UNM

Linearni sistemi

NORME: $\|A\|_1 = \max_{j\in\{1..n\}} \left(\sum_{i=1}^n |a_{ij}|\right)$ = največji stolpec, $\|A\|_\infty = \|A^\mathsf{T}\|_1$ = največja vrstica
$\|A\|_2 = \sigma_1 = \sqrt{\lambda_{max}(A^\mathsf{H}A)}$ = največja singularna vrednost, $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{ij} a_{ij}^2}$ = gledamo kot vektor
Operatorska norma: $\|A\| = \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$. Neenakosti: $\lambda \leq \|A\|$. $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$.

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_F &\leq \|A\|_2 \leq \|A\|_F \\
\tfrac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_1 &\leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_1 \\
\tfrac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty &\leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_\infty \\
N_\infty(A) &\leq \|A\|_2 \leq nN_\infty(A) \\
&\leq \|A\|_2 \leq \sqrt{\|A\|_1\|A\|_\infty} \\
\|a_i\|_2, \|\alpha_i\|_2 &\leq \|A\|_2
\end{aligned}$$

Rešujemo sistem $Ax = b$. Za napako x velja ocena:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1-\kappa(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}}\left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right)$$

Količina $\kappa(A)$ se imenuje občutljivost matrike. $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\|$. Velja $\kappa_2(A) = \frac{\sigma_1(A)}{\sigma_n(A)} \geq 1$.

LU RAZCEP s kompletnim pivotiranjem: matriko A zapišemo kot $PAQ = UL$, L sp. trikotna z 1 na diagnoali in U zg. trikotna, ter P, Q permutacijski matriki stolpcev in vrstic. Algoritem:

```
Q = I, P = I
for j = 1 to n:
    r, q taka, da a_rq največji v podmatriki A(j+1:n)
    zamenjaj vrstici r in j v A, L, P // za delno pivotiranje
    zamenjaj stolpca q in j v A, L, Q // za kompletno pivotiranje
    for i  = j+1 to n:
        l_ij = a_ij / a_jj
        for k = j+1 to n:
            a_ik = a_ik - l_ij * a_jk
```

Postopek na roke:

1. * Če delamo pivotiranje zamenjamo primerne vrstice in stolpce v A, P, Q, da je a_{00} največji.
2. Prvi stolpec delimo z a_{00}, razen a_{00}, ki ga pustimo na miru.
3. Za vsak element v podmatriki $A(2:n, 2:n)$: $a_{ij} = a_{ij} - a_{i1} \cdot a_{1j}$ (odštejemo produkt $\leftarrow$ in $\uparrow$).
4. Ponovimo postopek na matriki $A(2:n, 2:n)$.

Delno pivotiranje uporablja samo matriko P, za LU razcep brez pivotiranja pa preskočimo 1.

Skalarni produkt potrebuje $2n$ operacij. Reševanje s premimi substitucijami potrebuje n^2, z obratnimi n^2+n. Reševanje z LU razcepom (brez pivotiranja) potrebuje $\frac{2}{3}n^3 + \frac{3}{2}n^2 + \frac{5}{6}n$ operacij.

Za izračunani LU razcep $\hat{L}\hat{U} = A + E$ velja $|E| \leq nu|\hat{L}||\hat{U}|$.

Pivotna rast: $g = \frac{\max u_{ij}}{\max a_{ij}}$. Pri delnem pivotiranju $g < 2^n$.

RAZCEP CHOLESKEGA: Za spd matriko A obstaja razcep $A = VV^\mathsf{T}$.

```
for k = 1 to n:
    v_kk = sqrt(a_kk - sum(v_kj^2, j=1 to k))
    for i = k+1 to n:
        v_ik = 1/v_kk * (a_ik - sum(v_ij * v_kj, j = 1 to k))
```

Postopek na roke po stolpcih:

1. Če sem diagonalen element: odštejem od sebe skalarni produkt vrstice na levo same s sabo in se korenim.
2. Če nisem diagonalni: od sebe odštejem skalarni produkt vrstice levo od sebe z vrstico levo od mojega diagonalnega. Nato se delim z diagonalnim.

Razcep stane $\frac{1}{3}n^3$ operacij. Je obratno stabilno. Je enoličen.

Nelinearni sistemi

Jacobijeva iteracija: Posplošitev navadne iteracije. Naj velja $G(\alpha) = \alpha$. Metoda: $x^{(r+1)} = G(x^{(r)})$. Točka α je privlačna, če velja $\rho(DG(\alpha)) < 1$. Dovolj je $\|DG(\alpha)\| < 1$. Konvergenca je linearna.

Newtonova metoda: Posplošitev tangentne metode. Metoda: reši sistem $DF(x^{(r)})\Delta x^{(r)} = -F(x^{(r)})$. $x^{(r+1)} = x^{(r)} + \Delta x^{(r)}$. Konvergenca je kvadratična.

Problem najmanjših kvadratov

Reševanje predoločenih sistemov: Za dan predoločen sistem $Ax = b$ rešujemo normalni sistem $A^\mathsf{T}Ax = A^\mathsf{T}b$. Če je A polnega ranga, je x enoličen. Rešujemo z razcepom Choleskega. Število operacij: $n^2m + \frac{1}{3}n^3$.

QR razcep je bolj stabilen. Za $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ obstaja enoličen razcep $A = QR$, $Q^\mathsf{T}Q = I$ in R zg. trikotna s pozitivnimi diagonalci. Za predoločen sistem rešimo $Rx = Q^\mathsf{T}b$.

CGS in MGS Klasična GS ortogonalizacija. Od vsakega stolpca a_k odštejemo pravokotne projekcije $a_i, i < k$. Algoritem ni najbolj stabilen.

```
for k = 1 to n:
    q_k = a_k
    for i = 1 to k-1:
        r_ik = q_i' * a_k (CGS) ALI = q_i' * q_k (MGS)
        q_k = q_k - r_ik q_i
    r_kk = ||q_k||
    q_k = q_k / r_kk
```

Za večjo natančnost izračunamo $[Ab] = [Qq_{n+1}][Rz; 0p]$ in rešimo $Rx = z$. Porabi $2nm^2$ operacij.

Razširjeni QR razcep: $A = \tilde{Q}\tilde{R}$, $Q \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ortogonalna, R zgornje trapezna. $\tilde{Q} = [Q\ Q_1]$, $\tilde{R} = [R; 0]$.

Givensove rotacije

Elemente v A po stolpcih enega po enega ubijamo z rotacijami. Rotacija, ki ubije element a_{ki} je $R_{ik}^\mathsf{T}([ik],[i,k]) = [c\ s; -s\ c]$, in ostalo identiteta. Parametre nastavimo: $c = x_{ii}/r$, $s = x_{ki}/r$, $r = \sqrt{x_{ii}^2 + x_{ki}^2}$. $\tilde{Q}$ dobimo kot prokdukt vseh rotacij, potrebnih za genocid elementov A. Rotacija spremeni samo i-to in k-to vrstico.

Število operacij: $3mn^2 - n^3$. Če potrebujemo $\tilde{Q}$, potem rabimo še dodatnih $6m^2n - 3mn^2$ operacij.

```
Q = I_m
for i = 1 to n:
    for k = i+1 to m:
      r = sqrt(a_ii^2 + a_ki^2)
      c = a_ii/r, s = a_ki/r
      A([i,k], i:n) = [c s; -s c] A([i k], i:n)
      b([i, k]) = [c s; -s c] b([i, k]) // za predoločen sistem
      Q(i, [i k]) = Q(i, [i k]) [c -s; s c] // za matriko Q
Q = Q'
```

Hausholderjeva zrcaljenja Definiramo $P = I - \frac{2}{w^\mathsf{T}w}ww^\mathsf{T}$. P je zrcaljenje prek ravnine z normalo w. $Px = x - \frac{1}{m}(x^\mathsf{T}w)w$, $m = \frac{1}{2}w^\mathsf{T}w$.

Da vektor x prezrcalimo tako, da mu uničimo vse razen prve komponente, uporabimo $w = [x_1 + \operatorname{sign}(x_1)\|x\|_2; x_2; \ldots x_n]$ in $m = \|x\|_2(\|x\|_2 + |x_1|)$. Število operacij za Pz je $4nm$ za w in m pa potrebujemo $2n$ operacij.

```
Q = I_m
for i = 1 to n:
    w_i iz R^{m-i+1}, ki prezrcali A(i:m, i) v +-k e_1
    A(i:m,i:n) = P_i * A(i:m, i:n)
    b(i:m) = P_i * b(i:m)           // za predoločen sistem
    Q(i:m, 1:n) = P_i * Q(i:m, 1:n) // za matriko Q
Q = Q'
```

Reševanje predoločenega sistema tako stane $2mn^2 - \frac{2}{3}n^3$. Za $\tilde{Q}$ potrebujemo še $4m^2n - 2mn^2$ operacij. Za kvadratne sisteme je stabilnejši, a rabimo $\frac{4}{3}n^3$ operacij.

Za napako pri reševanju predoločenega sistema velja: $\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\varepsilon\kappa_2(A)}{1-\varepsilon\kappa_2(A)}\left(2 + (\kappa_2(A)+1)\frac{\|r\|}{\|A\|\|x\|}\right), r = Ax - b$.

Lastne vrednosti

Desni in levi lastni vektorji: $y^\mathsf{H}A = \mu y^\mathsf{H}$ in $Ax = \lambda x$. Levi in desni vektorji za različne l. vrednosti so pravokotni. Občutljivost lastne vrednosti je $\frac{1}{y^\mathsf{H}x}$, kjer sta x in y normirana levi in desni lastni vektor.

Potenčna metoda: Pravzaprav navadna iteracija. Izberemo si začetni vektor z in tolčemo čéz matriko A in normiramo, dokler ne postane lastni vektor. Ta metoda ima linearno konvergenco k lastnemu vektorju za dominantno lastno vrednost, če je le ena sama lastna vrednost največja. Hitrost konvergence je λ_1/λ_2, kjer sta to dve največji lastni vrednosti.

```
z = ones(n, 1)  // naključen neničeln vektor
for k = 1 to m: // m je veliko število
    y = A * z
    z = y / ||y||
```

Če imamo lastni vektor v, potem želimo imeti lastno vrednost λ. Najboljši približek je Raylegihov kvocient: $\rho(A, v) = \frac{z^{\mathsf{H}}Az}{z^{\mathsf{H}}z}$. Kot kriterij v potenčni metodi uporabimo `|A * z - p(A, z)| < eps`.

Če imamo dober približek $\tilde{\lambda}$ za lastno vrednost vrednost λ_i uporabimo inverzno iteracijo. Iščemo največjo vrednost matrike $(A - \tilde{\lambda}I)^{-1}$, ki ima lastne vrednosti $\frac{1}{\lambda_i - \lambda}$.

```
z = ones(n, 1)
for k = 0 to m:
    reši (A - lambda I)y = z
    z = y / ||y||
```

Schurova forma: Za vsako matriko A obstaja Schurova forma S, da je $A = USU^{\mathsf{H}}$, kjer je U unitarna in S zgornje trikotna. Na diagnoali so lastne vrednosti. V primeru kompleksnih lastnih vrednosti imamo 2×2 bloke.

Otrogonalna iteracija: Za izračun Schurove forme. Z je lahko $n \times p$ matrika z ortonormiranimi stolpci, tako dobimo prvih p stolpcev Schurove forme. Za $p = 1$ je to potenčna metoda, za $p = n$, pa dobimo celo schurovo formo.

```
Z = eye(n) // naključna matrika z otronormiranimi stolpci
for k = 0 to m:
    Y = A * Z
    [Q, R] = qr(Y)
    Z = Q
```

QR iteracija: Najboljša metoda za izračun lastnih vrednosti A.

```
for k = 0 to m:
    [Q, R]= qr(A)
    A = R * Q
```

Gerschgorinov izrek: Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $C_i = \overline{K}(a_{ii}, r = \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|), i = 1,2,\ldots,n$. Potem vsaka lastna vrednost leži v vsaj enem Gerschgorinovem krogu. Če m krogov C_i sestavlja povezano množico, ločeno od ostalih $n - m$ krogov, potem ta množica vsebuje natanko m lastnih vrednosti.

Če množimo A z diagonalno matriko D (ponavadi le en element na diagonali različen od 1), torej $D{-}1AD$, nam to ne spremeni lastnih vrednosti. Na novi matriki lahko ponovno uporabimo Greschgorinov izrek in dobimo drugačne ocene.

Diagonalno dominantna matrika $(|a_{ij}| > \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|)$ je obrnljiva.

NLA

Singularni razcep

$A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $m \geq n$. Singularni razcep je razcep matirke A na $A = U\Sigma V^{\mathsf{T}}$, U ortogonalna $m \times m$, V ortogonalna $n \times n$, $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_n \\ & & \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Definiciji U in V po stolpcih: $A^{\mathsf{T}}Av_i = \sigma_i^2 v_i$, $Av_i = \sigma_i u_i$. Recimo da ima matrika prvih r singularnih vrednosti neničelnih. Potem lahko V razdelimo na dva dela, V_1 sestavljen iz lastnih vektorjev za neničelne lastne vrednosti $A^{\mathsf{T}}A$ in V_2 sestavljen iz lastnih vektorjev za ničelno lastno vrednost. Bločno definiramo

$$A = \begin{bmatrix} {}^{m\times r}U_1 & {}^{m\times m-r}U_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{r\times r}S & {}^{r\times n-r}0 \\ {}^{m-r\times r}0 & {}^{m-r\times n-r}0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{r\times n}V_1 \\ {}^{n-r\times n}V_2 \end{bmatrix}$$

Definiramo lahko tudi ozek singularni razcep, pri katerem vzamemo samo U_1, S in V_1. Velja:

- V_1 je ONB za $\mathrm{im}(A^{\mathsf{T}})$
- V_2 je ONB za $\ker(A)$
- U_1 je ONB za $\mathrm{im}(A)$
- U_2 je ONB za $\ker(A^{\mathsf{T}})$

Psevdoinverz: $A^+ = V\Sigma^+U^\mathsf{T}$, $\Sigma^+ = [1/\sigma_i]_i$. Rešitev po metodi najmanjših kvadratov: $x = \sum_{i=1}^n \frac{u_i^\mathsf{T} b}{\sigma_i} v_i = A^+ b$. Aproksimacija matrike z matriko nižjega ranga: $A_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i u_i v_i^\mathsf{T}$.

Regularizacija: Pozabimo na manjše sing vrednosti, ki povzročajo napake. $x = \sum_{i=1}^n \phi_i \frac{u_i^\mathsf{T} b}{\sigma_i} v_i$, za $\phi_i = (i \leq k)$ ali $\phi_i = \frac{\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + \alpha^2}$.

Totalni najmanjši kvadrati: rešitev predoločenega sistema $Ax = b$, kjer poiščemo najbližji par $[\tilde{A}, \tilde{b}]$, da x reši sistem $\tilde{A}x = \tilde{b}$. x, ki reši ta sistem dobimo kot: $x_{\text{TLS}} = \frac{-1}{v'_{n+1,n+1}} \begin{bmatrix} v'_{1,n+1} & \dots & v'_{n,n+1} \end{bmatrix}^\mathsf{T}$.

Nelinearne probleme najmanjših kvadratov: $F(x) = 0$, rešitev je x, ki minimizira $\|F(x)\|_2$. Rešujemo z Newtonovo metodi: $x_{r+1} = x_r - J_F^+(x_r)F(x_r)$.

Nesimetričen problem lastnih vrednosti

Implicitni QR

Najprej reduciramo A na zg. Hessenbergovo. Nato A z leve in desne množimo z ortogonalnimi transformacijami Q, dokler ne skonvergira do shurove forme. Pomaga nam izrek o implicitnem Q.

Izrek: Če je $Q = [q_1, \dots, q_n]$ taka ortogonalna matrika, da je $H = Q^\mathsf{T} A Q$ zg. Hessenbergova, je Q do predznaka natančno določena s q_1.

Ko imamo A zg. Hessengergovo jo pomnožimo z leve z Givensovo rotacijo $\tilde{R}$, ki ima prvi stolpec enak normiranemu prvemu stolpcu $A_k - \sigma_k I$. S tem smo zagovotili, da ima naš Q s katerim množimo pravilen prvi stolpec (kot bi delali Gram-Schidta ali QR razcep). Da ohranimo podobnost, pomnožimo še z desne. Pojavi se grba, ki jo z rotacijami izženemo iz matrike in s tem naredimo en korak. Ponavljamo dokler niso vsi pod diagonalo mrtvi.

$$\begin{bmatrix} \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star \\ & \star & \star & \star & \star \\ & & \star & \star & \star \\ & & & \star & \star \\ & & & & \star \end{bmatrix} \xrightarrow{\tilde{R}^\mathsf{T}\cdot} \begin{bmatrix} \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\ \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\ & \star & \star & \star & \star \\ & & \star & \star & \star \\ & & & \star & \star \\ & & & & \star \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot\tilde{R}} \begin{bmatrix} \ast & \ast & \star & \star & \star \\ \ast & \ast & \star & \star & \star \\ + & \ast & \star & \star & \star \\ & & \star & \star & \star \\ & & & \star & \star \\ & & & & \star \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{23}^\mathsf{T}\cdot} \begin{bmatrix} \star & \star & \star & \star & \star \\ \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\ & \ast & \ast & \ast & \ast \\ & & \star & \star & \star \\ & & & \star & \star \\ & & & & \star \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot R_{23}} \begin{bmatrix} \star & \ast & \ast & \star & \star \\ \star & \ast & \ast & \star & \star \\ & \ast & \ast & \star & \star \\ & + & \ast & \star & \star \\ & & & \star & \star \\ & & & & \star \end{bmatrix} \xrightarrow{R_{34}^\mathsf{T}\cdot}$$

Dvojni premiki: Prvo podobnostno transformacijo $\tilde{P}$ izberemo, da bo imela enak prvi stolpec kot pri navadni QR, to je enak kot matrika $N_k = A_k^2 - \text{sl}(S_k)A_k + \det(S_k)I$, kjer je S_k spodnja 2×2 matrika matrike A_k. N_k ima v prvem stolpcu samo 3 elemente neničlne, zato dobimo grbo velikosti 2 in delamo s Hausholderjevimi zrcaljenji 3×3. To so simetrične matrike, zato ni treba transponirati.

$$\begin{bmatrix} \star & \star & \star & \star & \star \\ \star & \star & \star & \star & \star \\ & \star & \star & \star & \star \\ & & \star & \star & \star \\ & & & \star & \star \\ & & & & \star \end{bmatrix} \xrightarrow{\tilde{P}\cdot} \begin{bmatrix} \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\ \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\ + & \ast & \ast & \ast & \ast \\ & & \star & \star & \star \\ & & & \star & \star \\ & & & & \star \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot\tilde{P}} \begin{bmatrix} \ast & \ast & \ast & \star & \star \\ \ast & \ast & \ast & \star & \star \\ + & \ast & \ast & \star & \star \\ + & + & \ast & \star & \star \\ & & & \star & \star \\ & & & & \star \end{bmatrix} \xrightarrow{P_2\cdot} \begin{bmatrix} \star & \star & \star & \star & \star \\ \ast & \ast & \ast & \ast & \ast \\ & \ast & \ast & \ast & \ast \\ & \ast & \ast & \ast & \ast \\ & & & \star & \star \\ & & & & \star \end{bmatrix} \xrightarrow{\cdot P_2} \begin{bmatrix} \star & \ast & \ast & \ast & \star \\ \star & \ast & \ast & \ast & \star \\ & \ast & \ast & \ast & \star \\ & \ast & \ast & \ast & \star \\ & + & + & \ast & \star \\ & & & & \star \end{bmatrix} \xrightarrow{P_3\cdot}$$

Posplošeni problem lastnih vrednosti

Množico vseh matrik oblike $A - \lambda B$ imenujemo matrični šop. Karakteristični polinom šopa (A,B) je $p(\lambda) = \det(A - \lambda B)$. Če je p identično enak 0, je šop singularen, sicer je regularen. Če je šop regularen in velja $Ax = \lambda Bx$ za nek $x \neq 0$, je λ lastna vrednost in x desni lastni vektor. Če za regularen šop velja $Bx = 0$ za nek $x \neq 0$ je $\lambda = \infty$ lastna vrednost šopa in x pripadajoči desni lastni vektor. Simetrično velja za leve lastne vektorje.

Če je karakteristični polinom šopa (A, B) stopnje $m \leq n$ ima šop m lastnih vrednosti, ki so rešitve $p(\lambda) = 0$ in neskončno lastno vrednost z večkratnostjo $n - m$.

Če je B nesingularna, so vse lastne vrednosti končne in so enake lastnim vrednostim matrik $B^{-1}A$ in AB^{-1}. Neskončna lastna vrednost se pojavi, ko je B singularna, in njena večkratnost je enaka $\dim(\ker(B))$. Če je A singularna, si lastne vrednosti šopa enake recipročnim lastnim vrednostim $A^{-1}B$ in BA^{-1} (lastna vrednost 0 pomeni, da ima šop lastno vrednost ∞)

Za primer lastnih frekvenc nihanja $|{-}///k_1///{-}[m_1]{-}///k_2///{-}[m_2]{-}///k_3///{-}[m_3]{-}///k_4///{-}|$ zapišemo
$M = \text{diag}(m_1, m_2, m_3)$,
$K = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ & -k_3 & k_3 + k_4 \end{bmatrix}$ rešujemo sistem $\omega^2 My + Ky = 0$, kar lahko prevedemo na $M^{-1}Ky = \lambda y$, $\lambda = \omega^2$

Sturmovo zaporedje

Matrika T je tridiagonalna $(\mathrm{diag}(a_1, \ldots, a_n) + \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_{n-1}, 1) + \mathrm{diag}(b_1, \ldots, b_{n-1}, -1))$
$f_0(\lambda) = 1$, $f_1(\lambda) = a_1 - \lambda$, $f_{k+1}(\lambda) = (a_{k+1} - \lambda)f_k(\lambda) - b_k^2 f_{k-1}(\lambda)$
Zapišemo zaporedje $f(x)$, preštejemo kolikokrat se predznak zamenja ($+\ 0\ -$ in $-\ 0\ +$ šteje za eno zamenjavo, če je 0 na koncu ne upoštevamo kot zamenjava). Kolikor je menjav predznaka, toliko je lastnih vrednosti na (x, ∞).