množice A.
- A konveksna $\Longleftrightarrow \mathcal{C}(A) = A$.
- $\mathcal{C}(A \cap B) \subseteq \mathcal{C}(A) \cap \mathcal{C}(B)$.
- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna $\Longrightarrow Cl(A)$ konveksna.
- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna $\Longrightarrow Int(A)$ konveksna.
- Če $A \subseteq B$, tedaj $\mathcal{C})(A) \subseteq \mathcal{A}(B)$.

Funkcija $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je konveksna, če za poljubna $x, y \in \mathbb{R}^n$ in $\lambda \in [0,1]$ velja: $f(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$.

Lastnosti konveksnih funkcij:

- $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ simetrična. Kvadratna forma $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ s predpisom $F(x) =< Ax, x >$. F je konveksna funkcija $\Longleftrightarrow A$ pozitivno semidefinitna.
- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna, $f, g : A \to \mathbb{R}$ konveksni $\Longrightarrow f + g : A \to \mathbb{R}$ konveksna.
- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna, $g : A \to \mathbb{R}$ konveksna, $f : \mathcal{C}(g(A)) \to \mathbb{R}$ konveksna, nepadajoča $\Longrightarrow f \circ g : A \to \mathbb{R}$ konveksna.
- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna, $f : A \to \mathbb{R}$ konveksna, $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2, x \in \lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, x različen od x_1, x_2. Potem velja:
$$\frac{f(x) - f(x_1)}{||x - x_1||} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{||x_2 - x_1||} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{||x_2 - x||}.$$
.
- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna, $f : A \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija $\Longrightarrow f^{-1}(-\infty, a)$ konveksna množica za vsak $a \in \mathbb{R}$.
- $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna, $f, g : A \to \mathbb{R}$ konveksni funkciji $\Longrightarrow \max\{f, g\} : A \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija.

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksna. Točka $a \in A$ je *ekstremna (skrajna) točka* množice A, če $A \backslash \{a\}$ konveksna.

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ je *konveksni stožec*, če za vse $x, y \in A$ in $\lambda, \mu \geq 0$ velja: $\lambda x + \mu y \in A$.

Za $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$ označimo $\mathcal{S}(a_1, \dots, a_k) = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i | \lambda_i, \dots, \lambda_k \geq 0\}$. To je konveksni stožec, ki ga razpenjajo $a_1, \dots, a_k$.

$K \subseteq \mathbb{R}^n$ je *konveksni polieder*, če obstaja $m \in \mathbb{N}, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ in $b \in \mathbb{R}^m$, tako da je $K = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b\}$.

Konveksni polieder v $\mathbb{R}^n$ je presek končno mnogo zaprtih polprostorov v $\mathbb{R}^n$.

K konveksni polieder $\Longleftrightarrow K = A + B$, kjer sta A konveksna ovojnica končne množice in B konveksni stožec $S(a_1, \dots, a_k)$.

Polieder $Ax \leq b$ vsebuje premico, če rang matrike A ni maksimalen.

2. Linearno programiranje

Linearni program (LP) v standardni obliki je optimizacijska naloga oblike:

- Podatki: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}, b \in \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}^n$
- Iščemo: $\max < c, x >$ pri pogojih $Ax \leq b, x \geq 0$.

Slovar $\mathcal{S}$ je dopusten, če so prosti členi v $\mathcal{S}$ nenegativni.

Dopustna rešitev x je bazna dopustna rešitev (bdr), če obstaja dopusten slovar $\mathcal{S}$, tako da velja:

(1) vrednosti nebaznih spremenljivk v x so 0,
(2) vrednosti baznih spremenljivk v x so enake ustreznim prostim členom v $\mathcal{S}$.

sx metoda:

Izbira *vstopajoče* spremenljivke: katerakoli spremenljivka v funkcionalu pod črto s pozitivnim koeficientom. (izrazimo iz enačbe, v kateri je izstopajoča spremenljivka bazna)

Izbira *izstopajoče* spremenljivke: Tista, ki najbolj omejuje povečanje vstopajoče spremenljivke.

Naj bo $\mathcal{S}$ dopusten slovar, v katerem imajo vse spremenljivke v funkcionalu pod črto koeficiente manjše ali enake 0. Potem je bdr x^*, ki jo določa $\mathcal{S}$, optimalna.

Naj bo $\mathcal{S}$ dopusten slovar s funkcionalom $< c, x >= z = v^* + \sum_{k=1}^{n+m} \tilde{c_k} x_k$, kjer so vsi $\tilde{c_k} \leq 0$. Potem je x optimalna rešitev natanko tedaj, ko:

(1) x zadošča $\mathcal{S}$,
(2) $x \geq 0$,
(3) $x_k = 0$ za vse tiste k, za katere je $\tilde{c_k} < 0$.

Naj bo Π LP. Potem sta $D(\Pi), Opt(\Pi)$ konveksna poliedra v $\mathbb{R}^n$.
Bdr x je *izrojena*, če ima v njej vsaj ena bazna spremenljivka vrednost 0.
Če nobena bazna spremenljivka ne omejuje povečanja vstošajoče spremenljivke, je LP *neomejen*.
DVOFAZNA *SX* METODA:
I. FAZA (poiščemo začetno bdr ali pa ugotovimo, da LP nedopusten) - prvotni LP je dopusten natanko tedaj, ko ima pomožni LP optimalno vrednost 0.
Pravila:

(1) Na prvem koraku v bazo vstopi x_0, izstopi pa bazna spremenljivka z najmanjšo vrednostjo.
(2) V nadaljnjih korakih:
  (a) Če je x_0 kandidatka (na kakšnem koraku) za izstopajočo spremenljivko, jo izberemo.
  (b) Če dobimo funkcional z vrednostjo 0, končamo.

Začetnemu slovarju prištejemo v vsaki vrstici x_0, novi funkcional je $w = -x_0$.
II. FAZA
V zadnjem slovarju *I*. faze izpustimo vse člene, ki vsebujejo x_0. Funkcional nadomestimo s prvotnim funkcionalom, kjer vse bazne spremenljivke izrazimo z nebaznimi (s pomočjo slovarja).
Tako dobimo dupusten slovar za prvotni LP.
PREPREČITEV NESKONČNE *SX* METODE
1. Kadar imamo več kandidatk za vstopajočo spremenljivko, izberemo tisto z minimalnim indeksom. Enako za izstopajočo.
PREVEDBA NA ENAKOVREDEN LP V STANDARDNI OBLIKI:
opt $< c, x > +d$ pri pogojih $Ax \leq b, A'x \geq b' A''x = b'', x_i \geq 0$ za nekatere i.

(1) d lahko izpustimo
(2) $\min < c, x >= -\max < -c, x >$
(3) $A'x \geq b' \iff -A'x \leq -b'$
(4) $A''x = b'' \iff A''x \leq b'', -A''x \leq -b''$
(5) Če x_i nima pogoja nenegativnosti, jo razcepimo:

$$x_i = x_i^+ - x_i^-, x_i^+, x_i^- \geq 0.$$

Za vsak LP velja:

(1) je bodisi nedopusten bodisi neomejen bodisi ima optimalno rešitev,
(2) če ima dopustno rešitev, ima bazno dopustno rešitev,
(3) če ima optimalno rešitev, ima bazno optimalno rešitev.

MINIMIZACIJA VSOTE ABSOLUTNIH VREDNOSTI:
Poišči $y_i, i = 1, \ldots, m$, ki minimizira

$$\sum_{i=1}^{p} |\sum_{i=1}^{m} y_i b_{ij} - c_j|$$

pri splošnih linearnih pogojih.

Uvedemo p novih spremenljivk $y_{m+1}, \ldots, y_{m+p}$. y_{m+j} je zgornja meja $j-$tega člena, ki minimizira $\sum_{i=1}^{p} y_{m+i}$. Pogoj za y_{m+j}:

$$y_{m+j} \geq \sum_{i=1}^{m} y_i b_{ij} - c_j, \quad y_{m+j} \geq -(\sum_{i=1}^{m} y_i b_{ij} - c_j)$$

MINIMIZACIJA MAKSIMUMA ABSOLUTNIH VREDNOSTI:
Poišči y, ki minimizira $\max_{1 \leq j \leq p} |\sum_{i=1}^{m} y_i b_{ij} - c_j|$ pri splošnih linearnih pogojih.
Dodamo novo spremenljivko μ:

$$|\sum_{i=1}^{m} y_i b_{ij} - c_j| \leq \mu \quad \forall j$$

in minimiziramo μ pri pogojih

$$\sum_{i=1}^{m} y_i b_{ij} - c_j \leq \mu \quad \text{in} \quad -(\sum_{i=1}^{m} y_i b_{ij} - c_j) \leq \mu.$$

avtor: Klemen Sajovec