Pogojna verjetnost

Izrek o polni verjetnosti: Če $H_1, H_2, H_3, \ldots$ tvorijo **popoln sistem dogodkov** (tj. vedno se zgodi natanko eden izmed njih), velja:

$$P(A) = P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) + \cdots$$

Bayesova formula: Če $H_1, H_2, H_3, \ldots$ tvorijo popoln sistem dogodkov, velja:

$$P(H_i|A) = \frac{P(H_i)P(A|H_i)}{P(H_1)P(A|H_1) + P(H_2)P(A|H_2) + P(H_3)P(A|H_3) + \cdots}$$

Definicija: Dogodka A in B sta **neodvisna**, če velja $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Kvantili

Definicija: Število x_α je **kvantil** slučajne spremenljivke X za verjetnost α, če velja:

$$P(X < x_\alpha) \leq \alpha, \quad P(X \leq x_\alpha) \geq \alpha.$$

Kvantilu za verjetnost $1/2$ pravimo **mediana**, kvantiloma za verjetnosti $1/3$ in $2/3$ pravimo prvi in drugi **tercil**, kvantili za verjetnosti $1/4, 2/4, 3/4$ so **kvartili**, kvantili za verjetnosti $0.1, 0.2, \ldots, 0.9$ so **decili**, kvantili za verjetnosti $0.01, 0.02, \ldots, 0.09$ pa so **centili** ali **percentili**.
Če je X zvezno porazdeljena in je x_α kvantil za verjetnost α, velja kar $F_X(x_\alpha) = \alpha$. Če ima X v okolici točke x_α strogo pozitivno gostoto, je x_α edini kvantil za verjetnost α. Brž, ko je torej gostota na nekem intervalu strogo pozitivna, izven tega intervala pa enaka noč, so kvantili za vse verjetnosti iz $(0, 1)$ natančno določeni.

Slučajne spremenljivke

Izrek: Naj bo X zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka z zalogo vrednosti v odprti množici $A \subseteq \mathbb{R}^n$ in gostoto f_X. Nadalje naj bo dana zvezno odvedljiva bijekcija $h : A \longrightarrow B$, pri čemer naj bo $h'(x) \neq 0$ za vse $x \in A$. Tedaj ima slučajni vektor $Y := h(X)$ gostoto:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h^{-1}(y))|(h^{-1})'(y)| & y \in B \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Izrek: Naj bo X zvezno porazdeljena slučajna spremenljivka z gostoto f_X, skoncentrirana na dovolj lepi množici A. Če je $h : A \longrightarrow \mathbb{R}$ lokalno Lipschitzeva:

$$|h(x) - h(y)| \leq k|x - y|$$

in $P(h$ v X ni odvedljiva ali $h'(X) = 0) = 0$, je slučajna spremenljivka Y porazdeljena zvezno z gostoto

$$f_Y(y) = \sum_{x \in A; h(x) = y} \frac{f_X(x)}{|h'(x)|}.$$

Definicija: Porazdelitev slučajnega vektorja (X, Y) podamo z verjetnostmi $P((X, Y) = (x, y)) = P(X = x, Y = y)$ (**skupna ali navzkrižna porazdelitev** slučajnih spremenljivk X in Y). Porazdelitve komponent imenujemo **robne porazdelitve**: $P(X = x) = \sum_y P(X = x, Y = y)$, $P(Y = y) = \sum_x P(X = x, Y = y)$. X in Y sta **neodvisni**, brž ko za poljuvna x in y velja $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$.
Posledica: Će sta $S \sim Bin(m, p)$ in $T \sim Bin(n, p)$ neodvisni slučajni spremenljivki, je $U := S + T \sim Bin(m + n, p)$.
Posledica:Če sta $S \sim NegBin(m, p)$ in $T \sim NegBin(n, p)$ neodvisni slučajni spremenljivki, je $U := S + T \sim NegBin(m + n, p)$.
Definicija: Porazdelitev zveznega dvorazsežnega vektorja (X, Y) lahko opišemo z **dvorazsežno gostoto** $f_{X,Y}$, za katero velja:

$$P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_a^b \int_c^d f_{X,Y}(x, y = dydx.$$

Splošneje, porazdelitev zveznega slučajnega vektorja $X \in \mathbb{R}^n$ lahko opišemo z n-**razsežno gostoto** f_X, ki ima to lastnost, da za vsako merljivo množico $A \subseteq \mathbb{R}^n$ velja:

$$P(X \in A) = \int_A f_X(x)dx.$$

Seveda velja: $\int_{\mathbb{R}^n} f_X(x)dx = 1$.
Če sta X in Y slučajna vektorja z vrednostmi v $\mathbb{R}^m$ in $\mathbb{R}^n$ in je slučajni vektor (X, Y) porazdeljen zvezno z $(m + n)$-razsežno **skupno** gostoto $f_{X,Y}$, sta tudi njegovi komponenti X in Y porazdeljeni zvezno, in sicer z **robnima gostotama**:

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f_{X,Y}(x, y)dy \qquad f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}^m} f_{X,Y}(x, y)dx.$$

Zvezno porazdeljena slučajna vektorja X in Y sta neodvisna natanko tedaj, ko je tudi slučajni vektor (X, Y) porazdeljen zvezno z gostoto: $f_{X,Y}(x, y) = f_X(x)f_Y(y)$.
Izrek: Naj bo X zvezno porazdeljen slučajni vektor z zalogo vrednosti v odprti množici $A \subseteq \mathbb{R}^n$ in gostoto f_X. Nadalje naj bo $h : A \longrightarrow B$ difeomorfizem razreda $C(1)$. Tedaj ima slučajni vektor $Y := h(X)$ gostoto:

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h^{-1}(y))|J(h^{-1})(y)| & y \in B \\ 0 & \text{sicer} \end{cases}$$

Izrek: Naj bo X zvezno porazdeljen n-razsežen slučajni vektor z gostoto f_X, skoncentriran na merljivi množici A. Če je $h : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ lokalno Lipschitzeva in $P(h$ v X nidiferenciabilna ali $Jh(X) = 0) = 0$, je slučajni vektor Y porazdeljena zvezno z gostoto

$$f_Y(y) = \sum_{x \in A; h(x) = y} \frac{f_X(x)}{|Jh(x)|}.$$

Porazdelitev vsote in razlike:

- $Z = X + Y$: $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, z - x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(z - y, y)dy$
- $W = X - Y$: $f_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x, x - w)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(w + y, y)dy$

Matematično upanje (pričakovana vrednost)

Definicija: Za diskretne slučajne spremenljivke: $E(X)=\sum_x xP(X=x)$, $E[h(X)]=\sum_x h(x)P(X=x)$. Če je vrednosti neskončno, matematično upanje obstaja, če je vrsta absolutno konvergentna.
Velja: $E(aX+b)=aE(X)+b$.
Definicija: Za zvezne slučajne spremenljivke: $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx$,x $E[h(X)]=\int_{-\infty}^{\infty} h(x)f_X(x)dx$. Spet le-to obstaja, če integral absolutno konvergira.
Definicija: **Varianca (disperzija)**: $\mathrm{var}(X)=E((X-E(X))^2)=E(X^2)-(E(X))^2$. **Standardni odklon**: $\sigma(X)=\sqrt{\mathrm{var}(X)}$.
Velja: $\mathrm{var}(aX+b)=a^2\mathrm{var}(X)$.

$$E[h(X,Y)]=\sum_x\sum_y h(x,y)P(X=x,Y=y)$$

$$E[h(X,Y)]=\iint_{\mathbb{R}^2} h(x,y)f_{X,Y}(x,y)dxdy.$$

$$E(X+Y)=E(X)+E(Y)$$

Definicija: **Indikator** dogodka je slučajna spremenljivka, ki je na danem dogodku enaka 1, zunaj njega pa 0. Indikator dogodka A bomo označevali z $\mathbb{1}_{\mathcal{A}}$. Indikator dogodka, da je izjava $\mathcal{A}$ pravilna, bomo označevali z $\mathbb{1}(\mathcal{A})$. Velja $E(\mathbb{1}_{\mathcal{A}})=P(\mathcal{A})$.
Definicija: Slučajni spremenljivki X in Y sta **nekorelirani**, če velja $E(XY)=E(X)E(Y)$. Poljubni neodvisni slučajni spremenljivki sta nekorelirani, obratno pa ni nujno res!
Slučajni spremenljivki X in Y sta zagotovo neodvisni v naslednjih treh primerih:

- če sta nekorelirani in posamezna slučajna spremenljivka lahko zavzame kvečjemu dve vrednosti;
- če sta nekorelirani in je njuna skupna porazdelitev dvorazsežna normalna;
- če za poljubni omejeni merljivi funkciji g in h velja, da sta slučajni spremenljivki $g(X)$ in $h(Y)$ nekorelirani.

Brž ko sta X in Y nekorelirani in imata varianco, velja: $\mathrm{var}(X+Y)=\mathrm{var}(X)+\mathrm{var}(Y)$.
Definicija: **Kovarianca**: $\mathrm{cov}(X,Y):=E((X-E(X))(Y-E(Y)))=E(XY)-E(X)E(Y)$.
Velja $\mathrm{cov}(X,X)=\mathrm{var}(X)$ in $\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{cov}(Y,X)$. Če sta a in b konstanti, velja $\mathrm{cov}(X+a,Y+b)=\mathrm{cov}(X,Y)$ in $\mathrm{cov}(aX+bY,Z)=a\mathrm{cov}(X,Z)+b\mathrm{cov}(Y,Z)$.
Slučajni spremenljivki X in Y sta nekorelirani natanko tedaj, ko je $\mathrm{cov}(X,Y)=0$.
Definicija: **Korelacijski koeficient**: $\mathrm{corr}(X,Y)=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$.
Velja: $-1\leq\mathrm{corr}(X,Y)\leq 1$. Če so a,b,c in d konstante ter $a,c>0$, velja $\mathrm{corr}(aX+b,cY+d)=\mathrm{corr}(X,Y)$.

Pogojne porazdelitve

Definicija: **Pogojno porazdelitev** slučajne spremenljivke X glede na dogodek B opišemo s pogojnimi verjetnostmi $P(X\in C|B)$, kjer C preteče vse merljive množice. Če je X diskretna, lahko njeno pogojno porazdelitev opišemo s **pogojno porazdelitveno shemo**:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots \\ P(X=a_1|B) & P(X=a_2|B) & \cdots \end{pmatrix}$$

Definicija: Za vsako realno slučajno spremenljivko in vsak dogodek B s pozitivno verjetnostjo lahko pogojno porazdelitev slučajne spremenljivke X glede na B opišemo s **pogojno kumulativno porazdelitveno funkcijo**:

$$F_{X|B}(x)=P(X\leq x|B).$$

Če je pogojna porazdelitev zvezna, obstaja tudi **pogojna porazdelitvena gostota**:

$$f_{X|B}(x)=F'_{X|B}(x).$$

Brž ko je X zvezno porazdeljena, je tudi njena pogojna porazdelitev zvezna glede na vsak dogodek s pozitivno verjetnostjo.
Če je X porazdeljena zvezno z gostoto f_X in $P(X\in C)>0$, je:

$$f_{X|X\in C}(x)=\begin{cases}\frac{f_X(x)}{P(X\in C)}; & x\in C\\ 0; & \text{sicer}\end{cases}$$

Podobno velja tudi za zvezne slučajne vektorje.
Definicija: **Pogojno matematično upanje** slučajne spremenljivke X glede na dogodek B je matematično upanje, ki pripada ustrezni pogojni porazdelitvi, in ga označimo z $E(X|B)$. Tako velja:

$$E(X|B)=\sum_x xP(X=x|B)$$

in splošneje:

$$E(h(X)|B)=\sum_x h(X)P(X=x|B)$$

Pogojno matematično upanje ima vse lastnosti običajnega matematičnega upanja, npr. linearnost.
Izrek: Za vsako slučajno spremenljivko X z matematičnim upanjem in vsak popoln sistem dogodkov $H_1,H_2,H_3,\ldots$ velja **izrek o polnem matematičnem upanju**:

$$E(X)=P(H_1)E(X|H_1)+P(H_2)E(X|H_2)+P(H_3)E(X|H_3)+\cdots$$