## Druga fundamentalna forma

DEFINICIJA: Naj bo $\sigma(u,v)$ karta ploskve $S$ in naj bo $\mathbf{N}(u,v)$ zvezno vektorsko polje, ki predstavlja normalo na $S$. (torej je $N = \sigma_u \times \sigma_v)/\|\sigma_u \times \sigma_v\|)$ **Drugo fundamentalno formo** ($IIFF$) $S$ glede na karto $\sigma$ predstavljajo skalarni produkti:

- $L = \sigma_{uu} \cdot \mathbf{N}$;
- $M = \sigma_{uv} \cdot \mathbf{N}$;
- $N = \sigma_{vv} \cdot \mathbf{N}$.

DEFINICIJA: Naj bo $\gamma$ pot na ploskvi $S$ in naj bo $\varphi$ kot med normalo krivulje $\mathbf{n}$ in normalo ploskve $\mathbf{N}$. **Normalno ukrivljenost** poti $\gamma$ na $S$ je

$$\kappa_n = \gamma''\mathbf{N} = \kappa\cos\varphi.$$

**Geodetska ukrivljenost** poti $\gamma$ na $S$ je

$$\kappa_g = \gamma''(\mathbf{N} \times \gamma') = \pm\kappa\sin\varphi.$$

OPOMBA: $\kappa_n$ in $\kappa_g$ spremenita predznak, če izberemo drugo normalo. Prav tako $\kappa_g$ spremeni predznak ($\kappa_n$ pa se ohrani), če pot $\gamma$ parametriziramo v 'drugo smer'.

TRDITEV: Za poljubno ploskev $S$ in poljubno pot $\gamma(t) = (u(t), v(t))$ na $S$ veljajo naslednje formule:

- $\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2$,
- $\kappa_n = Lu'^2 + 2Mu'v' + Nv'^2$,
- $\kappa_n = \frac{L\dot{u}^2+2M\dot{u}\dot{v}+N\dot{v}^2}{E\dot{u}^2+2F\dot{u}\dot{v}+G\dot{v}^2}$

DEFINICIJA: Naj bosta

$$F_I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \qquad F_{II} = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

matriki, ki predstavljata fundamentalni formi ploskve $S$ v bazi $\{\sigma_u, \sigma_v\}$. Vrednosti $\kappa_1, \kappa_2$, za kateri ima determinanta $|F_{II} - \kappa F_I|$ vrednost 0, se imenujeta **glavni ukrivljenosti** ploskve $S$, bazna vektorja iz $TS$ pripadajočih ničelnih prostorov matrike pa **glavna vektorja**. Matrika $\mathcal{W} = -F_I^{-1}F_{II}$ se imenuje **Weingartnova matrika**.

OPOMBA: V nekaterih primerih dobimo le eno glavno ukrivljenost (glavna ukrivljenost vedno obstaja), kar pomeni, da so vsi vektorji tangentnega prostora v omenjeni točki glavni.

TRDITEV:

(1) Glavna vektorja v vsaki točki na ploskvi tvorita bazo tangentnega prostora.
(2) Če velja $\kappa_1 \neq \kappa_2$, sta glavna vektorja pravokotna.
(3) $K = \det(\mathcal{W})$.
(4) Glavni ukrivljenosti sta lastni vrednosti $\mathcal{W}$, glavna vektorja sta lastna vektorja $\mathcal{W}$.

DEFINICIJA: **Gaussova ukrivljenost** ploskve je enaka

$$K = \kappa_1\kappa_2 = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

**Povprečna ukrivljenost** ploskve je enaka

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{LG - 2MF + NE}{2(EG - F^2)}.$$

Ploskev je **minimalna**, če zanjo velja $H = 0$.

Gaussova ukrivljenost sfere: $K = \frac{1}{R^2}$

## Geodetke

DEFINICIJA: Pot $\gamma$ na ploskvi $S$ je **geodetka**, če velja $\ddot{\gamma} \perp S$ (to je ekvivalentno pogoju $\ddot{\gamma} \parallel \mathbf{N}$).

TRDITEV: Vsaka geodetka ima konstantno hitrost: $\frac{d}{dt}\|\dot{\gamma}\| = 2\ddot{\gamma}\dot{\gamma} = 0$, (ker $\dot{\gamma} \in TS$).

OPOMBA: V definiciji je geodetka parametrizirana pot, trditev pa pove, da mora imeti ta parametrizacija konstantno hitrost. Izkaže se: pot $\gamma$ je geodetka natanko tedaj, ko je njena reparametrizacija z naravnim parametrom geodetka.
Za poljuben $k \neq 0$ velja tudi sledeče: $s \mapsto \gamma(s)$ je geodetka natanko tedaj, ko je $s \mapsto \gamma(ks)$ geodetka.

TRDITEV: Geodetke imajo naslednje lastnosti:

(1) linearne poti so geodetke;
(2) geodetke so lokalno najkrajše poti med dvema točkama;
(3) $\forall x \in S, \forall v \in T_xS$ obstaja natanko ena parametrizirana geodetka $\gamma$ na $S$, za katero velja $\gamma(0) = x, \dot{\gamma}(0) = v$;
(4) naj bo $\sigma(u,v)$ karta ploskve $S$. Pot $\gamma(t) = \sigma(u(t), v(t))$ je parametrizirana geodetka na $S$ natanko tedaj, ko zadošča sistemu

$$\frac{d}{dt}(E\dot{u} + F\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_u\dot{u}^2 + 2F_u\dot{u}\dot{v} + G_u\dot{v}^2)$$
$$\frac{d}{dt}(F\dot{u} + G\dot{v}) = \frac{1}{2}(E_v\dot{u}^2 + 2F_v\dot{u}\dot{v} + G_v\dot{v}^2).$$

(5) izometrije ploskve slikajo geodetke v geodetke.

LASTNOSTI GEODETK:

- $\gamma$ je geodetka natanko tedaj, ko je $\kappa_g = 0$
- Normalni presek ploskve $S$ in ravnine je vedno geodetka.
- Na stožcu poteka skozi poljubni dve točki geodetka (ni samo ena), poljubni dve geodetki se ne sekata nujno v eni točki, obstajata geodetki, ki se ne sekata, geodetka lahko seka samo sebe.

## Risanje geodetk na vrteninah

Trditev:

- Naj bo $\sigma(u, v) = (f(u) \cos v, f(u) \sin v, g(u))$ parametrizacija vrtenine, pri čemer je $u$ naravni parameter poti $(f, g)$, tj. $f'^2 + g'^2 = 1$.
- Označimo oddaljenost točke $\sigma(u, v)$ od osi vrtenja kot $\rho = \rho(u) := f(u)$.
- Naj bo $\psi(s)$ kot med geodetko $\gamma$ in poldnevnikom $\sigma(t, v(s))$ skozi $\gamma(s) = \sigma(u(s), v(s))$ in definirajmo $\Omega := \rho \sin \psi$.

Tedaj za geodetke na vrtenini veljajo naslednje lastnosti:

(1) Poldnevnik (pot pri konstantnem $v$) je vedno geodetka.
(2) Vzporednik (pot pri konstantnem $u$) je geodetka natanko tedaj, ko je $\rho'(u) = 0$.
(3) Clairotov princip: $\Omega := \rho \sin \psi$ je konstanta vzdolž vsake geodetke.
(4) Če je $\Omega$ konstanta vzdolž poti $\gamma$ in $\gamma$ ni vzporednik, potem je $\gamma$ geodetka.
(5) Zaradi fleksibilnosti pri izbiri orientacije je $\sin \psi$ določen le do predznaka natančno. Z upoštevanjem simetričnosti je dovolj obravnavati le nenegativne vrednosti $\Omega$.
(6) Vzdolž geodetke velja $(u')^2 = 1 - \Omega^2 \rho^{-2}$. Torej velja $\rho \geq \Omega$.
(7) Če v točki $\gamma(s)$ velja $\rho(s) > \Omega(s)$, potem je $u'(s) \neq 0$ in geodetka zato seka vzporednik skozi $\gamma(s)$.
(8) Če v točki $\gamma(s)$ velja $\rho(s) = \Omega(s)$, potem je $u'(s) = 0$, zato se geodetka v tej točki dotika vzporednika. Če poleg tega velja $\rho'(s) = 0$, je zaradi enoličnosti geodetk $\gamma$ kar omenjeni vzporednik.

## Površina ploskve

Če je $\sigma(u, v)$ parametrizacija ploskve, njeno površino izračunamo po naslednji formuli:

$$P(A) = \iint_A \|\sigma_u \times \sigma_v\| dudv = \iint_A \sqrt{EG - F^2} dudv$$

V zgornji formuli ne rabiš Jacobijeve determinante!

Trditev: Naj bo $\mathbf{N}$ normala ploskve $\sigma(u, v)$. Potem velja:

- $\mathbf{N}_u \cdot \sigma_u = -L$
- $\mathbf{N}_u \cdot \sigma_v = -M$
- $\mathbf{N}_v \cdot \sigma_v = -N$

Trditev: Če velja $IIFF = 0$, potem je ploskev vsebovana v ravnini.

Definicija: Pot $\gamma$ na ploskvi $S$ je **pot ukrivljenosti**, če je $\dot{\gamma}$ glavni vektor za vsak $t$ (neodvisno od parametrizacije).

## Gauss-Bonnet

Izrek: Naj bo $\gamma(s)$ enostavna (omejuje disk oz. nekaj disku homeomorfnega), sklenjena, orientirana enotska pot na orientabilni ploskvi $S$. Potem velja:

$$\int_0^{l(\gamma)} \kappa_g ds = 2\pi - \iint_{int\gamma} KdA,$$

kjer je $\kappa_g$ geodetska ukrivljenost, $l(\gamma)$ dolžina krivulje $\gamma$, $int\gamma$ območje, ki ga $\gamma$ omejuje in $K$ Gaussova ukrivljenost.

Pri uporabi izreka pazi, da izbereš pravo smer $\gamma$ in glede na to smer še normalo na ploskev tako, da bo $int\gamma$ na levi strani.

Trditev: Če je Gaussova ukrivljenost $K \leq 0$, potem na $S$ ne obstaja enostavna sklenjena geodetka.

Izrek: Naj bo $\gamma(s)$ enostaven sklenjen orientiran enotski poligon na orientirani ploskvi $S$ z notranjimi koti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in (0, 2\pi)$. Potem velja:

$$\int_0^{l(\gamma)} \kappa_g ds = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i - (n-2)\pi - \iint_{int\gamma} KdA.$$

Izrek (Eulerjeva karakteristika): Naj bo $S$ orientirana, sklenjena ploskev. Tedaj velja:

$$\iint_S KdA = 2\pi\chi,$$

kjer je $\chi = T_E + V$, $T$ je število trikotnikov v simplicialnem kompleksu, $E$ število stranic in $V$ število točk (oglišč).
$\chi(\text{sfera}) = 2, \quad \chi(\text{torus}) = 0$
Gaussova ukrivljenost sfere: $K = \frac{1}{R^2}$

## Frenetove formule in podobno

Naj bo $\vec{t}$ tangentni vektor poti $\gamma$ in $\vec{N}$ normala na ploskev. Definiramo $\vec{B} := \vec{t} \times \vec{N}$.

Frenetove formule:

(1) $\vec{t}' = \kappa \vec{n}$
(2) $\vec{n}' = -\kappa \vec{t} + \tau \vec{b}$
(3) $\vec{b}' = -\tau \vec{n}$

Veljajo naslednje enakosti:

(1) $\vec{t}' = \kappa_n \vec{N} - \kappa_g \vec{B}$
(2) $\vec{N}' = -\kappa_n \vec{t} + \tau_g \vec{B}$
(3) $\vec{B}' = \kappa_g \vec{t} - \tau_g \vec{N}$
(4) $\gamma$ je pot ukrivljenosti $\iff \tau_g = 0$

$\tau_g = \tau + \varphi'$, kjer je $\varphi$ kot med normalo krivulje $\vec{n}$ in normalo ploskve $\vec{N}$ (odvod po naravnem parametru) se imenuje **geodetska torzija**.

Trditev: Naj bosta $S_1, S_2$ ploskvi in $\gamma = S_1 \cap S_2$ pot, ki je tudi pot ukrivljenosti na $S_1$. Potem je $\gamma$ pot ukrivljenosti na $S_2 \iff$ kot med ploskvama je konstanten vzdolž preseka.

Avtor: Klemen Sajovec