

**Trik** za neskončne sisteme NDE za  $x_n(t)$ : rešimo ga s pomočjo rodovne funkcije  $Q(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t)y^n$ . Velja:  $yQ_y = \sum_{n=1}^{\infty} nx_n(t)y^n$ ,  $Q_y - Q/y = \sum_{n=1}^{\infty} nx_{n+1}y^n$ . Z upoštevanjem rekurzivne zveze dobimo PDE za  $Q$ , rešimo, razvijemo rešitev v vrsto po  $y$ .

Zanimivi vzorci:  $(x^2)' = 2x\dot{x}$ ,  $(xy)' = \dot{x}y + x\dot{y}$ ,  $(\ln x)' = \frac{\dot{x}}{x}$ .

Če  $u = u(x, y)$  določa ploskev v prostoru, je enačba tangentne ravnine na to ploskev v točki  $(x, y, u(x, y))$  enaka:  $u_x(X - x) + u_y(Y - y) - (U - u) = 0$  (normala ravnine je  $(A, B, C) = (u_x, u_y, -1)$ ). Razdalja od tangentne ravnine do točke  $(a, b, c)$  je:

$$d(AX + BY + CU + D = 0, (a, b, c)) = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

## EKSISTENČNI IZREK ZA NELINEARNE PDE 1. REDA

IZREK: Naj bo  $u = u(x, y)$  rešitev začetnega problema

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad u(\alpha(s), \beta(s)) = \gamma(s), \quad \text{za } s \in \mathcal{I}.$$

Če sta  $p(s) = u_x(\alpha(s), \beta(s))$  in  $q(s) = u_y(\alpha(s), \beta(s))$  edini funkciji, za kateri velja:

- (1)  $(T) = \det \begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \\ F_p & F_q \end{bmatrix}(s) \neq 0 \quad \forall s \in \mathcal{I},$
- (2)  $F(\alpha(s), \beta(s), \gamma(s), p(s), q(s)) = 0 \quad \forall s \in \mathcal{I},$
- (3)  $(p(s), q(s), -1) \cdot (\alpha'(s), \beta'(s), \gamma'(s)) = 0 \quad \forall s \in \mathcal{I}.$

Potem je rešitev  $u$  enolična.

## SEPARACIJA SPREMENLJIVK

$L^2([-\pi, \pi]) = \{f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx < \infty\}$  je vektorski prostor s skalarnim produktom  $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$ . Množica funkcij  $\{\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi} \sin x, \frac{1}{\pi} \cos x, \frac{1}{\pi} \sin 2x, \frac{1}{\pi} \cos 2x, \dots\}$  je kompleten (vsako funkcijo se da na enoličen način razviti v tem sistemu), ortonormiran sistem za ta produkt.

**Fourierjev razvoj:**  $f \in L^2([-\pi, \pi])$ :

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \\ a_n &= \langle f, \frac{1}{\pi} \cos nx \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ b_n &= \langle f, \frac{1}{\pi} \sin nx \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

**Sinusna in kosinusna vrsta:**  $f \in L^2([0, \pi])$ . Za tako funkcijo obstaja liha in soda razširitev na  $[-\pi, \pi]$ . Za  $\tilde{f}^S$  so  $b_n = 0$ , za  $\tilde{f}^L$  pa  $a_n = 0$ .

POSLEDICA: Na  $[0, \pi]$  za  $f$  obstajata dva razvoja: **sinusna vrsta:**  $\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \sin nx$  in **kosinusna vrsta:**

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cos nx, \text{ kjer sta:} \\ \tilde{a}_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n \in \mathbb{N}, \\ \tilde{b}_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}_0. \end{aligned}$$

S substitucijo lahko razvoje prevedemo na poljuben interval  $[-L, L]$  oz.  $[0, L]$ ,  $L > 0$ . V tem primeru je

$$\{\frac{1}{2L}, \frac{1}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}, \frac{1}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}, \dots\} \text{ KONS.}$$

**Metoda separacije:** Kdaj jo uporabimo: Trivialen pogoj: Imamo eno spremenljivko na omejenem območju in s homogenimi robnimi pogoji, npr.

$$x \in [0, L]: \alpha u(0, t) + \beta u_x(0, t) = 0, \quad \gamma u(L, t) + \delta u_x(L, t) = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

Netrivialen pogoj: Diferencialni operator, ki določa PDE, zadošča Sturm-Liouvilovi teoriji, tj. množica lastnih funkcij, ki jih dobimo iz robnega problema tvori K.O.N.S.

**Štirje koraki metode:**

#1: Separacija: nastavek  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . (Nastavek vstavi v enačbo in loči spremenljivke, dobljeno enačbo pa enači z  $\mu \in \mathbb{R}$ .)

#2: Določanje lastnih funkcij  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  iz robnega problema za NDE. (Reši NDE za  $X$ , homogeni robni pogoji ti dajo začetne pogoje za NDE. Obravnavati moraš možnosti  $\mu > 0, \mu = 0, \mu < 0$ . Če je v kakšnem primeru  $X \equiv 0$ , lastnih funkcij v tem primeru ni. Pri izbire množice lastnih funkcij, lahko splošno konstanto za vsak člen BŠS postaviš na 1.)

#3: Iskanje pripadajočih  $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . (Z  $\mu$ , ki ga dobiš v #2 in določa družino lastnih funkcij, reši še NDE za  $T$ . Splošno konstanto lahko tu pustiš, lahko si misliš, za je v njej spravljena konstanta iz množice lastnih funkcij za  $X$ .)

#4: Splošna rešitev  $u = \sum_{n=1}^{\infty} X_n T_n$ . (Rešitev naj bi bila odvisna od števno mnogo konstant, ki jih določiš iz nehomogenega robnega pogoja. Dobro je opaziti morebitne sinusne/kosinusne vrste, ki jih dobiš z robnim pogojem, in upoštevati zvezo s koeficienti iz razvoja v sinusno/kosinusno vrsto, torej  $C_n = a_n$  ali  $b_n$ .)

Če za nobeno od spremenljivk nimamo homogenega robnega pogoja, razbijemo problem na dva dela, npr:  $\Delta u = 0$  razbijemo na  $u = v + w$ ,  $\Delta v = 0$  in  $\Delta w = 0$ , pri čemer  $v$ -ju in  $w$ -ju damo vsakemu en homogen robni pogoj in en pogoj, ki je od  $u$ -ja.

**Reševanje nehomogene enačbe s separacijo:**

Naredimo #1 in #2 za homogen problem (pri drugem koraku preveri, da lastne funkcije tvorijo K.O.S., tj.  $\langle X_n, X_m \rangle = c_n \delta_{n,m} = \begin{cases} c_n; & n = m \\ 0; & n \neq m \end{cases}$ , korak #3 pa naredimo tako, da rešitev iz #2 vstavimo v  $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} X_n(x) T_n(t)$ . Tu  $T_n$  ne poznamo in računamo za splošnega. Vstavimo v nehomogeno enačbo in primerjamo koeficiente s tistimi iz razvoja nehomogenega dela po  $\{X_n\}$ . Partikularno rešitev dobimo z nastavkom. Ko razvijamo nehomogeni del  $f(x)$  po  $\{X_n\}$ , si napišemo  $\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\langle f, X_n \rangle}{\langle X_n, X_n \rangle} X_n$  in izračunamo koeficiente iz razvoja.

**Laplace v polarnih koordinatah:**  $\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi}$

Pri polarnih koordinatah imamo namesto homogenega robnega pogoja lahko tudi naravni pogoj:  $2\pi$ -periodičnost:  $u(r, 0) = u(r, 2\pi)$ ,  $u_{\varphi}(r, 0) = u_{\varphi}(r, 2\pi)$ .

Sistem  $M\vec{x} = 0$  ima netrivialne rešitve  $\iff \det M = 0$ .

**Eksistenca:**

$u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ ,  $c \in \mathbb{R}_+$  ima pri pogojih  $u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0$  in  $u(x, 0) = u_t(x, 0) = 0$  edino rešitev  $u \equiv 0$ . Za poljubne  $a, b, f, g \in C^\infty(\mathbb{R})$  ima  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ ,  $c \in \mathbb{R}_+$  enolično rešitev tudi pri pogojih  $u_x(0, t) = a(t)$ ,  $u_x(L, t) = b(t)$ ,  $u(x, 0) = f(x)$  in  $u_t(x, 0) = g(x)$

## STURM-LIOUVILLEOVA TEORIJA

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  je sebi adjungiran, če  $A^T = A$ , lastni vektorji tvorijo ortogonalno bazo. Velja  $\langle Av, w \rangle = (Av)^T w = v^T A^T w = v^T (Aw) = \langle v, Aw \rangle$ .

**SL-operator:**  $L : C^2([a, b]) \rightarrow C([a, b])$ ,  $L(y) = \frac{1}{r(x)}[(p(x)y')' + q(x)y]$ ,  $p, r > 0, x \in [a, b]$  + mešani ali periodični robni pogoj. Gledamo skritev operatorja na  $V = C^2([a, b]) \cap \{\text{robni pogoji}\}$ ,  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)r(x)dx$ , kjer je  $r$  utež.

$L$  je sebi adjungiran za robne pogoje:

- (1)  $y(a) = y(b) = 0$ ,
- (2)  $y'(a) = y'(b) = 0$ ,
- (3)  $y(a) = y(b)$ ,  $p(a)y'(a) = p(b)y'(b)$ .

**Izrek** (o kompletnosti lastnih funkcij)

$p \in C^1([a, b])$ ;  $r, q \in C([a, b])$ ;  $p, r > 0$ . Potem ima lastni problem  $L(y) = \mu y$  pri robnih pogojih

a)  $\alpha y(a) + \beta y'(a) = 0$  in  $\gamma y(b) + \delta y'(b) = 0$ ;  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ ,  $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$

b)  $y(a) = y(b)$  in  $\alpha y'(a) = \beta y'(b)$ ;  $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$

števno mnogo rešitev z lastnostmi:

- i)  $\mu_1 > \mu_2 > \dots$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = -\infty$
- ii)  $\{g_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tvorijo kompleten ortonormiran sistem v  $L^2([a, b]) \cap \{\text{robni pogoji}\}$  in za  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)r(x)dx$ .

Enačbe oblike  $u_t = au_{xx} + bu_x + cu$ , kjer  $a, b, c \in \mathbb{R}$ ,  $a \neq 0$ ,  $u(0, t) = u(L, t) = 0$  lahko rešujemo s separacijo spremenljivk za poljubne koeficiente  $a, b, c$ .

$y(x) = \tilde{A}x^{ia} + \tilde{B}x^{-ia} = A \cos(a \ln x) + B \sin(a \ln x)$

Dejstvo, ali določena družina funkcij tvori K.O.S., preverjamo z identifikacijo istoležnih funkcij v  $L(y) = \frac{1}{r(x)}[(p(x)y')' + q(x)y] = \mu y$  = naša enačba (npr.  $L(y) = \frac{1}{r(x)}[(p(x)y')' + q(x)y] = x^2 y'' + xy' = \mu y$  za reševanje enačbe  $x^2 y'' + xy' = \mu y$ .)

Poiščemo utež  $r$  in za prostor vzamemo prostor funkcij, za katere rešujemo enačbo, presekan z robni pogoji.

**Legendrova enačba**

$L(y) = ((1-x^2)y')' = \mu y$ ,  $x \in [-1, 1]$ . To je singularen diferencialni operator, saj  $p(\pm 1) = 0$ , izrek pa deluje za  $p > 0$ .  $L$  je omejena v  $x = \pm 1$  natanko tedaj, ko je  $\mu = -n(n+1)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Tedaj obstajata neodvisni polinomski rešitvi stopenj  $2m$  in  $2m+1$ .

**Kvocienčni kriterij** za vrsto  $\sum C_n x^n$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_{n+1} x^{n+1}}{C_n x^n} \right| < 1$ , potem vrsta konvergira.

**Raabejev kriterij** za vrsto  $\sum C_n x^n$ :  $\lim_{n \rightarrow \infty} n(1 - \frac{C_n x^n}{C_{n+1} x^{n+1}}) < 1$ , potem ta vrsta divergira.

Če gledamo operator  $L(y) = ((1-x^2)y')' = \mu y$  na prostoru  $C^2(-1, 1) \cap \{\text{omejene funkcije v } \pm 1\}$ , dobimo lastne pare  $(-n(n+1), P_n)$  in  $\{P_n\}_{n \in \mathbb{N}_0}$  je K.O.S.

**Laplace v sferičnih koordinatah:**  $\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{\cos \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}(\cos \vartheta u_{\vartheta}) + \frac{1}{\cos \vartheta} u_{\varphi\varphi} \right]$ ,  $r \in [0, \infty)$ ,  $\varphi \in [0, 2\pi]$ ,  $\vartheta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ .

**Besslova enačba**

$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0$ ,  $x > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ , singularna za  $x = 0$ . Z nastavkom  $y = \sum_{m=0}^{\infty} C_m x^{m+k}$ ,  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $C_0 \neq 0$  dobimo rešitev, ki je omejena v  $x = 0$ :  $J_n(x) = C_0 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{2^{2l} l! (n+l)(n+l-1) \dots (n+1)} x^{2l}$ .

**Dodatek k Besslovi enačbi:**

- (1) Enačbo lahko obravnavamo tudi za  $n \in \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}_0$ , vendar v eksplicitni obliki namesto  $(n+l)!$  dobimo  $\Gamma(n+l+1)$ .
- (2) Enačbo lahko obravnavamo tudi za  $n \in \mathbb{R}_-$ , vendar dobimo Besslove funkcije drugega reda  $Y_n$ , ki so singularne v  $x = 0$ .
- (3) Splošna rešitev Besslove enačbe:  $y(x) = AJ_n(x) + BY_n(x)$ .
- (4) Besslova funkcija ima števno mnogo ničel.

## FOURIEROVA TRANSFORMACIJA IN PDE

$f \in L^1(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; \int_{\mathbb{R}} |f| dx < \infty\}.$

$$\mathcal{F}(f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{isx} ds$$

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(s) e^{-isx} ds$$

Lastnosti:

- (1)  $\mathcal{F}$  je linearna:  $\mathcal{F}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{F}(f) + \beta \mathcal{F}(g)$
- (2)  $\mathcal{F}(f')(x) = (-ix) \mathcal{F}(f)(x)$
- (3)  $\frac{d}{dx} [\mathcal{F}(f)(x)] = \mathcal{F}(ixf)(x)$
- (4) Če je  $f$  soda funkcija, velja  $\mathcal{F}^{-1}(f) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(f)$ .

Nekaj izračunanih transformacij:

- $f_1(x) = \begin{cases} 1; & |x| \leq 1 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}, \mathcal{F}(f_1) = \frac{2 \sin x}{x}$
- $\mathcal{F}(e^{-a|x|})(x) = \frac{2a}{a^2 + x^2}, a > 0$
- $\mathcal{F}(e^{-ax^2})(x) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}$
- $\mathcal{F}^{-1}(e^{-ax^2})(x) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{x^2}{4a}}$
- $f_2 = \begin{cases} 1 - |x|; & |x| < 1 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}, \mathcal{F}(f_2) = \frac{2}{x^2} (1 - \cos x)$
- $\mathcal{F}(\cos(ax^2)) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \cos(\frac{x^2}{4a} - \frac{\pi}{4}), a > 0$

### Uporaba Fourierovih transformacij v PDE

Želimo reševati PDE, v kateri je ena spremenljivka neomejena, npr.  $x \in \mathbb{R}, t > 0$ .  $U(x, t) = \mathcal{F}(u)(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(s, t) e^{isx} ds$  (transformacija po  $x$ )

Veljajo pravila:

- (1)  $\mathcal{F}(\alpha u + \beta v) = \alpha \mathcal{F}(u) + \beta \mathcal{F}(v), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$
- (2)  $\mathcal{F}(\frac{\partial^n}{\partial t^n} u) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} \mathcal{F}(u) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} U$
- (3)  $\mathcal{F}(\frac{\partial^n}{\partial x^n} u) = (-ix)^n \mathcal{F}(u) = (-ix)^n U$

Strategija: PDE z odvodi po  $t$  in  $x$  s Fourierovo transformacijo pretvorimo v NDE z odvodi po  $t$  (tudi začetne pogoje), nato pa dobljeno rešitev NDE z inverzno Fourierovo transformacijo pretvorimo v rešitev PDE.

Enačba  $u_{xx} = u_t + u$  ima enolično rešitev pri pogojih  $u(x, 0) = g(x), \forall g \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ . Če je  $g$  soda (oz. liha), je rešitev soda (oz. liha). (Včasih za uporabo te lastnosti lahko naše začetne podatke sodo (oz. liho) razširimo, odvisno katera razširitev nam da nov pogoj. Z razširjenim začetnim podatkom nalogo rešimo, na koncu pa vzamemo samo ustrezno polovico.)

**Konvolucija:**  $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) g(x - \xi) d\xi$

Velja:  $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g)$

Splošna rešitev enačbe  $u_t - 2u_{xx} = 0$  pri pogoju  $u(x, 0) = f(x)$  je:  $u(x, t) = \sqrt{\frac{1}{8\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{8t}} d\xi$

Če iščemo splošno rešitev za poljuben začetni pogoj, se pri uporabi inverzne Fourierove transformacije splača uporabiti lastnost konvolucije in vrniti  $\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}$ .

### DIRACOVA $\delta$ -FUNKCIJA

Diracova  $\delta$ -funkcija zadošča dvema lastnostma:

- (1)  $\delta(x) = 0$  za  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,
- (2)  $\int_{\mathbb{R}} \delta dx = 1$ .

Diracovo  $\delta$ -funkcijo lahko realiziramo tudi kot limito funkcij  $f_n(x) = \begin{cases} n; & |x| \leq \frac{1}{2n} \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$  ali kot limito funkcij  $g_n(x) =$

$\frac{n}{\sqrt{\pi}} e^{-n^2 x^2}$ . Definiramo jo lahko tudi kot  $\delta(x) := \mathcal{F}^{-1}(1) = \frac{1}{2\pi} \mathcal{F}(1)$ .

Za  $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$  velja:  $\int_{\mathbb{R}} \delta(x - a) f(x) dx = f(a)$ .

### POISSONOVO JEDRO IN GREENOVA FUNKCIJA

Rešujemo za:  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega}), f \in \mathcal{C}(\Omega), g \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$  in  $\Omega$  odprta, povezana podmnožica v  $\mathbb{R}^2$ .

$\Delta u = f$  je Poissonova enačba.

Robni pogoji:

- (1)  $u|_{\partial\Omega} = g$  Dirichletov
- (2)  $\partial_{\vec{n}} u|_{\partial\Omega} = g$  Neumannov.

Poseben primer tega problema za  $f = 0$  so harmonične funkcije.

**Izrek o povprečni vrednosti za harmonične funkcije:**  $u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial K((x_0, y_0), R)} u ds$ .

**Šibki princip maksima:** Če je  $\Omega$  omejeno:  $\max_{\Omega} v = \max_{\partial\Omega} v$  oz.  $\min_{\Omega} v = \min_{\partial\Omega} v$

**Krepki princip maksima:** Če je  $\Omega$  neomejeno in če harmonična funkcija doseže lokalni ekstrem v notranjosti  $\Omega$ , je funkcija konstantna.

Zveza med harmoničnimi in holomorfnimi funkcijami:

- (1) Če  $f = u + iv$  holomorfn, potem sta  $u$  in  $v$  harmonični.
- (2) Če je  $u$  harmonična, potem obstaja harmonična funkcija  $v$ , da je  $f = u + iv$  holomorfn (velja samo za enostavno povezana območja  $\Omega$ ).

Množica harmoničnih homogenih polinomov stopnje  $n$  ( $p(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n p(x, y)$ ) tvori vektorski prostor dimenzije 2 za vsak  $n \in \mathbb{N}$ .

Za omejeno območje  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$  velja  $\int_{\Omega} u \Delta u \, dS + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u \, dS = \int_{\partial\Omega} u (\nabla u \cdot \vec{n}) \, ds$ , kjer je  $\vec{n}$  zunanja enotska normala na  $\Omega$ .

Edina rešitev enačbe  $\Delta u = \lambda u$ ,  $\lambda \geq 0$ ,  $u|_{\partial\Omega} = 0$  je funkcija  $u \equiv 0$ .

Dirichletov problem je na omejenem območju enolično rešljiv.

Krivuljni integral vektorskega polja:  $\int_{\partial\Omega} \vec{V} \, d\vec{s} = \int_{\alpha}^{\beta} \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \, dt = \int_{\partial\Omega} \vec{V} \cdot \vec{T} \, ds$ , kjer je  $\vec{T} = \frac{\dot{\gamma}(t)}{||\dot{\gamma}(t)||}$

$\gamma(t) = (x(t), y(t))$ , normalni vektor:  $(\dot{y}(t), -\dot{x}(t))$ :  $\int_{\alpha}^{\beta} (P, Q) \cdot (\dot{x}, \dot{y}) \, dt = \int_{\alpha}^{\beta} (Q, -P) \cdot (\dot{y}, -\dot{x}) \, dt$

Greenova formula za integral vektorskega polja po normali:  $\int_{\Omega} (Q_x - P_y) \, dS = \int_{\partial\Omega} (P, Q) \, d\vec{s} = \int_{\partial\Omega} (Q, -P) \cdot \vec{n} \, ds$ , kjer  $\vec{n}$  enotska normala.

### Reševanje Dirichletovega problema

Rešitev je vsota dveh problemov:  $\Delta v = 0, v|_{\partial\Omega} = g$  (Poissonov del) in  $\Delta w = f, w|_{\partial\Omega} = 0$  (Greenov del).

Poissonov del:  $v(x, y) = \int_{\partial\Omega} P(x, y, s) g(s) \, ds$ ,  $P: \Omega \times \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y, s) \mapsto P(x, y, s)$  (Poissonovo jedro)

Greenov del:  $w(x, y) = \int_{\Omega} G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) \, dS(\xi, \eta)$ ,  $G: \Omega \times \Omega \setminus \{(p, p); p \in \Omega\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y; \xi, \eta) \mapsto G(x, y; \xi, \eta)$  (Greenova funkcija).

Greenova identiteta:  $\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) \, dS = \int_{\partial\Omega} (u \partial_{\vec{n}} v - v \partial_{\vec{n}} u) \, ds$ , kjer  $\partial_{\vec{n}} v = \langle \nabla v, \vec{n} \rangle$  in  $\vec{n}$  zunanja normala.

**Uporabni integrali:**  $\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi}$

$$\begin{aligned} \int_a^b \sin\left(\frac{n\pi x}{b-a}\right)^2 \, dx &= \int_a^b \cos\left(\frac{n\pi x}{b-a}\right)^2 \, dx = \frac{(b-a) \left( \sin\left(\frac{2\pi a n}{b-a}\right) - \sin\left(\frac{2\pi b n}{b-a}\right) + 2\pi n \right)}{4\pi n}, n \in \mathbb{C} \\ (\int_a^b x^i \sin(kx) \, dx)_{1,2} &= \left( \frac{-\sin(ak) + ak \cos(ak) + \sin(bk) - bk \cos(bk)}{k^2}, \frac{(a^2 k^2 - 2) \cos(ak) - 2ak \sin(ak) + (2 - b^2 k^2) \cos(bk) + 2bk \sin(bk)}{k^3} \right) \\ (\int_a^b x^i \cos(kx) \, dx)_{1,2} &= \left( \frac{-ak \sin(ak) - \cos(ak) + bk \sin(bk) + \cos(bk)}{k^2}, \frac{(2 - a^2 k^2) \sin(ak) - 2ak \cos(ak) + (b^2 k^2 - 2) \sin(bk) + 2bk \cos(bk)}{k^3} \right) \\ \int_a^b (x-a)(b-x) \sin(kx) \, dx &= \frac{k(a-b)(\sin(ak) + \sin(bk)) + 2 \cos(ak) - 2 \cos(bk)}{k^3} \\ \int_a^b (x-a)(b-x) \cos(kx) \, dx &= \frac{k(a-b)(\cos(ak) + \cos(bk)) - 2 \sin(ak) + 2 \sin(bk)}{k^3} \\ \int_a^b \sin(mx) \cos(kx) \, dx &= \frac{-k \sin(ak) \sin(am) - m \cos(ak) \cos(am) + k \sin(bk) \sin(bm) + m \cos(bk) \cos(bm)}{k^2 - m^2} \\ \int_a^b \sin(mx) \sin(kx) \, dx &= \frac{-m \sin(ak) \cos(am) + k \cos(ak) \sin(am) + m \sin(bk) \cos(bm) - k \cos(bk) \sin(bm)}{k^2 - m^2} \\ \int_a^b \cos(mx) \cos(kx) \, dx &= \frac{-k \sin(ak) \cos(am) + m \cos(ak) \sin(am) + k \sin(bk) \cos(bm) - m \cos(bk) \sin(bm)}{k^2 - m^2}, \text{povsod so } m, n, k \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

**Polarne koordinate:**  $u_x = \cos(\varphi) u_r - \frac{\sin(\varphi)}{r} u_{\varphi}$ ,  $u_y = \sin(\varphi) u_r + \frac{\cos(\varphi)}{r} u_{\varphi}$ ,

$$u_{xx} = \cos^2(\varphi) u_{rr} - \frac{\sin(2\varphi)}{r} u_{r\varphi} + \frac{\sin^2(\varphi)}{r^2} u_{\varphi\varphi} + \frac{\sin^2(\varphi)}{r} u_r + \frac{\sin(2\varphi)}{r^2} u_{\varphi},$$

$$u_{xy} = \frac{1}{2} \sin(2\varphi) u_{rr} + \frac{\cos(2\varphi)}{r} u_{r\varphi} - \frac{\sin(2\varphi)}{2r^2} u_{\varphi\varphi} - \frac{\sin(2\varphi)}{2r} u_r - \frac{\cos(2\varphi)}{r^2} u_{\varphi},$$

$$u_{yy} = \sin^2(\varphi) u_{rr} + \frac{\sin(2\varphi)}{r} u_{r\varphi} + \frac{\cos^2(\varphi)}{r^2} u_{\varphi\varphi} + \frac{\cos^2(\varphi)}{r} u_r - \frac{\sin(2\varphi)}{r^2} u_{\varphi}, \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi}$$

## NDE VIŠJIH REDOV

Ne nastopa  $y$ : uvedemo  $z = y'$ .

Obe strani sta odvoda nečesa: integriramo in dodamo konstanto.

$$\text{Odvodi: } y'/y = (\log(y))', xy' + y = (xy)', \frac{y''y - y'^2}{y^2} = \left(\frac{y'}{y}\right)', \frac{y'x - y}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)'.$$

Ne nastopa  $x$ : uvedemo  $z(y) = y'$ ,  $y$  neodvisna spr.  $y'' = \dot{z}z$ ,  $y''' = \ddot{z}z^2 + \dot{z}^2z$ .

Homogena:  $F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ . Vpeljemo  $z(x) = y'/y$ .  $y''/y = z' + z^2$ .

Z utežjo:  $F(kx, k^m y, k^{m-1} y', \dots, k^{m-n} y^{(n)}) = k^p F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ . Uvedemo:  $x = e^t$ ,  $y = u(t)e^{mt}$ .

## INTEGRALI IN FORMULE

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$$

$$\int x^m \log(x) \, dx = x^{m+1} \left( \frac{\log x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2} \right) + C$$

$$\int p(x) e^{kx} \, dx = q(x) e^{kx} + C, \text{st}(q) = \text{st}(p)$$

$$\int e^{ax} \sin(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) + C$$

$$\int e^{ax} \cos(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos(bx) + b \sin(bx)) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \, dx = \text{arsh} \frac{x}{a} + C = \log |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\sin^2(x/2) = (1 - \cos(x))/2$$

$$\int \frac{1}{\sin(x)} \, dx = \ln \tan(x/2) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos(x)} \, dx = -\log(\cot(x/2)) + C$$

$$\int \frac{1}{\tan(x)} \, dx = \log(\sin(x)) + C$$

$$\int \tan(x) \, dx = -\log(\cos(x)) + C$$

$$\int x/(1+x) \, dx = x - \log(x+1) + C$$

$$\int x/(1+x) \, dx = x - \log(x+1) + C$$

$$\int \sin^2(x) \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$$

$$\int \cos^2(x) \, dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C$$

$$\cos^2(x/2) = (1 + \cos(x))/2$$

**Faktorizacija:**

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

**Antifaktorizacija:**

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$