PDE

Dana je PDE $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = 0$, kjer sta $a, b \in \infty(\mathbb{R}^2)$. NDE, ki ji morajo zadostiti nivojnice rešitvene ploskve $u = u(x,y)$ je $a\,\mathrm{d}y = b\,\mathrm{d}x$. Iz dobljene enačbe izrazimo splošno konstanto C, splošna rešitev pa je $u = u(x,y) = F(C)$. Uporabimo še začetni pogoj.
Uvedba novih spremenljivk s, t: $u_x = u_s s_x + u_t t_x$, $u_y = u_s s_y + u_t t_y$.
Poseben primer novih spremenljivk:
Če za PDE $a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = d(x,y)$, $a, b, c, d \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ uvajamo novi spremenljivki t in s, za kateri velja $as_x + bs_y = 0$ in $at_x + bt_y \neq 0$, dobimo NDE 1. reda:

$$u_t + \frac{c}{at_x + bt_y} u = \frac{d}{at_x + bt_y}.$$

Krajšanje metode z nivojnicami: $\mathrm{d}s = 0 = s_x\,\mathrm{d}x + s_y\,\mathrm{d}y$. Iz pogoja $as_x + bs_y = 0$ izrazimo npr. s_x z s_y, nesemo v enačbo $\mathrm{d}s = 0$, krajšamo s_y, rešimo NDE in dobimo splošno rešitev: $s = F(C)$. Potrebujemo neko rešitev, torej lahko izberemo kar $F = \mathrm{id}$. Za t si izberemo tako funkcijo x, y (čim enostavnejšo), da bo izpolnjen pogoj $at_x + bt_y \neq 0$ in da bosta s in t neodvisni, torej da velja:

$$\det \begin{bmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{bmatrix} \neq 0.$$

Kvaziliniearna PDE

Oblika: $a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)$. Začetni pogoj: rešitev vsebuje krivuljo $\Gamma(s) = (x_0(s), y_0(s), u_0(s))$. $u = u(x,y)$ je ploskev z normalo $\vec{n} = (e_x, u_y, -1)$. Zaradi tipa enačbe velja $(a,b,c)\cdot\vec{n} = 0$, torej rešitvena ploskev sestoji iz krivulj, za katere velja $\dot{\gamma} = (a,b,c)$. Rešujemo karakteristični sistem: $\dot{x} = a(x,y,u), \quad \dot{y} = b(x,y,u), \quad \dot{u} = c(x,y,u)$. Rešitvam karakterističnega sistema pravimo karakteristike in načeloma napolnijo cel $\mathbb{R}^3$. Rešitev sestavimo iz krivulj (karakteristik), ki sekajo začetno krivuljo Γ: $x(0) = x_0(s)$, $y(0) = y_0(s)$, $u(0) = u_0(s)$. Dobimo parametrično rešitev: $x = x(t,s), \quad y = y(t,s), \quad u = u(t,s)$. Če se da, iz parametrične rešitve izrazimo eksplicitno rešitev $u = u(x,y)$.
Definicija: Transverzalnostni pogoj:

$$(T) = \det \begin{bmatrix} a(x_0, y_0) & b(x_0, y_0) \\ x_0'(s) & y_0'(s) \end{bmatrix} \neq 0,$$

kjer je (a,b) tangenta karakteristik (prvi dve komponenti), (x_0', y_0') pa tangenta začetne krivulje (prvi dve komponenti).
Izrek:

(i) Če je (T) izpolnjen za vsak $s \in \mathbb{R}$, obstaja natanko ena rešitev začetnega problema, definirana na okolici začetne krivulje $\Gamma(s)$, $s \in \mathbb{R}$.
(ii) če je (T) prekršen za vsak $s \in \mathbb{R}$, imamo dve možnosti:
  a) ne obstaja rešitev, če Γ ni karakteristika (Γ je karakteristika, če je izpolnjen pogoj v točki b),
  b) imamo neskončno rešitev, če je $\Gamma' \| (a,b,c)$.

Če ima enačba neskončno rešitev (sledimo točki b) iz zgornjega izreka) in iščemo več kot eno, se lahko zgodi, da nam metoda karakteristik ponudi le eno. Ideja: izberemo si začetno krivuljo Γ_1, ki zadošča naslednjima pogojema:

(1) netangentno seka Γ,
(2) izpolnjuje (T) za originalno enačbo.

Lema: $(ax+by)u_x + (bx+dy)u_y = 0$, $a, b, d \in \mathbb{R}$, $ad - b^2 > 0$, $a + d < 0$. Naj bo u rešitev enačbe razreda $C^1(\mathbb{R}^2)$. Tedaj je u konstantna.
Trik za neskončne sisteme NDE za $x_n(t)$: rešimo ga s pomočjo rodovne funkcije $Q(y,t) = \sum_{n=1}^\infty x_n(t)y^n$. Velja: $yQ_y = \sum_{n=1}^\infty nx_n(t)y^n, Q_y - Q/y = \sum_{n=1}^\infty nx_{n+1}y^n$. Z upoštevanjem rekurzivne zveze dobimo PDE za Q, rešimo, razvijemo rešitev v vrsto po y.

Lagrangeeva metoda za kvazilinearne PDE

Trditev: Naj bo $F : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ C^∞ z lastnostma:

(i) obstaja $p \in \mathbb{R}^3$: $F(p) = 0$ in $F_u(p) \neq 0$,
(ii) F je prvi integral karakterističnega sistema $\dot{x} = a(x,y,u), \quad \dot{y} = b(x,y,u), \quad \dot{u} = c(x,y,u)$.

Potem je z enačbo $F(x,y,u) = 0$ dobro definirana implicitna rešitev enačbe $a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y) = c(x,y,u)$ na okolici točke p.
Metoda: Naj bosta F in G gladka, funkcijsko neodvisna integrala karakterističnega sistema. Potem je splošna rešitev $\Psi(F(x,y,u), G(x,y,u)) = 0$, kjer je Ψ poljubna funkcija. $F(x,y,u) = C$, $G(x,y,u) = D$. Metoda nam generira splošne rešitve, nimamo pa relacije med začetno krivuljo in enoličnostjo rešitve ter metode ne moremo posplošiti za nelinearne PDE.
Iz parametrične rešitve karakterističnega sistema izrazimo konstanti C in D. To sta naša prva integrala F in G, ki sta zdaj odvisna le od x, y, u, ne pa od C, D. Dobimo Ψ in upoštevamo še začetni pogoj (ga vstavimo v Ψ). Navadno lahko uganemo predpis za Ψ, da bo res enak 0. Če hočemo vedeti kaj o enoličnosti, se lotimo naloge z metodo karakteristik in preverimo transverzalnostni pogoj.
Zanimivi vzorci: $(x^2)^\cdot = 2x\dot{x}$, $(xy)^\cdot = \dot{x}y + x\dot{y}$, $(\ln x)^\cdot = \frac{\dot{x}}{x}$.
Trditev: Naj bosta $\vec{P}_j : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $j \in \{1,2\}$, vektorski polji ortogonalni na $Q(x,y,u) = (a(x,y,u), b(x,y,u), c(x,y,u))$, neodvisni in $\mathrm{rot}\vec{P}_j$. Tedaj sta njuna potenciala prva integrala karakterističnega sistema.

Nelinearne PDE 1. reda

Oblika: $F(x,y,u,u_x,u_y) = 0$, označimo $p = u_x$, $q = u_y$. Iščemo rešitev pri pogojih $u(\alpha(t), \beta(t)) = \gamma(t)$.
Metoda karakteristik: Za karakteristike vzamemo tvorilke stožca, tj. "središčne premice". To so rešitve sistema $\dot{x} = F_p, \quad \dot{y} = F_q, \quad \dot{u} = pF_p + qF_q, \quad \dot{p} = -F_x - F_u p, \quad \dot{q} = -F_y - F_u q$. Za določanje konstant upoštevamo začetno krivuljo in dva naravna pogoja:

- $F(x,y,u,p,q)|_{t=0} = 0$,
- $\Gamma' \perp \vec{n}|_{t=0}$: $(p(0), q(0), -1) \cdot \Gamma'(s) = 0$.

Če $u = u(x,y)$ določa ploskev v prostoru, je enačba tangentne ravnine na to ploskev v točki $(x,y,u(x,y))$ enaka: $u_x(X-x) + u_y(Y-y) - (U-u) = 0$ (normala ravnine je $(A,B,C) = (u_x, u_y, -1)$). Razdalja od tangentne ravnine do točke (a,b,c) je:

$$\mathrm{d}(AX + BY + CU + D = 0, (a,b,c)) = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Eksistenčni izrek za nelinearne PDE 1. reda

Izrek: Naj bo $u = u(x,y)$ rešitev začetnega problema

$$F(x,y,u,u_x,u_y) = 0, \quad u(\alpha(s), \beta(s)) = \gamma(s), \quad \text{za } s \in \mathcal{I}.$$

Če sta $p(s) = u_x(\alpha(s), \beta(s))$ in $q(s) = u_y(\alpha(s), \beta(s))$ edini funkciji, za kateri velja:

(1) $(T) = \det \begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \\ F_p & F_q \end{bmatrix}(s) \neq 0 \quad \forall s \in \mathcal{I}$,
(2) $F(\alpha(s), \beta(s), \gamma(s), p(s), q(s)) = 0 \quad \forall s \in \mathcal{I}$,
(3) $(p(s), q(s), -1) \cdot (\alpha'(s), \beta'(s), \gamma'(s)) = 0 \quad \forall s \in \mathcal{I}$.

Potem je rešitev u enolična.

Pfaffova enačba

Oblika: $p(x,y,z)\,\mathrm{d}x + q(x,y,z)\,\mathrm{d}y + r(x,y,z)\mathrm{d}z = 0$. Geometrijski pomen: $\vec{F} = (p,q,r)$. Iščemo družino ploskev $G(x,y,z) = C \in \mathbb{R}$, ki je pravokotna na $\vec{F}$, tj. obstaja $\mu = \mu(x,y,z)$: $\mathrm{grad}(G) = \mu\vec{F}$.

Lema: Potreben in zadosten pogoj za rešitev Pfaffove PDE je $\vec{F} \cdot \mathrm{rot}\vec{F} = 0$.

Velja: $\mathrm{rot}(\mu\vec{F}) = \mathrm{grad}\mu \times \vec{F} + \mu\,\mathrm{rot}\vec{F}$.

Metoda za reševanje: Predpostavimo, da iščemo rešitve, katerih presek z ravnino $z = konst.$ je krivulja brez samopresečišč. Na tem preseku velja $p\,\mathrm{d}x + q\,\mathrm{d}y = 0$. Torej imamo rešitev te NDE: $u(x,y,z) = C(z)$. Rešitev iščemo z nastavkom $G(x,y,z) = u(x,y,z) - C(z)$. Če je potreben pogoj izpolnjen, obstajata C in μ, da je $\mathrm{grad}(G) = \mu\vec{F}$.

Ko iz zveze $\mathrm{grad}(G) = \mu\vec{F}$ izračunamo $C(z)$, ga vstavimo v $G(x,y,z) = u(x,y,z) - C(z)$. Rešitev je družina ploskev $G)x,y,z) = 0$.

Linearne PDE 2. reda

Oblika: $a(x,y)u_{xx} + 2b(x,y)u_{xy} + c(x,y)u_{yy} + 1.\text{ red} = 0$. $\delta = b^2 - ac$. Ločimo tri tipe PDE:

(i) če je $\delta > 0$ na D, je PDE hiperbolična na D,
(ii) če je $\delta = 0$ na D, je PDE parabolična na D,
(iii) če je $\delta < 0$ na D, je PDE eliptična na D.

Vsi trije tipi se prevedejo na kanonično obliko z vpeljavo novih koordinat (t,s):

(i) Za (t,s) vzamemo neki rešitvi enačb $at_x + (b+\sqrt{\delta})t_y = 0, \quad as_x + (b-\sqrt{\delta})s_y = 0$. Dobimo: $u_{st} + 1.\text{ red} = 0$.
(ii) Za t vzamemo neko rešitev enačbe $at_x + bt_y = 0$, za s pa poljubno funkcijo, neodvisno od t. Dobimo: $u_{ss} + 1.\text{ red} = 0$.
(iii) Poiščemo (kompleksno) rešitev $av_x + (b+\sqrt{\delta})v_y = 0$. Vzamemo $t = \mathrm{Re}\,v$ in $s = \mathrm{Im}\,v$. Dobimo: $u_{tt} + u_{ss} + 1.\text{ red} = 0$.

Za računanje enačb, ki porodijo nove spremenljivke, uporabiš čisto prvo (najbolj na začetku, prvi list, prvi način reševanja za prvo obliko) metodo z nivojnicami. Tj. iz enačbe v zgornjih točkah izraziš npr. v_x in jo neseš v $\mathrm{d}v = 0 = v_x\,\mathrm{d}x + v_y\,\mathrm{d}y$, krajšaš v_y, rešiš NDE *et voilà*!

Pomoč: $u_x = u_s s_x + u_t t_x$, $u_y = u_s s_y + u_t t_y$, $u_{xx} = (u_x)_s s_x + (u_x)_t t_x$, $u_{xy} = (u_x)_s s_y + (u_x)_t t_y$, $u_{yy} = (u_y)_s s_x + (u_y)_t t_x$.

Pri iskanju rešitev PDE v kanonični obliki dobiš splošni funkciji $C(t)$ in $D(s)$.

Valovna enačba

Oblika: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$. $x \in \mathbb{R}$ je točka na struni, $t \geq 0$. $u = u(x,t)$ predstavlja odmik točke v danem času. Novi spremenljivki: $\xi = x + ct$, $\eta = x - ct$.

Splošna rešitev: $u = F(\xi) + G(\eta) = F(x+ct) + G(x-ct)$.

d'Alembertova formula za homogeno valovno enačbo pri pogojih $u(x,0) = f(x)$, $u_t(x,0) = g(x)$: $u(x,t) = \frac{1}{2}(f(x+ct) + f(x-ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\,\mathrm{d}s$.

Trikotnik vpliva označimo z $\triangle(x_0,t_0)$ in je določen s točkami $(x_0 - ct_0, 0), (x_0 + ct_0, 0), (x_0, t_0)$. Na grafu je x na x- osi, t pa na y-osi.

Nehomogena valovna enačba: $u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x,t)$. Rešitev je oblike: $u(x,t) = u_{\text{HOM}}(x,t) + u_{\text{PART}}(x,t)$, kjer je $u_{\text{PART}}(x,t) = \frac{1}{2c}\iint_{\triangle(x,t)} F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\tau$.

Za partikularni del torej integriramo: $u_{\text{PART}}(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t \mathrm{d}\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi$.

Odvod integrala: $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x,s)\,\mathrm{d}s$. Potem $F'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,s)\,\mathrm{d}s + f(x,(v(x))v'(x) - f(x,u(x))u'(x)$.

Trditev: Naj bodo f, g in $F(\cdot,t)$ lihe za $t \geq 0$. Tedaj je d'Alembertova rešitev tudi liha. Ob predpostavkah $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}), g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}), F, \frac{\partial F}{\partial x} \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ dobimo klasično rešitev, tj. $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

Separacija spremenljivk

$L^2([-\pi,\pi]) = \{f : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2\,\mathrm{d}x < \infty\}$ je vektorski prostor s skalarnim produktom $\langle f,g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$. Množica funkcij $\{\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi}\sin x, \frac{1}{\pi}\cos x, \frac{1}{\pi}\sin 2x, \frac{1}{\pi}\cos 2x, \ldots\}$. je kompleten (vsako funkcijo se da na enoličen način razviti v tem sistemu), ortonormiran sistem za ta produkt.

Fourierjev razvoj: $f \in L^2([-\pi,\pi])$:

$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$,
$a_n = \langle f, \frac{1}{\pi}\cos nx\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}_0$,
$b_n = \langle f, \frac{1}{\pi}\sin nx\rangle = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}$.

Sinusna in kosinusna vrsta: $f \in L^2([0,\pi])$. Za tako funkcijo obstaja liha in soda razširitev na $[-\pi,\pi]$. Za $\tilde{f}^S$ so $b_n = 0$, za $\tilde{f}^L$ pa $a_n = 0$.

Posledica: Na $[0,\pi]$ za f obstajata dva razvoja: **sinusna vrsta**: $\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \sin nx$ in **kosinusna vrsta**: $\tilde{f}(x) = \frac{\tilde{a}_0}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cos nx$, kjer sta:

$\tilde{a}_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}$,
$\tilde{b}_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \quad n \in \mathbb{N}_0$.

S substitucijo lahko razvoje prevedemo na poljuben interval $[-L,L]$ oz. $[0,L]$, $L > 0$. V tem primeru je $\{\frac{1}{2L}, \frac{1}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}, \frac{1}{L}\cos\frac{n\pi x}{L}, \ldots\}$ KONS.

Uporabni integrali: $\int_a^b \sin(\frac{n\pi x}{b-a})^2\,\mathrm{d}x = \int_a^b \cos(\frac{n\pi x}{b-a})^2\,\mathrm{d}x = \frac{(b-a)\left(\sin\left(\frac{2\pi an}{b-a}\right) - \sin\left(\frac{2\pi bn}{b-a}\right) + 2\pi n\right)}{4\pi n}, n \in \mathbb{C}$

$(\int_a^b x^i \sin(kx)\,\mathrm{d}x)_{1,2} = (\frac{-\sin(ak)+ak\cos(ak)+\sin(bk)-bk\cos(bk)}{k^2}, \frac{(a^2k^2-2)\cos(ak)-2ak\sin(ak)+(2-b^2k^2)\cos(bk)+2bk\sin(bk)}{k^3})$

$(\int_a^b x^i \cos(kx)\,\mathrm{d}x)_{1,2} = (\frac{-ak\sin(ak)-\cos(ak)+bk\sin(bk)+\cos(bk)}{k^2}, \frac{(2-a^2k^2)\sin(ak)-2ak\cos(ak)+(b^2k^2-2)\sin(bk)+2bk\cos(bk)}{k^3})$

$\int_a^b (x-a)(b-x)\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{k(a-b)(\sin(ak)+\sin(bk))+2\cos(ak)-2\cos(bk)}{k^3}$

$\int_a^b (x-a)(b-x)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{k(a-b)(\cos(ak)+\cos(bk))-2\sin(ak)+2\sin(bk)}{k^3}$

$\int_a^b \sin(mx)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{-k\sin(ak)\sin(am)-m\cos(ak)\cos(am)+k\sin(bk)\sin(bm)+m\cos(bk)\cos(bm)}{k^2-m^2}$

$\int_a^b \sin(mx)\sin(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{-m\sin(ak)\cos(am)+k\cos(ak)\sin(am)+m\sin(bk)\cos(bm)-k\cos(bk)\sin(bm)}{k^2-m^2}$

$\int_a^b \cos(mx)\cos(kx)\,\mathrm{d}x = \frac{-k\sin(ak)\cos(am)+m\cos(ak)\sin(am)+k\sin(bk)\cos(bm)-m\cos(bk)\sin(bm)}{k^2-m^2}$, povsod so $m,n,k \in \mathbb{C}$

Metoda separacije: Kdaj jo uporabimo: Trivialen pogoj: Imamo eno spremenljivko na omejenem območju in s homogenimi robnimi pogoji, npr. $x \in [0,L]$: $\alpha u(0,t) + \beta u_x(0,t) = 0, \quad \gamma u(,t) + \delta u_x(L,t) = 0, \quad \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$.

Netrivialen pogoj: Diferencialni operator, ki določa PDE, zadošča Sturm-Liouvillovi teoriji, tj. množica lastnih funkcij, ki jih dobimo iz robnega problema tvori K.O.N.S.

Štirje koraki metode: (zato K.O.N.S. 4)

#1: Separacija: nastavek $u(x,t) = X(x)T(t)$. (Nastavek vstavi v enačbo in loči spremenljivke, dobljeno enačbo pa enači z $\mu \in \mathbb{R}$.)

#2: Določanje lastnih funkcij $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ iz robnega problema za NDE. (Reši NDE za X, homogeni robni pogoji ti dajo začetne pogoje za NDE. Obravnavati moraš možnosti $\mu > 0, \mu = 0, \mu < 0$. Če je v kakšnem primeru $X \equiv 0$, lastnih funkcij v tem primeru ni. Pri izbire množice lastnih funkcij, lahko splošno konstanto za vsak člen BŠS postaviš na 1.)

#3: Iskanje pripadajočih $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. (Z μ, ki ga dobiš v #2 in določa družino lastnih funkcij, reši še NDE za T. Splošno konstanto lahko tu pustiš, lahko si misliš, za je v njej spravljena konstanta iz množice lastnih funkcij za X.)

#4: Splošna rešitev $u = \sum_{n=1}^{\infty} X_n T_n$. (Rešitev naj bi bila odvisna od števno mnogo konstant, ki jih določiš iz nehomogenega robnega pogoja. Dobro je opaziti morebitne sinusne/kosinusne vrste, ki jih dobiš z robnim pogojem, in upoštevati zvezo s koeficienti iz razvoja v sinusno/kosinusnov vrsto, torej $C_n = a_n$ ali b_n.)

Če za nobeno od spremenljivk nimamo homogenega robnega pogoja, razbijemo problem na dva dela, npr: $\triangle u = 0$ razbijemo na $u = v + w$, $\triangle v = 0$ in $\triangle w = 0$, pri čemer v-ju in w-ju damo vsakemu en homogen robni pogoj in en pogoj, ki je od u-ja.

avtor: Klemen Sajovec, malo sprememb: Jure Slak