

## PDE

Dana je PDE  $a(x, y)u_x + b(x, y)u_y = 0$ , kjer sta  $a, b \in \infty(\mathbb{R}^2)$ . NDE, ki ji morajo zadostiti nivojnice rešitvene ploskve  $u = u(x, y)$  je  $a dy = b dx$ . Iz dobljene enačbe izrazimo splošno konstanto  $C$ , splošna rešitev pa je  $u = u(x, y) = F(C)$ . Uporabimo še začetni pogoj.

Uvedba novih spremenljivk  $s, t$ :  $u_x = u_s s_x + u_t t_x$ ,  $u_y = u_s s_y + u_t t_y$ .

Poseben primer novih spremenljivk:

Če za PDE  $a(x, y)u_x + b(x, y)u_y + c(x, y)u = d(x, y)$ ,  $a, b, c, d \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$  uvajamo novi spremenljivki  $t$  in  $s$ , za kateri velja  $as_x + bs_y = 0$  in  $at_x + bt_y \neq 0$ , dobimo NDE 1. reda:

$$u_t + \frac{c}{at_x + bt_y}u = \frac{d}{at_x + bt_y}.$$

**Krajšanje metode z nivojnicami:**  $ds = 0 = s_x dx + s_y dy$ . Iz pogoja  $as_x + bs_y = 0$  izrazimo npr.  $s_x$  z  $s_y$ , nesemo v enačbo  $ds = 0$ , krajšamo  $s_y$ , rešimo NDE in dobimo splošno rešitev:  $s = F(C)$ . Potrebujemo neko rešitev, torej lahko izberemo kar  $F = \text{id}$ . Za  $t$  si izberemo tako funkcijo  $x, y$  (čim enostavnejšo), da bo izpolnjen pogoj  $at_x + bt_y \neq 0$  in da bosta  $s$  in  $t$  neodvisni, torej da velja:

$$\det \begin{bmatrix} s_x & s_y \\ t_x & t_y \end{bmatrix} \neq 0.$$

## KVAZILINEARNA PDE

Oblika:  $a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$ . Začetni pogoj: rešitev vsebuje krivuljo  $\Gamma(s) = (x_0(s), y_0(s), u_0(s))$ .  $u = u(x, y)$  je ploskev z normalo  $\vec{n} = (e_x, e_y, -1)$ . Zaradi tipa enačbe velja  $(a, b, c) \cdot \vec{n} = 0$ , torej rešitvena ploskev sestoji iz krivulj, za katere velja  $\dot{\gamma} = (a, b, c)$ . Rešujemo karakteristični sistem:  $\dot{x} = a(x, y, u)$ ,  $\dot{y} = b(x, y, u)$ ,  $\dot{u} = c(x, y, u)$ . Rešitvam karakterističnega sistema pravimo karakteristike in načeloma napolnijo cel  $\mathbb{R}^3$ . Rešitev sestavimo iz krivulj (karakteristik), ki sekajo začetno krivuljo  $\Gamma$ :  $x(0) = x_0(s)$ ,  $y(0) = y_0(s)$ ,  $u(0) = u_0(s)$ . Dobimo parametrično rešitev:  $x = x(t, s)$ ,  $y = y(t, s)$ ,  $u = u(t, s)$ . Če se da, iz parametrične rešitve izrazimo eksplicitno rešitev  $u = u(x, y)$ .

DEFINICIJA: Transverzalnostni pogoj:

$$(T) = \det \begin{bmatrix} a(x_0, y_0) & b(x_0, y_0) \\ x'_0(s) & y'_0(s) \end{bmatrix} \neq 0,$$

kjer je  $(a, b)$  tangenta karakteristik (prvi dve komponenti),  $(x'_0, y'_0)$  pa tangenta začetne krivulje (prvi dve komponenti).

IZREK:

- (i) Če je  $(T)$  izpolnjen za vsak  $s \in \mathbb{R}$ , obstaja natanko ena rešitev začetnega problema, definirana na okolici začetne krivulje  $\Gamma(s)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ .
- (ii) če je  $(T)$  prekršen za vsak  $s \in \mathbb{R}$ , imamo dve možnosti:
  - a) ne obstaja rešitev, če  $\Gamma$  ni karakteristika ( $\Gamma$  je karakteristika, če je izpolnjen pogoj v točki b),
  - b) imamo neskončno rešitev, če je  $\Gamma' \parallel (a, b, c)$ .

Če ima enačba neskončno rešitev (sledimo točki b) iz zgornjega izreka) in iščemo več kot eno, se lahko zgodi, da nam metoda karakteristik ponudi le eno. Ideja: izberemo si začetno krivuljo  $\Gamma_1$ , ki zadošča naslednjima pogojema:

- (1) netangentno seka  $\Gamma$ ,
- (2) izpolnjuje  $(T)$  za originalno enačbo.

LEMA:  $(ax + by)u_x + (bx + dy)u_y = 0$ ,  $a, b, d \in \mathbb{R}$ ,  $ad - b^2 > 0$ ,  $a + d < 0$ . Naj bo  $u$  rešitev enačbe razreda  $C^1(\mathbb{R}^2)$ . Tedaj je  $u$  konstantna.

**Trik** za neskončne sisteme NDE za  $x_n(t)$ : rešimo ga s pomočjo rodovne funkcije  $Q(y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t)y^n$ . Velja:  $yQ_y = \sum_{n=1}^{\infty} nx_n(t)y^n$ ,  $Q_y - Q/y = \sum_{n=1}^{\infty} nx_{n+1}y^n$ . Z upoštevanjem rekurzivne zveze dobimo PDE za  $Q$ , rešimo, razvijemo rešitev v vrsto po  $y$ .

## LAGRANGEEVA METODA ZA KVAZILINEARNE PDE

TRDITEV: Naj bo  $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$   $C^\infty$  z lastnostma:

- (i) obstaja  $p \in \mathbb{R}^3$ :  $F(p) = 0$  in  $F_u(p) \neq 0$ ,
- (ii)  $F$  je prvi integral karakterističnega sistema  $\dot{x} = a(x, y, u)$ ,  $\dot{y} = b(x, y, u)$ ,  $\dot{u} = c(x, y, u)$ .

Potem je z enačbo  $F(x, y, u) = 0$  dobro definirana implicitna rešitev enačbe  $a(x, y, u)u_x + b(x, y, u)u_y = c(x, y, u)$  na okolici točke  $p$ .

**Metoda:** Naj bosta  $F$  in  $G$  gladka, funkcijsko neodvisna integrala karakterističnega sistema. Potem je splošna rešitev  $\Psi(F(x, y, u), G(x, y, u)) = 0$ , kjer je  $\Psi$  poljubna funkcija.  $F(x, y, u) = C$ ,  $G(x, y, u) = D$ . Metoda nam generira splošne rešitve, nimamo pa relacije med začetno krivuljo in enoličnostjo rešitve ter metode ne moremo posplošiti za nelinearne PDE.

Iz parametrične rešitve karakterističnega sistema izrazimo konstanti  $C$  in  $D$ . To sta naša prva integrala  $F$  in  $G$ , ki sta zdaj odvisna le od  $x, y, u$ , ne pa od  $C, D$ . Dobimo  $\Psi$  in upoštevamo še začetni pogoj (ga vstavimo v  $\Psi$ ). Navadno lahko uganemo predpis za  $\Psi$ , da bo res enak 0. Če hočemo vedeti kaj o enoličnosti, se lotimo naloge z metodo karakteristik in preverimo transversalnostni pogoj.

Zanimivi vzorci:  $(x^2)^\cdot = 2x\dot{x}$ ,  $(xy)^\cdot = \dot{x}y + x\dot{y}$ ,  $(\ln x)^\cdot = \frac{\dot{x}}{x}$ .

TRDITEV: Naj bosta  $\vec{P}_j : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $j \in \{1, 2\}$ , vektorski polji ortogonalni na  $Q(x, y, u) = (a(x, y, u), b(x, y, u), c(x, y, u))$ , neodvisni in  $\text{rot}\vec{P}_j$ . Tedaj sta njuna potenciala prva integrala karakterističnega sistema.

## NELINEARNE PDE 1. REDA

Oblika:  $F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$ , označimo  $p = u_x$ ,  $q = u_y$ . Iščemo rešitev pri pogojih  $u(\alpha(t), \beta(t)) = \gamma(t)$ .

**Metoda karakteristik:** Za karakteristike vzamemo tvorilke stožca, tj. "središčne premice". To so rešitve sistema  $\dot{x} = F_p$ ,  $\dot{y} = F_q$ ,  $\dot{u} = pF_p + qF_q$ ,  $\dot{p} = -F_x - F_u p$ ,  $\dot{q} = -F_y - F_u q$ . Za določanje konstant upoštevamo začetno krivuljo in dva naravna pogoja:

- $F(x, y, u, p, q)|_{t=0} = 0$ ,
- $\Gamma' \perp \vec{n}|_{t=0}$ :  $(p(0), q(0), -1) \cdot \Gamma'(s) = 0$ .

Če  $u = u(x, y)$  določa ploskev v prostoru, je enačba tangentne ravnine na to ploskev v točki  $(x, y, u(x, y))$  enaka:  $u_x(X - x) + u_y(Y - y) - (U - u) = 0$  (normala ravnine je  $(A, B, C) = (u_x, u_y, -1)$ ). Razdalja od tangentne ravnine do točke  $(a, b, c)$  je:

$$d(AX + BY + CU + D = 0, (a, b, c)) = \frac{|Aa + Bb + Cc + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

## EKSISTENČNI IZREK ZA NELINEARNE PDE 1. REDA

IZREK: Naj bo  $u = u(x, y)$  rešitev začetnega problema

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0, \quad u(\alpha(s), \beta(s)) = \gamma(s), \quad \text{za } s \in \mathcal{I}.$$

Če sta  $p(s) = u_x(\alpha(s), \beta(s))$  in  $q(s) = u_y(\alpha(s), \beta(s))$  edini funkciji, za kateri velja:

- (1)  $(T) = \det \begin{bmatrix} \alpha' & \beta' \\ F_p & F_q \end{bmatrix}(s) \neq 0 \quad \forall s \in \mathcal{I}$ ,
- (2)  $F(\alpha(s), \beta(s), \gamma(s), p(s), q(s)) = 0 \quad \forall s \in \mathcal{I}$ ,
- (3)  $(p(s), q(s), -1) \cdot (\alpha'(s), \beta'(s), \gamma'(s)) = 0 \quad \forall s \in \mathcal{I}$ .

Potem je rešitev  $u$  enolična.

## PFADFOVA ENAČBA

Oblika:  $p(x, y, z)dx + q(x, y, z)dy + r(x, y, z)dz = 0$ . Geometrijski pomen:  $\vec{F} = (p, q, r)$ . Iščemo družino ploskev  $G(x, y, z) = C \in \mathbb{R}$ , ki je pravokotna na  $\vec{F}$ , tj. obstaja  $\mu = \mu(x, y, z)$ :  $\text{grad}(G) = \mu\vec{F}$ .

LEMA: Potreben in zadosten pogoj za rešitev Pfaffove PDE je  $\vec{F} \cdot \text{rot}\vec{F} = 0$ .

Velja:  $\text{rot}(\mu\vec{F}) = \text{grad}\mu \times \vec{F} + \mu\text{rot}\vec{F}$ .

**Metoda za reševanje:** Predpostavimo, da iščemo rešitve, katerih presek z ravnino  $z = \text{konst.}$  je krivulja brez samopresečišč. Na tem preseku velja  $pdx + qdy = 0$ . Torej imamo rešitev te NDE:  $u(x, y, z) = C(z)$ . Rešitev iščemo z nastavkom  $G(x, y, z) = u(x, y, z) - C(z)$ . Če je potreben pogoj izpolnjen, obstajata  $C$  in  $\mu$ , da je  $\text{grad}(G) = \mu\vec{F}$ .

Ko iz zveze  $\text{grad}(G) = \mu\vec{F}$  izračunamo  $C(z)$ , ga vstavimo v  $G(x, y, z) = u(x, y, z) - C(z)$ . Rešitev je družina ploskev  $G(x, y, z) = 0$ .

## LINEARNE PDE 2. REDA

Oblika:  $a(x, y)u_{xx} + 2b(x, y)u_{xy} + c(x, y)u_{yy} + 1. \text{ red} = 0$ .  $\delta = b^2 - ac$ . Ločimo tri tipe PDE:

- če je  $\delta > 0$  na  $D$ , je PDE hiperbolična na  $D$ ,
- če je  $\delta = 0$  na  $D$ , je PDE parabolična na  $D$ ,
- če je  $\delta < 0$  na  $D$ , je PDE eliptična na  $D$ .

Vsi trije tipi se prevedejo na kanonično obliko z vpeljavo novih koordinat  $(t, s)$ :

- Za  $(t, s)$  vzamemo neki rešitvi enačb  $at_x + (b + \sqrt{\delta})t_y = 0$ ,  $as_x + (b - \sqrt{\delta})s_y = 0$ . Dobimo:  $u_{st} + 1. \text{ red} = 0$ .
- Za  $t$  vzamemo neko rešitev enačbe  $at_x + bt_y = 0$ , za  $s$  pa poljubno funkcijo, neodvisno od  $t$ . Dobimo:  $u_{ss} + 1. \text{ red} = 0$ .
- Poiščemo (kompleksno) rešitev  $av_x + (b + \sqrt{\delta})v_y = 0$ . Vzamemo  $t = \text{Re } v$  in  $s = \text{Im } v$ . Dobimo:  $u_{tt} + u_{ss} + 1. \text{ red} = 0$ .

Za računanje enačb, ki porodijo nove spremenljivke, uporabiš čisto prvo (najbolj na začetku, prvi list, prvi način reševanja za prvo obliko) metodo z nivojnicami. Tj. iz enačbe v zgornjih točkah izraziš npr.  $v_x$  in jo neseš v  $dv = 0 = v_x dx + v_y dy$ , krajššaš  $v_y$ , rešiš NDE *et voilà!*

Pomoč:  $u_x = u_s s_x + u_t t_x$ ,  $u_y = u_s s_y + u_t t_y$ ,  $u_{xx} = (u_x)_s s_x + (u_x)_t t_x$ ,  $u_{xy} = (u_x)_s s_y + (u_x)_t t_y$ ,  $u_{yy} = (u_y)_s s_x + (u_y)_t t_x$ . Pri iskanju rešitev PDE v kanonični obliki dobiš splošni funkciji  $C(t)$  in  $D(s)$ .

## VALOVNA ENAČBA

Oblika:  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$ .  $x \in \mathbb{R}$  je točka na struni,  $t \geq 0$ .  $u = u(x, t)$  predstavlja odmik točke v danem času. Novi spremenljivki:  $\xi = x + ct$ ,  $\eta = x - ct$ . Splošna rešitev:  $u = F(\xi) + G(\eta) = F(x + ct) + G(x - ct)$ .

**d'Alembertova formula** za homogeno valovno enačbo pri pogojih  $u(x, 0) = f(x)$ ,  $u_t(x, 0) = g(x)$ :  $u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x + ct) + f(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} g(s) ds$ .

Trikotnik vpliva označimo z  $\Delta(x_0, t_0)$  in je določen s točkami  $(x_0 - ct_0, 0)$ ,  $(x_0 + ct_0, 0)$ ,  $(x_0, t_0)$ . Na grafu je  $x$  na  $x$ -osi,  $t$  pa na  $y$ -osi.

**Nehomogena valovna enačba:**  $u_{tt} - c^2 u_{xx} = F(x, t)$ . Rešitev je oblike:  $u(x, t) = u_{\text{HOM}}(x, t) + u_{\text{PART}}(x, t)$ , kjer je  $u_{\text{PART}}(x, t) = \frac{1}{2c} \iint_{\Delta(x, t)} F(\xi, \tau) d\xi d\tau$ .

Za partikularni del torej integriramo:  $u_{\text{PART}}(x, t) = \frac{1}{2c} \int_0^t d\tau \int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t-\tau)} F(\xi, \tau) d\xi$ .

ODVOD INTEGRALA:  $F(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(x, s) ds$ . Potem  $F'(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, s) ds + f(x, (v(x))v'(x) - f(x, u(x))u'(x)$ .

TRDITEV: Naj bodo  $f, g$  in  $F(\cdot, t)$  lihe za  $t \geq 0$ . Tedaj je d'Alembertova rešitev tudi liha. Ob predpostavkah  $f \in C^2(\mathbb{R})$ ,  $g \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $F, \frac{\partial F}{\partial x} \in C(\mathbb{R}^2)$  dobimo klasično rešitev, tj.  $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$ .

## SEPARACIJA SPREMENLJIVK

$L^2([-\pi, \pi]) = \{f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}, \int_{-\pi}^{\pi} |f|^2 dx < \infty\}$  je vektorski prostor s skalarnim produktom  $\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$ . Množica funkcij

$\{\frac{1}{2\pi}, \frac{1}{\pi} \sin x, \frac{1}{\pi} \cos x, \frac{1}{\pi} \sin 2x, \frac{1}{\pi} \cos 2x, \dots\}$  je kompleten (vsako funkcijo se da na enoličen način razviti v tem sistemu), ortonormiran sistem za ta produkt.

**Fourierjev razvoj:**  $f \in L^2([-\pi, \pi])$ :

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

$$a_n = \langle f, \frac{1}{\pi} \cos nx \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$b_n = \langle f, \frac{1}{\pi} \sin nx \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

**Sinusna in kosinusna vrsta:**  $f \in L^2([0, \pi])$ . Za tako funkcijo obstaja liha in soda razširitev na  $[-\pi, \pi]$ . Za  $\tilde{f}^S$  so  $b_n = 0$ , za  $\tilde{f}^L$  pa  $a_n = 0$ .

POSLEDICA: Na  $[0, \pi]$  za  $f$  obstajata dva razvoja: **sinusna vrsta:**  $\tilde{f}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \sin nx$  in **kosinusna vrsta:**

$$\tilde{f}(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cos nx, \text{ kjer sta:}$$

$$\tilde{a}_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

$$\tilde{b}_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

S substitucijo lahko razvoj prevedemo na poljuben interval  $[-L, L]$  oz.  $[0, L]$ ,  $L > 0$ . V tem primeru je  $\{\frac{1}{2L}, \frac{1}{L} \sin \frac{n\pi x}{L}, \frac{1}{L} \cos \frac{n\pi x}{L}, \dots\}$ .

KONS.

**Uporabni integrali:**  $\int_a^b \sin(\frac{n\pi x}{b-a})^2 dx = \int_a^b \cos(\frac{n\pi x}{b-a})^2 dx = \frac{(b-a)(\sin(\frac{2\pi a n}{b-a}) - \sin(\frac{2\pi b n}{b-a}) + 2\pi n)}{4\pi n}$ ,  $n \in \mathbb{C}$

$$(\int_a^b x^i \sin(kx) dx)_{1,2} = (\frac{-\sin(ak) + ak \cos(ak) + \sin(bk) - bk \cos(bk)}{k^2}, \frac{(a^2 k^2 - 2) \cos(ak) - 2ak \sin(ak) + (2 - b^2 k^2) \cos(bk) + 2bk \sin(bk)}{k^3})$$

$$(\int_a^b x^i \cos(kx) dx)_{1,2} = (\frac{-ak \sin(ak) - \cos(ak) + bk \sin(bk) + \cos(bk)}{k^2}, \frac{(2 - a^2 k^2) \sin(ak) - 2ak \cos(ak) + (b^2 k^2 - 2) \sin(bk) + 2bk \cos(bk)}{k^3})$$

$$\int_a^b (x-a)(b-x) \sin(kx) dx = \frac{k(a-b)(\sin(ak) + \sin(bk)) + 2 \cos(ak) - 2 \cos(bk)}{k^3}$$

$$\int_a^b (x-a)(b-x) \cos(kx) dx = \frac{k(a-b)(\cos(ak) + \cos(bk)) - 2 \sin(ak) + 2 \sin(bk)}{k^3}$$

$$\int_a^b \sin(mx) \cos(kx) dx = \frac{-k \sin(ak) \sin(am) - m \cos(ak) \cos(am) + k \sin(bk) \sin(bm) + m \cos(bk) \cos(bm)}{k^2 - m^2}$$

$$\int_a^b \sin(mx) \sin(kx) dx = \frac{-m \sin(ak) \cos(am) + k \cos(ak) \sin(am) + m \sin(bk) \cos(bm) - k \cos(bk) \sin(bm)}{k^2 - m^2}$$

$$\int_a^b \cos(mx) \cos(kx) dx = \frac{-k \sin(ak) \cos(am) + m \cos(ak) \sin(am) + k \sin(bk) \cos(bm) - m \cos(bk) \sin(bm)}{k^2 - m^2}, \text{ povsod so } m, n, k \in \mathbb{C}$$

**Metoda separacije:** Kdaj jo uporabimo: Trivialen pogoj: Imamo eno spremenljivko na omejenem območju in s homogenimi robnimi pogoji, npr.

$$x \in [0, L]: \alpha u(0, t) + \beta u_x(0, t) = 0, \quad \gamma u(L, t) + \delta u_x(L, t) = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}.$$

Netrivialen pogoj: Diferencialni operator, ki določa PDE, zadošča Sturm-Liouvillovi teoriji, tj. množica lastnih funkcij, ki jih dobimo iz robnega problema tvori K.O.N.S.

Štirje koraki metode: (zato K.O.N.S. 4)

#1: Separacija: nastavek  $u(x, t) = X(x)T(t)$ . (Nastavek vstavi v enačbo in loči spremenljivke, dobljeno enačbo pa enači z  $\mu \in \mathbb{R}$ .)

#2: Določanje lastnih funkcij  $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  iz robnega problema za NDE. (Reši NDE za  $X$ , homogeni robni pogoji ti dajo začetne pogoje za NDE. Obravnavati moraš možnosti  $\mu > 0, \mu = 0, \mu < 0$ . Če je v kakšnem primeru  $X \equiv 0$ , lastnih funkcij v tem primeru ni. Pri izbire množice lastnih funkcij, lahko splošno konstanto za vsak člen BŠS postaviš na 1.)

#3: Iskanje pripadajočih  $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ . (Z  $\mu$ , ki ga dobiš v #2 in določa družino lastnih funkcij, reši še NDE za  $T$ . Splošno konstanto lahko tu pustiš, lahko si misliš, za je v njej spravljena konstanta iz množice lastnih funkcij za  $X$ .)

#4: Splošna rešitev  $u = \sum_{n=1}^{\infty} X_n T_n$ . (Rešitev naj bi bila odvisna od števno mnogo konstant, ki jih določiš iz nehomogenega robnega pogoja. Dobro je opaziti morebitne sinusne/kosinusne vrste, ki jih dobiš z robnim pogojem, in upoštevati zvezo s koeficienti iz razvoja v sinusno/kosinusno vrsto, torej  $C_n = a_n$  ali  $b_n$ .)

Če za nobeno od spremenljivk nimamo homogenega robnega pogoja, razbijemo problem na dva dela, npr:  $\Delta u = 0$  razbijemo na  $u = v + w$ ,  $\Delta v = 0$  in  $\Delta w = 0$ , pri čemer  $v$ -ju in  $w$ -ju damo vsakemu en homogen robni pogoj in en pogoj, ki je od  $u$ -ja.

**Polarne koordinate:**  $u_x = \cos(\varphi)u_r - \frac{\sin(\varphi)}{r}u_\varphi$ ,  $u_y = \sin(\varphi)u_r + \frac{\cos(\varphi)}{r}u_\varphi$ ,

$$u_{xx} = \cos^2(\varphi)u_{rr} - \frac{\sin(2\varphi)}{r}u_{r\varphi} + \frac{\sin^2(\varphi)}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{\sin^2(\varphi)}{r}u_r + \frac{\sin(2\varphi)}{r^2}u_\varphi,$$

$$u_{xy} = \frac{1}{2}\sin(2\varphi)u_{rr} + \frac{\cos(2\varphi)}{r}u_{r\varphi} - \frac{\sin(2\varphi)}{2r^2}u_{\varphi\varphi} - \frac{\sin(2\varphi)}{2r}u_r - \frac{\cos(2\varphi)}{r^2}u_\varphi,$$

$$u_{yy} = \sin^2(\varphi)u_{rr} + \frac{\sin(2\varphi)}{r}u_{r\varphi} + \frac{\cos^2(\varphi)}{r^2}u_{\varphi\varphi} + \frac{\cos^2(\varphi)}{r}u_r - \frac{\sin(2\varphi)}{r^2}u_\varphi, \Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\varphi\varphi}$$

## NDE VIŠJIH REDOV

Ne nastopa  $y$ : uvedemo  $z = y'$ .

Obe strani sta odvoda nečesa: integriramo in dodamo konstanto.

$$\text{Odvodi: } y'/y = (\log(y))', xy' + y = (xy)', \frac{y''y - y'^2}{y^2} = \left(\frac{y'}{y}\right)', \frac{y'x - y}{x^2} = \left(\frac{y}{x}\right)'.$$

Ne nastopa  $x$ : uvedemo  $z(y) = y'$ ,  $y$  neodvisna spr.  $y'' = \dot{z}z$ ,  $y''' = \ddot{z}z^2 + \dot{z}^2z$ .

Homogena:  $F(x, ty, ty', \dots, ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ . Vpeljemo  $z(x) = y'/y$ .  $y''/y = z' + z^2$ .

Z utežjo:  $F(kx, k^m y, k^{m-1} y', \dots, k^{m-n} y^{(n)}) = k^p F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ . Uvedemo:  $x = e^t$ ,  $y = u(t)e^{mt}$ .

## INTEGRALI IN FORMULE

$$\int \ln x \, dx = x \ln x - x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin(x)} \, dx = \ln \tan(x/2) + C$$

$$\int x^m \log(x) \, dx = x^{m+1} \left( \frac{\log x}{m+1} - \frac{1}{(m+1)^2} \right) + C$$

$$\int \frac{1}{\cos(x)} \, dx = -\log(\cot(x/2)) + C$$

$$\int p(x)e^{kx} \, dx = q(x)e^{kx} + C, \operatorname{st}(q) = \operatorname{st}(p)$$

$$\int \frac{1}{\tan(x)} \, dx = \log(\sin(x)) + C$$

$$\int e^{ax} \sin(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \sin(bx) - b \cos(bx)) + C$$

$$\int \tan(x) \, dx = -\log(\cos(x)) + C$$

$$\int e^{ax} \cos(bx) \, dx = \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (a \cos(bx) + b \sin(bx)) + C$$

$$\int x/(1+x) \, dx = x - \log(x+1) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \, dx = \operatorname{arsh} \frac{x}{a} + C = \log |x + \sqrt{x^2 + a^2}| + C$$

$$\int x/(1+x) \, dx = x - \log(x+1) + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \arcsin \frac{x}{a} + C$$

$$\int \sin^2(x) \, dx = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) + C$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \cos^2(x) \, dx = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) + C$$

$$\sin^2(x/2) = (1 - \cos(x))/2$$

$$\cos^2(x/2) = (1 + \cos(x))/2$$

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} \, dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \log |2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}| + C, & a > 0 \\ \frac{-1}{\sqrt{-a}} \arcsin((2ax + b)/\sqrt{D}) + C, & a < 0 \end{cases}$$

$$\int \frac{p(x)}{(x-a)^n(x^2+bx+c)^m} \, dx = A \log |x-a| + B \log |x^2+bx+c| + C \arctan\left(\frac{2x+b}{\sqrt{-D}}\right) + \frac{\text{polinom st. ena manj kot spodaj}}{(x-a)^{n-1}(x^2+bx+c)^{m-1}}$$

Substitucija:  $t = \tan x$ ,  $\sin^2 x = t^2/(1+t^2)$ ,  $\cos^2 x = 1/(1+t^2)$ ,  $dx = dt/(1+t^2)$

Substitucija:  $u = \tan(x/2)$ ,  $\sin x = 2u/(1+u^2)$ ,  $\cos x = (1-u^2)/(1+u^2)$ ,  $dx = 2du/(1+u^2)$

## Faktorizacija:

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

## Antifaktorizacija:

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$