1. Dualni linearni program

Če je linearni program $\Pi : \max c^T x$ pri pogojih $Ax \leq b, x \geq 0$, je njegov dualni program $\Pi' : \min b^T y$ pri pogojih $A^T y \geq c, c \geq 0$.
Šibki izrek o dualnosti: Naj bo $x \in D(\Pi)$ in $y \in D(\Pi')$. Potem je $c^T x \leq b^T y$.
Posledica ŠID: Naj bo $x^* \in D(\Pi)$ in $y^* \in D(\Pi')$. Če $c^T x^* = b^T y^*$, je $x^* \in Opt(\Pi)$ in $y^* \in Opt(\Pi')$
Krepki izrek dualnosti: Če ima Π optimalno rešitev, jo ima tudi Π' in njuni vrednosti sta enaki.
Za par (Π, Π') velja natanko ena od treh možnosti:

- i oba sta nedopustna,
- ii eden od njiju je neomejen, drugi pa nedopusten,
- iii oba imata optimalno rešitev.

Izrek o dualnem dopolnjevanju: Naj bo Π LP $\max c^T x$ pri pogojih $Ax \leq b, x \geq 0$. Naj bo $x \in D(\Pi)$ in $y \in D(\Pi')$. Potem $x \in Opt(\Pi)$ in $y \in Opt(\Pi') \iff$

(1) za $i = 1, \ldots, m$ je $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$ ali $y_i = 0$ in
(2) za $j = 1, \ldots, n$ je $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j$ ali $x_j = 0$.

Posledica IDD: Naj bo $x \in Opt(\Pi)$. Potem vsaka optimalna rešitev y programa Π' zadošča sistemu enačb:

(1) $y_i = 0$, če $x_{n+1} \neq 0, (i = 1, \ldots, m)$ (uvedemo dodatne spremenljivke x_{n+i},
(2) $\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i = c_j$, če $x_j \neq 0 (j = 1, \ldots, n)$,
(3) y ni nujno optimalna rešitev Π', preveriti je potrebno, da je $y \in D(\Pi')$!

PAZI: Če pri pogojih LP nastopa enačba, lahko iz nje izraziš eno od spremenljivk, vendar mora še vedno veljati, da je ta spremenljivka ≥ 0, torej pridobiš nov pogoj.

2. Matrične igre

Definicija 2.1. *Matrična igra* je igra za dva igralca, pri kateri ima prvi igralec n izbir $(1, 2, \ldots, n)$, drugi igralec m izbir $(1, 2, \ldots, m)$. Izid igre določa *plačilna matrika* $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, kjer je a_{ij} plačilo drugega igralca prvemu, če je prvi izbral izbiro i, drugi pa izbiro j.

Načelo najmanjšega tveganja:

1. igralec: če izbere i, dobi vsaj $\min a_{ij}$. Torej lahko vselej dobi vsaj

$$M_1 = \max_i \min_j a_{ij} \qquad \text{(največji vrstični minimum).}$$

2. igralec: če izbere j, ne izgubi več kot $\max a_{ij}$. Torej mu ni treba izgubiti več kot

$$M_2 = \min_j \max_i a_{ij} \qquad \text{(najmanjši stolpčni maksimum).}$$

Trditev: Pri vsaki matrični igri je $M_1 \leq M_2$.
Definicija: Element matrike A na mestu (i_0, j_0) je *sedlo* matrike, če je najmanjši svoji vrstici in največji v svojem stolpcu, torej:

$$\min_j a_{i_0 j} = a_{i_0 j_0} = \max_i a_{i j_o}.$$

Izrek: A ima sedlo $\iff M_1 = M_2$.
Definicija: *Strategija 1. igralca* je verjetnostna porazdelitev $(x_1, \ldots, x_n)$, kjer je x_i verjetnost, da 1. igralec izbere i. Velja:

$$x \geq 0, \quad \sum_{i=1}^n x_i = 1.$$

Strategija 2. igralca je verjetnostna porazdelitev $(y_1, \ldots, y_m)$, kjer je y_i verjetnost, da 2. igralec izbere j. Velja:

$$y \geq 0, \quad \sum_{i=1}^m y_j = 1.$$

i-ta čista strategija prvega igralca je $c^{(i)} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$, kjer je 1 na i-tem mestu.
$E(x, y)$ označuje povprečni dobitek 1. igralca, če 1. igralec uporablja strategijo x, 2. igralec pa strategijo y.

$$E(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} x_i y_j = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j = < x, Ay > = < A^T x, y > .$$

Če prvi igralec uporablja strategijo x, bo dobil v povprečju vsaj $\min_y E(x, y)$, torej lahko dobi v povprečju vsaj $\max_x \min_y E(x, y)$.
Če drugi igralec uporablja strategijo y, izgubi v povprečju kvečjemu $\max_x E(x, y)$, torej mu ni treba izgubiti več kot $\min_y \max_x E(x, y)$.
Trditev: $\max_x \min_y E(x, y) \leq \min_y \max_x E(x, y)$. Obe vrednosti vedno obstajata.
Lema: Za vsako strategijo x obstaja $\min_y < x, Ay >$ in velja $\min_y < x, Ay > = \min_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i$.
Lema: Za vsako strategijo y obstaja $\max_x < x, Ay >$ in velja $\max_x < x, Ay > = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j$.
Definicija: Število $v(A) = \max_x \min_y E(x, y) = \max_x \min_y < x, Ay >$ imenujemo *vrednost igre* z matriko A. Igra je *poštena*, če $v(A) = 0$. **Preverjanje optimalnosti strategij:**
Trditev: Naj bo x strategija 1. igralca, y strategija 2. igralca, $s = \min_j \sum_{i=1}^n a_{ij} x_i, \quad \max_i \sum_{j=1}^m a_{ij} y_j$. Potem: x, y optimalni $\iff s = t$. V tem primeru je $v(A) = s = t$.
Posebni primeri matričnih iger:

(1) **Igre s sedlom**
Trditev Naj bo (i_0, j_0) sedlo matrike A. Potem je $v(A) = a_{i_0 j_0}$ in čisti strategiji x^{i_0}, y^{j_0} sta optimalni.
(2) textbfSimetrične igre
Definicija: Igra z matriko A je *simetrične*, če je $A^T = -A$.
Trditev: Simetrična igra je poštena, množici optimalnih strategij prvega in drugega igralca sta enaki.
(3) **Igre z dominacijo**
Definicija: $a, b \in \mathbb{R}^k$. a *dominira* nad b, če $a \geq b$.
Trditev: Naj bo A plačilna matrika igre.
(a) Če v A vrstica i dominira nad vrstico $i_0 \neq i$, se vrednost igre ne spremeni, če vrstico i_0 izpustimo.
(b) Če v A stolpec j_0 dominira nad stolpcem $j \neq j_0$, se vrednost igre ne spremeni, če stolpec j_0 izpustimo.

3. Problem razvoza

$G=(V,E), V=\{v_1,v_2,\dots,v_m\}, E=\{e_1,e_2,\dots,e_n\}$. Uvedemo vektorje b,c,x: (pišemo $b_{v_i}=b_i$ povpraševanje/ponudba v vozlišču v_i, $c_{e_j}=c_j$ stroški prevoza vzdolž e_j, $x_{e_j}=x_j$ količina dobrine, prepeljane po e_j). Iščemo $\min c^T x$ p.p. $Ax=b, x\geq 0$, kjer A incidenčna matrika usmerjenega grafa.

Definicija: _Drevo_ je povezan graf brez ciklov.

Vpet podgraf grafa G je podgraf, ki vsebuje vsa vozlišča G.

Vpeto drevo je vpet podgraf, ki je drevo (m vozlišč, $m-1$ povezav).

Dopustna rešitev $x\in\mathbb{R}^n$ za PR je _drevesna (ddr)_, če v G obstaja vpeto drevo T, da velja $e\notin E(T)\Longrightarrow x_e=0$.

IZBOLJŠAVA DDR:

Najprej preveri, če se skupna ponudba in povpraševanje seštejeta v 0. Če se, nadaljuj takole:

1. Naj bo T vpeto drevo. Razvozi dobrine tako, da zadostiš povpraševanju in Kirchhoffovim zakonom.
2. Izberemo vstopajočo povezavo $e=ij\notin E(T)$ med povezavami, za katere je $y_i+c_{ij}<y_j$. Vstopajočo povezavo e dodamo drevesu T. V grafu $T+e$ nastane natanko en cikel C.
3. Povezave na ciklu C so preme (določajo isto orientacijo C kot e) in obratne (sicer). Na vsaki premi povezavi razvoz povečamo za t, na vsaki obratni pa zmanjšamo za t, kjer je $t=\min\{x_{uv}|uv\text{obratna povezava na }C\}$.
   Za izstopajočo povezavo f izberemo obratno povezavo, na kateri je $x=t$. Odstranimo jo iz grafa $t+e$ in dobimo novo vpeto drevo $T+e-f$.
4. postopek ponavljamo, dokler ne moremo dodati nobene povezave več.

Dvofazna sx metoda: Če se ponudba in povpraševanje ne seštejeta v 0, dodaš novo vozlišče (skladišče), v katerega iz vozlišč s ponudbo napelješ povezave s ceno 0 in rešuješ ta PR. Stroške razvoza dobiš tako, da množiš ceno povezave na vpetem grafu T z istoležno ceno povezave v G in produkte seštejeś.

Izrek Če za vse povezave $ij\in E(g)$ velja: $y_i+c_{ij}\geq y_j$, je trenutna ddr optimalna. Če pri reševanju PR z *sx* metodo ne moremo izbrati vstopajoče povezave, je trenutna ddr optimalna.

Trditev: Če na ciklu C v grafu $T+e$ ni obratnih povezav, je PR neomejen in je C usmerjeni cikel z negativno vsoto prevoznih stroškov.

4. Prirejanja in pokritja

Definicija: $G=(V,E)$ neusmerjen graf.

1. $M\subseteq E$ je _prirejanje_ v G, če povezave iz M nimajo skupnih krajišč.
2. $P\subseteq V$ je _pokritje_ v G, če ima vsaka povezava G vsaj eno krajišče v P.
3. Oznake: $\mu(G)$ je _moč največjega prirejanja v G_, $\tau(G)$ pa _moč najmanjšega pokritja v G_.

Trditev: G graf.

(1) Za vsako prirejanje M v G in vsako pokritje P v G je $|M|\leq|P|$.
(2) $|M|=|P|\Longrightarrow M$ največje prirejanje in P najmanjše pokritje v G.
(3) $\mu(G)\leq\tau(G)$.

Definicija: G graf, M prirejanje vG.

(1) Povezave iz M so _vezane_, ostale so _proste_.
(2) Vozlišče v je _vezano_, če je krajišče kakšne povezave iz M, sicer je _prosto_.
(3) $\text{prosta}(M)=\{v\in V(G)|v\text{prosto za}M\}$.
(4) Če $uv\in M$, je $u=par(v), v=par(u)$.

Definicija: G graf, M prirejanje v G. Pot P v G je _izmenična_ za M, če se na P izmenjujejo proste in vezane povezave. Izmenična pot za M je _povečujoča_ za M, če ima prosti krajišči. Prirejanje M je _popolno_, če so vsa vozlišča G vezana glede na M

Lastnosti popolnih prirejanj:

- $K_{n,n}$ ima $n!$ popolnih prirejanj.
- G ima popolno prirejanje $\Longleftrightarrow \mu(G)=|V(G)|/2$.
- K_n: $\mu(K_n)=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$, (če n sod, je to popolno prirejanje), $\tau(K_n)=n-1$.
- $K_{m,n}$: $\mu(K_{m,n})=\min\{m,n\}=\tau(K_{m,n})$
- Pot P_n: $\mu(P_n)=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor=\tau(P_n)$
- Cikel C_n: $\mu(C_n)=\lfloor\frac{n}{2}\rfloor$, (če n sod je to popolno prirejanje), $\tau(C_n)=\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$

Trditev: G graf, M prirejanje v G, P povečujoča pot za M v G. Potem je $M\oplus E(P)$ prirejanje v G in $|M\oplus E(P)|=|M|+1$. $(A\oplus B=(A\backslash B)\cup(B\backslash A))$

Bergev izrek: Naj bo M prirejanje v G. M največje prirejanje v $G\Longleftrightarrow$ v G ni povečujočih poti za M.

Konstrukcija največjega prirejanja v G:

1. $M=$ poljubno prirejanje v G (čim večje)
2. dokler obstaja povečujoča pot P v G za M, ponavljaj: $M=M\oplus E(P)$
3. vrni M

Madžarska metoda (MM) za dvodelne grafe brez uteži poišče največje prirejanje in najmanjše pokritje v dvodelnem grafu $G=(X\cup Y,E)$. Postopek:

König-Egerváryjev izrek: V dvodelnem grafu F je $\mu(G)=\tau(G)$.

Madžarska metoda z utežmi (MMU): za iskanje najcenejšega popolnega prirejanja v $G=K_{n,n}$ (Najcenejše popolno prirejanje opravil). $C\in\mathbb{R}^{n\times n}, c_{ij}=$ cena povezave x_iy_j

1. korak:
   a Od elementov vsake vrstice odštejemo njen najmanjši element.
   b Od elementov vsakega stolpca odštejemo njegov najmanjši element.
2. korak:
   a Če lahko v C izberemo n ničel, v vsaki vrstici in vsakem stolpcu natanko eno, potem indeksi izbranih elementov določajo najcenejše popolno prirejanje v G.
   b Sicer izberemo množico $<n$ vrstic in/ali stolpcev C. ki skupaj vsebujejo vse ničle v C. Naj bo to množica P.
3. Naj bo ϵ najmanjši nepokriti element v C. Vsem nepokritim elementom v C ϵ odštejemo, dvakrat pokritim pa prištejemo. Nazaj na korak 2.

5. Pretoki in prerezi

Iščemo največji pretok f iz s – izvor v t – ponor v grafu G s prepustnostmi povezav c_{ij}.

Definicija: Naj bo F pretok v (G,s,t,c). Oprežje (G_f,s,t,r), kjer je $V(G_f)=V(G)$, $E(G_f)=ij\in E(G)|r_{ij}>0$, $r:V\times V\longrightarrow\mathbb{R}_+$, $r_{ij}=c_{ij}-f(i,j)$ za vse $i,j\in V$, je _residualno omrežje_ G glede na f. _Povečujoča pot_ za f v (G,s,t,c) je vsaka usmerjene pot $s\longrightarrow t$ v (G_f,s,t,r).

Trditev: Naj bo f pretok v G, f' pretok v G_f. Potem: $f+f'$ pretok v G in $|f+f'|=|f|+|f'|$. **Posledica:** Usmerjena pot $s\longrightarrow t$ v (G,s,t,c) je povečujoča, če ne vsebuje zasičenih povezav.

Avtor: Klemen Sajovec