Aproksimacija

Bernsteinovi polinomi:
Bernsteinov polinom: $B_i^n(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$, B_i^n so baza prostora $\mathbb{P}_n$, $B_i^n \geq 0, B_i^n(x) = B_{n-i}^n(1-x), \sum_{i=0}^n B_i^n(x) = 1$, $\sum_{i=0}^n \frac{i}{n} B_i^n(x) = x$, $B_i^n(x) = \sum_{j=i}^n (-1)^{j-i}\binom{n}{j}\binom{j}{i} x^j$, $B_i^n(x) = (1-x)B_i^{n-1}(x) + xB_{i-1}^{n-1}(x)$, $(B_i^n)'(x) = n(B_{i-1}^{n-1}(x) - B_i^{n-1}(x))$, $\int B_i^n(x)dx = \frac{1}{n+1}\sum_{j=i+1}^n B_j^{n+1}(x) + C$
Bernsteinov operator: $(B_n f)(x) = \sum_{i=0}^n f(\frac{i}{n}) B_i^n(x)$
$(B_n f)'(x) = n\sum_{i=0}^{n-1} \Delta f(\frac{i}{n}) B_i^{n-1}(x)$, kjer $\Delta f(\frac{i}{n}) = f(\frac{i+1}{n}) - f(\frac{i}{n})$
$(B_n f)^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}\sum_{i=0}^{n-k} \Delta^k f(\frac{i}{n}) B_i^{n-k}(x)$, kjer $\Delta^k f(\frac{i}{n}) = \Delta^{k-1} f(\frac{i+1}{n}) - \Delta^{k-1} f(\frac{i}{n})$
Za $f\colon [0{,}1] \to \mathbb{R}$ zvezno odvedljivo: $\lim_{n\to\infty} \|(B_n f)' - f'\|_\infty = 0$.
Weierstrassov izrek: Za $f \in C([a{,}b])$ velja $\mathrm{dist}_\infty(f, \mathbb{P}_n) \to 0$.
Izrek: $\|f - B_n f\|_\infty \leq \omega(f, \frac{1}{\sqrt[4]{n}}) + \frac{\|f\|_\infty}{2\sqrt{n}}$
Ocena napake: $e_n = \|B_n f - f\|_\infty = Cn^{-\alpha}$, $\frac{e_n}{e_m} = (\frac{m}{n})^\alpha$, $\alpha = \frac{\log(\frac{e_n}{e_m})}{\log(\frac{m}{n})}$.
Če je f Lipschitzova s konstanto c, je $|f(x) - (B_n f)(x)| \leq \frac{c}{2\sqrt{n}}$
$(B_n f)(x) = \sum_{i=0}^{n+1}(f(\frac{i-1}{n})\frac{i}{n+1} + f(\frac{i}{n})\frac{n+1-i}{n+1}) B_i^{n+1}(x)$
Če je f konveksna, je $B_n f \geq B_{n+1} f$.
Triki:
- 1 zapišeš kot vsoto Bern. polinomov
- C.-S. neenakost: $|\langle x{,}y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Hiške: S so odsekoma linearne funkcije. Hiške so baza S. $\dim(S) = n+1$

$$H_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}; & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}; & x \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

Operator: $(I_1 f)(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i) H_i(x)$
Izrek: Če je I_1 linearen in pozitiven in če je $\lim_{\Delta x \to 0} \|I_1 f - f\|_\infty = 0$ za $f \in \mathbb{P}_i$ za $i = 0{,}1{,}2$, potem to velja za vsak $f \in C([a{,}b])$. (Naš I_1 temu zadošča.)

Element najboljše aproksimacije: X normiran prostor, $S \subset X$ podprostor, $f \in X$; iščemo $f^* \in S$: $\|f - f^*\| = \mathrm{dist}(S{,}f) = \inf_{s\in S}\{\|f - s\|\}$.
Izrek: Če imamo enakomerno konveksen Banachov prostor in zaprt podprostor, potem obstaja e.n.a.
Izrek: V končno razsežnih podprostorih e.n.a. vedno obstaja.
X normiran vektorski prostor. X je **enakomerno konveksen**, če $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x{,}y \in X : \|x\| = \|y\| = 1$, velja: $\|\frac{1}{2}(x+y)\| > 1 - \delta \implies \|x - y\| < \varepsilon$.
X je **strogo normiran**, če za $x{,}y \in X$ za katera je $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$, velja $x = \lambda y, \lambda \in \mathbb{C}$.
Množica A je **strogo konveksna**, če za vse $a{,}b \in A, a \neq b$ in vse $\alpha \in (0{,}1)$ velja $\alpha a + (1-\alpha)b \in \mathrm{int}A$.
Krogla je **strogo konveksna** $\iff \forall x{,}y \in K(0{,}1), x \neq y, \alpha \in (0{,}1)$, velja $\|\alpha x + (1-\alpha)y\| < 1$.
Izrek: X z normo, v kateri so zaprte krogle strogo konveksne. Potem je X strogo normiran.
Izrek: X strogo normiran $\iff$ zaprta enotska krogla je strogo normirana.
Izrek: Množica e.n.a. je konveksna.
Izrek: X Strogo normiran prostor. Potem za vsak $x \in X$ obstaja največ 1 e.n.a. (Unitarni prostori so strogo normirani). **Remezov postopek:** Za p.n.e.a. stopnje n vzamemo množico E z $n+2$ točkami, $E = \{x_0, \ldots, x_{n+1}\}$. Potem rešimo sistem enačb, ki pravi da mora residual $r = f - p^*$ alternirati: $r(x_i) = (-1)^i m$. Če zapišemo $p^* = \sum a_i x^i$, potem se sistem glasi:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & x_0 & x_0^2 & \cdots & x_0^n \\ -1 & 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm 1 & 1 & x_{n+2} & x_{n+2}^2 & \cdots & x_{n+2}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{n+2}) \end{bmatrix}$$

Rešimo in zračunamo residual r, ki mora alternirajoče dosegati m. Pazi, da so koeficienti polinoma po vrsti od x^0 do x^n! (Ne nujno kot svojo normo, takrat je postopka konec, oz. ko je $\|r\|_\infty - m < \varepsilon$.) Sedaj se ločita prvi in drugi Remezov postopek. **Prvi:** Izračunamo, kje je dosežen maksimum $|r|$

(ponavadi z odvajanjem), označimo točko z ξ, $r(\xi) = \|r\|_\infty$. Sedaj točko ξ vstavimo v E, tako da vržemo ven eno izmed sosednjih, in sicer tisto, da r še vedno alternira na E. **Drugi:** Ker r alternira na $n+2$ točkah ima $n+1$ ničel z_i. Če dodamo še $z_{-1} = a, z_{n+1} = b$, potem je na intervalih $[z_i, z_{i+1}]$ enako predznačen – na vsakem intervalu najdemo ekstrem y_i. Teh je $n+2$ in množico $\{y_i\}$ okličemo za nov E, starega pa pozabimo.

Včasih lahko dobimo p.n.e.a. brez Remezovega postopka:
- ga uganemo + Izrek (*de La Vallée Poussin*): $f \in C([a,b]), p \in \mathbb{P}_n$, tako da $r = f - p$ alternirajoče doseže svojo normo v vsaj $n+2$ točkah. Tedaj je p p.n.e.a. za f na $[a,b]$.
- to na primer velja za polinome Čebiševa na $[-1, 1]$.

Remeza lahko delamo, če funkcije zadoščajo Harovemu pogoju.

Polinomi Čebiševa na $[-1,1]$: $T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), x \in [-1,1]$, $T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x)$, $T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 4x^3 - 3x, T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$.
$T_n(x)$ alternirajoče doseže ± 1 v $n+1$ točkah in $\|T_n\|_\infty = 1$.
Med vsemi polinomi stopnje $\leq n$ in vodilnim koeficientom 1, ima $2^{-n+1}T_n$ najmanjšo ∞-normo na $[-1,1]$, hkrati pa izven $[-1,1]$ najhitreje narašča.
Med vsemi polinomi $p \in \mathbb{P}_n$, za katere je $\|p\|_{\infty,[-1,1]} \leq 1$, polinom T_n največji vodilni koeficient.
Če je $p(x) = \sum_{i=0}^n a_i T_i(x)$, je $q(x) = p(x) - a_n T_n(x) = \sum_{i=0}^{n-1} a_i T_i(x)$ p.n.e.a. za p na $[-1,1]$ stopnje $n-1$. $\|p - q\|_\infty = |a_n|$.

Harov pogoj: $\{f_i\}_{i=0}^n$ zvezne, zadoščajo Harovemu pogoju na $[a,b]$, če je za vsake točke $a \leq x_0 < x_1 < \cdots < x_n \leq b : V(f;x) = \det(f_j(x_i))_{i,j=0}^n = \begin{vmatrix} f_0(x_0) & f_0(x_1) & \cdots & f_0(x_n) \\ f_1(x_0) & f_1(x_1) & \cdots & f_1(x_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(x_0) & f_n(x_1) & \cdots & f_n(x_n) \end{vmatrix} \neq 0$. Če je $f_i(x) = x^i$, dobimo Vandermondovo determinanto.
Zelo uporaben izrek: Harov pogoj je izpolnjen $\iff$ vsak "polinom" $\sum_{i=0}^n \alpha_i f_i$ ima kvečjemu n različnih ničel na $[a,b]$. Za take sisteme lahko uporabljamo Remezov postopek.

Metoda najmanjših kvadratov:
Izrek: X evklidski prostor, $f \in X$, $f^* \in S \subset X$. f^* je e.n.a.m.n.k. za f v S $\iff$ $f - f^* \perp S$.
(s_j) baza $S \subset X$, $f \in X$, $f^* \in S$, $f^* = \sum \alpha_j s_j$. Dobimo sistem $G\alpha = b$, G je Grammova matrika (simetrična in pozitivno definitna).

$$\begin{bmatrix} \langle s_1,s_1 \rangle & \langle s_2, s_1 \rangle & \cdots & \langle s_n, s_1 \rangle \\ \langle s_1,s_2 \rangle & \langle s_2, s_2 \rangle & \cdots & \langle s_n, s_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle s_1,s_n \rangle & \langle s_2, s_n \rangle & \cdots & \langle s_n, s_n \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, s_1 \rangle \\ \langle f, s_2 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, s_n \rangle \end{bmatrix}$$

G je nesingularna $\iff$ $s_1, \ldots, s_n$ so linearno neodvisne.
Včasih gledamo vse zoženo le na nekaj točk $x = (x_i)_{i=1}^n$, tedaj je G nesingularna $\iff$ imamo več kot $n+1$ različnih točk na $\mathbb{P}_n|_x$.
Ortonormirani sistemi polinomov: Dan je nek skalarni produkt, želimo ortonormirano bazo polinomov stopnje n, $(Q_0, Q_1, \ldots, Q_n), \|Q_i\| = 1, \langle Q_i, Q_j \rangle = \delta_{ij}$.
Izberemo $Q_{-1} = 0, \tilde{Q}_0 = 1$. Računamo od $i = 0$ dalje:
$\beta_i = \|\tilde{Q}_i\| = \sqrt{\langle \tilde{Q}_i, \tilde{Q}_i \rangle}$
$Q_i = \tilde{Q}_i / \beta_i$
$\alpha_i = \langle xQ_i, Q_i \rangle$,
$\tilde{Q}_{i+1}(x) = (x - \alpha_i)Q_i(x) - \beta_i Q_{i-1}(x)$ in ponavljaš.
Alternativno velja: $\beta_i = \langle xQ_i, Q_{i-1} \rangle = \|\tilde{Q}_i\|$
Dobljeni Q-ji so ortonormirani, $\tilde{Q}_i$ pa ortogonalni. Ker je Gramova matrika kar identiteta, zapišemo p.n.a.m.n.k. kar: $p^* = \sum_{i=0}^n \langle f, Q_i \rangle Q_i$.

Interpolacija

Lagrangeeva interpolacija: interpoliramo le vrednosti funkcije f v različnih točkah.
Hermitova intrepolacija: interpoliramo vrednosti in vrednosti 1. odvodov funkcije f.

Lagrangeev interpolacijski polinom: $a \leq x_0 < x_1 < \cdots x_n \leq b$ delilne točke
$\ell_{n,j}(x) = \dfrac{\prod_{i=0,i\neq j}^n (x - x_i)}{\prod_{i=0,i\neq j}^n (x_j - x_i)}$, $\ell_{n,j}(x_i) = \delta_{ij}$, Polinom, ki se z f ujema v $(x_i)_i$: $p(x) = \sum_{i=0}^n f(x_i)\ell_{n,i}(x)$.
$\{\ell_{n,j}\}_j$ so baza $\mathbb{P}_n$, $\sum_{j=0}^n \ell_{n,j} = 1$
Definiramo $\omega(x) = (x - x_0)\cdots(x - x_n)$. Velja $\ell_{n,i}(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x)}$.

Ocena napake: $f(x) = p(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$, kjer je ξ nekje na intervalu, ki ga določajo x_i in x. To se prevede na: $|f(x) - p(x)| = |\omega(x)[x_0, \ldots, x_n, x]f| = |\omega(x)\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}| \leq \|\omega\|_\infty \frac{\|f^{(n+1)}\|_\infty}{(n+1)!}$
V več dimenzijah: kolokacijska matrika $[\lambda_j(s_i)]_{i,j=0}^n$, λ_j evaluacije v točkah x_j, s_i bazne funkcije prostora.

Izračun vrednosti polinoma, ki je dan z $d_i = [x_0, \ldots, x_i]f$:

```
v = d_n
for i = n-1:-1:0
    v = d_i + (x - x_i) v
```

Deljene diference in Newtonova oblika interpolacijskega polinoma:
$[x_0, \ldots, x_k]f$ je koeficient pred x^k v polinomu stopnje $\leq k$, ki se z f ujema v teh $k+1$ točkah.
Če so točke paroma različne: $[x_i]f = f(x_i)$, ostalo izračunamo po rekurzivni formuli:
$[x_0, \ldots, x_k]f = \frac{[x_0,\ldots,x_{k-1}]f - [x_1,\ldots,x_k]f}{x_0 - x_k}$. Če so točke x_0 do x_k enake, je $[x_0, \ldots, x_k]f = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.
Zapis interpolacijskega polinoma:
$p(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, \ldots, x_n](x - x_0)\cdots(x - x_{n-1}) = \sum_{j=0}^n \prod_{i=0}^{j-1}(x - x_i)[x_0, \ldots, x_j]f$
Izrek (ocena napake): $f \in C^{n+1}([a,b])$, $f(x) - p(x) = \omega(x)[x_0, x_1, \ldots x_n, x]f$, pri čemer obstaja $\xi \in (\min x_i, \max x_i)$, da je $[x_0, x_1, \ldots x_n, x]f = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$, torej kot pri Lagrangu (duh, sej je isti).
Izrek: $x_0, \ldots, x_n$ ne nujno urejene po velikosti, $f \in C^{n+1}([a,b])$, $h = \max_i |x_{i+1} - x_i|$, $I = [\min_i x_i, \max_i x_i]$.
Velja: $\|f - p\|_{\infty,I} \leq \|f^{(n+1)}\|_{\infty,I} \frac{1}{4(n+1)} h^{n+1}$.
Posplošeni Hornerjev algoritem:

```
a_n = [x_0, ..., x_n]f
b_n = a_n
for i = (n-1):0
    b_i = a_i + b_(i+1) (x-x_i)
return b_0
```

Velja: $b_0 = p(x) = [x]p$ in $b_i = [x_0, \ldots, x_{i-1}, x]p$, b_n so koeficienti razvoja polinoma p po bazi na točkah $x_0, \ldots, x_{n-1}, x$.
S tem lahko dobimo Taylorjev razvoj okoli točke a – postopek ponavljamo na dobljenih koeficientih, dokler v bazo ne vrinemo samo $x - a$
Če so $x_0, \ldots, x_n$ paroma različne: $[x_0, \ldots, x_n]f = \sum_{i=0}^n \frac{f(x_i)}{\omega'(x_i)}$ in $\sum_{i=0}^n \frac{x_i f(x_i}{\omega'(x_i)} = \frac{x_n[x_1,\ldots,x_n]f - x_0[x_0\ldots,x_{n-1}]f}{x_n - x_0}$
Leibnitzova formula: $[x_0, \ldots, x_n](g \cdot h) = \sum_{i=0}^n [x_0, \ldots, x_i]g \cdot [x_i, \ldots, x_n]h$.
1. Newtonova oblika: $x_i = x_0 + ih$, $f_i = f(x_i)$, $\Delta^0 f_i = f_i$, $\Delta^r f_i = \Delta^{r-1} f_{i+1} - \Delta^{r-1} f_i$, polinom $p(x) = p(x_0 + th) = \sum_{i=0}^n \binom{t}{i} \Delta^i f_0$, $t = (x - x_0)/h$.
Velja: $[x_0, \ldots, x_n]f = \Delta^n f_0 \frac{1}{n! \cdot h^n}$
Lebesgueova neenakost: X normiran vektorski prostor, $\|\cdot\|$ norma, $S \subset X$ podprostor. Naj bo $P\colon X \to S$ linearni projektor. Tedaj velja $\forall f \in X\colon \|Pf\| - \|f\| \leq \|f - Pf\| \leq (1 + \|P\|)\,\mathrm{dist}(f, S)$.

Zlepki

Standardna metoda pri dokazih: zlepek obravnavaš na vsakem intervalu posebej!
Odsekoma linearni: $S_{1,x}$
I_1**:** za $x \in [x_i, x_{i+1}]$ je $(I_1 f)(x) = [x_i]f + (x - x_i)[x_i, x_{i+1}]f = f(x_i) + (x - x_i)\frac{f(x_i)-f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}}$
Izrek: $\|f - I_1 f\|_{\infty,[a,b]} \leq \frac{1}{8}\Delta x^2 \|f^{(2)}\|_{\infty,[a,b]}$, kjer $\Delta x = \max_i \Delta x_i$
Izrek: $\|f - I_1 f\|_{\infty,[a,b]} \leq 2\mathrm{dist}(f, S_{1,x})$
Izrek: $\|f - I_1 f\|_{\infty,[a,b]} \leq \omega(f, \Delta x)$, kjer je $\omega(f,h) = \max\{|f(x) - f(y)|\ ;\ x,y \in [a,b], |x-y| < h\}$
L_1**:** (interpolira po metodi najmanjših kvadratov) $L_1 f = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i H_i$, rešimo normalni sistem ($G\alpha = b, G = [\langle H_i, H_j\rangle]_{i,j=0}^{n}, b = [\langle f, H_j\rangle]_{j=0}^{n}$, G je tridiagonalna, strogo diagonalno dominantna)

Odsekoma parabolični:
Na vsakem intervalu interpoliramo v točkah $x_i, \frac{x_i + x_{i+1}}{2}, x_{i+1}$ z vrednostmi $f(x_i), v_i, f(x_{i+1})$. v_i izračunamo iz sistema enačb ($z_i'(x_i) = z_{i-1}'(x_i)$) $\frac{4v_{i+1}}{\Delta x_{i+1}} + \frac{4v_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i)}{\Delta x_i} + \frac{f(x_{i+2})}{\Delta x_{i+1}} + 3f(x_{i+1})(\frac{1}{\Delta x_i} + \frac{1}{\Delta x_{i+1}})$ za $i = 0,1,\ldots,n-2$, določimo v_{n-1} ter vstavimo v $z_i(x) = f(x_i) + (x - x_i)\frac{f(x_{i+1} - f(x_i)}{\Delta x_i} + (x - x_i)(x - x_{i+1})\frac{2(f(x_i) + f(x_{i+1} - 2v_i)}{(\Delta x_i)^2}$

Odsekoma kubični:
Hermitov kubični zlepek: Če poznamo funkcijo in prvi odvod v $(x_i)_{i=0}^n$: interpoliramo na vsakem odseku posebej v točkah $(x_i, x_i, x_{i+1}, x_{i+1})$.
$z_i(x) = f(x_i) + (x - x_i)f'(x_i) + (x - x_i)^2\frac{[x_i,x_{i+1}]f - f'(x_i)}{x_{i+1} - x_i} + (x - x_i)^2(x - x_{i+1})\frac{f'(x_{i+1}) - 2[x_i,x_{i+1}]f - f'(x_i)}{(x_{i+1} - x_i)^2}$
Napako ocenimo enako kot pri deljenih diferencah.
Poln kubični zlepek: Če poznamo le vrednosti funkcije, zahtevamo 2x zvezno odvedljivost zlepka. Uvedemo parametre $s_i = z'(x_i)$.
Rešimo sistem enačb $\frac{s_{i-1}}{\Delta x_{i-1}} + 2s_i\left(\frac{1}{\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{\Delta x_i}\right) + \frac{s_{i+1}}{\Delta x_i} = 3\left(\frac{[x_i,x_{i+1}]f}{\Delta x_i} + \frac{[x_{i-1},x_i]f}{\Delta x_{i-1}}\right)$ za $i = 1,2,\ldots,n-1$, izberemo s_0 in s_n in vstavimo v $z_i(x) = f(x_i) + (x - x_i)s_i + (x - x_i)^2\frac{[x_i,x_{i+1}]f - s_i}{\Delta x_i} + (x - x_i)^2(x - x_{i+1})\frac{s_{i+1} + s_i - 2[x_i,x_{i+1}]f}{\Delta x_i^2}$. Za poln zlepek vzamemo $s_0 = f'(x_0), s_n = f'(x_n)$.

B-zlepki: Baza prostora zlepkov. So nenegativni, z lokalnim nosilcem in tvorijo particijo enote.
$z = \sum_i \alpha_i B_{i,k}$, $\mathrm{supp} B_{i,k} \subseteq [t_i, t_{i+k+1}]$
Vozli: $t_i \leq t_{i+1} \leq \ldots \leq t_{i+k+1};\ t_i < t_{i+k+1}$
Če se vozel ponovi j-krat, v tej točki zahtevao zveznost odvoda reda $k - j$.
$B_{i,k}(x) = (t_{i+k+1} - t_i)[t_i, \ldots, t_{i+k+1}](\cdot - x)_+^k$, kjer je $(\cdot - x)_+^k = \max\{0, (\cdot - x)^k\}$
Rekurzija: $B_{i,k}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+k} - t_i}B_{i,k-1}(x) + \frac{t_{i+k+1} - x}{t_{i+k+1} - t_{i+1}}B_{i+1,k-1}(x)$
$B_{i,0}(x) = 1 \cdot \not{\mathbb{K}}(x \in [t_i, t_{i+1})$

De Bohrov algoritem za računanje vrednosti: $\alpha_i^{[r]}(x) = \begin{cases} \alpha_i; & r = 0 \\ \frac{(x - t_i)\alpha_i^{[r-1]}(x) + (t_{i+k+1-r} - x)\alpha_{i-1}^{[r-1]}}{t_{i+k+1} - t_i}; & r > 0 \end{cases}$

Napišeš si tabelo, odgovor je potem $\alpha_j^{[k]}(x)$, kjer $t_j \leq x < t_{j+1}$. Tabelo delaš le po tistih i, kjer je $B_{i,k} \neq 0$.