1. Permutacijske grupe

Naj grupa G deluje na X. Definiramo relacijo: $x \sim y \iff \exists g \in G : g(x) = y$.
Trditev: $\sim$ je ekvivalenčna relacija na X.
Definicija: **Orbite** (glede na delovanje G na X) so ekvivalenčni razredi relacije $\sim$, velja torej: $Gx = \{y \in X; g(y) = x\}$.
$G \cdot x$... orbita elementa x, $G(x \to y) = \{g \in G; g(x) = y\}$, G_x... stabilizator elementa x: $G(x \to x)$
Izrek: Če je G končna permutacijska grupa, ki deluje na X, tedaj je za vsak $x \in X$: $|G| = |Gx||G_x|$.
Definicija: Naj bo G grupa, ki deluje na X. Za $g \in G$ je $F(g) = \{x \in X; g(x) = x\}$ množica negibnih točk permutacije g.
Burnsideova lema: Število orbit pri delovanju G na X je enako: $\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|F(g)|$.
Definicija: Naj bo G grupa in X množica. **Reprezentacija** G s permutacijami nad X je predpis $g \in G \mapsto \hat{g}$ permutacija X, tako da je $\widehat{g_1 g_2} = \widehat{g_1}\widehat{g_2}$ za vse $g_1, g_2 \in G$.
$\widehat{G} = \{\widehat{g}; g \in G\}$ je (permutacijska) grupa.
Definicija: Reprezentacija je **zvesta**, če je $\widehat{g_1} = \widehat{g_2} \iff g_1 = g_2$.
Trditev: Vsaka končna grupa premore zvesto reprezentacijo.

2. Simetrije in štetje

Naj bo α_i število disjunktnih ciklov dolžine i v π zapisanem kot produkt disjunktnih ciklov. (α_1 = število negibnih točk π.)
Če $|\pi| = n$, potem $\alpha_i + 2\alpha_2 + \ldots + n\alpha_n = n$.
$z(\pi; x_1, \ldots, x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ imenujemo **ciklični indeks permutacije** π
Definicija: G permutacijska grupa, tedaj je **ciklični indeks grupe** G:

$$Z(G; x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} z(g; x_1, \ldots, x_n).$$

Vrtiljaku ustreza ciklična grupa, ogrlici pa diedrska. D_{2n} je grupa simetrij pravilnega n-kotnika.
Izrek: $Z(C_n; x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n}\sum\limits_{d|n}\phi(d) x_d^{\frac{n}{d}}, \quad \phi(2^n) = 2^n - 1.$

Izrek: $Z(D_{2n}; x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2}Z(C_n; x_1, \ldots, x_n) + \begin{cases} \frac{1}{4}(x_1^2 x_2^{\frac{n}{2}-1} + x_2^{\frac{n}{2}}); & n \text{ sod} \\ \frac{1}{2}x_1 x_2^{\frac{n-1}{2}}; & n \text{ lih} \end{cases}$

Delovanje na ploskve nekega telesa je enako kot delovanje na oglišča dualnega telesa. Telesa in njihovi duali:

- kocka $\leftrightarrow$ oktaeder
- tetraeder $\leftrightarrow$ tetraeder
- ikozaeder (12 oglišč, 30 robov, 20 ploskev, ploskve trikotniki) $\leftrightarrow$ dodekaeder (20 oglišč, 30 robov, 12 ploskev, ploskve petkotniki)

polieder	$\lvert X\rvert$	$\lvert G\rvert$	Z
tetraeder	4	12	$\frac{1}{12}(x_1^4 + 8x_1x_3 + 3x_2^2$
oktaeder	6	24	$\frac{1}{24}(x_1^6 + 6x_1^2x_4 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_2^3 + 8x_3^2$
kocka	8	24	$\frac{1}{24}(x_1^8 + 8x_1^2x_3^2 + 9x_2^4 + 6x_4^2)$
ikozaeder	12	60	$\frac{1}{60}(x_1^{12} + 24x_1^2x_5^2 + 15x_2^6 + 20x_3^4)$
dodekaeder	20	60	$\frac{1}{60}(x_1^{20} + 20x_1^2x_3^6 + 15x_2^{10} + 24x_5^4)$

3. Število neekvivalentnih barvanj

G grupa, ki deluje na X, $|X| = n$, K naj bo množica r-barv, $w : X \longrightarrow K$ je r-barvanje X, $\Omega = \{w : X \longrightarrow K\}$, $|\Omega| = r^n$
$\widehat{g} : \Omega \longrightarrow \Omega$ ($w \mapsto \widehat{g}(w)$). g je avtomorfizem grafa. Velja: $(\widehat{g}(w))(x) = w(g^{-1}(x))$.
Lema: Preslikava $\widehat{\cdot}$ je zvesta reprezentacija grupe G.
Grupi G in $\widehat{G} = \{\widehat{g} : \Omega \longrightarrow \Omega\}$ sta izomorfni.
Definicija: Barvanji sta **ekvivalentni**, če sta v isti orbiti grupe $\widehat{G}$, oz. število neekvivalentnih barvanj X glede na G je število orbit G.

Izrek: Naj bo G grupa, ki deluje na X in $r \geq 2$ število barv. Tedaj je število neekvivalentnih barvanj X enako $Z(G; r, \ldots, r)$.

$K = \{a, b, \ldots k\}$, $U(a, b, \ldots, k)$... rodovna funkcija za vsa neekvivalentna barvanja glede na delovanje grupe G na n-množico X.
Izrek Polya: Če G deluje na n-množico X in je $K = \{a, b, \ldots, k\}$ množica barv, tedaj je

$$U(a, b, \ldots, k) = Z(G; \sigma_1, \ldots, \sigma_n), \text{ kjer je } \sigma_i = a^i + b^i + \cdots + k^i \quad (1 \leq i \leq n)$$

4. Ramseyeva teorija

Trditev: Naj bodo povezave K_n pobarvane z dvema barvama in naj bo r_i število povezav iz i-tega vozlišča barve 1. Tedaj je število monokromatičnih trikotnikov enako $\binom{n}{3} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r_i(n-1-r_i)$.
Posledica: V situaciji iz zadnje trditve imamo vsaj $\binom{n}{3} - \lfloor \frac{n}{2}\lfloor(\frac{n-1}{2})^2\rfloor\rfloor$ monokromatičnih trikotnikov.
Ramseyev izrek: Naj bo $r \geq 1$ in $a_1, a_2 \geq r$. Tedaj obstaja tako najmanjše naravno število $N(a_1, a_2; r)$, da velja naslednje: naj bo S n-množica, kjer je $n \geq N(a_1, a_2; r)$ in recimo, da smo vse njene r-podmnožice pobarvali z barvo 1 oz. barvo 2. Tedaj S premore a_1-podmnožico, tako da so vse njene r-podmnožice barve 1, ali pa S premore a_2-podmnožico, da so vse njene r-podmnožice barve 2.
Posledica: $N(a_1, a_2; r) \leq N(N(a_1 - 1, a_2; r), N(a_1, a_2 - 1; r); r - 1) + 1$.
Izrek: $N(a_1, a_2; 2) \leq \binom{a_1+a_2-2}{a_1-1}$.

$r = 2$:

$a_1 \backslash a_2$	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	14	18	23	28	36	40/42
4		18	25	36/41	49/61	58/84	73/115	92/149
5			43/49	58/87	80/143	101/216	126/316	144/442
6				102/165	113/298	132/495	169/780	179/1171

Izrek: Če je $a \geq 3$, tedaj je $N(a, a; 2) \geq 2^{\frac{a}{2}}$.
Izrek (Erdős, Szekeres): Za vsak $n \geq 3$ obstaja tako najmanjše naravno število N, tako da če imamo N točk v ravnini v splošni legi (nobene 3 niso kolinearne), potem med njimi obstaja n točk, ki določajo konveksen n-kotnik.
Definicija: Naj bodo $G_1, \ldots, G_k$ grafi. **Grafovsko Ramseyevo število** $N(G_1, \ldots, G_k)$ je najmanjši tak N, da če povezave polnega grafa K_N pobarvamo poljubno z barvami $1, 2, \ldots, k$, tedaj v tem K_N najdemo vsaj en G_i, ki je barve i.
To število obstaja!
Izrek: Če je T drevo z n vozlišči, tedaj je $N(T, K_n) = (n-1)(n-1) + 1$.

5. Osnove metrične teorije grafov in matrika sosednosti

Definicije:

(1) **Interval** $I_G(u,v)$ med vozliščema u in v v grafu G je množica vozlišč, ki ležijo na najkrajši u,v-poti.
(2) **Ekscentričnost vozlišča** u grafa G, $\mathrm{ecc}_g(u) = \max\{d(u,x); x \in V(G)\}$.
(3) **Polmer** grafa G: $\mathrm{rad}(G) = \min_u \max_v \{d(u,x)\}$ = minimalna ekscentričnost grafa.
(4) **Center** grafa G, $C(G)$, je množica vozlišč, ki realizirajo polmer.
(5) **Premer** grafa, $\mathrm{diam}(G) = \max_{u,v \in V(G)} d(u,v)$.
(6) Podgraf H grafa G je **izometrični podgraf**, če velja: $\forall u,v \in V(H) : d_H(u,v) = d_G(u,v)$.
(7) Podgraf H grafa G je **konveksen**, če velja: $x,y \in V(H) \Longrightarrow I_G(x,y) \subseteq V(H)$.

Izrek: Če je G graf z $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$, tedaj je $(A(G)^r)_{ij}$ število sprehodov med v_i in v_j dolžine r.
Posledica: Če je G povezan graf, potem so diagonalci v $A(G)^2$ stopnje vozlišč grafa, sled matrike $A(G)^3$ je 6-krat število trikotnikov grafa G.
$S_k(G) = \sum_{i=0}^k A(G)^i = I + A(G) + \cdots + A(G)^k$.
Posledica: $\mathrm{rad}(G)$ je najmanjši k, tak da $S_k(G)$ premore vrstico brez ničel in $C(G)$ ustreza vsem vozliščem s takimi vrsticami. $\mathrm{diam}(G)$ je najmanjši k, tak da $S_k(G)$ ne vsebuje nobene ničle.

6. Vložitve metričnih prostorov v grafe

Definicija: Metrični prostor (M,d) je **realiziran** z omrežjem $G = (V,E,w)$, $w : E \longrightarrow \mathbb{R}^+$, če je $M \subseteq V$ in je $d(x,y) = d_G(x,y)\ \forall x,y \in M$. Realizacija $G = (V,E,w)$ metričnega prostora (M,d) je **optimalna:**, če je $w(G) = \sum_{e \in E} w(e)$ najmanjši možen.
Izrek: Vsak metrični prostor premore realizacijo z omrežjem. Vsak končen metričen prostor premore optimalno realizacijo z grafom.
Lema: Naj bo (M,d) metrični prostor z $|M| = n$ in naj bo $G = (V,E,w)$ njegova realizacija, kjer je $|V| > 2^{\binom{n}{2}+1} + n$. Tedaj (M,d) premore realizacijo s pravim podgrafom od G, ki ima kvečjemu $2^{\binom{n}{2}+1} + n$ vozlišč.
Definicija: Metrični prostor (M,d) zadošča **pogoju 4 točk**, če za vsako četverico $x,y,z,t \in M$ velja: $d(x,y)+d(z,t) \leq \max\{d(x,z)+d(y,z), d(x,t)+d(y,t)\}$.
Ekvivalenten pogoj: $s_1 = d(x,y)+d(z,t), s_2 = d(x,z)+d(y,z), s_3 = d(x,t)+d(y,t)$, potem velja, da sta največja s-a enaka.
Izrek: Graf G je drevo natanko tedaj, ko je povezan, brez trikotnikov in njegova metrika zadošča pogoju 4 točk.
Izrek: Končen metričen prostor lahko karakteriziramo z drevesom natanko tedaj, ko njegove točke zadoščajo pogoju 4 točk. V tem primeru je realizacija enolična in jo lahko najdemo v polinomskem času.

7. Wienerjev indeks

Definicija: **Wienerjev indeks** grafa G je $W(G) = \sum_{\{u,v\}} d_G(u,v) = \frac{1}{2}\sum_u \sum_v d_G(u,v)$.
Izrek: Če je T drevo, tedaj je $W(T) = \sum_e n_1(e)n_2(e)$, kjer sta $n_1(e), n_2(e)$ števbili vozlišč v povezanih komponentah grafa $T - e$.
Definicija: G,H grafa. Tedaj je **kartezični produkt** $G \square H$ grafov G in H graf z:

$$V(G \square H) = V(G) \times V(H) \text{ in } (g,h) \sim (g',h') \Longleftrightarrow g = g' \text{ in } hh' \in E(H) \text{ ali } gg' \in E(G) \text{ in } h = h'.$$

Lema o razdalji: Če sta G in H povezana grafa, tedaj je $d_{G\square H} = d_G + d_H$, natančneje $d_{G\square H}((g,h),(g',h')) = d_G(g,g') + d_H(h,h')$.
Trditev: Če sta G in H povezana grafa, tedaj je $W(G\square H) = |V(G)|^2 W(H) + |V(H)|^2 W(G)$.
Posledica: $W(Q_n) = n2^{2(n-1)}$; $n \geq 1$.

8. Vaje

Trditev: Naj bo $X = X_1 \amalg X_2$, $|X_1| = n_1, |X_2| = n_2, |X| = n$. Naj G_1 deluje na X_1 in G_2 na X_2. Potem velja, da je

$$Z(G_1 \times G_2; x_1, x_2, \ldots x_n) = Z(G_1; x_1, \ldots, x_{n_1}) Z(G_2; x_1, \ldots, x_{n_2}),$$

kjer $G_1 \times G_2$ deluje na X na naraven način.
$N(2,k;2) = k$
Definicija: Naj bo G graf. Podmnožica $A \subseteq V(G)$ je **klika** v G, če sta vsaki dve vozlišči iz A sosednji v G. Podmnožica $B \subseteq V(G)$ je **neodvisna množica** v G, če nobeni dve vozlišči iz B nista sosednji v G.
Lema: V grafu z n vozlišči obstaja klika velikosti $\lfloor \frac{1}{2}\log_2 n \rfloor$ ali neodvisna množica velikosti $\lfloor \frac{1}{2}\log_2 n \rfloor$.
Trditev: Naključni graf na n vozliščih ima (z veliko verjetnostjo, tj. $P \to 1$ ko $n \to \infty$) največjo kliko in največjo neodvisno množico velikosti $C\log n$.
Lema: Naključni graf na n vozliščih ima največjo kliko in neodvisno množico velikosti $\leq 2\log n$.
Trditev: Naj bosta $N(a-1,b;2)$ in $N(a,b-1;2)$ obe sodi. Potem velja:

$$N(a,b;2) \leq N(a-1,b;2) + N(a,b-1;2) - 1.$$

Lema: Za vsak $m \in \mathbb{N}$ obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da vsako zaporedje n realnih števil vsebuje monotono podzaporedje dolžine m. $n = N(m,m;2)$.
Lema: Za $n \geq N(m,m;2)$ ima vsaka $\{0,1\}$-matrika glavno podmatriko velikosti m, v kateri so vsi elementi nad diagonalo enaki. Za $n = N(N(m,m;2), N(m,m;$ ima matrika glavno podmatriko, v kateri so vsi elementi nad diagonalo enaki in vsi elementi pod diagonalo enaki.
Lema: $N(\underbrace{3,3,\ldots,3}_{k};2) \leq \lfloor ek! \rfloor + 1$.
Velja: $\lfloor ek! \rfloor = 1 + \lfloor e(k-1)! \rfloor k$.
Schurov izrek: Za vsak $k \in \mathbb{N}$ obstaja $n \in \mathbb{N}$, da za vsako k-barvanje množice $[n]$ obstajajo števila $x,y,z \in [n]$ iste barve z lastnostjo $x+y=z$.
Lema: $N(2K_3, K_3) = 8$, $N(mK_3, mK_3) = 5m$ za $m \geq 2$.
T drevo. Potem $C(T)$ vsebuje bodisi 1 bodisi 2 vozlišči.
$\mathrm{rad}(G) \leq \mathrm{diam}(G) \leq 2\,\mathrm{rad}(G)$
$W(K_{1,n}) = n^2, n \geq 3$, $W(P_n) = \frac{1}{6}n(n^2-1), n \geq 2$, $W(K_{1,n} \square P_n) = \frac{1}{6}(n+1)^2 n(n^2-1)$.
Pogoj 4 točk implicira trikotniško neenakost.
Razdalja v drevesu zadošča pogoju 4 točk.

9. Uporabno

D_{2n} = grupa simetrij pravilnega n-kotnika. $|D_{2n}| = 2n$, $D_{2n} = \langle \text{rotacija za } \frac{2\pi}{n}, \text{zrcaljenje} \rangle$. Naj bo $r =$ rotacija za $\frac{2\pi}{n}$ in z zrcaljenje. Velja $r^i z = zr^{-i}$.
Vsi elementi D_{2n} so oblike: r^i, $i = 0,1,\ldots,n-1$ in zr^i, $i = 0,1,\ldots,n-1$.
Koliko je različnih ogrlic iz kroglic različnih barv? Poišči grupo avtomorfizmov, oz. njene predstavnike in poglej, koliko že pobarvanih ogrlic fiksirajo. Npr. id fiksira $\binom{n}{r}$ ogrlic, kjer je n število biserov in r število barv.
Število različnih objektov z npr. k belimi in l črnimi deli: uporabi izrek Polya in iščeš koeficient pred $b^k c^l$.
Ciklični indeksi S_2, S_3, S_4, S_5, ki delujejo na $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_4$, $\mathbb{Z}_5$:

- $Z(S_2; x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2)$
- $Z(S_3; x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1x_2 + 2x_3)$
- $Z(S_4; x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{24}(x_1^4 + 6x_2x_1^2 + 3x_2^2 + 8x_3x_1 + 6x_4)$
- $Z(S_5; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{1}{120}(x_1^5 + 10x_2x_1^2 + 15x_2^2x_1 + 20x_3x_1^2 + 20x_3x_2 + 30x_4x_1 + 24x_5)$

Q_n: $V(Q_n) = \{0,1\}^n = \{b_1 \ldots b_n; b_i \in \{0,1\}\}$, $u = b_1 \ldots b_n, v = c_1 \ldots c_n \in V(Q_n)$. $uv \in E(Q_n) \Longleftrightarrow \exists! i : b_i \neq c_i$.

Avtor: Klemen Sajovec, manjši popravki: Jure Slak