

1. DELNO UREJENE MNOŽICE

DEFINICIJA: Relacija R delno ureja množico A , če je refleksivna, antisimetrična in tranzitivna.

DEFINICIJA: Veriga je podmnožica v A (kjer je (A, \leq) delna urejenost), v kateri so paroma primerljivi elementi. Antiveriga je množica paroma neprimerljivih elementov. Višina delne urejenosti je moč njene največje verige. Širina delne urejenosti je moč njene največje antiverige.

DEFINICIJA: (A, \leq) delna urejenost. Tedaj je $x \in A$:

- minimalni element, če ne obstaja $y \in A, y \neq x$, da velja $y \leq x$;
- maksimalni element, če ne obstaja $y \in A, y \neq x$, da velja $x \leq y$;
- najmanjši element, če za vse $y \in A$ velja $x \leq y$;
- največji element, če za vse $y \in A$ velja $y \leq x$;

TRDITEV: Naj bo (A, \leq) končna delna urejenost. Tedaj A premore vsaj en minimalni in vsaj en maksimalni element.

DEFINICIJA: Delni urejenosti $(A, \leq), (A', \leq')$ sta izomorfni, če obstaja bijekcija $f : A \rightarrow A'$, taka da je

$$x \leq y \iff f(x) \leq' f(y) \forall x, y \in A.$$

TRDITEV: Če je (A, R) veriga, $|A| = n$, tedaj je (A, R) izomorfn $([n], \leq)$.

2. LINEARNE RAZŠIRITVE IN DIMENZIJA DELNE UREJENOSTI

DEFINICIJA: $L = (A, \leq)$ je linearna urejenost, če je delna urejenost, ki je veriga.

DEFINICIJA: Naj bo $P = (A, \leq)$ delna urejenost. Tedaj je linearna urejenost $L = (A, \leq')$ linearna razširitev delne urejenosti P , če velja: $x \leq y \implies x \leq' y$.

IZREK: Naj bo $P = (A, \leq)$ končna delna urejenost. Tedaj P premore linearno razširitev. Celo več, če sta x in $y \in A$ neprimerljiva elementa, tedaj obstaja taka linearna razširitev $L = (A, \leq')$, da velja $x \leq' y$.

POSLEDICA: Naj bo $P = (A, \leq)$ končna delna urejenost in naj bosta $x, y \in A$. Tedaj je $x \leq y$ natanko tedaj, ko je $x \leq' y$ v vsaki linearni razširitvi $L = (A, \leq')$.

DEFINICIJA: Naj bo $P = (A, \leq)$ delna urejenost. Tedaj je družina $\mathcal{L} = \{L = (A, \leq_L)\}$ linearnih razširitev od P realizator za P , če velja:

$$\forall x, y : x \leq y \iff x \leq_L y \quad \forall L = (A, \leq_L).$$

TRDITEV: Naj bo $P = (A, \leq)$ delna urejenost. Tedaj je družina linearnih razširitev \mathcal{L} realizator za P natanko tedaj, ko za vsak par neprimerljivih elementov x in y obstajata $L, L' \in \mathcal{L}$, taka da je $x \leq_L y$ in $y \leq_{L'} x$.

OPOMBA: \mathcal{L} je realizator pomeni: $\cap_{L \in \mathcal{L}} L = P$.

DEFINICIJA: Dimenzija delne urejenosti je moč njenega najmanjšega realizatorja.

TRDITEV: Naj bo $P_n = (\{a_1, \dots, a_n\} \cup \{b_1, \dots, b_n\}, \leq)$, kjer $\leq: a_i \leq b_j$ za vse $i \neq j$ in $a_i \leq a_i, b_i \leq b_i \forall i$. $\dim P_n = n$ za $n \geq 2$.

DEFINICIJA: Naj bo $P = (A, \leq)$ delna urejenost. Tedaj je vložitev P v \mathbb{R}^n taka injektivna preslikava $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$, da velja:

$$x \leq y \quad (\text{v } P) \iff f(x) \leq f(y) \quad (\text{v } \mathbb{R}^n).$$

IZREK: Naj bo $P = (A, \leq)$ (končna) delna urejenost. Tedaj je $\dim P$ enaka najmanjšemu n , za katerega obstaja vložitev P v \mathbb{R}^n .

3. TRIJE KLASIČNI IZREKI

TRDITEV: Naj bo $P = (A, \leq)$ končna delna urejenost in naj bo n velikost največje verige v P . Tedaj lahko P pokrijemo z n antiverigami. (Te antiverige vsebujejo vse elemente iz A)

DILWORTHOV IZREK: Naj bo $P = (A, \leq)$ končna delna urejenost. Tedaj je najmanjše število disjunktnih verig, s katerimi lahko pokrijemo A enako velikosti največje antiverige v P .

HALLOV IZREK: Če je G dvodelen graf z bipartitcijo X, Y , potem je problem popolnega prirejanja za X rešljiv natanko tedaj, ko velja:

$$\forall A \subseteq X : |N(A)| \geq |A|.$$

SPERNERJEV IZREK: Naj bo \mathcal{A} antiveriga v $P = (2^{[n]}, \subseteq)$. Tedaj je:

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

OPOMBA: Izrek je najboljši možen (EVER!): Če za \mathcal{A} izberemo vse podmnožice moči $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ bo širina $P = (2^{[n]}, \subseteq)$ enaka $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

4. SCHNYDERJEV IZREK

DEFINICIJA: $G = (V, E)$ graf. Incidenčna urejenost je definirana na $V \cup E$, in sicer:

$$e = uv \in E \implies u \leq e, v \leq e + \text{refleksivnost}.$$

DEFINICIJA: Dimenzija grafa G je dimenzija njegove incidenčne urejenosti.

SCHNYDERJEV IZREK: Graf G je ravninski natanko tedaj, ko je $\dim G \leq 3$.

Naj bo $h_i(u)$ višina vozlišča u v \leq_i (glede na višino vozlišča) in \leq_1, \leq_2, \leq_3 realizator incidenčne urejenosti grafa G . $f : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ s predpisom $f(u) = (2^{h_1(u)}, 2^{h_2(u)})$ je injektivna.

DEFINICIJA: Triangulacija je taka vložitev ravninskega grafa v ravnino, da so vsa njegova lica trikotniki. Vsak ravninski graf je vpet podgraf neke triangulacije.

DEFINICIJA: Schnyderjeva označitev triangulacije je prireditev oznak iz $[3]$ notranjim kotom, tako da velja:

- vsi koti pri v_i so označeni z i ,
- vsak notranji trikotnik ima oznake 1, 2, 3 v smeri urinega kazalca,
- koti okrog notranjega vozlišča imajo oznake: nekaj 1 (vsaj 1), nekaj 2 (vsaj 1), nekaj 3 (vsaj 1).

Iz T naredimo digraf tako, da vsako povezavo usmerimo proti enakima kotoma. Povezavo označimo: ime = smer (kot v katerega kaže).

5. NAČRTI IN t -NAČRTI

DEFINICIJA: Naj bo X v -množica. Tedaj je družina \mathcal{B} k -podmnožic množice X načrt s parametri (v, k, λ) , če se vsak element iz X pojavi v natanko λ množicah iz \mathcal{B} . Elementi družine \mathcal{B} so bloki načrta.

TRDITEV: Če je \mathcal{B} (v, k, λ) -načrt (in $|\mathcal{B}| = b$), tedaj je $bk = v\lambda$.

x je v kvečjemu $\binom{b-1}{k-1}$ blokih. $\lambda \leq \binom{v-1}{k-1}$, z uporabo trditve dobimo $b \leq \binom{v}{k}$.

IZREK: Načrt s parametri (v, k, λ) obstaja natanko tedaj, ko $k|v\lambda$ in je $\lambda \leq \binom{v-1}{k-1}$.

DEFINICIJA: Družina \mathcal{B} k -podmnožic v -množice X je t -načrt s parametri (v, k, λ_t) , če se vsaka t -podmnožica od X pojavi v natanko λ_t blokih.

IZREK: Če je \mathcal{B} t -načrt, tedaj je \mathcal{B} tudi s -načrt za $1 \leq s < t$.

POSLEDICA: Če je \mathcal{B} t -načrt s parametri (v, k, λ_t) , potem je \mathcal{B} tudi s -načrt s parametri (v, k, λ_s) in velja:

$$\lambda_s = \lambda_t \frac{(v-s)(v-s-1) \cdots (v-t+1)}{(k-s)(k-s-1) \cdots (k-t+1)}.$$

6. CIKLIČNE KONSTRUKCIJE NAČRTOV IN FISHERJEVA NEENAKOST

TRDITEV: Naj bo $S \subseteq \mathbb{Z}_m$ in naj bodo $S + i, i \in \mathbb{Z}_n$, paroma različni. Tedaj ti odseki tvorijo $(m, |S|, |S|)$ -načrt.

DEFINICIJA: $S \subseteq \mathbb{Z}_m$ je množica razlik, če se vsak neničelni element iz \mathbb{Z}_m pojavi enakokrat kot razlika dveh elementov iz S .

IZREK: Naj bo $S \subseteq \mathbb{Z}_m$ množica razlik in naj bo $k = |S|$. Če so odseki $S + i$ paroma različni, tedaj $\{S + i; i \in \mathbb{Z}_m\}$ tvori 2-načrt s parametri $(m, k, \frac{k(k-1)}{m-1})$.

IZREK: FISHERJEVA NEENAKOST Naj bo \mathcal{B} 2-načrt s parametri (v, k, λ_2) , kjer je $v > k$. Tedaj je $b \geq v$.

OPOMBA 1: Prejšnji izrek pravi, da je neenakost najboljša možna (EVER!), saj je v prejšnjem izreku dosežena enakost.

OPOMBA 2: Predpostavka $v > k$ je zato, da se izognemo trivialnemu primeru, ko je $v = k$: X v -množica, tedaj je \mathcal{B} t -načrt za vsak t .

7. VAJE

LEMA: Vsak izomorfizem delnih urejenosti slika najmanjši element v najmanjši element.

Catalanova števila: $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

$P = (A, \leq)$, $x, y \in A$ neprimerljiva. Potem $(A, \leq \cup \{(x, y)\})$ ni delna urejenost.

DEFINICIJA: Naj bo $P = (A, \leq)$ delna urejenost in $x, y \in A$ neprimerljiva. Pravimo, da sta x in y kritičen par, če je tudi $(A, \leq \cup \{(x, y)\})$ delna urejenost.

LEMA: Če je (A, \leq) končna delna urejenost, kritičen par vedno obstaja.

LEMA: Vsak dvodelen regularen graf ima popolno prirejanje.

LEMA: Vsak dvodelen biregularen (stopnje vozlišč v X so d_1 , stopnje vozlišč v Y pa d_2) graf $G(X \cup Y, E)$ ima popolno prirejanje iz X v Y , če je $|X| < |Y|$.

DEFINICIJA: Urejena n -terica (a_1, \dots, a_n) je sistem različnih predstavnikov za množice $S_1, \dots, S_m \subseteq [n]$, če velja:

- $a_i \in S_i; i = 1, \dots, m$
- $a_i \neq a_j$.

LEMA: Sistem različnih predstavnikov za S_1, \dots, S_m obstaja natanko tedaj, ko ima unija poljubnih k množic vsaj k elementov za $k = 1, \dots, m$.

LEMA: Če so A_1, \dots, A_k različne podmnožice $[n]$ in $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ za vsaka i, j , je $k \leq 2^{n-1}$.

LEMA: Naj bo \mathcal{B} načrt s parametri (n, k, λ) nad množico X in $\mathcal{B}' = \{X \setminus B; B \in \mathcal{B}\}$. Tedaj je \mathcal{B}' načrt s parametri $(b, n - k, \frac{n-k}{k} \lambda)$.

TRDITEV: Če je S množica razlik v \mathbb{Z}_m , potem je tudi $\mathbb{Z}_m \setminus S$ množica razlik v \mathbb{Z}_m .

LEMA: Naj za 2-načrt s parametri (v, k, λ_2) velja $b = v$. Tedaj je $k - \lambda_2$ popoln kvadrat, če je v sod.

TRDITEV: Naj bo A incidenčna matrika 2-načrta \mathcal{B} , za katerega velja $b = v$. Tedaj je tudi A^T incidenčna matrika nekega 2-načrta.

DEFINICIJA: Steinerjev trojček je 2-načrt s parametri $(v, 3, 1)$.

LEMA: Steinerjev trojček obstaja le v primeru, ko je $v \equiv 1(6)$ ali $v \equiv 3(6)$.

Velja $\lambda_1 = \lambda_2 \frac{v-1}{k-1}$

Naj bo A incidenčna matrika 2-načrta, za katerega velja $b = v$. Velja:

- $\det AA^T = k^2(k - \lambda_2)^{v-1}$
-

$$AA^T = \begin{bmatrix} k & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2 \\ \lambda_2 & k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \cdots & \lambda_2 & k \end{bmatrix}$$

- če velja $A^T A = AA^T$, imata A in A^T natanko λ_2 skupnih enic.
- $AA^T = (k - \lambda_2)I_v + \lambda_2 \mathbf{1}_v$.