1. Delno urejene množice

Definicija: Relacija R delno ureja množico A, če je refleksivna, antisimetrična in tranzitivna.
Definicija: Veriga je podmnožica v A (kjer je $(A, \leq)$ delna urejenost), v kateri so paroma primerljivi elementi. Antiveriga je množica paroma neprimerljivih elementov. Višina delne urejenosti je moč njene največje verige. Širina delne urejenosti je moč njene največje antiverige.
Definicija: $(A, \leq)$ delna urejenost. Tedaj je $x \in A$:

- minimalni element, če ne obstaja $y \in A, y \neq x$, da velja $y \leq x$;
- maksimalni element, če ne obstaja $y \in A, y \neq x$, da velja $x \leq y$;
- najmanjši element, če za vse $y \in A$ velja $x \leq y$;
- največji element, če za vse $y \in A$ velja $y \leq x$;

Trditev: Naj bo $(A, \leq)$ končna delna urejenost. Tedaj A premore vsaj en minimalni in vsaj en maksimalni element.
Definicija: Delni urejenosti $(A, \leq), (A', \leq')$ sta izomorfni, če obstaja bijekcija $f : A \longrightarrow A'$, taka da je

$$x \leq y \Longleftrightarrow f(x) \leq' f(y) \forall x, y \in A.$$

Trditev: Če je (A, R) veriga, $|A| = n$, tedaj je (A, R) izomorfna $([n], \leq)$.

2. Linearne razširitve in dimenzija delne urejenosti

Definicija: $L = (A, \leq)$ je linearna urejenost, če je delna urejenost, ki je veriga.
Definicija: Naj bo $P = (A, \leq)$ delna urejenost. Tedaj je linearna urejenost $L = (A, \leq')$ linearna razširitev delne urejenosti P, če velja: $x \leq y \Longrightarrow x \leq' y$.
Izrek: Naj bo $P = (A, \leq)$ končna delna urejenost. Tedaj P premore linearno razširitev. Celo več, če sta x in $y \in A$ neprimerljiva elementa, tedaj obstaja taka linearna razširitev $L = (A, \leq')$, da velja $x \leq' y$.
Posledica: Naj bo $P = (A, \leq)$ končna delna urejenost in naj bosta $x, y \in A$. Tedaj je $x \leq y$ natanko tedaj, ko je $x \leq' y$ v vsaki linearni razširitvi $L = (A, \leq')$.
Definicija: Naj bo $P = (A, \leq)$ delna urejenost. Tedaj je družina $\mathcal{L} = \{L = (A, \leq_L)\}$ linearnih razširitev od P realizator za P, če velja:

$$\forall x, y : \quad x \leq y \Longleftrightarrow x \leq_L y \quad \forall L = (A, \leq_L).$$

Trditev: Naj bo $P = (A, \leq)$ delna urejenost. Tedaj je družina linearnih razširitev $\mathcal{L}$ realizator za P natanko tedaj, ko za vsak par neprimerljivih elementov x in y obstajata $L, L' \in \mathcal{L}$, taka da je $x \leq_L y$ in $y \leq_L x$.
Opomba: $\mathcal{L}$ je realizator pomeni: $\cap_{L \in \mathcal{L}} L = P$.
Definicija: Dimenzija delne urejenosti je moč njenega najmanjšega realizatorja.
Trditev: Naj bo $P_n = (\{a_1, \dots, a_n\} \cup \{b_1, \dots, b_n\}, \leq)$, kjer $\leq$: $a_i \leq b_j$ za vse $i \neq j$ in $a_i \leq a_i, b_i \leq b_i \forall i$. $\dim P_n = n$ za $n \geq 2$.
Definicija: Naj bo $P = (A, \leq)$ delna urejenost. Tedaj je vložitev P v $\mathbb{R}^n$ taka injektivna preslikava $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$, da velja:

$$x \leq y \quad (\text{v } P) \Longleftrightarrow f(x) \leq f(y) \quad (\text{v } \mathbb{R}^n).$$

Izrek: Naj bo $P = (A, \leq)$ (končna) delna urejenost. Tedaj je $\dim P$ enaka najmanjšemu n, za katerega obstaja vložitev P v $\mathbb{R}^n$.

3. Trije klasični izreki

Trditev: Naj bo $P = (A, \leq)$ končna delna urejenost in naj bo n velikost največje verige v P. Tedaj lahko P pokrijemo z n antiverigami. (Te antiverige vsebujejo vse elemente iz A)
Dilworthov izrek: Naj bo $P = (A, \leq)$ končna delna urejenost. Tedaj je najmanjše število disjunktnih verig, s katerimi lahko pokrijemo A enako velikosti največje antiverige v P.
Hallov izrek: Če je G dvodelen graf z biparticijo X, Y, potem je problem popolnega prirejanja za X rešljiv natanko tedaj, ko velja:

$$\forall A \subseteq X : |N(A)| \geq |A|.$$

Spernerjev izrek: Naj bo $\mathcal{A}$ antiveriga v $P = (2^{[n]}, \subseteq)$. Tedaj je:

$$|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

Opomba: Izrek je najboljši možen (EVER!): Če za $\mathcal{A}$ izberemo vse podmnožice moči $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ bo širina $P = (2^{[n]}, \subseteq)$ enaka $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

4. Schnyderjev izrek

Definicija: $G = (V, E)$ graf. Incidenčna urejenost je definirana na $V \cup E$, in sicer:

$$e = uv \in E \Longrightarrow u \leq e, v \leq e + \text{refleksivnost}.$$

Definicija: Dimenzija grafa G je dimenzija njegove incidenčne urejenosti.
Schnyderjev izrek: Graf G je ravninski natanko tedaj, ko je $\dim G \leq 3$.
Naj bo $h_i(u)$ višina vozlišča u v $\leq_i$ (glede na višino vozlišča) in $\leq_1, \leq_2, \leq_3$ realizator incidenčne urejenosti grafa G. $f : V \longrightarrow \mathbb{R}^2$ s predpisom $f(u) = (2^{h_1(u)}, 2^{h_2(u)})$ je injektivna.
Definicija: Triangulacija je taka vložitev ravninskega grafa v ravnino, da so vsa njegova lica trikotniki. Vsak ravninski graf je vpet podgraf neke triangulacije.
Definicija: Schnyderjeva označitev triangulacije je prireditev oznak iz $[3]$ notranjim kotom, tako da velja:

- vsi koti pri v_i so označeni z i,
- vsak notranji trikotnik ima oznake $1, 2, 3$ v smeri urinega kazalca,
- koti okrog notranjega vozlišča imajo oznake: nekaj 1 (vsaj 1), nekaj 2 (vsaj 1), nekaj 3 (vsaj 1).

Iz T naredimo digraf tako, da vsako povezavo usmerimo proti enakima kotoma. Povezavo označimo: ime = smer (kot v katerega kaže).

5. Načrti in t-načrti

Definicija: Naj bo X v-množica. Tedaj je družina $\mathcal{B}$ k-podmnožic množice X načrt s parametri (v, k, λ), če se vsak element iz X pojavi v natanko λ množicah iz $\mathcal{B}$. Elementi družine $\mathcal{B}$ so bloki načrta.
Trditev: Če je $\mathcal{B}$ (v, k, λ)-načrt (in $|\mathcal{B}| = b$), tedaj je $bk = v\lambda$.
x je v kvečjemu $\binom{b-1}{k-1}$ blokih. $\lambda \leq \binom{v-1}{k-1}$, z uporabo trditve dobimo $b \leq \binom{v}{k}$.
Izrek: Načrt s parametri (v, k, λ) obstaja natanko tedaj, ko $k | v\lambda$ in je $\lambda \leq \binom{v-1}{k-1}$.
Definicija: Družina $\mathcal{B}$ k-podmnožic v-množice X je t-načrt s parametri (v, k, λ_t), če se vsaka t-podmnožica od X pojavi v natanko λ_t blokih.
Izrek: Če je $\mathcal{B}$ t-načrt, tedaj je $\mathcal{B}$ tudi s-načrt za $1 \leq s < t$.
Posledica: Če je $\mathcal{B}$ t-načrt s parametri (v, k, λ_t), potem je $\mathcal{B}$ tudi s-načrt s parametri (v, k, λ_s) in velja:

$$\lambda_s = \lambda_t \frac{(v-s)(v-s-1) \cdots (v-t+1)}{(k-s)(k-s-1) \cdots (k-t+1)}.$$

6. Ciklične konstrukcije načrtov in Fisherjeva neenakost

Trditev: Naj bo $S \subseteq \mathbb{Z}_m$ in naj bodo $S+i, i \in \mathbb{Z}_n$, paroma različni. Tedaj ti odseki tvorijo $(m, |S|, |S|)$-načrt.
Definicija: $S \subseteq \mathbb{Z}_m$ je <u>množica razlik</u>, če se vsak neničelni element iz $\mathbb{Z}_m$ pojavi enakokrat kot razlika dveh elementov iz S.
Izrek: Naj bo $S \subseteq \mathbb{Z}_m$ množica razlik in naj bo $k = |S|$. Če so odseki $S+i$ paroma različni, tedaj $\{S+i; i \in \mathbb{Z}_m\}$ tvori 2-načrt s parametri $(m, k, \frac{k(k-1)}{m-1})$.
Izrek: Fisherjeva neenakost Naj bo $\mathcal{B}$ 2-načrt s parametri (v, k, λ_2), kjer je $v > k$. Tedaj je $b \geq v$.
Opomba 1: Prejšnji izrek pravi, da je neenakost najboljša možna (EVER!), saj je v prejšnjem izreku dosežena enakost.
Opomba 2: Predpostavka $v > k$ je zato, da se izognemo trivialnemu primeru, ko je $v = k$: X v-množica, tedaj je $\mathcal{B}$ t-načrt za vsak t.

7. VAJE

Lema: Vsak izomorfizem delnih urejenosti slika najmanjši element v najmanjši element.
Catalanova števila: $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.
$P = (A, \leq)$, $x, y \in A$ neprimerljiva. Potem $(A, \leq \cup\{(x,y)\})$ ni delna urejenost.
Definicija: Naj bo $P = (A, \leq)$ delna urejenost in $x, y \in A$ neprimerljiva. Pravimo, da sta x in y <u>kritičen par</u>, če je tudi $(A, \leq \cup\{(x,y)\})$ delna urejenost.
Lema: Če je $(A, \leq)$ končna delna urejenost, kritičen par vedno obstaja.
Lema: Vsak dvodelen regularen graf ima popolno prirejanje.
Lema: Vsak dvodelen biregularen (stopnje vozlišč v X so d_1, stopnje vozlišč v Y pa d_2) graf $G(X \cup Y, E)$ ima popolno prirejanje iz X v Y, če je $|X| < |Y|$.
Definicija: Urejena n-terica $(a_1, \ldots, a_m)$ je <u>sistem različnih predstavnikov</u> za množice $S_1, \ldots, S_m \subseteq [n]$, če velja:

- $a_i \in S_i; i = 1, \ldots m$
- $a_i \neq a_j$.

Lema: Sistem različnih predstavnikov za $S_1, \ldots, S_m$ obstaja natanko tedaj, ko ima unija poljubnih k množic vsaj k elementov za $k = 1, \ldots, m$.
Lema: Če so $A_1, \ldots A_k$ različne podmnožice $[n]$ in $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ za vsaka i, j, je $k \leq 2^{n-1}$.
Lema: Naj bo $\mathcal{B}$ načrt s parametri (n, k, λ) nad množico X in $\mathcal{B}' = \{X \backslash B; B \in \mathcal{B}\}$. Tedaj je $\mathcal{B}'$ načrt s parametri $(b, n-k, \frac{n-k}{k}\lambda)$.
Trditev: Če je S množica razlik v $\mathbb{Z}_m$, potem je tudi $\mathbb{Z}_m \backslash S$ množica razlik v $\mathbb{Z}_m$.
Lema: Naj za 2-načrt s parametri (v, k, λ_2) velja $b = v$. Tedaj je $k - \lambda_2$ popoln kvadrat, če je v sod.
Trditev: Naj bo A incidenčna matrika 2-načrta $\mathcal{B}$, za katerega velja $b = v$. Tedaj je tudi A^T incidenčna matrika nekega 2-načrta.
Definicija: Steinerjev trojček je 2-načrt s parametri $(v, 3, 1)$.
Lema: Steinerjev trojček obstaja le v primeru, ko je $v \equiv 1(6)$ ali $v \equiv 3(6)$.
Velja $\lambda_1 = \lambda_2 \frac{v-1}{k-1}$
Naj bo A incidenčna matrika 2-načrta, za katerega velja $b = v$. Velja:

- $\det AA^T = k^2(k - \lambda_2)^{v-1}$
-
$$AA^T = \begin{bmatrix} k & \lambda_2 & \cdots & \lambda_2 \\ \lambda_2 & k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \lambda_2 \\ \lambda_2 & \cdots & \lambda_2 & k \end{bmatrix}$$
- če velja $A^T A = AA^T$, imata A in A^T natanko λ_2 skupnih enic.
- $AA^T = (k - \lambda_2)I_v + \lambda_2 \mathbb{1}_v$.