NDE 1. reda

Ločljive spremeljivke: $y' = f(x)g(y)$
Linearna: $y' = a(x)y + b(x)$, rešujemo $y_s = y_h + y_p$
Trik: $y(x) \leftrightarrow x(y) \implies y' = 1/\dot{x}$
Homogena: $f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y)$, v posebnem $f(x, y) = f(1, x/y) \implies z = y/x, y' = z + xz' \implies$ linearna
Bernoullijeva: $y' = a(x)y + b(x)y^\alpha$, rešujemo $z = y^{1-\alpha}$, $\implies \frac{1}{1-\alpha}z' = a(x)z + b(x)$
Ricattijeva: $y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$, ena rešitev y_1. Nova spr. $y = y_1 + \frac{1}{u}$
$y' = y_1' - \frac{u'}{u^2}$ po pretvorbi $u' = -u(2ay_1 + b) - a$
Integrirajoči množitelj: $Pdx + Qdy = 0$, iščemo μ: $(\mu P)_y = (\mu Q)_x$. Rešitev $u(x, y) = \int Pdx = \int Qdy = 0$

$\mu = \mu(x) \iff \frac{\mu_x}{\mu} = \frac{P_y - Q_x}{Q}$ odvisno samo od x. $\mu = \mu(y) \iff \frac{\mu_y}{\mu} = \frac{Q_x - P_y}{P}$ odvisno samo od y.

Če $\mu = f(x, y)$, pazi, da odvajaš kot kompozitum.

Parametrično: $x = X(u, v), y = Y(u, v), y' = Z(u, v)$. Rešujemo: $dY = Z\,dX$

Triki: $\cos^2 + \sin^2 = 1, ch^2 - sh^2 = 1, y' = tx$.

Clairautova: $y = xy' + b(y')$. Rešitev: $y = Cx + b(C)$. Tudi singularna rešitev (ogrinjača).
Lagrangeeva: $y = a(y')x + b(y')$. Rešujemo parametrično: $X = u, Z = y' = v, Y = a(v)u + b(v) \implies$ linearna.

Singularna rešitev: poiščemo fiksne točke a. Če $a(t_0) = t_0 \implies y = a(t_0)x + b(t_0)$ je singularna rešitev.

Singularna rešitev: če $G(x, y, c) = 0$ splošna rešitev, sing. rešitev dobimo: $G(x, y, c) = 0, G_c(x, y, c) = 0$.

Druga možnost: če $F(x, y, y') = 0$ dana enačba, sing. rešitev dobimo: $F(x, y, y') = 0, F_{y'}(x, y, y') = 0$. Preveriti moramo, če rešitev res reši DE!!!

Iskanje ortogonalne trajektorije družine krivulj:

1. odvajaj enačbo krivulje (če se znebiš konstante, nadaljuj s korakom 3.))
2. eliminiraj konstanto iz enačbe krivulje in odvajane enačbe
3. v novi enačbi zamenjaj y' z $-1/y'$ in reši dobljeno DE.
4. (Če je potrebno poljuben kot izrazi nov y' iz enačbe $\tan\alpha = \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2}$)

Če je enačba podana eksplicitno in je desna stran polinom lihe stopnje v y s koeficienti funkcijami v x uvedeš $u = y^2$.

NDE višjih redov

Ne nastopa y: uvedemo $z = y'$.
Obe strani sta odvoda nečesa: integriramo in dodamo konstanto.

Odvodi: $y'/y = (\log(y))', xy' + y = (xy)', \frac{y''y - y'^2}{y^2} = (\frac{y'}{y})', \frac{y'x - y}{x^2} = (\frac{y}{x})'$.

Ne nastopa x: uvedemo $z(y) = y'$, y neodvisna spr. $y'' = \dot{z}z$, $y''' = \ddot{z}z^2 + \dot{z}^2 z$.
Homogena: $F(x, ty, ty', \ldots, ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$. Vpeljemo $z(x) = y'/y$. $y''/y = z' + z^2$.
Z utežjo: $F(kx, k^m y, k^{m-1}y', \ldots, k^{m-n}y^{(n)}) = k^p F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})$. Uvedemo: $x = e^t, y = u(t)e^{mt}$.

Geometrija

Tangenta v točki (x,y): $Y - y = y'(X - x)$
Normala v točki (x,y): $Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x)$
Ločna dolžina: $\int_a^b \sqrt{1 + y'(x)^2}\,\mathrm{d}x$
$d(T_0,p) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \qquad T_0 = (x_0,y_0), ax + by + c = 0$

Abscisa tangente: $X = x - y/y'$ Ordinata tangente: $Y = y - xy'$
Abscisa normale: $X = x + yy'$ Ordinata normale: $Y = y + x/y'$

Integrali

$\int \log(x)\,\mathrm{d}x = x\log(x) - x + C$	$\int \frac{1}{\sin(x)}\,\mathrm{d}x = \log(\tan(x/2)) + C$
$\int x^m \log(x)\,\mathrm{d}x = x^{m+1}\left(\frac{\log x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2}\right) + C$	$\int \frac{1}{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = -\log(\cot(x/2)) + C$
$\int p(x)e^{kx}\,\mathrm{d}x = q(x)e^{kx} + C$, $\mathrm{st}(q) = \mathrm{st}(p)$	$\int \frac{1}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x = \log(\sin(x)) + C$
$\int e^{ax}\sin(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin(bx) - b\cos(bx)) + C$	$\int \tan(x)\,\mathrm{d}x = -\log(\cos(x)) + C$
$\int e^{ax}\cos(bx)\,\mathrm{d}x = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos(bx) + b\sin(bx)) + C$	$\int x/(1+x)\,\mathrm{d}x = x - \log(x+1) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{arsh}\frac{x}{a} + C = \log\lvert x + \sqrt{x^2 + a^2}\rvert + C$	$\int x/(1+x)\,\mathrm{d}x = x - \log(x+1) + C$
$\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$	$\int \sin^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C$
$\int \frac{1}{a^2+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$	$\int \cos^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(x + \sin x\cos x) + C$
$\sin^2(x/2) = (1 - \cos(x))/2$	$\cos^2(x/2) = (1 + \cos(x))/2$

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}}\log\lvert 2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}\rvert + C, & \text{a >0} \\ \frac{-1}{\sqrt{-a}}\arcsin((2ax + b)/\sqrt{D}) + C, & a < 0 \end{cases}$$

$\int \frac{p(x)}{(x-a)^n(x^2+bx+c)^m}\ \mathrm{d}x = A\log\lvert x - a\rvert + B\log\lvert x^2 + bx + c\rvert + C\arctan(\frac{2x+b}{\sqrt{-D}}) + \frac{\text{polinom st. ena manj kot spodaj}}{(x-a)^{n-1}(x^2+bx+c)^{m-1}}$

Substitucija: $t = \tan x, \sin^2 x = t^2/(1 + t^2), \cos^2 x = 1/(1 + t^2)$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}t/(1 + t^2)$
Substitucija: $u = \tan(x/2), \sin x = 2u/(1 + u^2), \cos x = (1 - u^2)/(1 + u^2)$, $\mathrm{d}x = 2du/(1 + u^2)$

Linearni sistemi

Homogeni: $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ ima rešitev $\vec{x} = Pe^{Jt}\vec{c}$, kjer $A = PJP^{-1}$ Jordan in $\vec{c}$ vektor konstant.
Definicija: Naj bo $\dot{\vec{x}}(t) = A(t)\vec{x}(t)$ sistem in $A(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Rešitev matrične enačbe $\dot{X} = AX$, ki je obrnljiva, se imenuje **fundamentalna rešitev**. Dve fundamentalni rešitvi se razlikujeta samo za obrnljivo matriko. **Splošna rešitev** $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ je $X\vec{c}$, kjer je $\vec{c}$ konstantni vektor.

$X = [x_1, x_2, \ldots x_n] \quad X\vec{c} = c_1\vec{x_1} + c_2\vec{x_2} + \cdots c_n\vec{x_n}$

Naj bo A konstanta matrika. $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$ ima splošno rešitev $\vec{x} = Pe^{Jt}\vec{c}$, kjer je $A = PJP^{-1}$ Jordanska kanonična forma.
Postopek:

1. Izračunaj lastne vrednosti matrike A.
    - Če so vse lastne vrednosti različne, izračunaj lastne vektorje za vse lastne vrednosti in določi J in P (pazi, da vrstni red lastnih vrednosti v J sovpada z vrstnim redom lastnih vektorjev v P)
    - Če je lastna vrednost λ večkratna in zanjo obstaja le en lastni vektor, izračunaj korenski vektor in ga preslikaj z $A - \lambda I$
2. Zapiši rešitev $\vec{x} = Pe^{Jt}\vec{c} = c_1e^{\lambda_1 t}v_1 + c_2e^{\lambda_2 t}v_2 + \cdots c_ne^{\lambda_n t}v_n$, kjer $P = [v_1, v_2, \ldots, v_n]$. Iz tega dobiš $X = [\vec{x_1}, \vec{x_2}, \ldots, \vec{x_n}]$, kjer $x_i = e^{\lambda_i t}v_i$.

LDE višjega reda

Enačba oblike $a_ny^{(n)} + \cdots + a_1y' + a_0y = b$, kjer so a_i konstante, se rešuje z nastavkom $y = e^{\lambda x}$. Najdemo ničle karakterističnega polinoma $\sum a_i\lambda^i$. Rešitev je linearna kombinacija $A_1e^{\lambda x} + A_2xe^{\lambda x} + \cdots + A_kx^{k-1}e^{\lambda x}$, kjer je k večkratnost λ.
Partikularno rešitev prav tako poiščemo z nastavki. Za $b = q(x)e^{\mu x}$ je nastavek oblike $p(x)e^{\mu x}x^k$, kjer je $\mathrm{st}(p) = \mathrm{st}(q)$ in k večkratnost μ med ničlami λ_i.

Nelinearni sistemi

Množimo, delimo z x, y. Seštevamo in odštevamo enačbe in iščemo algebraične zveze. Kdaj lahko enačbe zdelimo in dobimo DE za $y(x)$.