

1. PERMUTACIJSKE GRUPE

Naj grupa G deluje na X . Definiramo relacijo: $x \sim y \iff \exists g \in G : g(x) = y$.

TRDITEV: \sim je ekvivalenčna relacija na X .

DEFINICIJA: **Orbite** (glede na delovanje G na X) so ekvivalenčni razredi relacije \sim , velja torej: $Gx = \{y \in X; g(y) = x\}$.

$G \cdot x \dots$ orbita elementa x , $G(x \rightarrow y) = \{g \in G; g(x) = y\}$, $G_x \dots$ stabilizator elementa x : $G(x \rightarrow x)$

IZREK: Če je G končna permutacijska grupa, ki deluje na X , tedaj je za vsak $x \in X$: $|G| = |Gx||G_x|$.

DEFINICIJA: Naj bo G grupa, ki deluje na X . Za $g \in G$ je $F(g) = \{x \in X; g(x) = x\}$ množica negibnih točk permutacije g .

BURNSIDEOVA LEMA: Število orbit pri delovanju G na X je enako: $\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |F(g)|$.

DEFINICIJA: Naj bo G grupa in X množica. **Reprezentacija** G s permutacijami nad X je predpis $g \in G \mapsto \hat{g}$ permutacija X , tako da je $\widehat{g_1 g_2} = \hat{g}_1 \hat{g}_2$ za vse $g_1, g_2 \in G$.

$\hat{G} = \{\hat{g}; g \in G\}$ je (permutacijska) grupa.

DEFINICIJA: Reprezentacija je **zvesta**, če je $\hat{g}_1 = \hat{g}_2 \iff g_1 = g_2$.

TRDITEV: Vsaka končna grupa premore zvesto reprezentacijo.

2. SIMETRIJE IN ŠTETJE

Naj bo α_i število disjunktnih ciklov dolžine i v π zapisanem kot produkt disjunktnih ciklov. (α_1 = število negibnih točk π .)

Če $|\pi| = n$, potem $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \dots + n\alpha_n = n$.

$z(\pi; x_1, \dots, x_n) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ imenujemo **ciklični indeks permutacije** π

DEFINICIJA: G permutacijska grupa, tedaj je **ciklični indeks grupe** G :

$$Z(G; x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} z(g; x_1, \dots, x_n).$$

Vrtiljaku ustreza ciklična grupa, ogrlici pa diedrska. D_{2n} je grupa simetrij pravičnega n -kotnika.

IZREK: $Z(C_n; x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \phi(d) x_d^{\frac{n}{d}}$, $\phi(p^k) = p^k(p-1)$.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\phi(n)$	1	1	2	2	4	2	6	4	6	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18	8

IZREK: $Z(D_{2n}; x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2} Z(C_n; x_1, \dots, x_n) + \begin{cases} \frac{1}{4} (x_1^2 x_2^{\frac{n}{2}-1} + x_2^{\frac{n}{2}}); & n \text{ sod} \\ \frac{1}{2} x_1 x_2^{\frac{n-1}{2}}; & n \text{ lih} \end{cases}$

Delovanje na ploskve nekega telesa je enako kot delovanje na oglišča dualnega telesa. Telesa in njihovi duali:

- kocka \leftrightarrow oktaeder
- tetraeder \leftrightarrow tetraeder
- ikozaeder (12 oglišč, 30 robov, 20 ploskev, ploskve trikotniki) \leftrightarrow dodekaeder (20 oglišč, 30 robov, 12 ploskev, ploskve petkotniki)

polieder	$ X $	$ G $	Z
tetraeder	4	12	$\frac{1}{12} (x_1^4 + 8x_1 x_3 + 3x_2^2)$
oktaeder	6	24	$\frac{1}{24} (x_1^6 + 6x_1^2 x_4 + 3x_1^2 x_2^2 + 6x_2^3 + 8x_3^2)$
kocka	8	24	$\frac{1}{24} (x_1^8 + 8x_1^2 x_2^2 + 9x_2^4 + 6x_4^2)$
ikozaeder	12	60	$\frac{1}{60} (x_1^{12} + 24x_1^2 x_2^2 + 15x_2^6 + 20x_3^4)$
dodekaeder	20	60	$\frac{1}{60} (x_1^{20} + 20x_1^2 x_3^6 + 15x_2^{10} + 24x_5^4)$

3. ŠTEVILO NEEKVIVALENTNIH BARVANJ

G grupa, ki deluje na X , $|X| = n$, K naj bo množica r -barv, $w : X \rightarrow K$ je r -barvanje X , $\Omega = \{w : X \rightarrow K\}$, $|\Omega| = r^n$

$\hat{g} : \Omega \rightarrow \Omega$ ($w \mapsto \hat{g}(w)$). g je avtomorfizem grafa. Velja: $(\hat{g}(w))(x) = w(g^{-1}(x))$.

LEMA: Preslikava $\hat{\cdot}$ je zvesta reprezentacija grupe G .

Grupi G in $\hat{G} = \{\hat{g} : \Omega \rightarrow \Omega\}$ sta izomorfni.

DEFINICIJA: Barvanji sta **ekvivalentni**, če sta v isti orbiti grupe \hat{G} , oz. število neekvivalentnih barvanj X glede na G je število orbit G .

IZREK: Naj bo G grupa, ki deluje na X in $r \geq 2$ število barv. Tedaj je število neekvivalentnih barvanj X enako $Z(G; r, \dots, r)$.

$K = \{a, b, \dots, k\}$, $U(a, b, \dots, k) \dots$ rodovna funkcija za vsa neekvivalentna barvanja glede na delovanje grupe G na n -množico X .

IZREK POLYA: Če G deluje na n -množico X in je $K = \{a, b, \dots, k\}$ množica barv, tedaj je

$$U(a, b, \dots, k) = Z(G; \sigma_1, \dots, \sigma_n), \text{ kjer je } \sigma_i = a^i + b^i + \dots + k^i \quad (1 \leq i \leq n)$$

4. RAMSEYEVA TEORIJA

TRDITEV: Naj bodo povezave K_n pobarvane z dvema barvama in naj bo r_i število povezav iz i -tega vozlišča barve 1. Tedaj je število monokromatičnih trikotnikov enako $\binom{n}{3} - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n r_i(n-1-r_i)$.

POSLEDICA: V situaciji iz zadnje trditve imamo vsaj $\binom{n}{3} - \lfloor \frac{n}{2} \lfloor (\frac{n-1}{2})^2 \rfloor \rfloor$ monokromatičnih trikotnikov.

RAMSEYEV IZREK: Naj bo $r \geq 1$ in $a_1, a_2 \geq r$. Tedaj obstaja tako najmanjše naravno število $N(a_1, a_2; r)$, da velja naslednje: naj bo S n -množica, kjer je $n \geq N(a_1, a_2; r)$ in recimo, da smo vse njene r -podmnožice pobarvali z barvo 1 oz. barvo 2. Tedaj S premore a_1 -podmnožico, tako da so vse njene r -podmnožice barve 1, ali pa S premore a_2 -podmnožico, da so vse njene r -podmnožice barve 2.

POSLEDICA: $N(a_1, a_2; r) \leq N(N(a_1-1, a_2; r), N(a_1, a_2-1; r); r-1) + 1$.

IZREK: $N(a_1, a_2; 2) \leq \binom{a_1+a_2-2}{a_1-1}$.

$a_1 \backslash a_2$	3	4	5	6	7	8	9	10
3	6	9	14	18	23	28	36	40/42
4		18	25	36/41	49/61	58/84	73/115	92/149
5			43/49	58/87	80/143	101/216	126/316	144/442
6				102/165	113/298	132/495	169/780	179/1171

IZREK: Če je $a \geq 3$, tedaj je $N(a, a; 2) \geq 2^{\frac{a}{2}}$.

IZREK (ERDŐS, SZEKERES): Za vsak $n \geq 3$ obstaja tako najmanjše naravno število N , tako da če imamo N točk v ravnini v splošni legi (nobene 3 niso kolinearne), potem med njimi obstaja n točk, ki določajo konveksen n -kotnik.

DEFINICIJA: Naj bodo G_1, \dots, G_k grafi. **Grafovska Ramseyeva število** $N(G_1, \dots, G_k)$ je najmanjši tak N , da če povezave polnega grafa K_N pobarvamo poljubno z barvami $1, 2, \dots, k$, tedaj v tem K_N najdemo vsaj en G_i , ki je barve i .

To število obstaja!

IZREK: Če je T drevo z n vozlišči, tedaj je $N(T, K_n) = (n-1)(n-1) + 1$.

DEFINICIJE:

- (1) **Interval** $I_G(u, v)$ med vozliščema u in v v grafu G je množica vozlišč, ki ležijo na najkrajši u, v -poti.
- (2) **Ekscentričnost vozlišča** u grafa G , $\text{ecc}_G(u) = \max \{d(u, x); x \in V(G)\}$.
- (3) **Polmer** grafa G : $\text{rad}(G) = \min_u \max_v \{d(u, x)\} = \text{minimalna ekscentričnost grafa}$.
- (4) **Center** grafa G , $C(G)$, je množica vozlišč, ki realizirajo polmer.
- (5) **Premmer** grafa, $\text{diam}(G) = \max_{u, v \in V(G)} d(u, v)$.
- (6) Podgraf H grafa G je **izometrični podgraf**, če velja: $\forall u, v \in V(H) : d_H(u, v) = d_G(u, v)$.
- (7) Podgraf H grafa G je **konveksen**, če velja: $x, y \in V(H) \implies I_G(x, y) \subseteq V(H)$.

IZREK: Če je G graf z $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$, tedaj je $(A(G)^r)_{ij}$ število sprehodov med v_i in v_j dolžine r .POSLEDICA: Če je G povezan graf, potem so diagonalci v $A(G)^2$ stopnje vozlišč grafa, sled matrike $A(G)^3$ je 6-krat število trikotnikov grafa G . $S_k(G) = \sum_{i=0}^k A(G)^i = I + A(G) + \dots + A(G)^k$.POSLEDICA: $\text{rad}(G)$ je najmanjši k , tak da $S_k(G)$ premore vrstico brez ničel in $C(G)$ ustreza vsem vozliščem s takimi vrsticami. $\text{diam}(G)$ je najmanjši k , tak da $S_k(G)$ ne vsebuje nobene ničle.

6. VLOŽITVE METRIČNIH PROSTOROV V GRAFE

DEFINICIJA: Metrični prostor (M, d) je **realiziran** z omrežjem $G = (V, E, w)$, $w : E \rightarrow \mathbb{R}^+$, če je $M \subseteq V$ in je $d(x, y) = d_G(x, y) \forall x, y \in M$. Realizacija $G = (V, E, w)$ metričnega prostora (M, d) je **optimalna**, če je $w(G) = \sum_{e \in E} w(e)$ najmanjši možen.

IZREK: Vsak metrični prostor premore realizacijo z omrežjem. Vsak končen metričen prostor premore optimalno realizacijo z grafom.

LEMA: Naj bo (M, d) metrični prostor z $|M| = n$ in naj bo $G = (V, E, w)$ njegova realizacija, kjer je $|V| > 2^{\binom{n}{2}+1} + n$. Tedaj (M, d) premore realizacijo s pravim podgrafom od G , ki ima kvečjemu $2^{\binom{n}{2}+1} + n$ vozlišč.DEFINICIJA: Metrični prostor (M, d) zadošča **pogoju 4 točk**, če za vsako četverico $x, y, z, t \in M$ velja: $d(x, y) + d(z, t) \leq \max \{d(x, z) + d(y, t), d(x, t) + d(y, z)\}$.Ekvivalenten pogoj: $s_1 = d(x, y) + d(z, t), s_2 = d(x, z) + d(y, t), s_3 = d(x, t) + d(y, z)$, potem velja, da sta največja s -a enaka.IZREK: Graf G je drevo natanko tedaj, ko je povezan, brez trikotnikov in njegova metrika zadošča pogoju 4 točk.

IZREK: Končen metričen prostor lahko karakteriziramo z drevesom natanko tedaj, ko njegove točke zadoščajo pogoju 4 točk. V tem primeru je realizacija enolična in jo lahko najdemo v polinomskem času.

7. WIENERJEV INDEKS

DEFINICIJA: **Wienerjev indeks** grafa G je $W(G) = \sum_{\{u, v\}} d_G(u, v) = \frac{1}{2} \sum_u \sum_v d_G(u, v)$.IZREK: Če je T drevo, tedaj je $W(T) = \sum_e n_1(e)n_2(e)$, kjer sta $n_1(e), n_2(e)$ števili vozlišč v povezanih komponentah grafa $T - e$.DEFINICIJA: G, H grafa. Tedaj je **kartezični produkt** $G \square H$ grafov G in H graf z:

$$V(G \square H) = V(G) \times V(H) \text{ in } (g, h) \sim (g', h') \iff g = g' \text{ in } hh' \in E(H) \text{ ali } gg' \in E(G) \text{ in } h = h'.$$

LEMA O RAZDALJI: Če sta G in H povezana grafa, tedaj je $d_{G \square H}((g, h), (g', h')) = d_G(g, g') + d_H(h, h')$.TRDITEV: Če sta G in H povezana grafa, tedaj je $W(G \square H) = |V(G)|^2 W(H) + |V(H)|^2 W(G)$.POSLEDICA: $W(Q_n) = n2^{2(n-1)}; n \geq 1$.

8. VAJE

TRDITEV: Naj bo $X = X_1 \amalg X_2$, $|X_1| = n_1, |X_2| = n_2, |X| = n$. Naj G_1 deluje na X_1 in G_2 na X_2 . Potem velja, da je

$$Z(G_1 \times G_2; x_1, x_2, \dots, x_n) = Z(G_1; x_1, \dots, x_{n_1}) Z(G_2; x_{n_1+1}, \dots, x_n),$$

kjer $G_1 \times G_2$ deluje na X na naraven način. $N(2, k; 2) = k$ DEFINICIJA: Naj bo G graf. Podmnožica $A \subseteq V(G)$ je **klika** v G , če sta vsaki dve vozlišči iz A sosednji v G . Podmnožica $B \subseteq V(G)$ je **neodvisna množica** v G , če nobeni dve vozlišči iz B nista sosednji v G .LEMA: V grafu z n vozlišči obstaja klika velikosti $\lfloor \frac{1}{2} \log_2 n \rfloor$ ali neodvisna množica velikosti $\lfloor \frac{1}{2} \log_2 n \rfloor$.TRDITEV: Naključni graf na n vozliščih ima (z veliko verjetnostjo, tj. $P \rightarrow 1$ ko $n \rightarrow \infty$) največjo kliko in največjo neodvisno množico velikosti $C \log n$.LEMA: Naključni graf na n vozliščih ima največjo kliko in neodvisno množico velikosti $\leq 2 \log n$.TRDITEV: Naj bosta $N(a-1, b; 2)$ in $N(a, b-1; 2)$ obe sodi. Potem velja:

$$N(a, b; 2) \leq N(a-1, b; 2) + N(a, b-1; 2) - 1.$$

LEMA: Za vsak $m \in \mathbb{N}$ obstaja tak $n \in \mathbb{N}$, da vsako zaporedje n realnih števil vsebuje monotono podzaporedje dolžine m . $n = N(m, m; 2)$.LEMA: Za $n \geq N(m, m; 2)$ ima vsaka $\{0, 1\}$ -matrika glavno podmatriko velikosti m , v kateri so vsi elementi nad diagonalo enaki. Za $n = N(N(m, m; 2), N(m, m; 2))$ ima matrika glavno podmatriko, v kateri so vsi elementi nad diagonalo enaki in vsi elementi pod diagonalo enaki.LEMA: $N(\underbrace{3, 3, \dots, 3}_k; 2) \leq \lfloor ek! \rfloor + 1$.Velja: $\lfloor ek! \rfloor = 1 + \lfloor e(k-1)! \rfloor k$.SCHUROV IZREK: Za vsak $k \in \mathbb{N}$ obstaja $n \in \mathbb{N}$, da za vsako k -barvanje množice $[n]$ obstajajo števila $x, y, z \in [n]$ iste barve z lastnostjo $x + y = z$.LEMA: $N(2K_3, K_3) = 8, N(mK_3, mK_3) = 5m$ za $m \geq 2$. T drevo. Potem $C(T)$ vsebuje bodisi 1 bodisi 2 vozlišči. $\text{rad}(G) \leq \text{diam}(G) \leq 2 \text{rad}(G)$ $W(K_{1,n}) = n^2, n \geq 3, W(P_n) = \frac{1}{6}n(n^2 - 1), n \geq 2, W(K_{1,n} \square P_n) = \frac{1}{6}(n+1)^2 n(n^2 - 1)$.

Pogoj 4 točk implicira trikotniško neenakost.

Razdalja v drevesu zadošča pogoju 4 točk.

9. UPORABNO

 D_{2n} = grupa simetrij pravilnega n -kotnika. $|D_{2n}| = 2n, D_{2n} = \langle \text{rotacija za } \frac{2\pi}{n}, \text{zrcaljenje} \rangle$. Naj bo $r = \text{rotacija za } \frac{2\pi}{n}$ in z zrcaljenje. Velja $r^i z = z r^{-i}$.Vsi elementi D_{2n} so oblike: $r^i, i = 0, 1, \dots, n-1$ in $z r^i, i = 0, 1, \dots, n-1$.

Koliko je različnih ogrlic iz kroglj različnih barv? Poišči grupo avtomorfizmov, oz. njene predstavnike in pogledaj, koliko že pobarvanih ogrlic fiksirajo.

Npr. id fiksira $\binom{n}{r}$ ogrlic, kjer je n število biserov in r število barv.Število različnih objektov z npr. k belimi in l črnimi deli: uporabi izrek Polya in iščeš koeficient pred $b^k c^l$.Ciklični indeksi S_2, S_3, S_4, S_5 , ki delujejo na $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_4, \mathbb{Z}_5$:

- $Z(S_2; x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2)$
- $Z(S_3; x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{6}(x_1^3 + 3x_1 x_2 + 2x_3)$
- $Z(S_4; x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{24}(x_1^4 + 6x_2 x_1^2 + 3x_3^2 + 8x_3 x_1 + 6x_4)$
- $Z(S_5; x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{1}{120}(x_1^5 + 10x_2 x_1^3 + 15x_3^2 x_1 + 20x_3 x_1^2 + 20x_3 x_2 + 30x_4 x_1 + 24x_5)$

 $Q_n: V(Q_n) = \{0, 1\}^n = \{b_1 \dots b_n; b_i \in \{0, 1\}\}, u = b_1 \dots b_n, v = c_1 \dots c_n \in V(Q_n). uv \in E(Q_n) \iff \exists! i : b_i \neq c_i$.

Avtor: Klemen Sajovec, manjši popravki: Jure Slak