

## VERJETNOST

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \rightarrow E(\underline{X}) = \begin{pmatrix} E(X_1) \\ E(X_2) \\ \vdots \\ E(X_n) \end{pmatrix} \rightarrow \text{cov}(\underline{X}) = \text{var}(X) = \begin{pmatrix} \text{var}(X_1) & \text{cov}(X_1, X_2) & \cdots & \text{cov}(X_1, X_n) \\ \text{cov}(X_2, X_1) & \text{var}(X_2) & \cdots & \text{cov}(X_2, X_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(X_n, X_1) & \text{cov}(X_n, X_2) & \cdots & \text{var}(X_n) \end{pmatrix}$$

kovariančna matrika (simetrična, spd)

$$E(X^2) = \text{var}(X) + E(X)^2$$

$$\text{cov}(\underline{X}) = E[(\underline{X} - E(\underline{X}))(\underline{X} - E(\underline{X}))^T] = E(\underline{X}\underline{X}^T) - E(\underline{X})E(\underline{X})^T$$

$$\text{korelacijski koeficient: } \text{corr}(X_1, X_2) = \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{\text{var}(X_1) \text{var}(X_2)}}$$

Če je  $A$  deterministična matrika (konstantna), velja:  $E(A\underline{X}) = AE(\underline{X})$ ,  $\text{cov}(A\underline{X}) = A \text{cov}(\underline{X}) A^T$

$$\text{cov}(\langle \underline{X}, \underline{u} \rangle, \langle \underline{X}, \underline{v} \rangle) = \langle \text{cov}(\underline{X}) \underline{u}, \underline{v} \rangle, \text{cov}(\underline{u}^T \underline{X}, \underline{v}^T \underline{X}) = \underline{v}^T \text{cov}(\underline{X}) \underline{u}$$

Standardna  $p$ -razsežna normalna porazdelitev je porazdelitev slučajnega vektorja  $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ ,

kjer so  $Z_1, \dots, Z_p \sim N(0, 1)$  in neodvisne.

Če je  $Q$  ortogonalna matrika in  $\underline{Z}$  standarden normalen vektor, potem je  $\underline{W} = Q\underline{Z}$  tudi standarden normalen.

Splošna  $n$ -razsežna normalna porazdelitev je vsaka porazdelitev slučajnega vektorja  $\underline{W} = A\underline{Z} + \underline{u}$ , kjer je  $\underline{Z}$  standarden  $p$ -razsežni normalni vektor,  $A$  matrika  $n \times p$  polnega ranga in  $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ .

$$E(\underline{Z}) = 0, \text{cov}(\underline{Z}) = I, E(\underline{W}) = \underline{u}, \text{cov}(\underline{Z}) = AA^T$$

Če  $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$  polnega ranga, je  $AA^T$  polnega ranga (in obrnljiva).

$$\sigma > 0, X \sim N(\mu, \sigma^2) \implies P(X \leq a) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$$X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2), \text{ potem } X_1 + \dots + X_n \sim N(n\mu, \frac{\sigma^2}{n}), \bar{X} \sim N(\mu, \sigma^2), \bar{X} - \mu \sim N(0, \frac{\sigma^2}{n})$$

$$\text{Pogojna gostota: } f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}\right) \implies X_2|X_1 \sim N(\mu_2 + \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}(X_1 - \mu_1), \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12})$$

$$\|\underline{X}\|^2 = \underline{X}^T \underline{X} = \text{sl}(\underline{X}\underline{X}^T)$$

Če poznamo porazdelitev slučajne spremenljivke  $Y$  in  $f_{X|Y}$ , potem velja  $f_X(x) = E[f_{X|Y}(x)]$ .

**Pogojne pričakovane vrednosti:**  $E(X) = E[E(X|Y)]$ ,  $E[Xg(Y)|Y] = E(X|Y)g(X)$ , v abstraktnem smislu definiramo  $E[Y|X]$  kot funkcijo  $\Psi(x)$ , za katero za vsako omejeno zvezno funkcijo  $g$  velja  $E[Yg(x)] = E[\Psi(x)g(x)]$ .

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(E(X|Z), E(Y|Z)) + E(\text{cov}(X, Y|Z)), \text{ med drugim } \text{var}(X) = \text{var}(E(X|Z)) + E(\text{var}(X|Z))$$

Če so  $X_1, \dots, X_n$  neodvisne med seboj in tudi od  $Y_1, \dots, Y_n$ , potem so  $X_1, \dots, X_n$  neodvisne tudi pogojno na  $Y$ .

## CENTRALNI LIMITNI IZREK

**Izrek:** Naj bodo  $X_1, X_2, \dots$  neodvisne, enako porazdeljene z  $E(X_i^2) < \infty$  in  $E(X_i) = \mu_1$  ter  $\text{var}(X_i) = \sigma_1^2$ .  $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ . Tedaj:

$$\frac{S_n - n\mu_1}{\sigma_1\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{šibko}} N(0, 1),$$

kjer  $n\mu_1 = E(S_n)$  in  $\sigma_1\sqrt{n} = \sigma(S_n)$ .

Bolj ohlapno:  $n$  velik  $\implies S_n \sim N(n\mu_1, n\sigma^2)$

$$P(a \leq S_n \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b-n\mu_1}{\sigma_1\sqrt{n}}\right) - \Phi\left(\frac{a-n\mu_1}{\sigma_1\sqrt{n}}\right)$$

Če slučajna spremenljivka živi v celih številih, lahko namesto  $\leq$  vzamemo  $<$  in mejo povečamo za 1, ali pa vzamemo sredino.

$$\text{Natančnost sredine je odvisna od asimetrije, ki jo meri } A(X) = \frac{E[(X-E(X))^3]}{(\text{var}(X))^{\frac{3}{2}}}.$$

Naj bodo  $X_1, \dots, X_n$  neodvisne in identično porazdeljene,  $\sigma_1 = \sqrt{\text{var}(X_i)}$ ,  $\gamma_1 = E[|X_i - E(X_i)|^3]^{\frac{1}{3}}$ ,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Ko  $n \rightarrow \infty$ ,  $P(a_n \leq S_n \leq b_n)$  aproksimiramo z ustreznimi normalnimi. Zadosten pogoj, da gre:

- absolutna napaka  $\rightarrow 0$ :  $n \gg \frac{\gamma_1^6}{\sigma_1^6}$
- relativna napaka  $\rightarrow 0$ :  $n \gg \frac{\gamma_1^6}{\sigma_1^6}$  in  $\min\{|a_n - E(S_n)|, |b_n - E(S_n)|\} \ll \frac{n^{\frac{2}{3}}\sigma_1^2}{\gamma_1}$

$$\mu_1 = E(X_i), \sup_{x \in \mathbb{R}} |P(S_n \leq x) - \Phi\left(\frac{x-n\mu_1}{\sigma_1\sqrt{n}}\right)| \leq \frac{0.4774}{\sqrt{n}} \frac{\gamma_1^3}{\sigma_1^3}$$

**Porazdelitev  $\chi^2$ :**

Če so  $Z_1, \dots, Z_n$  neodvisne standardno normalne, potem je  $Z_1^2 + \dots + Z_n^2 \sim \chi^2(n)$ ,  $\chi^2(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N(0, 1)$ .

$$\chi^2(n) = \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Če  $U \sim \Gamma(a, \lambda)$  in  $V \sim \Gamma(b, \lambda)$ , potem  $U + V \sim \Gamma(a + b, \lambda)$

Če  $U_1, \dots, U_m \sim \Gamma(\frac{n}{2m}, \frac{1}{2})$  neodvisne, potem  $U_1 + \dots + U_m \sim \chi^2(n)$ .

**Razmerje Ljapunova:**

$$S = X_1 + \dots + X_n, \mu = E(S), \sigma^2 = \text{var}(S), X_1, \dots, X_n \text{ neodvisne. } P(a \leq S \leq b) \approx \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$$

$\sup_{x \in \mathbb{R}} |P(S \leq x) - \Phi(\frac{x-\mu}{\sigma})| \leq \frac{0.5591}{\sigma^3} \sum_{k=1}^n E[|X_k - E(X_k)|^3]$   
 Če desna stran konvergira k 0, imamo konvergenco k  $N(0, 1)$ .

## DEJANSKA STATISTIKA – VZROČENJE

$\hat{a}$  je nepistranska cenilka za  $a$ , če je  $E(\hat{a}) = a$ , srednja kvadratična napaka:  $q(\hat{a}) = E[(\hat{a} - a)^2]$ , standardna napaka:  $\sqrt{q(\hat{a})} = se(\hat{a})$ .

Slučajne spremenljivke  $X_1, \dots, X_n$  so izmenljive, če velja:  $(X_{\pi(1)}, X_{\pi(2)}, \dots, X_{\pi(n)}) \stackrel{d}{=} (X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \forall \pi \in S_n$ .  
 Za izmenljive sl. spr.  $X_1, \dots, X_n$  s pričakovano vrednosti  $E(X_i) = \mu$ , varianco  $\text{var}(X_i) = \sigma^2$ , korelacijo  $\text{corr}(X_i, X_j) = \rho$ , za  $i \neq j$  je vzorčno povprečje  $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$  nepistranska cenilka za  $\mu$ ,  $\text{var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}(1 + \rho(n+1))$ , nepistranska cenilka za  $\sigma^2$  pa je  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{(n-1)(1-\rho)} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

### Enostavno slučajno vzorčenje

Populacija:  $1, 2, \dots, N$ , vzorec:  $K_1, K_2, \dots, K_n$ . Vrednosti spremenljivk na populaciji  $x_1, x_2, \dots, x_N$  (ne poznamo vseh). Poznamo vrednosti na vzorcu:  $X_i = x_{K_i}$  (izmenljive, ker je vsaka  $n$ -terica enako verjetna)

### Stratificirano vzorčenje:

Populacijo velikosti  $N$  razdelimo na  $k$  stratumov velikosti  $N_1, \dots, N_k$ , kjer  $w_1, w_2, \dots, w_k$  ( $w_i = \frac{N_i}{N}$  in  $w_1 + \dots + w_k = 1$ ) predstavljajo delež populacije v stratumih,  $\mu_1, \dots, \mu_k$  povprečja stratificiranih spremenljivk,  $\sigma_1, \dots, \sigma_k$  standardne odklone. Povprečje na celotni populaciji je  $\mu = w_1\mu_1 + \dots + w_k\mu_k$ .

Varianca na celi populaciji:  $\sigma^2 = \sigma_b^2 + \sigma_w^2$ , kjer  $\sigma_b^2 = \sum_{i=1}^k w_i(\mu_i - \mu)^2$  in  $\sigma_w^2 = \sum_{i=1}^k w_i\sigma_i^2$ .

Enostavni slučajni vzorci po stratumih:

$X_{11}, \dots, X_{1n_1} \quad \bar{X}_1$   
 $X_{21}, \dots, X_{2n_2} \quad \bar{X}_2$   
 $\vdots \quad \vdots$ , kjer so  $\bar{X}_i$  vzorčna povprečja po stratumih.  $\bar{X} = \sum_{i=1}^k w_i \bar{X}_i$  je nepistranska cenilka za  $\mu$ ,  
 $X_{k1}, \dots, X_{kn_k} \quad \bar{X}_k$   
 $\sigma_i^2 = \frac{1}{n_i-1} \frac{N_i-1}{N_i} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$  nepistranska cenilka za  $\sigma_i^2$ ,  $\hat{\sigma}_w^2 = \sum_{i=1}^k \frac{w_i}{n_i-1} \frac{N_i-1}{N_i} \sum_{j=1}^{n_i} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$  nepistranska cenilka za  $\sigma_w^2$  in  $\hat{\sigma}_b^2 = \sum_{i=1}^k w_i(\bar{X}_i - \bar{X})^2 - \sum_{i=1}^k (w_i - w_i^2) \frac{N_i - n_i}{N_i - 1} \frac{1}{n_i} \hat{\sigma}_i^2$  nepistranska cenilka za  $\sigma_b^2$ .

## INTERVALI ZAUPANJA

$a$  bi radi ocenili:  $a_{min} < a < a_{max}$ , kjer je  $(a_{min}, a_{max})$  interval zaupanja.  $P(a_{min} < a < a_{max}) \geq 1 - \alpha$ , kjer je  $1 - \alpha$  stopnja zaupanja (95%, 99%) in  $\alpha$  stopnja tveganja (5%, 1%).

Določanje IZ: pivotna funkcija  $T(\underline{X}, a)$ , kjer je  $\underline{X}$  opažanje in  $a$  ocenjevani parameter.

IZ za  $\mu$ , kjer je  $\sigma$  znan:  $P(|\bar{X} - \mu| < M_\alpha) = 1 - \alpha$ ,  $M_\alpha = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$

Če tudi  $\sigma$  ne poznamo in če so  $X_1, \dots, X_n \sim N(\mu, \sigma^2)$ , potem  $T(\underline{X}, \mu) = \frac{\bar{X} - \mu}{S^2} \sqrt{n}$ , kjer  $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ .

Za velike  $n$  je  $\frac{\bar{X} - \mu}{S} \sqrt{n} \sim N(0, 1)$ , v splošnem pa je  $\frac{\bar{X} - \mu}{S} \sqrt{n} \sim \text{Student}(n-1)$ .

## OCENJEVANJE PARAMETROV

### Metoda momentov:

Vzorec  $= (X_1, \dots, X_n)^T$  je iz neke porazdelitve  $f_X(x|\vartheta)$ . Nastavimo parametre  $\vartheta$ , da bo povprečje enako vzorčnemu povprečju, varianca vzorčni varianci. ... Rešimo sistem enačb:  $E[X] = \bar{X}$ ,  $\text{var}(X) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ .

**Metoda največjega verjetja:** Postavimo se na stališče, da je vzorec  $\underline{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$  neke porazdelitve  $f_X(x|\vartheta)$ , ki smo ga dobili verjetno eden izmed bolj verjetnih, in nastavimo parametre  $\vartheta$  tako, da bo najbolj verjeten. Kako verjeten je vzorec je podano s funkcijo verjetja  $L$ . Če so vzorci neodvisni, je  $L(\vartheta|\underline{x}) = \prod_{i=1}^n f_X(x_i|\vartheta)$ . V diskretnem primeru je to  $L(\vartheta|\underline{x}) = \prod_{i=1}^n P_{\vartheta}(X = x_i)$ .

Definiramo tudi logaritemsko funkcijo verjetja  $\ell(\vartheta|\underline{x}) = \log(L(\vartheta|\underline{x}))$ .

Cenilka po metodi največjega verjetja (MLE) je vrednost  $\hat{\vartheta}$ , kjer je dosežen maksimum  $L$ , ali ekvivalentno,  $\ell$ . Cenilka je nepistranska. Ponavadi jo dobimo tako da rešimo sistem  $\frac{\partial \ell}{\partial \vartheta}(\vartheta|\underline{x}) = 0$  za  $\vartheta$ .

Za MLE velja:  $\sqrt{n}(\vartheta - \hat{\vartheta}) \sim N(0, I^{-1}(\vartheta))$ .

### Fisherjeva matrika informacije:

Varianca MLE je dana s Fisherjevo matriko informacije.

Matrike je dana z  $I_{kl}(\vartheta) = -E \left[ \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_k \partial \vartheta_l} (\log(f_X(x|\vartheta))) \right]$ ,  $I(\vartheta) = -E[\text{hesse}(\log(f_X(x|\vartheta)))]$ .

Velja:  $\text{var}(\hat{\vartheta}_k) = \frac{(I^{-1})_{kk}}{n}$ ,  $se(\hat{\vartheta}_k) = \sqrt{\frac{(I^{-1})_{kk}}{n}}$ .

Za primer, ko je  $\vartheta$  skalar, se formule poenostavijo:  $I(\vartheta) = E[\frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \log(f_X(x|\vartheta))]$ ,

$se(\hat{\vartheta}) = \frac{1}{\sqrt{nI(\vartheta)}}$ . Aproximativni interval zaupanja:  $\vartheta \in \left( \hat{\vartheta} \pm z_{1-\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{1}{nI(\hat{\vartheta})}} \right)$ .

## TESTIRANJE HIPOTEZ

Naredimo si testno statistiko in hipotezo zavrnamo, če ima preveč ekstremno vrednost.  $p$ -vrednosti imenujemo verjetnost, da dobimo še bolj ekstremen rezultat. Če je  $p$ -vrednost manjša od stopnje tveganja  $\alpha$ , hipotezo zavrnamo.

$$\frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sqrt{n} \sim N(0, 1)$$

$$\frac{1}{\hat{\sigma}^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{n-1}{\hat{\sigma}^2} \hat{\sigma}^2 \sim \chi^2(n-1)$$

Če  $Z \sim N(0, 1)$ ,  $H \sim \chi^2(m) \implies \frac{Z}{\sqrt{H}} \sqrt{m} \sim Student(m)$ .

**T-test:** Recimo, da so podatki  $X_1, \dots, X_n$  vzorec iz  $N(\mu, \sigma^2)$ . Testiramo  $H_0 : \mu = \mu_0$  proti  $H_1 : \mu \neq \mu_0$ .

Testna statistika:  $T = \frac{\bar{X} - \mu_0}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}} \sqrt{n} \sim Student(n-1)$ , kjer  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ .

$H_0$  zavrnamo proti:

- $H_1 : \mu \neq \mu_0$ , če  $|T| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$
- $H_1 : \mu > \mu_0$ , če  $T \geq t_{1-\alpha}(n-1)$
- $H_1 : \mu < \mu_0$ , če  $T \leq -t_{1-\alpha}(n-1)$ .

Podobno deluje  $Z$ -test, samo da uporabljamo normalno porazdelitev.

Primerjava dveh povprečij:  $X_1, \dots, X_m \sim N(\mu_1, \sigma^2)$  neodvisne in  $Y_1, \dots, Y_n \sim N(\mu_2, \sigma^2)$  neodvisne.

Testiramo  $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ , ki ga zavrnamo proti:

- $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ , če  $|T| \geq t_{1-\frac{\alpha}{2}}(m+n-2)$
- $H_1 : \mu_1 > \mu_2$ , če  $T > t_{1-\alpha}(m+n-2)$
- $H_1 : \mu_1 < \mu_2$ , če  $T \leq -t_{1-\alpha}(m+n-2)$ .

**$\chi^2$  test:** Denimo, da imamo podatek  $n_1, \dots, n_r$ , ki je realizacija slučajne multinomske porazdeljene spremenljivke s parametri  $n = \text{št. poskusov}$  in  $p_1, \dots, p_r = \text{kako verjeten je kateri izid}$ .

Testna statistika je definirana kot  $\chi^2 = \sum_{k=1}^r \frac{(n_k - np_k)^2}{np_k}$  in je porazdeljena  $\chi^2(r-1)$ .

Hipotezo zavrnamo, če je  $\chi^2 > \chi_\alpha$ , kjer je  $\alpha$  stopnja tveganja in  $\chi_\alpha$  kvantil.

**$\lambda$  statistika:**

Uporabimo razmerje verjetij:  $\Lambda = \frac{\sup_{\vartheta \in \Omega} L(\vartheta|x)}{\sup_{\vartheta \in \Omega_0} L(\vartheta|x)}$

Wilksov izrek:  $\lambda = 2 \log(\Lambda) = \sup_{\vartheta \in \Omega} \ell(\vartheta|x) - \sup_{\vartheta \in \Omega_0} \ell(\vartheta|x)$  ima porazdelitev  $\chi^2(r)$ , za  $r = \dim \Omega - \dim \Omega_0$ .

Hipotezo zavrnamo, če je  $\lambda > \chi_{1-\alpha}(r)$ .

## LINEARNA REGRESIJA

Predpostavljamo, da so opaženi slučajni podatki  $\underline{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^T$  nastali kot  $\underline{Y} = X\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$ , kjer je  $X$  znana deterministična  $n \times m$  matrika,  $\underline{\beta}$  neznan determinističen  $m$  vektor,  $\underline{\varepsilon}$  neznan slučajen vektor napak, za katerega predpostavimo standardni regresijski model, ki pravi:  $E[\underline{\varepsilon}] = 0$  in  $\text{var}(\underline{\varepsilon}) = \sigma^2 I$ . Drugače povedano, napake  $\varepsilon_i$  so nekorelirane, varianca vsake posamezne pa je  $\sigma^2$ .

Za  $\underline{\beta} = (\alpha, \beta)^T$  in  $X = (1, x_1; 1, x_2; \dots; 1, x_n)$  preidemo na standardno ocenjevanje s premico.

Nepriistranska cenilka za  $\underline{\beta}$  je cenilka po metodi najmanjših kvadratov  $\hat{\underline{\beta}} = (X^T X)^{-1} X^T Y$ .

Varianca cenilke:  $\text{var}(\hat{\underline{\beta}}) = \sigma^2 (X^T X)^{-1} = \sigma^2 C$ .

Nepriistranska cenilka za  $\sigma^2$  je  $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-m} \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2$ , kjer je  $\hat{\varepsilon} = \underline{Y} - X\hat{\underline{\beta}}$ .

Če gledamo samo posamezne komponente je cenilka za  $\beta_i$  enaka  $\hat{\beta}_i = (\hat{\underline{\beta}})_i$  in  $\text{var}(\hat{\beta}_i) = \sigma^2 C_{ii}$ , se  $(\hat{\beta}_i) = \sigma \sqrt{C_{ii}}$ .

Za lin. kombinacijo komponent je cenilka enaka  $a^T \hat{\underline{\beta}}$  in njena varianca je  $\text{var}(a^T \hat{\underline{\beta}}) = a^T C a$ , za poljuben vektor  $a$ .

Izrek (Gauss-Markov): Cenilka po metodi najmanjših kvadratov je najboljša med vsemi linearnimi nepriistranskimi cenilkami (ima najmanjšo varianco). Za vsako linearno cenilko  $\tilde{\underline{\beta}} = L\underline{Y}$  mora veljati  $LX = I$  in posledično  $\text{var}(\tilde{\underline{\beta}}) = \text{var}(\tilde{\underline{\beta}} - \hat{\underline{\beta}}) + \text{var}(\hat{\underline{\beta}})$ , saj je  $\text{cov}(\tilde{\underline{\beta}} - \hat{\underline{\beta}}, \hat{\underline{\beta}}) = 0$ . Enako velja tudi za cenilko  $a^T \tilde{\underline{\beta}}$  za vsak vektor  $a$ , v posebnem za  $a = e_i$  tudi za cenilke po komponentah.

Če za  $\underline{\varepsilon}$  predpostavljamo  $\text{var}(\underline{\varepsilon}) = \sigma^2 \Sigma$  za neko pd. matriko  $\Sigma$ , potem to prevedemo na standardni model z množenjem z leve s  $(\Sigma)^{-\frac{1}{2}}$ . Cenilka za  $\underline{\beta}$  postane  $\hat{\underline{\beta}} = (X^T \Sigma X)^{-1} X^T \Sigma^{-1} \underline{Y}$ .

Za testiranje hipoteze  $\beta_i = 0$  proti  $\beta_i \neq 0$  uporabimo testno statistiko  $t = \frac{\hat{\beta}_i}{\hat{\sigma} \sqrt{C_{ii}}} \sim t_{n-m}$ .

**Inverzi matrik – molimo k Raiču, da jih ne rabimo**

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} ei-fh & ch-bi & bf-ce \\ fg-di & ai-cg & cd-af \\ dh-eg & bg-ah & ae-bd \end{bmatrix}$$