Prirejanja in faktorji

Prirejanje M je mn. povezav, ki paroma nimajo skupnih krajišč. Vozlišče je ***M*-zasičeno**, če je krajišče kake povezave iz M. Sicer je ***M*-nezasičeno**.
Prirejanje M je **maksimalno**, če ni vsebovano v nobenem večjem prirejanju; **največje**, če je moč $|M|$ največja med vsemi prirejanji v grafu; **popolno**, če so vsa vozlišča M-zasičena.
Velja: popolno $\implies$ največje $\implies$ maksimalno.
Faktor grafa je njegov vpet podgraf (tj. ima ista vozlišča kot cel graf). ***k*-faktor** je k-regularen faktor. 1-faktor = popolno prirejanje. (Vsak 3-regularen graf, ki premore 1-faktor premore dekompozicijo v 1-faktor in 2-faktor)
Prirejanje M je maksimalno $\iff$ med M-nezasičenimi vozlišči ni povezav.
Pot v grafu je ***M*-alternirajoča**, če si na njej izmenoma sledijo povezave iz M in iz $E(G) - M$.
Simetrična razlika: G, H grafa z $V(G) = V(H)$, $G \triangle H$ je graf z $V = V(G)$ in $e \in E$, če je e v natanko enem od grafov G in H.
Lema: Vsaka komponenta v simetrični razliki dveh prirejanj je bodisi pot bodisi sod cikel.
Izrek: Prirejanje M grafa G je največje natanko tedaj, ko G ne premore nobene M-nezasičene poti.
Izrek (Tutte): Graf G premore popolno prirejanje natanko tedaj, ko za vsako $S \subseteq V(G)$: $|S| \geq o(G - S)$, kjer je $o(X)$ število lihih komponent grafa X.
Posledica: Če je G kubičen graf brez mostov, tedaj G premore popolno prirejanje.
Izrek: Če je G dvodelen graf z biparticijo X, Y, potem v G obstaja prirejanje, ki zasiči X $\iff$ za vsak $S \subseteq X$: $|N(S)| \geq |S|$.
Posledica: Vsak k-regularen dvodelen graf premore popolno prirejanje.

Množica $Q \subseteq V(G)$ je **(vozliščno) pokritje** grafa G, če je vsaka povezava iz G incidenčna z nekim vozliščem iz Q.
Izrek: Če je G dvodelni graf, potem je velikost največjega prirejanja enaka velikosti najmanjšega pokritja. Krajše: G dvodelen $\implies \alpha'(G) = \beta(G)$.

Mn. vozlišč X grafa G je **neodvisna**, če nobeni vozlišči iz X nista sosednji.
Povezavno pokritje grafa G je taka množica povezav F, da je vsako vozlišče grafa G krajišče neke povezave iz F.
$\boldsymbol{\alpha(G)}$ = velikost največje neodvisne množice oz. neodvisnostno število grafa
$\boldsymbol{\alpha'(G)}$ = velikost največjega prirejanja (tj. največje neodvisne množice povezav)
$\boldsymbol{\beta(G)}$ = velikost najmanjšega pokritja grafa
$\boldsymbol{\beta'(G)}$ = velikost najmanjšega povezavnega pokritja grafa (def. le za grafe brez izoliranih vozlišč)
Določiti α je težko (že na dvodelnih grafih), določiti α' je pa polinomsko.
Trditev: G graf: S je neodvisna množica v G natanko tedaj, ko je $V(G) - S$ pokritje.
FORMULE:
$\forall G\colon \alpha'(G) \leq \beta(G)$
$\forall G\colon \alpha(G) + \beta(G) = n(G)$
$\forall G$ brez izoliranih vozlišč: $\alpha'(G) + \beta'(G) = n(G)$
$\forall G$ dvodelen: $\alpha'(G) = \beta(G)$
$\forall G$ dvodelen, brez izoliranih vozlišč: $\alpha(G) = \beta'(G)$

Trditev: Drevo ima največ eno popolno prirejanje.
Za vsak graf G brez izoliranih vozlišč velja $\alpha'(G) \geq \frac{|V(G)|}{\Delta(G)+1}$.
G dvodelen graf z biparticijo X, Y. Naj bo M_1 prirejanje, ki zasiči $X' \subseteq X$ in M_2 prirejanje, ki zasiči $Y' \subseteq Y$. Potem obstaja prirejanje, ki zasiči $X' \cup Y'$.

Za vsak graf G velja $\alpha(G) \geq \frac{|V(G)|}{\Delta(G)+1}$.

Povezanost

Def: Množica vozlišč $S \subseteq V(G)$ je **prerezna množica**, če ima $G - S$ več kot eno komponento. **Povezanost grafa $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{\kappa(G)}$**, je moč najmanjše množice S, da ima $G - S$ več kot eno komponento ali pa je $G - S = K_1$. Graf G je ***k*-povezan**, če je $k \leq \kappa(G)$.
Velja: G ni polni graf. Če G ni k-povezan, potem obstaja prerezna množica moči $k - 1$.
Primeri: $\kappa(K_n) = n - 1, \kappa(K_{m,n}) = \min\{m, n\}, \kappa(P) = 3, \kappa(Q_n) = n$.
Def: Množica povezav $F \subseteq E(G)$ je **prerezna množica povezav**, če ima $G - F$ več kot eno komponento. **Povezanost po povezavah grafa $\boldsymbol{G}$, $\boldsymbol{\kappa'(G)}$**, je moč najmanjše prerezne množice povezav. Graf G je ***k*-povezan po povezavah**, če je ima vsaka prerezna množica povezav vsaj k elementov.
Primeri: $\kappa'(\text{drevo}) = 1, \kappa'(K_n) = n - 1, \kappa'(P) = 3$.
FORMULE:
- $\forall G\colon \kappa(G) \leq n(G) - 1$. Enakost velja ntk. ko je G polni graf.
- $\forall G\colon \kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G)$. - $\forall$ kubičen graf G: $\kappa(G) = \kappa'(G)$.
- $\forall$ r-regularen graf G z $\kappa(G) = r$, je tudi $\kappa'(G) = r$.

Def: Vozlišče v grafa G je **prerezno**, če ima $G - v$ več povezanih komponent kot G. **Blok** grafa je maksimalni podgraf brez prereznih vozlišč. Bloki grafa so torej: izolirana vozlišča, mostovi in maksimalni 2-povezani podgrafi. **Blok-graf** grafa G je dvodelni graf z biparticijo $\{\text{bloki}\} \cup \{\text{prerezna vozlišča}\}$, povezave pa so $c \sim B$, kjer je c vozlišče bloka B.
Trditev: Blok-graf poljubnega grafa je gozd.
Def: Če sta $u, v \in V(G)$, sta P, Q **notranje-disjunktni $\boldsymbol{u, v}$-poti**, če se ujemata le v vozliščih u in v.

Izrek (Whitney): Graf G je 2-povezan $\iff$ ko za vsak par različnih vozlišč u, v obstajata notranje-disjunktni u, v-poti.
LEMA (uporabna): Če je G k-povezan graf in G' graf z $V(G') = V(G) \cup \{x\}$ in
$E(G') = E(G) \cup \{$povezave od x do k starih vozlišč$\}$, potem je tudi G' k-povezan.
Izrek: G graf z vsaj 3 vozlišči. NTSE:

1. G je 2-povezan;
2. vsak par vozlišč je povezan z dvema notranje-disjunktnima potema;
3. vsak par vozlišč leži na skupnem ciklu;
4. $\delta(G) \geq 1$ in vsak par različnih povezav leži na skupnem ciklu.

Izrek: G je 2-povezan po povezavah $\iff$ vsaki dve povezavi ležita na skupnem ciklu.
Def: **Uho** grafa je pot, katere notranja vozlišča so stopnje 2. **Ušesna dekompozicija** grafa G je zaporedje $G_0, G_1, \ldots, G_k$, kjer je G_0 cikel, G_i je uho grafa $G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup G_i$ in je dobljeni graf G. **Zaprto uho** je uho, katerega začetno in končno vozlišče sta enaka. **Zaprta ušesna dekompozicija** je ušesna dekompozicija, kjer lahko dodajamo tudi zaprta ušesa.
Izrek: Graf G je 2-povezan $\iff$ ko premore ušesno dekompozicijo. Za začetek ušesne dekompozicije lahko uporabimo poljuben cikel grafa G.
Izrek: Graf G je povezavno 2-povezan $\iff$ ko premore zaprto ušesno dekompozicijo.

Def: Če sta $x, y \in V(G), x \neq y, xy \notin E(G)$, potem je $S \subseteq V(G)$ $\boldsymbol{x, y}$**-prerez**, če vsaka x,y-pot vsebuje vozlišče iz S. Moč najmanjšega x,y-prereza označimo s $\boldsymbol{\kappa(x, y)}$. Maksimalno število paroma notranje disjunktnih x, y poti je $\boldsymbol{\lambda(x, y)}$. Podobno je $\boldsymbol{\kappa'(x, y)}$ moč najmanjšega x, y-prereza povezav in $\boldsymbol{\lambda'(x, y)}$ maksimalno število po povezavah disjunktnih x, y-poti.
Izrek (Menger): Če sta x, y nesosednji vozlišči grafa, tedaj je $\kappa(x, y) = \lambda(x, y)$. Isto velja tudi za digrafe.
Izrek: Če sta x, y različni vozišči grafa G, tedaj je $\kappa'(x, y) = \lambda'(x, y)$.
Izrek (globalna verzija Mengerja): Povezanost grafa je največji k, da za vsak par vozlišč x, y velja $\lambda(x, y) \geq k$. Povezanost grafa po povezavah je največji k, da za vsak par vozlišč x, y velja $\lambda'(x, y) \geq k$.

Def: Digraf D je **(krepko) povezan**, če za vsaki vozlišči x, y obstaja usmerjena x,y-pot. **Povezanost digrafa** $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{\kappa(D)}$, je moč najmanjše mn. S, da je $G - S$ nepovezan ali K_1. **Povezanost po povezavah digrafa** $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{\kappa'(D)}$, je moč najmanjše prerezne množice povezav.
Def: Če je G graf, je njegova **usmeritev** prireditev smeri vsem njegovim povezavam. Usmeritev je **krepka**, če je dobljeni digraf krepko povezan.
Trditev: Graf G premore krepko usmeritev $\iff$ ko je G 2-povezan po povezavah.
Izrek (globalni Menger za digrafe): Povezanost digrafa D je največji k, da za vsa vozlišča x, y velja $\lambda(x, y) \geq k$. Povezavna povezanost je največji k, da za vsa vozlišča x, y velja $\lambda'(x, y) \geq k$.

Trditev (uporabna): $\kappa'(G) < \delta(G)$, P je minimalni povezavni prerez, razdeli $V(G)$ na S in S'. Potem je $P = \sum_{v \in S} deg_G(v) - 2|E(G[S])|$ in $|S| > \delta(G)$.
Trditev: Simetrična razlika dveh povezavnih prerezov je povezavni prerez.
Def: Graf G je **minimalno** $\boldsymbol{k}$**-povezan**, če je k-povezan in za vsako povezavo $e \in E(G)$ graf $G - e$ ni k-povezan.
Trditev: V minimalnem 2-povezanem grafu velja $\delta(G) = 2$. Minimalno 2-povezan graf G z vsaj 4 vozlišči ima največ $2n(G) - 4$ povezav. Enakost velja le za $K_{2,n-1}$.
Def: Naj bo x vozlišče in U množica vozlišč, $x \notin U$. $\boldsymbol{x, U}$**-pahljača** je množica poti iz x v U, ki se paroma stikajo le v x. Velikost pahljače je število disjunktnih poti.
Velja: Graf je k-povezan $\iff$ za vsak izbor x in U $(x \notin U)$ z $|U| \geq k$ obstaja x, U pahljača velikosti vsaj k.
Trditev: Graf G je 2-povezan $\iff$ ko za vsako trojico vozlišč x, y, z obstaja x, z-pot, ki gre skozi y.
Lema: Če je graf k-povezan in mu odstranimo eno vozlišče, je preostanek vsaj $(k-1)$-povezan.
Trditev: G k-povezan. Za vsak izbor vozlišč $x_1, \ldots, x_k$ obstaja cikel, ki vsebuje $x_1, \ldots, x_k$.
Trditev: G k-povezan graf z vsaj $2k$ vozlišči. Tedaj v G obstaja cikel dolžine vsaj $2k$.
Trditev: $\kappa(G \Box H) \leq (=) \min\{\delta(G) + \delta(H), \kappa(G)n(H), \kappa(H)n(G)\}$. Še več: $\kappa(G \Box H) \geq \kappa(G) + \kappa(H)$.

- G ima bloke $B_1, \ldots, B_k$. Potem je $n(G) = (\sum n(B_i)) - k + 1$. Dokaz z indukcijo po k.
- $\Delta(G) \leq 3 \implies \kappa(G) = \kappa'(G)$.

Barvanja grafov

$\boldsymbol{\chi(G)}$ = najmanjši k, za katerega obstaja dobro k-barvanje grafa G
$\boldsymbol{\omega(G)}$ = moč največjega polnega podgrafa v G
FORUMLE:
- $\forall G \colon \chi(G) \geq \omega(G)$
- $\forall G \colon \chi(G) \geq \frac{n(G)}{\alpha(G)}$
- $\forall G, H \colon \chi(G \Box H) = \max\{\chi(G), \chi(H)\}$
- $\forall G \colon \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$
- $d_1 \geq \cdots \geq d_n$ stopnje vozlišč v G: $\chi(G) \leq 1 + \max_i \min\{d_i, i - 1\}$

-**Izrek:** **(Brooks)** $\forall G$ povezan graf, ki ni niti lih cikel niti polni graf: $\chi(G) \leq \Delta(G)$
- $\forall G$ graf intervalov: $\chi(G) = \omega(G)$ (graf intervalov: presečni graf, vozl. so intervali, povezava, če je neprazen presek)

Def: G graf, $V(G) = \{v_1, \ldots, v_n\}$. **Graf Mycielskega,** $\boldsymbol{M(G)}$: $V(M(G)) = \{v_1, \ldots, v_n\} \cup \{u_1, \ldots, u_n\} \cup \{w\}$, $E(M(G)) = E(G) \cup \{wu_i;\ i \in [n]\} \cup \{u_i v_j;\ v_i v_j \in E(G)\}$.
Izrek: Če je G graf brez $\triangle$, potem je tudi $M(G)$ brez $\triangle$ in velja $\chi(M(G)) = \chi(G) + 1$.
Trditev: $\chi(G) = r \implies |E(G)| \geq \binom{r}{2}$. Enakost velja za polne grafe z dodanimi izoliranimi vozlišči.

Def: Turanov graf, $T_{n,r}$ je polni r-multipartitni graf z n vozlišči, v katerem se kosi particije po velikosti paroma razlikujejo kvečjemu za 1. $T_{n,r}$ je natanko določen z izbiro n in r; kosi so velikosti $\lfloor \frac{n}{r} \rfloor$ in $\lceil \frac{n}{r} \rceil$.
Trditev: Med vsemi grafi G z n vozlišči in $\chi(G) = r$ je $T_{n,r}$ enolični graf z največjim številom povezav.
Izrek (Turan): Med vsemi grafi G z n vozlišči, ki nimajo K_{r+1}, je $T_{n,r}$ enolični graf z največ možnimi povezavami.

$\boldsymbol{\chi(G;k)}$ = število k-barvanj grafa G (ne nujno surjektivnih; zamenjava barv da različo barvanje); to je polinom v k z alternirajočimi koeficienti, še več: $\chi(G;k) = k^{n(G)} - m(G)k^{n-1} + \dots$
$\chi(G) = \min_k\{\chi(G;k) > 0\}$
Trditev: T drevo na n vozliščih: $\chi(T;k) = k(k-1)^{n-1}$.
Trditev: $\chi(G;k) = \sum_{r=1}^{n(G)} p_r(G)k^{\underline{r}}$, kjer je $p_r(G)$ število particij $V(G)$ na r neodvisnih množic.
Izrek: Za vsak G in e njegova povezava: $\chi(G;k) = \chi(G-e;k) - \chi(G \cdot e;k)$.

Def: Vozlišče u je **simplicialno**, če $N(u)$ inducira poln graf. Zaporedje $u_n, \dots, u_1$ je **simplicialna eliminacijaka ureditev**, če je u_i simplicialni v grafu induciranem z $u_i, u_{i-1} \dots, u_1$. Oznaka: $d(i) = |N(u_i) \cap \{u_1, \dots, u_{i-1}\}|$.
Velja: $\chi(G;k) = (k-d(1))(k-d(2)) \cdots (k-d(n))$.
Def: Graf G je **tetivni**, če v vsakem ciklu dolžine vsaj 4 obstajata nezaporedni vozlišči cikla, ki sta sosednji.
Lema: G povezan tetivni graf, $x \in V(G)$. Tedaj med vsemi vozlišči, ki so najdlje od x, obstaja simplicialno vozl. grafa G.
Izrek: Povezan graf je tetivni $\iff$ premore eliminacijsko ureditev.
Trditev: G tetivni $\implies \chi(G) = \omega(G)$.
Def: Graf G je **popoln graf**, če velja $\chi(H) = \omega(H)$ za vsak induciran podgraf H grafa G.
Tetivni grafi, grafi intervalov in drevesa so popolni grafi.
Izrek: Graf G je popoln natanko tedaj, ko ne vsebuje niti induciranega lihega cikla dolžine vsaj 5 niti induciranega komplementa lihega cikla dolžine vsaj 5.

Def: k-kritičen graf je minimalno k-obarvljiv (tj. $\chi(G) = k$), ampak vsak njegov podgraf je $(k-1)$-obarvljiv.
Če je G k-kritičen, velja: v vsakem optimalnem barvanju $G - e$ sta krajišči e iste barve. Obstaja optimalno barvanje G, ki vsebuje natanko eno vozlišče barve k. $M(G)$ je $(k-1)$-kritičen graf.
Trditev: $k \leq 2$: k-kritičen graf je povezan in $\delta(G) \leq k-1$. $\chi(G)$ je najmanjši m, da velja $\alpha(G \square K_m) = n(G)$.
$\chi(K_2 \square P_n;k) = (k^2 - 3k + 3)^{n-1}k(k-1)$.
Dvodelni grafi so tranzitivno usmreljivi.
Tranzitivno usmreljivi grafi so popolni.
Grafi intervalov so tetivni in njihov komplement je tranzitivno usmerljiv.

Ravninski grafi

Izrek: 3-povezan graf ravninski graf ima enolično vložitev v ravnino.
$\boldsymbol{G^*}$ = dual grafa (vozl. postanejo lica, in obratno); za povezan ravninski graf je $(G^*)^* \equiv G$.
Dolžina lica, $\boldsymbol{\ell(F)}$, je število povezav na najkrajšem zaprtem sprehodu, ki omejuje F.
Trditev: G ravninski graf: $2m(G) = \sum_{F \text{ lice}} \ell(F)$.
Izrek: G vložen v ravnino. NTSE:

1. G je dvodelen;
2. vsako lice je sode dolžine;
3. G^* je Eulerjev graf.

Def: Ravninski graf je **zunanje-ravninski**, če ga lahko vložimo v ravnino rako, da vsa njegova vozlišča ležijo na robu istega cikla. Zunanje-ravninski graf premore vozlišče stopnje ≤ 2.
Izrek (Eulerjeva formula): G povezan graf, vložen v ravnino, n vozlišč, m povezav, f lic: $n - m + f = 2$.
Posledica: Če je G ravninski in $n(G) \geq 3$, potem je $m(G) \leq 3n(G) - 6$. Če dodatno G nima $\triangle$, potem je $m(G) \leq 2n(G) - 4$. Iz tega sledi, da vsak ravninski graf premore vozlišče stopnje ≤ 5.
Def: Graf G je **maksimalen ravninski graf**, če ni pravi vpet podgraf nekega ravninskega grafa. Graf G je **triangulacija**, če je vsako lice omejeno s 3-ciklom.
Trditev: Za enostaven ravninski graf z vsaj 3 vozlišči. NTSE:

1. $m(G) = 3n(G) - 6$
2. G je triangulacija
3. G je maksimalen ravninski graf.

Def: Graf H je **subdivizija** grafa G, če H lahko dobimo iz G tako, da nekdatere njegove povezave nadomestimo s paroma disjunktnimi potmi.
Izrek (Kuratowski): Graf G je ravninski $\iff$ ne vsebuje podgrafa, ki je subdivizija K_5 ali $K_{3,3}$.
Lema (Thomassen): Če je G 3-povezan graf na vsaj 5 vozliščih, tedaj G premore tako povezavo e, da je $G \cdot e$ 3-povezan.
Def: Vložitev grafa v ravnino je **konveksna**, če je vsako lice omejeno s konveksnim poligonom.
Izrek (Tutte): Če je G 3-povezan ravninski graf, potem G premore konveksno vložitev v ravnino. (Za 2-povezane grafe to v splošnem ni res.)
Izrek (Fary): Vsak ravninski graf premore vložitev v ravnino z ravnimi črtami.
Def: Graf H je **minor** grafa G, če H lahko dobimo iz nekega podgrafa G tako, da skrčimo nekaj povezav. Velja: Graf H je minor grafa $G \iff H$ dobimo iz G z zaporedjem operacij skrči povezavo, zbriši povezavo, zbriši izolirano vozlišče.
Izrek (Wagner): Graf G je ravninski $\iff$ niti K_5 niti $K_{3,3}$ nista njegova minorja.
Izrek: Graf H z vozlišči $x_1, \dots, x_k$ je minor grafa $G \iff G$ premore disjunktna drevesa $T_1, \dots, T_k$, tako da če je

$x_ix_j \in E(H)$, potem obstajata vozlišči $y_i \in T_i$ in $y_j \in T_j$, ki sta sosednji. (to pomeni: G kvocientno po $T_1, \ldots, T_k$ je ravno H)

Izrek 4 barv: Če je G ravninski, je $\chi(G) \leq 4$.
Def: Prekrižno število, $\boldsymbol{\nu(G)}$, je najmanjše število križanj med vsemi risbami grafa G v ravnini.
Risba grafa G je **optimalna**, če ima $\nu(G)$ križanj.
Lastnosti optimalnih risb: nobeni povezavi s skupnih krajiščem se ne križata; vsako križanje je pravo (ni tangentno); nobeni povezavi se ne križata več kot enkrat; nobene 3 povezave se ne križajo v isti točki; nobena povezava ne križa same sebe

Trditev: Naj bo G graf in k največje število povezav v njegovem ravninskem podgrafu. Tedaj je $\nu(G) \geq m(G) - k$ in tudi $\nu(G) \geq \frac{m(G)^2}{2k} - \frac{m(G)}{2}$.
Posledica: Za vsak graf G velja: $\nu(G) \geq m(G) - 3n(G) + 6$. Če je G brez $\triangle$: $\nu(G) \geq m(G) - 2n(G) + 4$.

- graf je zunanje-ravninski $\iff$ ne vsebuje minorja K_4 ali $K_{2,3}$.
- zunanje-ravninski graf lahko pobarvamo s 3 barvami
- vsak ravninski graf z $\delta(G) = 5$ ima povezavo med dvema vozliščema stopnje 5 ali povezavo med vozliščema stopnje 5 in 6

Dominacija v grafih

Def: G graf, $D, X \subseteq V(G)$. D **dominira množico** X, če je $X \subseteq N[D]$. Če $X = V(G)$: D **dominira graf** G (tj. vsako vozlišče iz $V(G) - D$ ima vsaj enega soseda iz D).
$\boldsymbol{\gamma(G)}$ = moč najmanjše množice, ki dominira G
Če je G brez izoliranih vozlišč in S minimalna dominacijska množica, potem je tudi $\overline{S}$ dominacijska množica.
Def: Množica $X \subseteq V(G)$ je **2-pakiranje**, če je $d_G(x, y) \geq 3$ za vse $x, y \in X, x \neq y$. To pomeni: $N[x] \cap N[y] = \emptyset$. Za drevesa velja: $\gamma(T) = \rho(T)$.
$\boldsymbol{\rho(G)}$ = moč največjega 2-pakiranja v G
FORMULE:
- Za vsak povezan graf G je $\gamma(G) \geq \rho(G)$.
- G' vpet podgraf v G: $\gamma(G) \leq \gamma(G')$
- G povezan graf. Potem premore vpeto drevo T, da je $\gamma(G) = \gamma(T)$
- $\forall G\colon \gamma(G) \leq \chi(\overline{G})$
- $\forall G\colon \frac{n(G)}{\Delta(G)+1} \leq \gamma(G) \leq n(G) - \Delta(G)$
- G brez izoliranih vozlišč: $\gamma(G) \leq n(G) \cdot \frac{1+\log(1+\delta(G))}{1+\delta(G)}$
- za vsak povezan G: $\gamma(G) \leq \alpha'(G)$
- $\mathrm{diam}(G) = 2 \implies \gamma(G) \leq \delta(G)$, $\mathrm{diam}(G) = 5 \implies \gamma(G) \leq \delta(G)(1 + (\Delta(G) - 1)^3)$

Inačice dominacije: Dominantna množica D je povezana/neodvisna/totalna, če D inducira povezan podgraf/neodvisen podgraf/podgraf brez izoliranih vozlišč. Oznaka: $\gamma_c, \gamma_i, \gamma_t$. Vse vedno obstajajo (v povezanih grafih/v vseh grafih /brez izoliranih vozlišč).
Lema: Množica D je neodvisna dominantna množica $\iff$ je maksimalna neodvisna množica.
Izrek: Če je G brez kremplјev (= ne vsebuje *induciranega* podgrafa $K_{1,3}$), potem je $\gamma_i(G) = \gamma(G)$.
Pravi grafi intervalov in grafi povezav so brez kremplјev. Dvodelni graf in grafi brez $\triangle$ imajo lahko veliko kremplјev.
Formule v kartezičnem produktu:
- $\gamma(G \square H) \leq \min\{\gamma(G)n(H), n(G)\gamma(H)\}$
- $\gamma(G \square H) \geq \min\{n(G), n(H)\}$
- $\gamma(G \square H) \geq \frac{n(H)}{\Delta(H)+1}\gamma(G)$
- $\gamma(G \square H) \geq \min\{\gamma(G)\rho(H), \gamma(H)\rho(G)\}$
- če je T drevo: $\gamma(T \square H) \geq \gamma(T)\gamma(H)$
- $\gamma(G \square H) \geq \frac{1}{2}\gamma(G)\gamma(H)$
- $\gamma(C_{3n} \square H) \geq \gamma(C_{3n})\gamma(H)$
- $\gamma(C_n \square C_m) \geq \gamma(C_n)\gamma(C_m)$ za $n, m \geq 3$

Primeri: $\gamma(K_n) = 1, \gamma(P_n) = \gamma(C_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$, $\gamma(P) = 3$.

Osnovne definicije

Def: Kartezični produkt grafov $\boldsymbol{G \square H}$: $V(G \square H) = V(G) \times V(H)$,
$E(G \square H) : (g,h) \sim (g',h') \iff (gg' \in E(G) \vee h = h') \wedge (hh' \in E(H) \vee g = g')$
Def: Spoj grafov $\boldsymbol{G \vee H}$: $V(G \vee H) = V(G) \cup V(H)$, $E(G \vee H) = E(G) \cup E(H) \cup \{gh;\ g \in V(G), h \in V(H)\}$

Avtorji: Vesna Iršič, Jure Slak, Anja Petković