# PDE

Dana je PDE $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0$, kjer sta $a, b \in \infty(\mathbb{R}^2)$. NDE, ki ji morajo zadostiti nivojnice rešitvene ploskve $u = u(x,y)$ je $a\,\mathrm{d}y = b\,\mathrm{d}x$. Iz dobljene enačbe izrazimo splošno konstanto $C$, splošna rešitev pa je $u = u(x,y) = F(C)$. Uporabimo še začetni pogoj.
Uvedba novih spremenljivk $s, t$: $u_x = u_s s_x + u_t t_x$, $u_y = u_s s_y + u_t t_y$.
Poseben primer novih spremenljivk:
Če za PDE $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = d(x,y)$, $a, b, c, d \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ uvajamo novi spremenljivki $t$ in $s$, za kateri velja $as_x + bs_y = 0$ in $at_x + bt_y \neq 0$, dobimo NDE 1. reda:

$$u_t + \frac{c}{at_x + bt_y}u = \frac{d}{at_x + bt_y}.$$

**Krajšanje metode z nivojnicami:** $\mathrm{d}s = 0 = s_x\,\mathrm{d}x + s_y\,\mathrm{d}y$. Iz pogoja $as_x + bs_y = 0$ izrazimo npr. $s_x$ z $s_y$, nesemo v enačbo $\mathrm{d}s = 0$, krajšamo $s_y$, rešimo NDE in dobimo splošno rešitev: $s = F(C)$. Potrebujemo neko rešitev, torej lahko izberemo kar $F = \mathrm{id}$. Za $t$ si izberemo tako funkcijo $x, y$ (čim enostavnejšo), da bo izpolnjen pogoj $at_x + bt_y \neq 0$ in da bosta $s$ in $t$ neodvisni, torej da velja:

$$\det \begin{bmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{bmatrix} \neq 0.$$

## Kvazilinearna PDE

Oblika: $a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)$. Začetni pogoj: rešitev vsebuje krivuljo $\Gamma(s) = (x_0(s), y_0(s), u_0(s))$. $u = u(x,y)$ je ploskev z normalo $\vec{n} = (e_x, u_y, -1)$. Zaradi tipa enačbe velja $(a,b,c) \cdot \vec{n} = 0$, torej rešitvena ploskev sestoji iz krivulj, za katere velja $\dot{\gamma} = (a,b,c)$. Rešujemo karakteristični sistem: $\dot{x} = a(x,y,u)$, $\quad \dot{y} = b(x,y,u)$, $\quad \dot{u} = c(x,y,u)$. Rešitvam karakterističnega sistema pravimo karakteristike in načeloma napolnijo cel $\mathbb{R}^3$. Rešitev sestavimo iz krivulj (karakteristik), ki sekajo začetno krivuljo $\Gamma$: $x(0) = x_0(s)$, $y(0) = y_0(s)$, $u(0) = u_0(s)$. Dobimo parametrično rešitev: $x = x(t,s)$, $\quad y = y(t,s)$, $\quad u = u(t,s)$. Če se da, iz parametrične rešitve izrazimo eksplicitno rešitev $u = u(x,y)$.
Definicija: Transverzalnostni pogoj:

$$(T) = \det \begin{bmatrix} a(x_0, y_0) & b(x_0, y_0) \\ x_0'(s) & y_0'(s) \end{bmatrix} \neq 0,$$

kjer je $(a,b)$ tangenta karakteristik (prvi dve komponenti), $(x_0', y_0')$ pa tangenta začetne krivulje (prvi dve komponenti).
Izrek:

(i) Če je $(T)$ izpolnjen za vsak $s \in \mathbb{R}$, obstaja natanko ena rešitev začetnega problema, definirana na okolici začetne krivulje $\Gamma(s)$, $s \in \mathbb{R}$.
(ii) če je $(T)$ prekršen za vsak $s \in \mathbb{R}$, imamo dve možnosti:
   a) ne obstaja rešitev, če $\Gamma$ ni karakteristika ($\Gamma$ je karakteristika, če je izpolnjen pogoj v točki b),
   b) imamo neskončno rešitev, če je $\Gamma' \| (a,b,c)$.

Če ima enačba neskončno rešitev (sledimo točki b) iz zgornjega izreka) in iščemo več kot eno, se lahko zgodi, da nam metoda karakteristik ponudi le eno. Ideja: izberemo si začetno krivuljo $\Gamma_1$, ki zadošča naslednjima pogojema:

(1) netangentno seka $\Gamma$,
(2) izpolnjuje $(T)$ za originalno enačbo.

Lema: $(ax+by)u_x + (bx+dy)u_y = 0$, $a, b, d \in \mathbb{R}$, $ad - b^2 > 0$, $a + d < 0$. Naj bo $u$ rešitev enačbe razreda $C^1(\mathbb{R}^2)$. Tedaj je $u$ konstantna.
**Trik** za neskončne sisteme NDE za $x_n(t)$: rešimo ga s pomočjo rodovne funkcije $Q(y,t) = \sum_{n=1}^\infty x_n(t)y^n$. Velja: $yQ_y = \sum_{n=1}^\infty nx_n(t)y^n, Q_y - Q/y = \sum_{n=1}^\infty nx_{n+1}y^n$. Z upoštevanjem rekurzivne zveze dobimo PDE za $Q$, rešimo, razvijemo rešitev v vrsto po $y$.

## Lagrangeeva metoda za kvazilinearne PDE

Trditev: Naj bo $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ $C^\infty$ z lastnostma:

(i) obstaja $p \in \mathbb{R}^3$: $F(p) = 0$ in $F_u(p) \neq 0$,
(ii) $F$ je prvi integral karakterističnega sistema $\dot{x} = a(x,y,u)$, $\quad \dot{y} = b(x,y,u)$, $\quad \dot{u} = c(x,y,u)$.

Potem je z enačbo $F(x,y,u) = 0$ dobro definirana implicitna rešitev enačbe $a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y) = c(x,y,u)$ na okolici točke $p$.
**Metoda:** Naj bosta $F$ in $G$ gladka, funkcijsko neodvisna integrala karakterističnega sistema. Potem je splošna rešitev $\Psi(F(x,y,u), G(x,$
$0$, kjer je $\Psi$ poljubna funkcija. $F(x,y,u) = C$, $G(x,y,u) = D$. Metoda nam generira splošne rešitve, nimamo pa relacije med začetno krivuljo in enoličnostjo rešitve ter metode ne moremo posplošiti za nelinearne PDE.
Iz parametrične rešitve karakterističnega sistema izrazimo konstanti $C$ in $D$. To sta naša prva integrala $F$ in $G$, ki sta zdaj odvisna le od $x, y, u$, ne pa od $C, D$. Dobimo $\Psi$ in upoštevamo še začetni pogoj (ga vstavimo v $\Psi$). Navadno lahko uganemo predpis za $\Psi$, da bo res enak 0. Če hočemo vedeti kaj o enoličnosti, se lotimo naloge z metodo karakteristik in preverimo transverzalnostni pogoj.
Zanimivi vzorci: $(x^2)^\cdot = 2x\dot{x}$, $(xy)^\cdot = \dot{x}y + x\dot{y}$, $(\ln x)^\cdot = \frac{\dot{x}}{x}$.
Trditev: Naj bosta $\vec{P}_j : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $j \in \{1,2\}$, vektorski polji ortogonalni na $Q(x,y,u) = (a(x,y,u), b(x,y,u), c(x,y,u))$, neodvisni in $\mathrm{rot}\vec{P}_j$. Tedaj sta njuna potenciala prva integrala karakterističnega sistema.

## Nelinearne PDE 1. reda

Oblika: $F(x,y,u,u_x,u_y)=0$, označimo $p=u_x$, $q=u_y$. Iščemo rešitev pri pogojih $u(\alpha(t),\beta(t))=\gamma(t)$.
**Metoda karakteristik:** Za karakteristike vzamemo tvorilke stožca, tj. "središčne premice". To so rešitve sistema $\dot{x}=F_p$, $\quad \dot{y}=F_q$, $\quad \dot{u}=pF_p+qF_q$, $\quad \dot{p}=-F_x-F_up$, $\quad \dot{q}=-F_y-F_uq$. Za določanje konstant upoštevamo začetno krivuljo in dva naravna pogoja:

- $F(x,y,u,p,q)|_{t=0}=0$,
- $\Gamma' \perp \vec{n}|_{t=0}$: $(p(0),q(0),-1)\cdot\Gamma'(s)=0$.

Če $u=u(x,y)$ določa ploskev v prostoru, je enačba tangentne ravnine na to ploskev v točki $(x,y,u(x,y))$ enaka: $u_x(X-x)+u_y(Y-y)-(U-u)=0$ (normala ravnine je $(A,B,C)=(u_x,u_y,-1)$). Razdalja od tangentne ravnine do točke $(a,b,c)$ je:

$$\mathrm{d}(AX+BY+CU+D=0,(a,b,c))=\frac{|Aa+Bb+Cc+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

## Eksistenčni izrek za nelinearne PDE 1. reda

Izrek: Naj bo $u=u(x,y)$ rešitev začetnega problema

$$F(x,y,u,u_x,u_y)=0, \quad u(\alpha(s),\beta(s))=\gamma(s), \quad \text{za } s\in\mathcal{I}.$$

Če sta $p(s)=u_x(\alpha(s),\beta(s))$ in $q(s)=u_y(\alpha(s),\beta(s))$ edini funkciji, za kateri velja:

(1) $(T)=\det\begin{bmatrix}\alpha' & \beta' \\ F_p & F_q\end{bmatrix}(s)\neq 0 \quad \forall s\in\mathcal{I}$,
(2) $F(\alpha(s),\beta(s),\gamma(s),p(s),q(s))=0 \quad \forall s\in\mathcal{I}$,
(3) $(p(s),q(s),-1)\cdot(\alpha'(s),\beta'(s),\gamma'(s))=0 \quad \forall s\in\mathcal{I}$.

Potem je rešitev $u$ enolična.

## Pfaffova enačba

Oblika: $p(x,y,z)\,\mathrm{d}x+q(x,y,z)\,\mathrm{d}y+r(x,y,z)\mathrm{d}z=0$. Geometrijski pomen: $\vec{F}=(p,q,r)$. Iščemo družino ploskev $G(x,y,z)=C\in\mathbb{R}$, ki je pravokotna na $\vec{F}$, tj. obstaja $\mu=\mu(x,y,z)$: $\mathrm{grad}(G)=\mu\vec{F}$.
Lema: Potreben in zadosten pogoj za rešitev Pfaffove PDE je $\vec{F}\cdot\mathrm{rot}\vec{F}=0$.
Velja: $\mathrm{rot}(\mu\vec{F})=\mathrm{grad}\mu\times\vec{F}+\mu\mathrm{rot}\vec{F}$.
**Metoda za reševanje:** Predpostavimo, da iščemo rešitve, katerih presek z ravnino $z=\mathit{konst}$. je krivulja brez samopresečišč. Na tem preseku velja $p\,\mathrm{d}x+q\,\mathrm{d}y=0$. Torej imamo rešitev te NDE: $u(x,y,z)=C(z)$. Rešitev iščemo z nastavkom $G(x,y,z)=u(x,y,z)-C(z)$. Če je potreben pogoj izpolnjen, obstajata $C$ in $\mu$, da je $\mathrm{grad}(G)=\mu\vec{F}$.
Ko iz zveze $\mathrm{grad}(G)=\mu\vec{F}$ izračunamo $C(z)$, ga vstavimo v $G(x,y,z)=u(x,y,z)-C(z)$. Rešitev je družina ploskev $G)x,y,z)=0$.

## Linearne PDE 2. reda

Oblika: $a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}+1.\text{ red}=0$. $\delta=b^2-ac$. Ločimo tri tipe PDE:

(i) če je $\delta>0$ na $D$, je PDE hiperbolična na $D$,
(ii) če je $\delta=0$ na $D$, je PDE parabolična na $D$,
(iii) če je $\delta<0$ na $D$, je PDE eliptična na $D$.

Vsi trije tipi se prevedejo na kanonično obliko z vpeljavo novih koordinat $(t,s)$:

(i) Za $(t,s)$ vzamemo neki rešitvi enačb $at_x+(b+\sqrt{\delta})t_y=0$, $\quad as_x+(b-\sqrt{\delta})s_y=0$. Dobimo: $u_{st}+1.\text{ red}=0$.
(ii) Za $t$ vzamemo neko rešitev enačbe $at_x+bt_y=0$, za $s$ pa poljubno funkcijo, neodvisno od $t$. Dobimo: $u_{ss}+1.\text{ red}=0$.
(iii) Poiščemo (kompleksno) rešitev $av_x+(b+\sqrt{\delta})v_y=0$. Vzamemo $t=\mathrm{Re}\,v$ in $s=\mathrm{Im}\,v$. Dobimo: $u_{tt}+u_{ss}+1.\text{ red}=0$.

Za računanje enačb, ki porodijo nove spremenljivke, uporabiš čisto prvo (najbolj na začetku, prvi list, prvi način reševanja za prvo obliko) metodo z nivojnicami. Tj. iz enačbe v zgornjih točkah izraziš npr. $v_x$ in jo neseš v $\mathrm{d}v=0=v_x\,\mathrm{d}x+v_y\,\mathrm{d}y$, krajšaš $v_y$, rešiš NDE *et voilà*!
Pomoč: $u_x=u_ss_x+u_tt_x$, $u_y=u_ss_y+u_tt_y$, $u_{xx}=(u_x)_ss_x+(u_x)_tt_x$, $u_{xy}=(u_x)_ss_y+(u_x)_tt_y$, $u_{yy}=(u_y)_ss_x+(u_y)_tt_x$.
Pri iskanju rešitev PDE v kanonični obliki dobiš splošni funkciji $C(t)$ in $D(s)$.

## Valovna enačba

Oblika: $u_{tt}-c^2u_{xx}=0$. $x\in\mathbb{R}$ je točka na struni, $t\geq 0$. $u=u(x,t)$ predstavlja odmik točke v danem času. Novi spremenljivki: $\xi=x+ct$, $\eta=x-ct$. Splošna rešitev: $u=F(\xi)+G(\eta)=F(x+ct)+G(x-ct)$.
**d'Alembertova formula** za homogeno valovno enačbo pri pogojih $u(x,0)=f(x)$, $u_t(x,0)=g(x)$: $u(x,t)=\frac{1}{2}(f(x+ct)+f(x-ct))+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)\,\mathrm{d}s$.
Trikotnik vpliva označimo z $\triangle(x_0,t_0)$ in je določen s točkami $(x_0-ct_0,0),(x_0+ct_0,0),(x_0,t_0)$. Na grafu je $x$ na $x$- osi, $t$ pa na $y$-osi.
**Nehomogena valovna enačba:** $u_{tt}-c^2u_{xx}=F(x,t)$. Rešitev je oblike: $u(x,t)=u_{\text{HOM}}(x,t)+u_{\text{PART}}(x,t)$, kjer je $u_{\text{PART}}(x,t)=\frac{1}{2c}\iint_{\triangle(x,t)}F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau$.
Za partikularni del torej integriramo: $u_{\text{PART}}(x,t)=\frac{1}{2c}\int_0^t\mathrm{d}\tau\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)}F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi$.
Odvod integrala: $F(x)=\int_{u(x)}^{v(x)}f(x,s)\,\mathrm{d}s$. Potem $F'(x)=\int_{u(x)}^{v(x)}\frac{\partial}{\partial x}f(x,s)\,\mathrm{d}s+f(x,(v(x))v'(x)-f(x,u(x))u'(x)$.
Trditev: Naj bodo $f,g$ in $F(\cdot,t)$ lihe za $t\geq 0$. Tedaj je d'Alembertova rešitev tudi liha. Ob predpostavkah $f\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}),g\in\mathcal{C}^1(\mathbb{R}),F,\frac{\partial F}{\partial x}\in\mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ dobimo klasično rešitev, tj. $u\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

## Separacija spremenljivk

$L^2([-\pi,\pi]) = \{f : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 \,\mathrm{d}x < \infty\}$ je vektorski prostor s skalarnim produktom $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Množica funkcij
$\{\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\sin x, \frac{1}{\pi}\cos x, \frac{1}{\pi}\sin 2x, \frac{1}{\pi}\cos 2x, \ldots\}$. je <u>kompleten</u> (vsako funkcijo se da na enoličen način razviti v tem sistemu), <u>ortonormiran</u> sistem za ta produkt.

**Fourierjev razvoj:** $f \in L^2([-\pi,\pi])$:
$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$,
$a_n = \langle f, \frac{1}{\pi}\cos nx\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}_0$,
$b_n = \langle f, \frac{1}{\pi}\sin nx\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}$.

**Sinusna in kosinusna vrsta:** $f \in L^2([0,\pi])$. Za tako funkcijo obstaja liha in soda razširitev na $[-\pi,\pi]$. Za $\tilde{f}^S$ so $b_n = 0$, za $\tilde{f}^L$ pa $a_n = 0$.

Posledica: Na $[0,\pi]$ za $f$ obstajata dva razvoja: **sinusna vrsta**: $\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \sin nx$ in **kosinusna vrsta**: $\tilde{f}(x) = \frac{\tilde{a}_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cos nx$, kjer sta:
$\tilde{a}_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}$,
$\tilde{b}_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}_0$.
S substitucijo lahko razvoje prevedemo na poljuben interval $[-L, L]$ oz. $[0, L]$, $L > 0$. V tem primeru je $\{\frac{1}{2L}, \frac{1}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}, \frac{1}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}, \ldots\}$ KONS.

**Uporabni integrali:** $\int_a^b \sin(\frac{n\pi x}{b-a})^2\,\mathrm{d}x = \int_a^b \cos(\frac{n\pi x}{b-a})^2\,\mathrm{d}x = \frac{(b-a)\left(\sin\left(\frac{2\pi a n}{b-a}\right)-\sin\left(\frac{2\pi b n}{b-a}\right)+2\pi n\right)}{4\pi n}, n \in \mathbb{C}$
$(\int_a^b x^i \sin(kx)\,\mathrm{d}x)_{1,2} = (\frac{-\sin(ak)+ak\cos(ak)+\sin(bk)-bk\cos(bk)}{k^2}, \frac{(a^2k^2-2)\cos(ak)-2ak\sin(ak)+(2-b^2k^2)\cos(bk)+2bk\sin(bk)}{k^3})$
$(\int_a^b x^i \cos(kx)\,\mathrm{d}x)_{1,2} = (\frac{-ak\sin(ak)-\cos(ak)+bk\sin(bk)+\cos(bk)}{k^2}, \frac{(2-a^2k^2)\sin(ak)-2ak\cos(ak)+(b^2k^2-2)\sin(bk)+2bk\cos(bk)}{k^3})$
$\int_a^b (x-a)(b-x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{k(a-b)(\sin(ak)+\sin(bk))+2\cos(ak)-2\cos(bk)}{k^3}$
$\int_a^b (x-a)(b-x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{k(a-b)(\cos(ak)+\cos(bk))-2\sin(ak)+2\sin(bk)}{k^3}$
$\int_a^b \sin(mx)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{-k\sin(ak)\sin(am)-m\cos(ak)\cos(am)+k\sin(bk)\sin(bm)+m\cos(bk)\cos(bm)}{k^2-m^2}$
$\int_a^b \sin(mx)\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{-m\sin(ak)\cos(am)+k\cos(ak)\sin(am)+m\sin(bk)\cos(bm)-k\cos(bk)\sin(bm)}{k^2-m^2}$
$\int_a^b \cos(mx)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{-k\sin(ak)\cos(am)+m\cos(ak)\sin(am)+k\sin(bk)\cos(bm)-m\cos(bk)\sin(bm)}{k^2-m^2}$, povsod so $m, n, k \in \mathbb{C}$

**Metoda separacije:** Kdaj jo uporabimo: <u>Trivialen pogoj:</u> Imamo eno spremenljivko na omejenem območju in s homogenimi robnimi pogoji, npr.
$x \in [0, L]$: $\alpha u(0,t) + \beta u_x(0,t) = 0, \quad \gamma u(,t) + \delta u_x(L,t) = 0, \quad \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$.
<u>Netrivialen pogoj:</u> Diferencialni operator, ki določa PDE, zadošča Sturm-Liouvillovi teoriji, tj. množica lastnih funkcij, ki jih dobimo iz robnega problema tvori K.O.N.S.
<u>Štirje koraki metode:</u> (zato K.O.N.S. 4)
#1: Separacija: nastavek $u(x,t) = X(x)T(t)$. (Nastavek vstavi v enačbo in loči spremenljivke, dobljeno enačbo pa enači z $\mu \in \mathbb{R}$.)
#2: Določanje lastnih funkcij $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz robnega problema za NDE. (Reši NDE za X, homogeni robni pogoji ti dajo začetne pogoje za NDE. Obravnavati moraš možnosti $\mu > 0, \mu = 0, \mu < 0$. Če je v kakšnem primeru $X \equiv 0$, lastnih funkcij v tem primeru ni. Pri izbire množice lastnih funkcij, lahko splošno konstanto za vsak člen BŠS postaviš na 1.)
#3: Iskanje pripadajočih $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. (Z $\mu$, ki ga dobiš v #2 in določa družino lastnih funkcij, reši še NDE za $T$. Splošno konstanto lahko tu pustiš, lahko si misliš, za je v njej spravljena konstanta iz množice lastnih funkcij za $X$.)
#4: Splošna rešitev $u = \sum_{n=1}^{\infty} X_n T_n$. (Rešitev naj bi bila odvisna od števno mnogo konstant, ki jih določiš iz nehomogenega robnega pogoja. Dobro je opaziti morebitne sinusne/kosinusne vrste, ki jih dobiš z robnim pogojem, in upoštevati zvezo s koeficienti iz razvoja v sinusno/kosinusnov vrsto, torej $C_n = a_n$ ali $b_n$.)
Če za nobeno od spremenljivk nimamo homogenega robnega pogoja, razbijemo problem na dva dela, npr: $\triangle u = 0$ razbijemo na $u = v + w$, $\triangle v = 0$ in $\triangle w = 0$, pri čemer $v$-ju in $w$-ju damo vsakemu en homogen robni pogoj in en pogoj, ki je od $u$-ja.

**Polarne koordinate:** $u_x = \cos(\varphi)u_r - \frac{\sin(\varphi)}{r}u_\varphi, u_y = \sin(\varphi)u_r + \frac{\cos(\varphi)}{r}u_\varphi$,
$u_{xx} = \cos^2(\varphi)u_{rr} - \frac{\sin(2\varphi)}{r}u_{r\varphi} + \frac{\sin^2(\varphi)}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{\sin^2(\varphi)}{r}u_r + \frac{\sin(2\varphi)}{r^2}u_\varphi$,
$u_{xy} = \frac{1}{2}\sin(2\varphi)u_{rr} + \frac{\cos(2\varphi)}{r}u_{r\varphi} - \frac{\sin(2\varphi)}{2r^2}u_{\varphi\varphi} - \frac{\sin(2\varphi)}{2r}u_r - \frac{\cos(2\varphi)}{r^2}u_\varphi$,
$u_{yy} = \sin^2(\varphi)u_{rr} + \frac{\sin(2\varphi)}{r}u_{r\varphi} + \frac{\cos^2(\varphi)}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{\cos^2(\varphi)}{r}u_r - \frac{\sin(2\varphi)}{r^2}u_\varphi, \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}$

## NDE višjih redov

Ne nastopa $y$: uvedemo $z = y'$.
Obe strani sta odvoda nečesa: integriramo in dodamo konstanto.

Odvodi: $y'/y = (\log(y))', xy' + y = (xy)', \frac{y''y-y'^2}{y^2} = (\frac{y'}{y})', \frac{y'x-y}{x^2} = (\frac{y}{x})'$.

Ne nastopa $x$: uvedemo $z(y) = y'$, $y$ neodvisna spr. $y'' = \dot{z}z$, $y''' = \ddot{z}z^2 + \dot{z}^2 z$.
Homogena: $F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$. Vpeljemo $z(x) = y'/y$. $y''/y = z' + z^2$.
Z utežjo: $F(kx, k^m y, k^{m-1}y', \ldots, k^{m-n}y^{(n)}) = k^p F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$. Uvedemo: $x = e^t, y = u(t)e^{mt}$.

## Integrali in formule

$\int \ln x \,\mathrm{d}x = x \ln x - x + C$
$\int x^m \log(x) \,\mathrm{d}x = x^{m+1}\left(\frac{\log x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}\right) + C$
$\int p(x)e^{kx} \,\mathrm{d}x = q(x)e^{kx} + C$, $\mathrm{st}(q) = \mathrm{st}(p)$
$\int e^{ax}\sin(bx) \,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin(bx) - b\cos(bx)) + C$
$\int e^{ax}\cos(bx) \,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx) + b\sin(bx)) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} \,\mathrm{d}x = \mathrm{arsh}\frac{x}{a} + C = \log|x + \sqrt{x^2+a^2}| + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$
$\int \frac{1}{a^2+x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$
$\sin^2(x/2) = (1-\cos(x))/2$

$\int \frac{1}{\sin(x)} \,\mathrm{d}x = \ln\tan(x/2) + C$
$\int \frac{1}{\cos(x)} \,\mathrm{d}x = -\log(\cot(x/2)) + C$
$\int \frac{1}{\tan(x)} \,\mathrm{d}x = \log(\sin(x)) + C$
$\int \tan(x) \,\mathrm{d}x = -\log(\cos(x)) + C$
$\int x/(1+x) \,\mathrm{d}x = x - \log(x+1) + C$
$\int x/(1+x) \,\mathrm{d}x = x - \log(x+1) + C$
$\int \sin^2(x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C$
$\int \cos^2(x) \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x + \sin x\cos x) + C$
$\cos^2(x/2) = (1+\cos(x))/2$

**Faktorizacija:**
$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$
$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$
$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$
$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

**Antifaktorizacija:**
$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$
$\cos\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$
$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$
$\sin\alpha\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$

avtor: Klemen Sajovec, malo sprememb: Jure Slak