## Sigma algebre

**Def:** Družina množic $\mathcal{A}$ je **$\sigma$-algebra (algebra)**, če
- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$
- $A_i \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{i=0}^{\infty} \in \mathcal{A}$ (le za končne unije)

**Def:** Družina množic $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(X)$ je **polalgebra**, če
- $\emptyset \in \mathcal{S}$
- $A, B \in \mathcal{S} \implies A \cap B \in \mathcal{S}$
- $\forall A \in \mathcal{S}$ je $A^c$ končna unija disjuntnih množic iz $\mathcal{S}$ (ni nujno $A^c \in \mathcal{S}$).

## Mera

**Def:** $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor. Preslikava $\mu \colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ je pozitivna **mera**, če velja:
- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ paroma disjunktne $\implies \mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$

Merljiv prostor je **poln**, če velja:
$N \in \mathcal{A}, \mu(N) = 0, A \subseteq N \Rightarrow A \in \mathcal{A}$.
Velja $\mu(A\cup B)+\mu(A\cap B) = \mu(A)+\mu(B)$, števna subaditivnost, monotonost.

**Izrek:** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero. Potem je $\mathcal{B} = \{B = A \cup S; A \in \mathcal{A}, S \subseteq N \in \mathcal{A}, \mu(N) = 0\}$, $\tilde{\mu}(B) = \mu(A)$. Potem je $\mathcal{B}$ $\sigma$-algebra na $X$, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, $\tilde{\mu}$ je mera na $\mathcal{B}$, ki se na $\mathcal{A}$ ujema z $\mu$. Poleg tega je prostor $(X, \mathcal{B}, \tilde{\mu})$ poln.

**Def:** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor z mero.
- $\mu$ je **končna**, če je $\mu(X) < \infty$
- $\mu$ je **$\sigma$-končna** (predpogoj je $\mu(X) = \infty$), če je $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n, \mu(E_n) < \infty$ (BŠS $E_n$ disj. ali naraščajoče)
- $\mu$ je **semi-končna**, če za vsako $E \in \mathcal{A}$ z $\mu(E) = \infty$ obstaja $F \in \mathcal{A}, F \subseteq E$ in $0 < \mu(F) < \infty$

Velja: $(X, \mathcal{A}, \mu)$.
- Če $\mu$ je $\sigma$-končna, potem je semi-končna.
- Če $\mu$ je semi-končna, potem za vsak $c > 0$ obstaja $F \in \mathcal{A}$, da je $c \leq \mu(F) < \infty$ (tj. končne množice imajo lahko poljubno veliko mero).
- $A = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j, A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots \Rightarrow \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$
- $A = \bigcap_{j=1}^{\infty} A_j, A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq \ldots$ in $\mu(A_1) < \infty \Rightarrow \mu(A) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$
- $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ za vsako zaporedje množic $A_n \in \mathcal{A}$

**Def:** Preslikava $\zeta \colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ je **zunanja mera**, če velja:
- $\zeta(\emptyset) = 0$
- $\zeta(A) \leq \zeta(B)$ za $A \subseteq B$
- $\zeta(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(A_n)$

Velja: $X$, $\zeta$ zunanja mera:
- $\zeta(N) = 0 \Rightarrow N$ je $\zeta$-merljiva
- $E \subseteq X, E \in \mathcal{A}_\zeta$, potem za vsako $A \subseteq X$ velja $\zeta(A \cup E) + \zeta(A \cap E) = \zeta(A) + \zeta(E)$
- $A \subseteq X, \forall\varepsilon > 0 \exists E \in \mathcal{A}_\zeta, E \subseteq A : \zeta(A \backslash E) < \varepsilon$, potem je $A \in \mathcal{A}_\zeta$

**Def:** $E \subseteq X$ je **$\zeta$-merljiva**, če $\forall A \subseteq X : \zeta(A) = \zeta(A \cap E) + \zeta(A \cap E^c)$ ($\leq$ vedno velja).

**Karateodorijev izrek:** $\mathcal{A}_\zeta =$ družina vsej $\zeta$-merljivih množic, je $\sigma$-algebra. Prostor $(X, \mathcal{A}_\zeta, \zeta)$ je poln.

**Def:** $\mathcal{A}$ algebra nad $X$. Preslikava $\nu \colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ je pozitivna **mera na algebri**, če velja:
- $\nu(\emptyset) = 0$
- $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ paroma disjunktne in $\bigcup_{n=0}^{\infty} E_n \in \mathcal{A} \implies \nu(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \nu(E_n)$

Velja: $\mu$ inducira zunanjo mero $\zeta$ na $X$ s predpisom
$\zeta(B) = \inf\{\sum_{j=0}^{\infty} \mu(A_j); B \subseteq \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j, A_j \in \mathcal{A}\}$.

**Def:** **Polmera** na $\mathcal{S}$ je preslikava $\lambda \colon \mathcal{S} \to [0, \infty]$ z lastnostmi:
- $\lambda(\emptyset) = 0$
- $A = \bigcup_{i=0}^{n} A_i, A_i \in \mathcal{S}$ paroma disjunktne $\implies \lambda(A) = \sum_{i=0}^{n} \lambda(A_i)$
- $A = \bigcup_{i=0}^{\infty} A_i, A_i \in \mathcal{S}$ paroma disjunktne, $A \in \mathcal{S} \implies \lambda(A) \leq \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(A_i)$

Velja: Če je $\mathcal{S}$ polalgebra, potem je družina vseh unij $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$ $A_i \in \mathcal{S}$ paroma disjunktne; algebra in s predpisom $\nu(A) = \lambda(A_1) + \cdots + \lambda(A_n)$ je definirana mera na njej.

## Lebesgue-Stieltjesove mere

**Def:** Naj bo $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ naraščajoča in zvezna z leve. Definiramo družino $\mathcal{S} = \{[a, b), (-\infty, a), [b, \infty); a, b \in \mathbb{R}\}$. in polmero $\mu_f$ na njej: $\mu_f(\emptyset) = 0, \mu_f([a, b)) = f(b) - f(a), \mu_f((-\infty, a)) = f(a) - f(-\infty), \mu_f([b, \infty)) = f(\infty) - f(b)$
Polmero $\mu_f$ po vseh možnih izrekih razširimo do mere na $\sigma$-algebri. Velja $\mu_f(E) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu_f(I_n); E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\}$.

Razširjeno mero za $f = \mathrm{id}$ imenujemo Lebesguova mera $m$ in je edina traslacijsko invariantna mera, kjer so kompakti končni. Velja $m(E) = \inf\{\sum_{n=1}^{\infty}(b_n - a_n); E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n)]\}$. Mera števne množice je 0. Množica je Lebesgueovo merljiva, če je unija množice z ničelno mero in množice tipa $F_\sigma$ (= števna unija zaprtih množic))

V splošnem so mere intervalov enake: $\mu_f([a, b)) = f(b) - f(a)$, $\mu_f((a, b)) = f(b) - f(a+)$, $\mu_f([a, b]) = f(b+) - f(a)$, $\mu_f((a, b]) = f(b+) - f(a+)$ in $\mu_f(\{a\}) = f(a+) - f(a)$. Od tod sledi, da je $f$ zvezna, natanko tedaj, ko je mera vsakega singeltona enaka 0.

Če $E \subseteq \mathbb{R}, m(E) > 0$, potem $0 \in (-a, a) \subseteq E - E$ za nek $a \in \mathbb{R}$.

## Merljive preslikave

**Def:** Naj bosta $(X, \mathcal{A})$ in $(Y, \mathcal{B})$ merljiva prostora. Preslikava $f: X \to Y$ je **merljiva**, natanko tedaj ko $\forall A \in \mathcal{A} : f^{-1}(A) \in \mathcal{B}$.

Če sta $X$ in $Y$ topološka prostora opremnljena z Borelovimi $\sigma$-algebrama, potem je vsaka zvezna preslikava merljiva. Če je le $Y$ takšen, je merljivost dovolj preverjati na odprtih množicah (ni treba na vseh merljivih). Če slikamo v $\mathbb{R}$, potem je dovolj preveriti, da so $f^{-1}((-\infty, a)) \in \mathcal{A}$ za vsak $a \in \mathbb{R}$. BŠS lahko vzamemo tudi $(-\infty, a], (a, \infty)$ ali $[a, \infty)$.

Če je $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odvedljiva, potem je odvod $f$ merljiva preslikava.

Vsaka naraščajoča funkcija je zvezna povsod, razen v števno mnogo točkah, torej je Borelovo merljiva.

Merljivost je dovolj preverjati na generatorjih $\sigma$-algebre.

**Izrek:** Vsota, produkt, linearne kombunacije in kompozitumi merljivih so merljivi. Limita (po točkah) merljivih preslikav je merljiva. Infimum in supremum merljivih preslikav sta merljiva. Velja: $\limsup f_n$ in $\liminf f_n$ sta merljivi funkciji.

**Def: Produktna $\sigma$-algebra**: $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 := \sigma(\{A_1 \times A_2; A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\})$

**Izrek:** $(Y_i,, \mathcal{B}_i)$ merljiva, na $Y = Y_1 \times Y_2$ vzamemo produktno $\sigma$-algebro $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2$. Potem je:

- Koordinatni projekciji $q_i: Y \to Y_i$ sta merljivi preslikavi.
- Če $(X, \mathcal{A})$ merljiv, $f: X \to Y$ poljubna. $f$ je merljiva $\iff$ $q_i \circ f$ sta obe merljivi.
- Če imata $Y_i$ števni bazi topologije: $f$ Borelova (na $Y$ vzamemo Borelovo $\sigma$-algebro, generirano s produktno topologijo) $\iff$ $q_i \circ f$ Borelovi.

**Def:** Naj bo $f_n: X \to \bar{\mathbb{R}}$ zaporedje merljivih preslikav z merljivo limitno funkcijo $f$.

- $f_n \to f$ **skoraj povsod**, če je $\mu(\{x; f_n(x) \not\to f(x)\}) = 0$,
- $f_n \to f$ **skoraj enakomerno**, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja množica $A$, da $\mu(A^c) < \varepsilon$ in $f_n \to f$ enakomerno na A,
- $f_n \to f$ **konvergira po meri**, če za vsak $\varepsilon > 0$ velja $\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X; |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) = 0$.

Velja: skoraj enakomerno $\implies$ skoraj povsod in po meri.

**Izrek (Jegorov):** $\mu$ končna (tj. $\mu(X) < \infty$), $f$,$f_n$ merljive. Potem $f_n \to f$ skoraj povsod $\implies$ $f_n \to f$ skoraj enakomerno.

**Def:** Funckija $f$ je **stopničasta**, če je $f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{A_i}$, za $c_i \in \mathbb{R}$.

**Izrek:** Za vsako merljivo funkcijo $f: X \to [0, \infty]$ obstaja naraščajoče zaporedje stop. mer. fn. $s_n$, tako da $s_n \to f$ po točkah. Če je $f$ omejena in slika v $\mathbb{C}$, potem konvergira enakomerno, a ni naraščajoče. Če je $f$ nenegativna in omejena, obstaja naraščajoče zaporedje, ki konvergira enakomerno.

## Random miscellany

**Def:** Za zaporedje $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ podmnožic v $X$ je

- $\limsup E_n = \bigcap_{n=1}^\infty \bigcup_{k=n}^\infty E_k$ točke, ki so vsebovane v neskončno mnogo množicah $E_i$
- $\liminf E_n = \bigcup_{n=1}^\infty \bigcap_{k=n}^\infty E_k$ točke, ki so vsebovane v vseh razen končno mnogo množicah $E_i$.
- Velja $\mu(\liminf E_n) \leq \liminf \mu(E_n) = \lim_{m\to\infty}(\inf_{n\geq m} \mu(E_n))$.
- Če je $\sum_{n=1}^\infty \mu(E_n) < \infty$, je skoraj vsak $x \in X$ vsebovan v končno mnogo množicah $E_n$, torej je $\mu(\limsup E_n) = 0$ (Borel-Cantellijeva lema).

**Primeri:**

- $X$ neštevna, $\mathcal{A} = \{E \subseteq X; E$ števna ali $E^c$ števna$\} = \sigma(\{\{x\}; x \in X\})$ je $\sigma$-algebra; takšna je tudi Borelova $\sigma$-algebra na topologiji končnih komplementov; primer mere na njej: $\mu(E) =$ "0 če E števna in 1 sicer"
- $\mathcal{A} = \{E \subseteq X; E$ končna ali $E^c$ končna$\}$ je algebra, ni pa $\sigma$-algebra
- $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{A}_n = \sigma(\{\{1\}, \ldots, \{n\}\}) = \{E \subseteq \mathbb{N}; E \subseteq [n]$ ali $E^c \subseteq [n]\}$, velja $\mathcal{A}_n \subsetneq \mathcal{A}_m$ za $n < m$, $\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{A}_n$ ni $\sigma$-algebra
- $(X, \mathcal{P}(X), \mu)$, $\mu(E) =$ "0 če je $E$ števna in neskončno sicer" – $\mu$ ni semi-končna
- mera, ki šteje točke; Diracova mera
- Zaporedje funkcij $\chi_{[n,\infty)}$ na realni osi konvergira proti 0 povsod, vendar ne skoraj enakomerno.
- Če na [0,1] naredimo karakteristične funkcije $\chi_{[k/2^m, k+1/2^m]}$ za vsak $k$ in $m$, zaporedje konvergira po meri, vendar nikjer ne po točkah (v vsaki točki ima neskončno funkcij vrednost 1 in neskončno funkcij vrednost 0).

**Cantorjeva množica**:

- Klasična: presek števno zaprtih intervalov. Je kompaktna, metrizabilna, nima izoliranih točk, popolnoma nepovezana, ni diskretna, ni končna (je neštevna). Njena Leb. mera je 0.
- Posplošena: $C_0 = [0,1]$, $0 < \alpha_n < 1$, $C_n =$ iz notranjosti vsakega intervala v $C_{n-1}$ izvzamemo "sredinski" interval *deleža* $\alpha_n$ (delež je na vsakem koščku isti, njegova dolžina se pa spreminja). Nato vse te presekamo. Topološke lastnosti enake, a mera ni nujno 0. Velja: $m(C) = \lim m(C_n) = \prod_{n=1}^\infty (1 - \alpha_n)$, $m(C_n) = (1 - \alpha_1)(1 - \alpha_2)\cdots(1 - \alpha_n)$ (limita delnih produktov je padajoča in navzdol omejena, torej konvergira). Velja: $m(C) > 0 \iff \sum_{n=1}^\infty \log(1 - \alpha_n)$ konvergira $\iff$ $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n$ konvergira, ker $\log(1 - x) = -\sum x^n/n = -x + \ldots$

**Extra**: Zaprto množico lahko zapišemo kot števno unijo kompaktov (v $\mathbb{R}$).

Avtorji: generacija 2015