Preštevalna kombinatorika

Dirichletov princip: Če n predmetov razporedimo v k škatel, kjer $n > k$, potem vsaj ena od škatel vsebuje vsaj 2 predmeta.
Posplošitev: Če n predmetov razporedimo v k škatel, potem vsaj ena od škatel vsebuje vsaj $\lceil \frac{n}{k} \rceil$ predmetov.

Množice in multimnožice: $S = [n] \implies |S^T| = |S|^{|T|}, |2^S| = 2^{|S|}, |\mathfrak{S}(S)| = n!, \left|\binom{S}{k}\right| = \binom{|S|}{k}$. Multimnožica $f\colon S \to \mathbb{N}, f(s) =$ kolikokrat se s pojavi,
f je podmultimnožica g, če $\forall s : f(s) \leq g(s)$, št. podmultimnožic: $\prod_{s\in S}(1 + f(s))$
št. premutacij multimnožice $M = \{1^{a_1}, 2^{a_2}, \ldots, n^{a_n}\}, \sum a_i = N : \binom{N}{a_1,\ldots,a_n} = \frac{N!}{a_1!\cdots a_n!}$
(razvrstimo N elementov v n kategorij, v vsako a_i elementov).

Binomski koeficienti: $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{k} = 0$, za $k < 0, k > n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
Rekurzivna zveza: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$
Rodovna funk.: $\sum_k \binom{n}{k} x^k = (1 + x)^n$, $\sum_{n,k} \binom{n}{k} x^k t^n = \frac{1}{1-(1+x)t}$, $\sum_n \binom{n}{k} x^n = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}$
Ostale enakosti: $\sum_k \binom{n}{k} = 2^n, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}, 2^{n-l}(n)_l = \sum_k (k)_l \binom{n}{k}, \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0 (n \geq 1), \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}, \binom{n+m}{k} = \sum_i \binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$

Kompozicije: Kompozicija št. n je zaporedje $(\lambda_1, \ldots, \lambda_\ell), \lambda_i \in [n]$, pri čemer je $\sum_{i=0}^{\ell} \lambda_i = n$.
Št. kompozicij n je 2^{n-1}. Št. kompozicij s k deli je $\binom{n-1}{k-1}$.
Drugače povedano, enačba $x_1 + \cdots + x_k = n$, $x_i \in \{1, \ldots, n\}$ ima $\binom{n-1}{k-1}$ rešitev.
Pri šibkih kompozicijah dopuščamo $\lambda_i = 0$. Število šibkih kompozicij s k deli označimo z $\left(\!\binom{k}{n}\!\right) = \binom{n+k-1}{n-1}$. Šteje tudi izbire n izmed k elementov, pri čemer se elementi ponavljajo.
Enačba $x_1 + \cdots + x_k = n$, $x_i \in \{0, \ldots, n\}$ ima $\left(\!\binom{k}{n}\!\right)$ rešitev.
Enačba $x_1 + \cdots + x_k \leq n$, kjer $x_i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, ima $\binom{n}{k}$ rešitev.

Permutacije: Kanonični zapis: v vsakem ciklu na začetku največja številka, cikli urejeni naraščajoče po prvem elementu. Foatojeva transformacija: zbrišemo oklepaje v kanoničnem zapisu. Je bijekcija (inverz: poiščemo LD maksimume, z njimi se začnejo cikli).

Koliko je premutacij s predpisanimi cikli: a_1 ciklov dolžine 1, ..., a_n ciklov dolžine n? Če je $\sum_i ia_i = n$, potem $\dfrac{n!}{1^{a_1}a_1!\cdots n^{a_n}a_n!}$, sicer 0.
$i \in [n]$ je v nekem k-ciklu za $(n-1)!$ premutacij.
$i, j \in [n], i \neq j$, sta v istem ciklu v $n!/2$ premutacijah.
Permutacija dolžine n ima v povprečju H_n ciklov.
Permutacija ima kvadratni koren $\iff$ ima sodo ciklov sode dolžine.
Permutacijska matrika: $(A_\pi)_{i,j} = 1$ ntk. $\pi(i) = j$. Velja $|\det(A_\pi)| = 1$, $A_\pi A_\sigma = A_{\pi\sigma}$ in $\pi\sigma$ ter $\sigma\pi$ imata enako fiksnih točk.

Stirlingova števila 1. vrste: Koliko je premutacij v $\mathfrak{S}_n$ s k cikli: $c(n, k)$.
Predznačeno število: $s(n, k) = (-1)^{n-k}c(n, k)$.
Vrenosti: $c(n, 1) = (n-1)!, c(n, n) = 1, c(n, n-1) = \binom{n}{2}, c(0, 0) = 1, c(n, k) = 0$, za k < 0, k > n.
Rekurzivna zveza: $c(n, k) = c(n-1, k-1) + (n-1)c(n-1, k)$
Rodovna funkcija: $\sum_k c(n, k)x^k = x(x + 1)\cdots(x + n - 1), \sum_k s(n, k)x^k = (x)_n$.
Števila $c(n, k)$ štejejo tudi permitacjie n elementov s k LD maksimumi (Foatojeva transf.) Števila $c(n, k)$ štejejo tudi št. zaporedij $(a_i)_{i=1}^n, 0 \leq a_i \leq n - i$, ki vsebujejo

natanko k ničel.
Za fiksen k je $c(n, n-k)$ polinom v n stopnje $2k$.

Inverzije: (i, j) je inverzija, če je $i < j$ in $\pi(i) > \pi(j)$. Z $\mathrm{inv}(\pi)$ označimo št. inverzij v π. Velja $sign(\pi) = (-1)^{\mathrm{inv}(\pi)}$.
Velja: $\ell(\pi) = \mathrm{inv}(\pi)$, kjer $\ell(n)$ dolžina premutacije, to je najmanjše število enostavnih transpozicij $((i, i+1))$, iz katerih dobimo π.
Velja: $\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_n} q^{\mathrm{inv}(\pi)} = 1(1+q)(1+q+q^2)\cdots(1+q+\cdots+q^{n-1}) = \underline{n}!$.
Tabela inverzij: $i(\pi) = (a_1, \ldots, a_n)$, kjer $a_k = \#$ inverzij (π_i, π_j), kjer $\pi_j = k$. Izkaže se $0 \le a_k \le a_{n-k}$. Te tabele so v bijektivni korespondenci z $\mathfrak{S}_n$.

***q*-izreki:** Oznaka: q-naravna števila: $\underline{n} = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$. Definiramo tudi $\underline{n}! = \underline{1}\cdots\underline{n}$ in $\binom{\underline{n}}{\underline{k}} = \frac{\underline{n}!}{\underline{k}!\underline{n-k}!}$. Lastnosti: $\binom{\underline{n}}{\underline{0}} = 1$, $\binom{\underline{n}}{\underline{n}} = 1$, $\binom{\underline{n}}{\underline{1}} = \underline{n}$, $\binom{\underline{n}}{\underline{k}} = \binom{\underline{n}}{\underline{n-k}}$,
$\binom{\underline{n}}{\underline{k}} = \binom{\underline{n-1}}{\underline{k-1}} + q^k\binom{\underline{n-1}}{\underline{k}} = \binom{\underline{n-1}}{\underline{k}} + q^{n-k}\binom{\underline{n-1}}{\underline{k-1}}$.
Definiramo q-multinomski simbol: $\binom{\underline{N}}{\underline{a_1}\ldots\underline{a_n}} = \binom{\underline{N}}{\underline{a_1}}\binom{\underline{N-a_1}}{\underline{a_2}}\binom{\underline{N-a_1-a_2}}{\underline{a_3}}\cdots$
q-binomski izrek: $\prod_{i=0}^{n-1}(1+q^i t) = \sum_{k=0}^{n} q^{\binom{k}{2}}\binom{\underline{n}}{\underline{k}} t^k$
Izrek: $M = \{1^{a_1}, \ldots, n^{a_n}\}$ multimnožica, $N = \sum_i a_i$. Potem je: $\sum_{\pi\in\mathfrak{S}(M)} q^{\mathrm{inv}(\pi)} = \binom{\underline{N}}{\underline{a_1}\ldots\underline{a_n}}$.
Izrek: V $\mathbb{F}_q^n$ je $\binom{\underline{n}}{\underline{k}}$ vektorskih podprostorov dimenzije k.

Eulerjeva števila: permutacija π je alternirajoča, če velja $\pi(1) > \pi(2) < \pi(3) > \cdots$ ali obratno alternirajoča, če velja $\pi(1) < \pi(2) > \pi(3) < \cdots$. Število alternirajočih permutacij označimo z E_n in imenujmo Eulerjevo število.
Rekurzivna zveza: $2E_{n+1} = \sum_k \binom{n}{k} E_k E_{n-k}$.
Rodovna funkcija: $\sum_n E_n \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{\cos(x)} + \tan(x)$ (lihi so $\tan(x)$ in sodi so $\frac{1}{\cos(x)}$).

Bernoullijevo število: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \ldots$

$$B_n = \begin{cases} 0 & \text{če } n = 0 \\ 1/2 & \text{če } n = 1 \\ 0 & \text{če } n > 1 \text{ lih} \\ \frac{(-1)^{\frac{n}{2}+1} n E_{n-1}}{2^n(2^n-1)} & \text{če } n > 1 \text{ sod} \end{cases}$$

Rodovna funkcija: $\frac{xe^x}{e^x-1} = \sum_n B_n \frac{x^n}{n!}$

Faulhaberjeva formula:

$$\sum_{j=1}^{n} j^k = \frac{1}{k+1}\sum_{\ell=0}^{k}\binom{k+1}{\ell} B_\ell n^{k+1-\ell} =$$
$$= \frac{n^{k+1}}{k+1} + \frac{n^k}{2} + \frac{\binom{k}{1}}{4\cdot 3} n^{k-1} - \frac{\binom{k}{3}2}{16\cdot 15} n^{k-3} + \frac{\binom{k}{5}16}{64\cdot 63} n^{k-5} - \frac{\binom{k}{7}272}{256\cdot 255} n^{k-7} + \cdots$$

Eulerska števila: padec permutacije $\pi \in \mathfrak{S}_n$ je tak i, da je $1 \le i \le n-1$, da je $\pi(i) > \pi(i+1)$. Eulersko število $A(n, k)$ je število permutacij s $k-1$ padci.
Rekurzivna zveza: $A(n, k) = kA(n-1, k) + (n+1-k)A(n-1, k-1)$.
Rodovna funckija: če označimo z $A_n(x) = \sum_{k=1}^{n} A(n, k)x^k$, potem velja: $\sum_m m^n x^m = \frac{A_n(x)}{(1-x)^{n+1}}$.
Rodovna funkcija: $\sum_n A_n \frac{t^n}{n!} = \frac{1-t}{1-xe^{(1-x)t}}$, $x^n = \sum_k A(n, k)\binom{x+k-1}{n}$.

Razdelitev množice $[n]$ je množica blokov $\{A_1, \ldots A_k\}$, kjer je $A_i \neq \emptyset$, $A_i \cap A_j = \emptyset$, $\bigcup_{i=1}^k A_i = [n]$.

Stirlingova števila 2. vrste: $S(n,k)$ je število razdelitev množice $[n]$ na k blokov.
Eksplicitna zveza: $S(n,k) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \frac{i^n}{i!(k-i)!}$
Število surjekcij $[n] \to [k]$ je $k!S(n,k) = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} \binom{k}{i} i^n$.
$S(n,0) = \delta_{0n}, S(n,1) = 1, S(n,n) = 1, S(n,n-1) = \binom{n}{2}, S(n,2) = 2^{n-1} - 1$, $S(n,k) = 0,\ \text{za } k < 0, k > n$.
Očitno velja: $\sum_{k=0}^n S(n,k) = B(n)$.
Rekurzivna zveza: $S(n,k) = S(n-1,k-1) + kS(n-1,k),\ S(n+1,m+1) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} S(k,m)$
Rodovna funkcija: $x^n = \sum_k S(n,k)(x)_k$.
Rodovna funkcija: $\sum_n S(n,k)x^n = \frac{x^k}{(1-x)(1-2x)\cdots(1-kx)}$, $\sum_n S(n,k)\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}(e^x - 1)^k$.
Velja: $n! \leq S(2n,n) \leq (2n)!$
$S(n,k) = \#$ zaporedji $a_1, \ldots, a_n; a_i \in [k], \forall j \in [k] \exists i : a_i = j$ in prva pojavitev j je pred prvo pojavitvijo $j+1$

Bellova števila: $B(n)$ je število razdelitev $[n]$.
$B(0) = B(1) = 1$
Rekurzivna zveza: $B(n+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B(k)$
Rodovna funkcija: $\sum_n B(n)\frac{x^n}{n!} = e^{e^x - 1}$.
Velja: $B(n) \leq n!$ $B(n) = \#$ premutacij $w \in S_n$, da ni res: $\exists i < j : w_i < w_{j+1} < w_j$
$S(n, n-k) =$ polinom v n stopnje $2k$ (za fiksen k)

Lahova števila: število razdelitev $[n]$ na k linearno urejenih nepraznih blokov.
$L(0,0) = 1$ in $L(n,0) = 0$ za $n \geq 1$, $L(n,1) = n!, L(n,n) = 1, L(n,n-1) = n(n-1)$
Eksplicitna formula: $L(n,k) = \binom{n-1}{k-1}\frac{n!}{k!}$
Rekurzivna zveza: $L(n,k) = L(n-1,k-1) + (n+k-1)L(n-1,k)$
Rodovna funkcija: $\sum_n L(n,k)\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}(\frac{x}{1-x})^k, \sum_k L(n,k)(x)_k = (x)^n$

Razčlenitve: Razčlenitev/particija n je $(\lambda_1, \ldots, \lambda_l)$, kjer $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_l > 0$ cela števila in $\lambda_1 + \cdots + \lambda_l = n$.
Diagram: v vsako vrstico damo λ_i pikic.
Konjugirana razčlenitev λ': transponiramo diagram λ. Velja: $\lambda'_j = \max\{j, \lambda_j > i\}$
$p_k(n) = \#$ razčlenitev n na k delov.
$\overline{p_k}(n) = \#$ razčlenitev n na največ k delov.
$p(n) = \#$ razčlenitev n na poljubno mnogo delov.
$l(n) = \#$ razčlenitev n s samimi lihimi deli.
$r(n) = \#$ razčlenitev n s samimi različnimi deli.
Rekurzivna zveza: $p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)$
Rodovna funkcija: $\sum_n p(n)x^n = \prod_{i\geq 1}\frac{1}{1-x^i}, \sum_n l(n)x^n = \prod_{i\geq 1}\frac{1}{1-x^{2i-1}}, \sum_n r(n)x^n = \prod_{i\geq 1}(1+x^i)$
Veljajo naslednje enakosti:

- $\overline{p_k}(n) = \#$ razčlenitev n z deli $\leq k$
- $l(n) = r(n)$
- $\#$ razčlenitev n z lihimi deli $= \#$ razčlenitev n z različnimi deli
- $\#$ razčlenitev n z deli $\geq 2 = p(n) - p(n-1)$
- $\#$ razčlenitev n, kjer je razlika med prvima dvema deloma vsaj $3 = p(n-3)$
- $\#$ razčlenitev n, kjer je razlika med prvima dvema deloma enaka $3 = p(n-3) - p(n-4)$

Petkotniška števila: $s(n) = \#$ razčlenitev n na sodo mnogo različnih delov - $\#$ razčlenitev n na liho mnogo različnih delov
Rodovna funkcija: $\prod_{i\geq 1}(1-x^i) = \sum_n s(n)x^n$
Lema: $s(n) = (-1)^r$, če $n = \frac{r(3r\pm 1)}{2}$ in 0 sicer
Eulerjev petkotniški izrek: $p(n) = p(n-1) + p(n-2) - p(n-5) - p(n-7) + p(n-12) + p(n-15) - \ldots$

Fibonaccijeva števila: $F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$

- $\#$ podmnožic $S \subseteq [n]$, ki ne vsebujejo 2 zaporednih števil $= F_{n+2}$
- $\#$ kompozicij števila n z deli 1 in 2 $= F_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k}$
- $\#$ kompozicij n, kjer so vsei deli $> 1 = F_{n-1}$
- $\#$ kompozicij n s samimi lihimi deli $= F_n$
- $\#$ n-teric $(a_1, \ldots, a_n)$, kjer $a_i \in \{0,1\}$ in $a_1 \leq a_2 \geq a_3 \leq a_4 \geq \ldots = F_{n+2}$
- $\#$ n-teric $(T_1, \ldots, T_n), T_i \subseteq [k], T_1 \subseteq T_2 \supseteq T_3 \subseteq T_4 \supseteq \ldots = (F_{n+2})^k$
- $\#$ urejenih parov (S, w), kjer $S \subseteq [n]$ in $w \in S_n$, da $w(i) \notin S \forall i \in S = n! F_{n+1}$

Načelo vključitev in izključitev: $A_1, \ldots, A_n \subseteq A$:
Moč unije: $|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}|$
Moč preseka kompl: $|A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c| = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_j \leq n} |A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_j}| = \sum_{S \subseteq [n]} (-1)^{|S|} |A_S|$
Primeri uporabe: Število surjekcij, Eulerjeva funkcija ϕ

Zanimivi objekti z vaj:

- podmnožice v $[n] \ldots 2^n = \sum_k \binom{n}{k}$
- k-terice v $[n] \ldots (n)_k$
- k-terice $(a_1, \ldots, a_k)$, kjer $a \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_k \leq n$ in $a_{i+1} - a_i \geq j$: ekvivalentno $1 \leq a_1 < a_2 - (j-1) < a_3 - 2(j-1) < \ldots < a_k - (k-1)(j-1) \leq n - (k-1)(j-1)$ in jih je $\binom{n-(k-1)(j-1)}{k}$
- $(A_1, \ldots, A_k), A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_k \subseteq [n]$ je $(k+1)^n$
- $(A_1, \ldots, A_k)$, kjer so A_i paroma disjunktne, je $(k+1)^n$
- $(A_1, \ldots, A_k)$, kjer je $A_1 \cap \ldots \cap A_k = \emptyset$, je $(2^k - 1)^n$

Uporabno: $\frac{1}{(1-x)^{d+1}} = \sum_n \binom{n+d}{d} x^n$
Če dokazuješ $C = A - B$ lahko narediš bijekcijo med $C + B$ in A, ali pa najdeš injekcijo $f\colon B \to A$, kjer $|Imf| = B, |(Imf)^c| = C$ ter nato $A = |Imf| + |(Imf)^c| = B + C$.

Izbori k elementov iz n-množice:

urejeni/ponavljanje	DA/DA	DA/NE	NE/DA	NE/NE
število	n^k	$(n)_k$	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k}$

Dvanajstera pot:
Razporejamo n predmetov v r predalov. Ali ločimo elemente, dopuščamo prazne predale, dopuščamo več kot en predmet v predalu? Glejmo $f\colon [n] \to [r]$.

predmeti/predali \ f	poljubna	injektivna	surjektivna
DA/DA	r^n	$(r)_n$	$r! S(n,r)$
NE/DA	$\left(\!\binom{r}{n}\!\right) = \binom{r+n-1}{n}$	$\binom{r}{n}$	$\binom{n-1}{r-1}$
DA/NE	$\sum_{k=1}^{r} S(n,k)$	$n \leq r$	$S(n,r)$
NE/NE	$\overline{p_k}(n)$	$n \leq r$	$p_r(n)$