Napake

Jih je veliko in so nasploh zelo depresivne in vse metode so slabe.

Nelinearne enačbe

Iščemo ničle α funkcije f. Občutljivost $\frac{1}{f'(\alpha)}$, za dvojno ničlo $\sqrt{\frac{2}{f''(x)}}$.

BISEKCIJA: razpolavljamo interval, na katerem imamo ničlo. Št korakov za natančnost ε: $k \geq \log\left(\frac{|b-a|}{\varepsilon}\right)$.

NAVADNA ITERACIJA: Iščemo fiksno točno $g(\alpha) = \alpha$. Metoda: $x_{r+1} = g(x_r)$. Če je $|g'(\alpha)| < 1$ je točka privlačna, če $|g'(\alpha)| > 1$ je odbojna. Red konvergence je p, če je α p-kratna ničla g.

TANGENTNA METODA: $x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$. Konvergenca je za enojne ničle kvadratična, za večkratne ničle linearna. Če za enostavno ničlo velja $f''(\alpha) = 0$ je konvergenca kubična, itn... Vse ničle so privlačne.

SEKANTNA METODA: $x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)(x_r - x_{r-1})}{f(x_r) - f(x_{r-1})}$. Red konvergence: $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

LAGUERROVA METODA za iskanje ničel polinomov: $z_{r+1} = z_r - \frac{np(z_r)}{p'(z_r) \pm \sqrt{(n-1)((n-1)p'^2(z_r) - np(z_r)p''(z_r))}}$

Pri stabilni metodi izberemo predznak tako, da je absolutna vrednost imenovalca največja. Če izbiramo vedno $-$ ali $+$ skonvergiramo k levi oz. desni ničli, če so vse ničle realne. Konvergenca v bližini enostavne ničle je kubična. Metoda najde tudi kompleksne ničle.

REDUKCIJA POLINOMA: Imamo eno ničlo, radi bi jo faktorizirali ven. Poznamo obratno in direktno redukcijo, pri katerih je stabilno izločati ničle v padajočem in naraščajočem vrstnem redu po absolutni vrednosti. V praksi uporabimo kombinirano metodo: do nekega r uporabimo z ene strani obratno, z druge pa direktno. Ta r izberemo tako, da je $|\alpha^r a_{n-r}|$ maksimalen.

DURAND-KERNERJEVA METODA: Iščemo vse ničle naenkrat: $x_k^{(r+1)} = x_k^{(r)} - \frac{p(x_k^{(r)})}{\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} (x_k^{(r)} - x_j^{(r)})}$. Kvadratična konvergenca. Za kompleksne ničle je treba začeti s kompleksnimi približki.

Linearni sistemi

Rešujemo sistem $Ax = b$. Za napako x velja ocena:

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\kappa(A)}{1 - \kappa(A)\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}} \left(\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} + \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}\right)$$

Količina $\kappa(A)$ se imenuje občutljivost matrike. $\kappa(A) = \|A\|\|A^{-1}\| = \frac{\sigma_1(A)}{\sigma_n(A)} \geq 1$

LU RAZCEP s kompletnim pivotiranjem: matriko A zapišemo kot $PAQ = UL$, L sp. trikotna z 1 na diagnoali in U zg. trikotna, ter P, Q permutacijski matriki stolpcev in vrstic. Algoritem:

```
Q = I, P = I
for j = 1 to n:
    r, q taka, da a_rq največji v podmatriki A(j+1:n)
    zamenjaj vrstici r in j v A, L, P
    zamenjaj stolpca q in j v A, L, Q
    for i  = j+1 to n:
        l_ij = a_ij / a_jj
        for k = j+1 to n:
            a_ik = a_ik - l_ij * a_jk
```

Postopek na roke:

1. * Če delamo pivotiranje zamenjamo primerne vrstice in stolpce v A, P, Q, da je a_{00} največji.
2. Prvi stolpec delimo z a_{00}, razen a_{00}, ki ga pustimo na miru.
3. Za vsak element v podmatriki $A(2, n)$: $a_{ij} = a_{ij} - a_{i1} \cdot a_{1j}$ (odštejemo produkt $\leftarrow$ in $\uparrow$).
4. Ponovimo postopek na matriki $A(2, n)$.

Delno pivotiranje uporablja samo matriko P, za LU razcep brez pivotiranja pa preskočimo 1.

Skalarni produkt potrebuje $2n$ operacij. Reševanje s premimi substitucijami potrebuje n^2, z obratnimi $n^2 + n$. Reševanje z LU razcepov potrebuje $\frac{2}{3}n^3$ operacij.

RAZCEP CHOLESKEGA:

Nelinearni sistemi

NEWTONOVA METODA:

Problem najmanjših kvadratov

Reševanje predoločenih sistemov: Za dan predoločen sistem $Ax = b$ rešujemo normalni sistem $A^T Ax = A^T b$.

Lastne vrednosti

Gerschgorinov izrek: Naj bo $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $C_i = \overline{K}(a_{ii}, r = \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|), i = 1,2,\dots,n$. Potem vsaka lastna vrednost leži v vsaj enem Gerschgorinovem krogu. Če m krogov C_i sestavlja povezano množico, ločeno od ostalih $n - m$ krogov, potem ta množica vsebuje natanko m lastnih vrednosti.
Diagonalno dominantna matrika ($|a_{ij}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|$) je obrnljiva.

Interpolacija

Lagrangeev interpolacijski polinom:

$$l_{n,j}(x) = \frac{\prod_{i=0, i \neq j}^n (x - x_i)}{\prod_{i=0, i \neq j}^n (x_j - x_i)}$$

Polinom: $p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) l_{n,i}(x)$
Deljene diference:

- Če so točke paroma različne: $D_{i,0} = y_i$, ostalo izračunamo po rekurzivni formuli: $D_{i,j} = \frac{D_{i,j-1} - D_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}$. Če sta dve točki na j-tem koraku enaki, je $D_{i,j} = \frac{f^{(j)}(x_i)}{j!}$.

  Polinom: $p(x) = D_{1,1} + D_{2,2}(x - x_0) + D_{3,3}(x - x_0)(x - x_1) + \cdots D_{n,n}(x - x_0) \cdots (x - x_n)$

Integriranje

Ekvidistančne točke $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, $x_i = x_0 + ih$.
Sest. trapezno pravilo: $\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{m-1}) + f(x_m)) - \frac{h^2}{12}(b-a)f''(\xi)$
Sest. Simpsonovo: $\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0) + 4f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{2m-2}) + 4f(x_{2m-1}) + f(x_{2m})) - \frac{h^4}{180}(b-a)f^{(4)}(\xi)$
3/8 pravilo: $\int_a^b f(x)dx = \frac{3}{8}h(f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)) - \frac{3}{80}h^5 f^{(4)}(\xi), \quad \xi \in (x_0, x_3)$