Tipi PDE 2. reda: $\mathcal{L}u = au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + \text{I. red} = 0$, $D = b^2 - 4ac$. Če $D < 0$ eliptična (npr. Laplacova), če $D = 0$ parabolična (npr. toplotna) in če $D > 0$ hiperbolična (npr. valovna).

Diferenčne aproksimacije: Dobimo jih z deljenimi diferencami, ali pa z metodo nedoločenih koeficientov (spodaj). Pri aproksimacijah z $\gamma \in (0, 1]$ predpostavljamo, da je desna vrednost $\gamma\delta x$ stran od točke aproksimacije. Za vsako točko v mrežo napišemo enačbo. Lahko uporabimo simetrijo, na robu pa robne pogoje.

$$
\begin{aligned}
f'(x_j) &= \frac{f(x_{j+1}) - f(x_{j-1})}{2\delta x} + O(\delta x^2) \quad f'(x_j) = \frac{f(x_{j+1}) - f(x_j)}{\delta x} + O(\delta x) \\
f'(x_j) &= \frac{f(x_j) - f(x_{j-1})}{\delta x} + O(\delta x) \qquad f''(x_j) = \frac{f(x_{j+1}) - 2f(x_j) + f(x_{j-1})}{\delta x^2} + O(\delta x^2) \\
f''''(x_j) &= \frac{f(x_{j-2}) - 4f(x_{j-1}) + 6f(x_j) - 4f(x_{j+1}) + f(x_{j+2})}{\delta x^4} + O(\delta x^2) \\
f'(x_j) &= \frac{1}{\delta x\gamma(1+\gamma)}(-\gamma^2 f(x_{j-1}) + f(x_{j+\gamma}) - (1-\gamma^2)f(x_j)) + O(\delta x^2) \\
f''(x_j) &= \frac{2}{\delta x^2\gamma(1+\gamma)}(\gamma f(x_{j-1}) + f(x_{j+\gamma}) - (1+\gamma)f(x_j)) + O(\delta x) \\
\triangle u(x_j, y_k) &= \frac{u(x_{j-1}, y_k) - 2u(x_j,y_k) + u(x_{j+1},y_k)}{\delta x^2} + \frac{u(x_j,y_{k-1}) - 2u(x_j,y_k) + u(x_j,y_{k+1})}{\delta y^2} + O(\delta x^2 + \delta y^2) \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x y}(x_j,y_k) &= \frac{u(x_{j-1}, y_{k-1}) - u(x_{j+1}, y_{k-1}) - u(x_{j-1}, y_{k+1}) + u(x_{j+1}, y_{k+1})}{\delta x\delta y} + O(\delta x^2 + \delta y^2) \\
-\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) &= -\frac{1}{\delta x}\left(p(x_{j+\frac{1}{2}}, y_k)\frac{u(x_{j+1}, y_k) - u(x_j, y_k)}{\delta x} - p(x_{j-\frac{1}{2}}, y_k)\frac{u(x_j, y_k) - u(x_{j-1}, y_k)}{\delta x}\right) + O(\delta x^2) \\
\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 y^2}(x_j,y_k) &= \frac{1}{\delta x^2\delta y^2}\left(\sum_{i=-1}^{1}\sum_{\ell=-1}^{1} c_{i\ell}u(x_{j+i},y_{k+\ell})\right) + O(\delta x^2 + \delta y^2), c = [1, -2, 1; -2, 4, -2; 1, -2, 1], c_{00} = 4 \\
&\triangle^2 u(x_j, y_k) \text{ za } \delta y = \delta x := h \text{ matrika: } [0,0,1,0,0;\ 0,2,\text{-}8,2,0;\ 1,\text{-}8,20,\text{-}8,1;\ 0,2,\text{-}8,2,0;\ 0,0,1,0,0] + O(h^2)
\end{aligned}
$$

Lokalna napaka $\tau(x,y) = \mathcal{L}u(x,y) - \mathcal{L}_\delta u(x, y)$.
Kako ocenimo napako? Ali iz interpolacij s deljenimi diferencami, torej $h^n\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}$ ali z uporabo Taylorjevega razvoja $u(x + \delta x, y + \delta y) = \exp\left(\delta x\frac{\partial}{\partial x} + \delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)u(x,y)$ v lokalni napaki in iskanjem prvega neničelnega reda.

Metoda nedoločenih koef: Zapišemo aproksimacijo v obliki $\mathcal{L}f = af(x_0) + bf(x_1) + \cdots + ef(x_4) + Rf$. Predpostavimo, da bo metoda točna za polinome $1, (x - x_1), (x - x_1)(x - x_2)$ dokler se da in zapišemo sistem za a, b, c, d, e. Napako iščemo v naslednjem redu z nastavkom $Rf = kf^{(5)}(\xi)$.

Ekstrapolacija: Recimo, da rešimo dvakrat, enkrat z 2x bolj gosto mrežo. Potem lahko rečemo $u \approx u_1 + ch^2 + O(h^3)$ in $u \approx u_2 + c\frac{h^2}{4} + O(h^3)$. Vidimo, da se napaka reda 2 odšteje, če uporabimo $u \approx \frac{4u_2 - u_1}{3}$.

Laplaceova enačba: Definicija: $\delta^2 = \frac{\delta x^2\delta y^2}{2(\delta x^2 + \delta y^2)}$, $\vartheta_x = \frac{\delta^2}{\delta x^2}$, $\vartheta_y = \frac{\delta^2}{dy^2}$. Velja $2(\vartheta_x + \vartheta_y) = 1$. Pri reševanju Laplaceove enačbe na pravokotniku, je matrika sistema bločno tridiagonalna, z diagonalnimi bloki $I - \text{diag}(\vartheta_x, 1) - \text{diag}(\vartheta_x, -1)$ in obdiagonalnimi bloki $-\vartheta_y I$. Če enačba ni točno taka, potem jo zapišemo v matriko in jo poskušamo izraziti z matriko Laplaceove enačbe. Za slednjo poznamo lastne vrednosti in upamo, da jih bomo tako tudi za našo.

Iteracijske metode Rešujemo sistem $Ax = b$. Razcepimo matriko $A = M - N$ in rešujemo iterativno $Mx^{(n+1)} = Nx^{(n)} + b$. Iteracijska matrika je $T = M^{-1}N$. Če je spektralni radij T manjši od 1, potem metoda konvergira za vsak začetni približek. Hitrost konvergence je sorazmerna z $h = -\log(\rho(T))$. Za n točnih decimalk potrebujemo približno n/h korakov.

Youngov izrek: Za konsistentno urejeno matriko $A = L + D + U$ velja, da je $\det(cD - \alpha L - \alpha^{-1}U)$, neodvisna od α, torej v posebnem za $\alpha = 1$ enaka $\det(cD - L - U)$. Matrika A velikosti $n \times n$ je konsistentno urejena, če obstaja vektor indeksov $\ell = (\ell_i)_{i=1}^n$, $\ell_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, da, če $i < j, a_{ij} \neq 0$

potem $\ell_i - \ell_j = -1$ in če $i > j, a_{ij} \neq 0$ potem $\ell_i - \ell_j = 1$

Jacobi: Razcepimo $A = D - L - U$, $M = D$, $N = -L - U$. $T_J = D^{-1}(L + U)$. Lastne vrednosti T so $\lambda_{pq}(T_J) = 4\vartheta_x \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{p}{J+1}\right) + 4\vartheta_y \sin^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{q}{K+1}\right)$, za $p = 1, \dots, J$, $q = 1, \dots, K$. Najmanjša je λ_{11}, največja pa je manjša od 2. Če je $\delta x = \delta y := h$, potem se izraz za lastne vrednosti poenostavi v $\lambda_{pq} = 1 - \frac{2(1-\cos(\pi/(n+1)))+h^2}{2+h^2} = 1 - \frac{1}{2}(1 + \pi^2)h^2 + O(h^4)$.

Gauss-Seidel: Razcepimo $A = D - L - U$, $M = D - L$, $N = -U$. $T_{GS} = -(D + L)^{-1}U$. Lastne vrednosti T so $\lambda_{pq}(T_{GS}) = \lambda_{pq}(T_J)^2$.

SOR: Uporabimo afino kombinacijo GS in Jac metode. $u_{SOR}^{(k+1)} = (1 - \omega)u_J^{(k)} + \omega u_{GS}^{(k+1)}$. Iteracijska metoda je torej: $(D + \omega L)u^{(k+1)} = D(1 - \omega)u^{(k)} - \omega U u^{(k)} + \omega b$. Iteracijska matrika je $T_\omega = (D + \omega L)^{-1}((1 - \omega)D - \omega U)$, njene lastne vrednosti pa so $\lambda_{pq}(T_\omega) = \frac{1}{4}\left(\lambda(T_J)\omega \pm \sqrt{\lambda(T_J)^2\omega^2 - 4(\omega - 1)}\right)$. Optimalni parameter $\omega^* = \frac{2}{1+\sqrt{1-\rho(T_J)^2}}$, $\rho(T_{\omega^*}) = \omega^* - 1 = 1 - 2\sqrt{1 + \pi^2}h + O(h^2)$ in vse lastne vrednosti so enake. Za red boljša kot GS in Jac.

ADI: Naredimo en korak gor dol in en korak levo desno. Metodo zapišemo v dveh korakih. $((\omega + 2\vartheta_x)I - H)u^{(k+\frac{1}{2})} = ((\omega - 2\vartheta_y)I - V)u^{(k)} + b$, $((\omega + 2\vartheta_y)I - V)u^{(k+1)} = ((\omega - 2\vartheta_x)I - H)u^{(k+\frac{1}{2})} + b$, kjer je H matrika obdiagonalnih elementov (ϑ_x) in V matrika elementov na bločni obdiagonali. Optimalni parameter ω je enak $\omega = \sqrt{\alpha\beta}$, kjer je $\alpha = \min(\xi_1, \mu_1)$, $\beta = \max(\xi_n, \mu_n)$, $\xi_i = 4\vartheta_x \sin^2\left(\frac{1}{2}\frac{i}{n+1}\right)$, $\mu_j = 4\vartheta_y \sin^2\left(\frac{1}{2}\frac{j}{m+1}\right)$.

FEM: SL problem $\mathcal{L}u = -\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(q\frac{\partial u}{\partial y}\right) + ru = f$, $u|_{\partial\Omega} = g$ prevedemo v šibko obliko. Iščemo u, za katero velja $\langle \mathcal{L}u - f, v\rangle = 0$, za vsak v iz H_0^1 (C^2 z homogenimi robnimi pogoji). Zapišemo lahko $\mathcal{L}u = -\operatorname{div}\left(\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{smallmatrix}\right)\operatorname{grad} u\right) + ru$. Upoštevamo, da je $\operatorname{div}(\psi\vec{a}) = \psi \operatorname{div}\vec{a} + \vec{a} \cdot \operatorname{grad}\psi$, in s tem prevedemo $\langle \mathcal{L}u, v\rangle = \int_\Omega(\left(\begin{smallmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{smallmatrix}\right)\operatorname{grad} u \operatorname{grad} v + ruv)d\Omega = \langle f, v\rangle$. Rešitev u iščemo kot afino kombinacijo baznih funkcij $u = \sum \alpha_i\varphi_i + \varphi_0$. Bazne funkcije so običajno hiške ali piramide, φ_0 pa je vsota robnih hišk ali piramid, pomnoženih z robnimi pogoji. Sistem enačb ki ga dobimo je oblike $A\alpha = b$, kjer je $a_{ij} = \int_\Omega(p\frac{\partial\varphi_i}{\partial x}\frac{\partial\varphi_j}{\partial x} + q\frac{\partial\varphi_i}{\partial y}\frac{\partial\varphi_j}{\partial y} + r\varphi_i\varphi_j)d\Omega$, $b_i = \int_\Omega(f\varphi_i - p\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x} - q\frac{\partial\varphi_0}{\partial y}\frac{\partial\varphi_i}{\partial y} - r\varphi_0\varphi_i)d\Omega$. Za 1D problem lahko vstavimo $q = 0$. V tem primeru je matrika tridiagonalna, ker so ostali integrali enaki 0. Pomagamo si s togostno matriko in vektorjem $K_{11}^i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} pH_{i-1}'^2 + rH_{i-1}^2 dx$, $K_{12}^i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} pH_{i-1}'H_i' + rH_{i-1}H_i dx$, $K_{22}^i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} pH_i'^2 + rH_i^2 dx$, $a_{ii} = K_{22}^i + K_{11}^{i+1}$, $a_{i,i-1} = a_{i-1,i} = K_{12}^i$, $f_1^i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} fH_{i-1}dx$, $f_2^i = \int_{x_{i-1}}^{x_i} fH_i dx$, $b_1 = f_2^1 + f_1^2 - C_0K_{12}^1$, $b_i = f_2^i + f_1^{i+1}$, $b_{n-1} = f_2^{n-1} + f_1^n - C_1K_{12}^n$. Če so H hiške in $p = q = 1$ velja $K_{11}^i = K_{22}^i = \frac{1}{\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{3}\Delta x_{i-1}$, $K_{12}^i = K_{21}^i = -\frac{1}{\Delta x_{i-1}} + \frac{1}{6}\Delta x_{i-1}$.

Funkcija, ki je na trikotniku z oglišči (x_i, y_i) v tretjem oglišču 1 in v prvih dveh 0 je dana s predpisom $\varphi(x, y) = \frac{x_2(y-y_1)+x(y_1-y_2)+x_1(y_2-y)}{x_3(y_1-y_2)+x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)}$. Iz teh lahko sestavimo bazne funkcije za 2D FEM.

Parabolične PDE (toplotna): Toplotna enačba $u_t = \varkappa u_{xx}$. Courantovo število $\lambda = \frac{\varkappa\delta t}{\delta x^2}$. Theta metoda: $-\vartheta\lambda u_{j-1}^{n+1} + (1+2\vartheta\lambda)u_j^{n+1} - \vartheta\lambda u_{j+1}^{n+1} = (1-\vartheta)\lambda u_{j-1}^n + (1-2(1-\vartheta)\lambda)u_j^n + (1-\vartheta)\lambda u_{j+1}^n$. Za $\vartheta = 1$ je implicitna, za $\vartheta = 0$ je eksplicitna in za $\vartheta = \frac{1}{2}$ je Crank Nicholsovona. Stabilna je za $\frac{1}{2} \le \vartheta \le 1$ za vsak λ in za $0 \le \vartheta < \frac{1}{2}$, če je $\lambda \le \frac{1}{2(1-2\vartheta)}$. Lokalna napaka je $\tau_j^{n+1} = \delta t(\vartheta - \frac{1}{2})u_t t + O(\delta t^2 + \delta x^2)$. Globalno napako dobimo kot $\mathcal{L}_\delta e = \tau$.

Analiza stabilnosti – Matrična metoda: Diferenčno shemo zapišemo v obliki $u^{n+1} = Au^n + b$. Če je A normalna in obstaja konstanta $C \ge 0$, da velja $\rho(A) \le e^{C\delta t}$, ko gre $\delta x \to 0$, potem je diferenčna shema stabilna. Za matriko oblike $A = \operatorname{diag}(a) + \operatorname{diag}(c, -1) + \operatorname{diag}(b, 1), bc \le 0$ velja $\lambda_k(A) = a + 2\sqrt{bc}\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$.

Analiza stabilnosti – Fourierova metoda: Denimo, da lahko diferenčno metodo zapišemo v obliki: $\sum_k \beta_k(\lambda)u_{j+k}^{n+1} = \sum_k \gamma_k(\lambda)u_{j+k}^n$, $\lambda = \frac{\delta t}{\delta x^2}$. Shemi pridružimo racionalno funkcijo $\sigma(z, \mu) = \frac{\gamma(x,\mu)}{\beta(z,\mu)}$, kjer sta $\beta(z, \mu) = \sum_k \beta_k(\mu)z^k$ in $\gamma(z, \mu) = \sum_k \gamma_k(\mu)z^k$. Diferenčna metoda je za dani λ stabilna natanko tedaj, ko je $|\sigma(e^{i\varphi}, \lambda)| \le 1$ za vsak $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Avtor: Jure Slak