

Obliczenia inżynierskie (OINT)

Zadanie projektowe nr 2: Rozwiązywanie nieliniowych równań algebraicznych

Autor: Mikołaj Smolarek

Prowadzący: Jakub Wagner

Instytucja: Politechnika Warszawska, Wydział Elektroniki i Technik
Informacyjnych

1 czerwca 2024

Spis treści

1	Lista symboli	1
2	Wprowadzenie	2
3.1	Omówienie założeń projektu	2
3.2	Rozwiązanie równości przy pomocy funkcji w Matlabie	2
3.3	Metoda bisekcji	3
3.4	Metoda siecznych	6
3.5	Metoda Newtona	8
3.6	Metoda Mullera	10
4	Porównanie wyników	12
5	Lista użytych źródeł informacji oraz programów	14

1 Lista symboli

Symbole używane w projekcie:

- $f(x)$: Funkcja matematyczna określająca równanie do rozwiązania.
- x : Zmienna skalarna, dla której rozwiązywane jest równanie.
- Δ : Maksymalna dopuszczalna wartość bezwzględnego błędu rozwiązania.
- x_{\min}, x_{\max} : Granice przedziału, w którym poszukiwane jest rozwiązanie.

- x_i : Przybliżenie rozwiązania w i -tej iteracji.
- $f'(x)$: Pochodna funkcji $f(x)$.
- a_i, b_i, c_i : Parametry używane w metodzie Mullera.
- sgn : Funkcja signum, zwracająca znak liczby.
- $x_{\text{mid}} = \frac{x_{\text{min}} + x_{\text{max}}}{2}$: Środek przedziału.

2 Wprowadzenie

W przypadku, gdy nie możemy bezpośrednio obliczyć lub uzyskać wymaganego wyniku, stosujemy aproksymacje – metody umożliwiające jak najdokładniejsze przybliżenie wartości oczekiwanego wyniku. Istnieje wiele rodzajów aproksymacji, które różnią się zarówno pod względem dokładności, jak i złożoności.

Celem naszego projektu jest przeanalizowanie oraz porównanie różnych metod rozwiązywania nieliniowych równań algebraicznych. Skupimy się na metodach takich jak metoda bisekcji, metoda siecznych, metoda Newtona oraz metoda Mullera. Przeprowadzimy szczegółową analizę błędów przybliżeń uzyskanych za pomocą tych metod oraz zbadamy, jak liczba iteracji potrzebnych do osiągnięcia wymaganej dokładności zależy od zadanego błędu. Wszystkie metody zostaną sprawdzone dla tej samej funkcji, dzięki czemu będziemy mogli ocenić efektywność i precyzję każdej z omawianych metod.

3 Metodyka, wyniki doświadczeń i dyskusja wyników eksperymentów numerycznych¹

3.1 Omówienie założeń projektu

Badaną przez nas funkcją w projekcie jest:

$$f(x) \equiv 2 \left[\exp \left(- \left(\frac{x}{3} - 1 \right)^2 \right) \right]^2 + 5\sqrt{x} - 8,$$

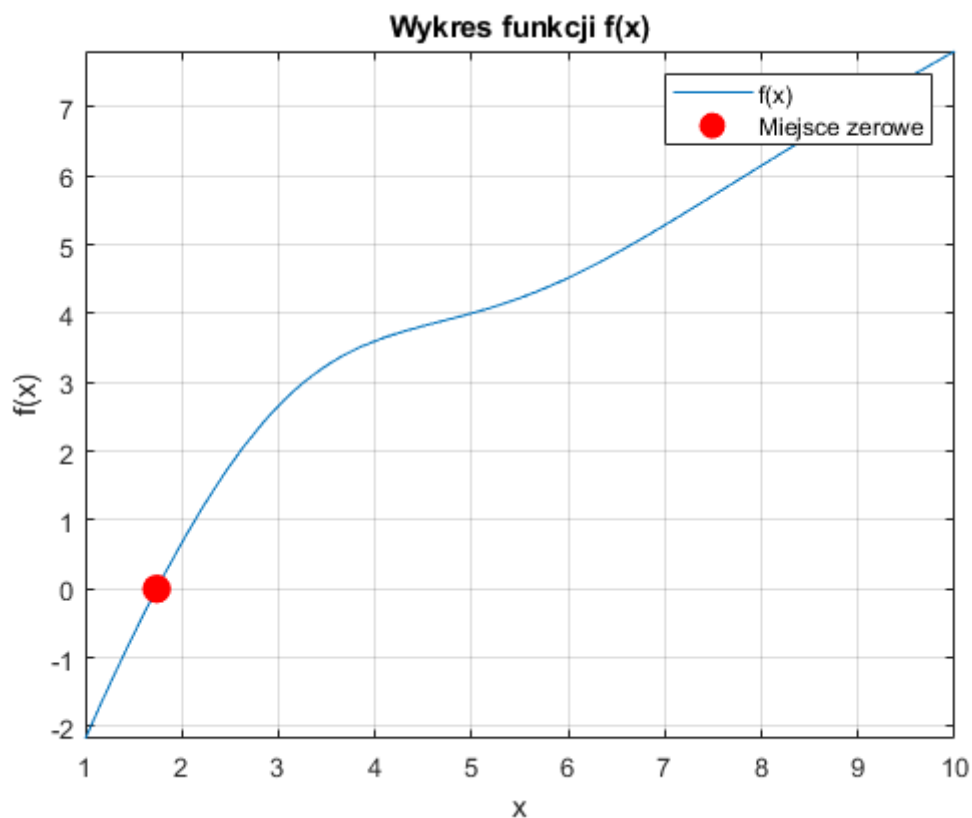
Szukaną przez nas wartością będzie miejsce zerowe funkcji w przedziale:

$$x \in [1, 10]$$

3.2 Rozwiązanie równości przy pomocy funkcji w Matlabie

Do wyznaczenia wartości x dla, której funkcja $f(x)$ przyjmuje wartość 0, została użyta funkcja "fzero", która w Matlabie zwraca miejsce zerowe funkcji. Po uruchomieniu kodu została zwrócona wartość $x = 1.7397$.

¹Ze względu na użycie dużej liczby wykresów oraz zdjęć, dwie sekcje zostały połączone w celu lepszego zobrazowania opisów projektu.



Rysunek 1: Przedstawienie funkcji w podanym przedziale

Na rysunku 1 przedstawiono funkcję w podanym przedziale.

3.3 Metoda bisekcji

Metoda bisekcji jest jedną z najprostszych metod numerycznych do znajdowania pierwiastków nieliniowych równań algebraicznych. Opiera się na założeniu, że jeśli funkcja $f(x)$ zmienia znak w przedziale $[a, b]$, to w tym przedziale znajduje się przynajmniej jeden pierwiastek.

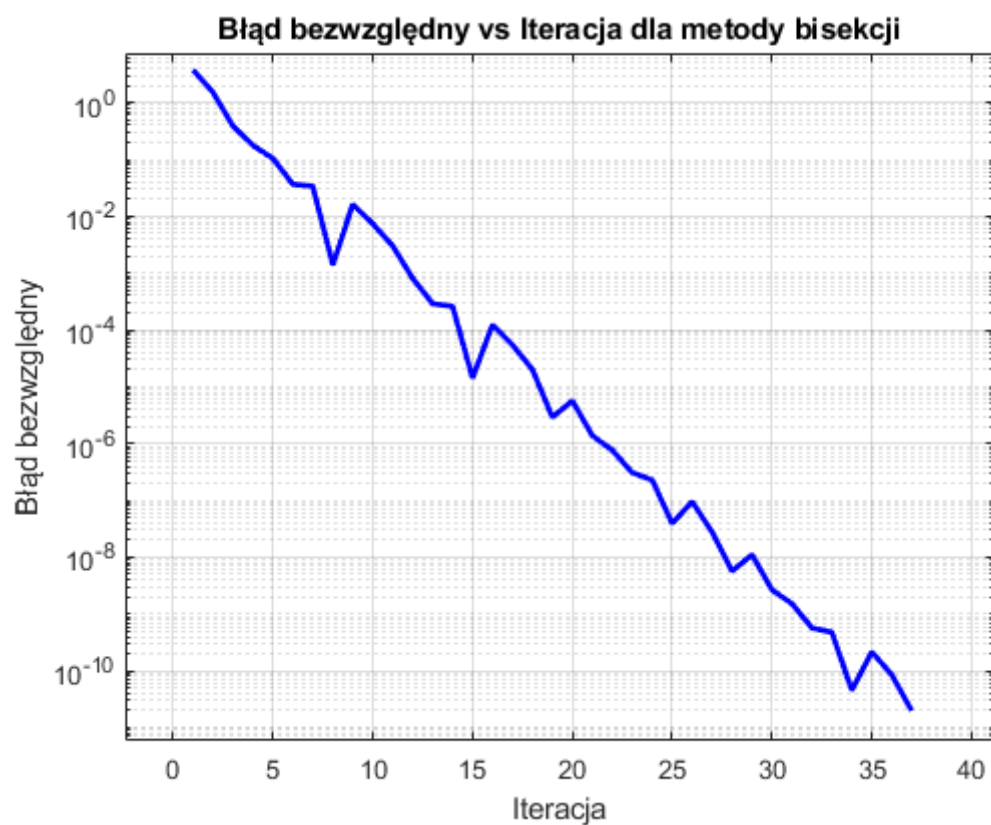
Na początku wybieramy przedział $[a, b]$. W naszym przypadku przedziałem początkowym jest $[1, 10]$. Następnie obliczamy punkt środkowy $c = \frac{a+b}{2}$. Kolejnym krokiem jest sprawdzenie wartości $f(c)$:

- Jeśli $f(c) = 0$, to c jest pierwiastkiem.
- Jeśli $f(a) \cdot f(c) < 0$, to pierwiastek znajduje się w przedziale $[a, c]$.
- Jeśli $f(c) \cdot f(b) < 0$, to pierwiastek znajduje się w przedziale $[c, b]$.

Aby znaleźć szukane miejsce zerowe, należy powtarzać kroki 2 i 3, aż do uzyskania wartości $f(c) = 0$ lub aż szerokość przedziału będzie mniejsza od wartości dopuszczalnego błędu maksymalnego: Δ .

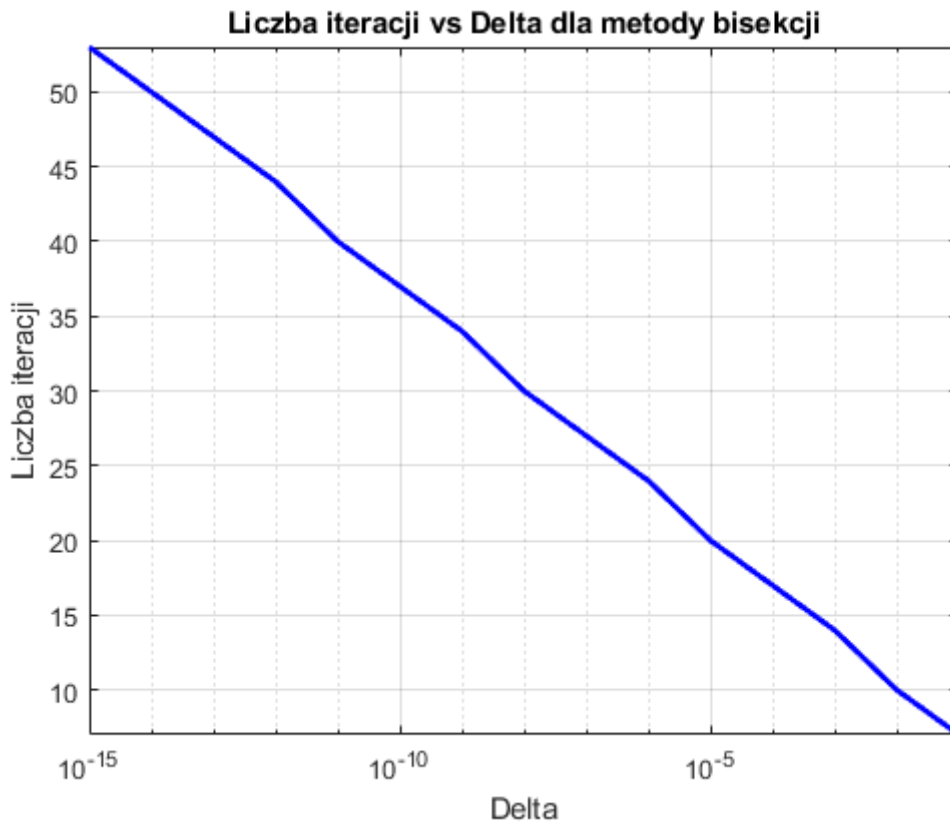
Iteration	x	f(x)
1	5.5000	4.2247
2	3.2500	2.9863
3	2.1250	0.9758
4	1.5625	-0.4864
5	1.8438	0.2752
6	1.7031	-0.0985
7	1.7734	0.0902
8	1.7383	-0.0037
9	1.7559	0.0433
10	1.7471	0.0198
11	1.7427	0.0081
12	1.7405	0.0022
13	1.7394	-7.7505e-04
14	1.7399	6.9851e-04
15	1.7397	-3.8239e-05
16	1.7398	3.3014e-04
17	1.7397	1.4595e-04
18	1.7397	5.3858e-05
19	1.7397	7.8093e-06
20	1.7397	-1.5215e-05
21	1.7397	-3.7028e-06
22	1.7397	2.0533e-06
23	1.7397	-8.2479e-07
24	1.7397	6.1424e-07
25	1.7397	-1.0527e-07
26	1.7397	2.5448e-07
27	1.7397	7.4603e-08
28	1.7397	-1.5336e-08
29	1.7397	2.9634e-08
30	1.7397	7.1489e-09
31	1.7397	-4.0935e-09
32	1.7397	1.5277e-09
33	1.7397	-1.2829e-09
34	1.7397	1.2243e-10
35	1.7397	-5.8022e-10
36	1.7397	-2.2889e-10
37	1.7397	-5.3230e-11

Rysunek 2: Tabela zawierająca poszczególne wyniki dla metody bisekcji



Rysunek 3: Wykres przedstawiający zależność błędu bezwzględnego od numeru iteracji dla metody bisekcji

Na podstawie rysunku 3 można zauważyć, że wartość błędu bezwzględnego maleje w miarę regularnie, jednak na wykresie pojawiają się odchylenia. Odchylenia te mogą być związane z ograniczoną precyzją reprezentacji liczbowej oraz zmianami przedziałów wokół wartości zerowej.



Rysunek 4: Wykres przedstawiający zależność liczby iteracji od wartości delty dla metody bisekcji

Można zauważyć, że liczba iteracji maleje liniowo wraz ze wzrostem wartości delty (4).

3.4 Metoda siecznych

Metoda siecznych jest iteracyjną metodą, która używa dwóch początkowych przybliżeń do znalezienia pierwiastka funkcji. Polega ona na przyjęciu, że funkcja ciągła na dostatecznie małym odcinku w przybliżeniu zmienia się w sposób liniowy. Możemy wtedy na odcinku $\langle a, b \rangle$ krzywą $y = f(x)$ zastąpić sieczną. Za przybliżoną wartość pierwiastka przyjmujemy punkt przecięcia siecznej z osią OX .

Na początku wybieramy dwa początkowe punkty x_0 i x_1 , w naszym przypadku są to wartości graniczne badanego przedziału, czyli 1 oraz 10. Następnie obliczamy kolejny przybliżony pierwiastek za pomocą wzoru:

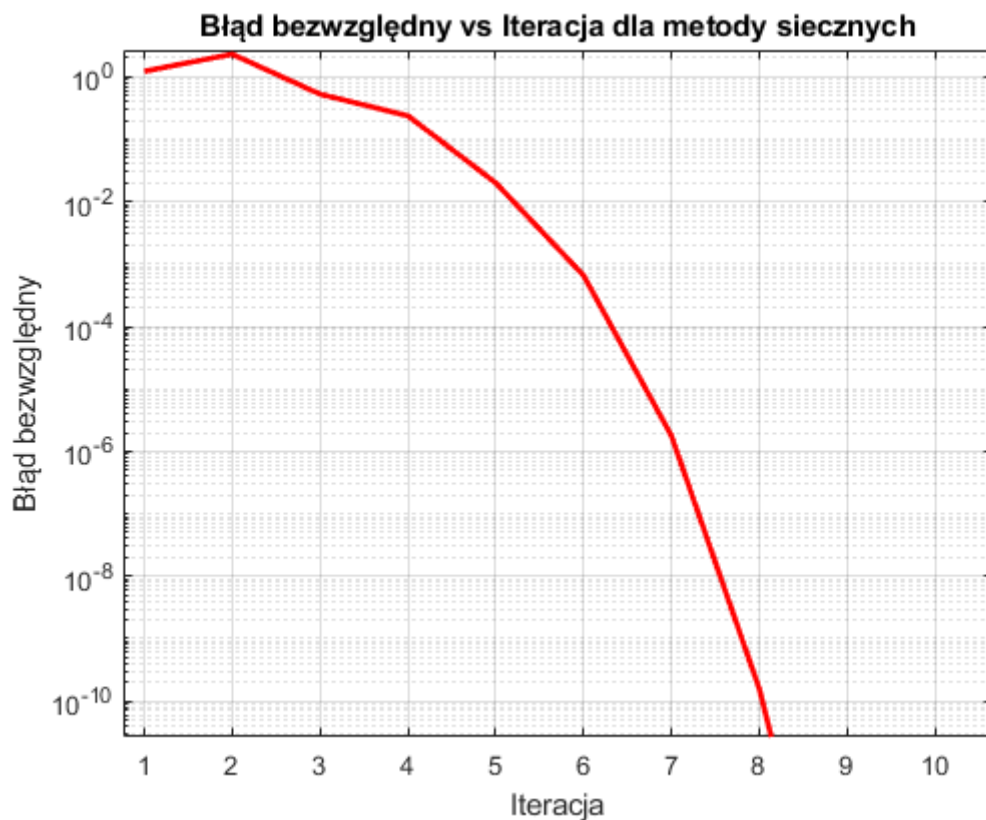
$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Należy powtarzać ten krok, używając x_{n-1} i x_n , aż do uzyskania wymaganej dokładności rozwiązania.

Iteration	x	f(x)	f(x)_modulus	x_modulus
1.0000 ...	2.9621 + 0.0000i	2.6048 + 0.0000i	2.6048 + 0.0000i	1.2224 + 0.0000i
2.0000 ...	-0.5588 + 0.0000i	-7.8801 + 3.7375i	8.7215 + 0.0000i	2.2984 + 0.0000i
3.0000 ...	2.1860 - 0.2766i	1.1544 - 0.6423i	1.3210 + 0.0000i	0.5251 + 0.0000i
4.0000 ...	1.8275 - 0.2200i	0.2512 - 0.5764i	0.6288 + 0.0000i	0.2369 + 0.0000i
5.0000 ...	1.7466 + 0.0187i	0.0187 + 0.0500i	0.0534 + 0.0000i	0.0199 + 0.0000i
6.0000 ...	1.7390 + 0.0000i	-0.0018 + 0.0001i	0.0018 + 0.0000i	6.5637e-04 + 0.0000e+00i
7.0000 ...	1.7397 + 0.0000i	1.8032e-06 + 4.4198e-06i	4.7735e-06 + 0.0000e+00i	1.7795e-06 + 0.0000e+00i
8.0000 ...	1.7397 + 0.0000i	1.7543e-10 + 3.8743e-10i	4.2530e-10 + 0.0000e+00i	1.5854e-10 + 0.0000e+00i
9.0000 ...	1.7397 - 0.0000i	0.0000e+00 - 7.4600e-17i	7.4600e-17 + 0.0000e+00i	4.4496e-16 + 0.0000e+00i

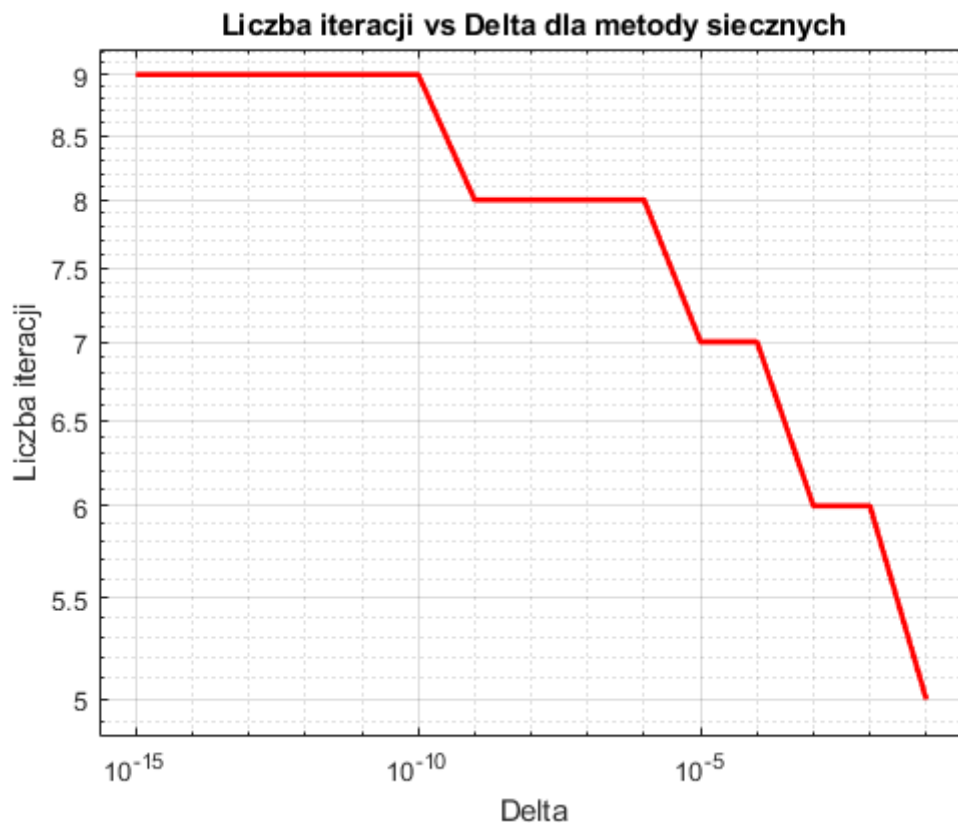
Rysunek 5: Tabela zawierająca poszczególne wyniki dla metody siecznych

Na rysunku 5 można zauważyć, że zarówno wartości x jak i $f(x)$ dla tej metody mogą przyjmować zarówno wartości rzeczywiste, jak i zespolone, dlatego w tabeli zostały również przedstawione moduły tych wartości.



Rysunek 6: Wykres przedstawiający zależność błędu bezwzględnego od numeru iteracji dla metody siecznych

Można zauważyć, że na rysunku 6 błąd bezwzględny maleje w przybliżeniu wykładniczo wraz ze wzrostem liczby iteracji. Szczególnie duży spadek wartości błędów widać dla końcowych iteracji.



Rysunek 7: Wykres przedstawiający zależność liczby iteracji od wartości delty dla metody siecznych

Z wykresu 7 można zauważyć, że dla większych wartości delty liczba iteracji gwałtownie maleje.

3.5 Metoda Newtona

Metoda Newtona, znana również jako metoda Newtona-Raphsona, jest jedną z najczęściej używanych metod do znajdowania pierwiastków nieliniowych równań. Wymaga znajomości pochodnej funkcji.

Na początku wybieramy początkowe przybliżenie x_0 , w naszym przypadku x_0 jest równe $x_{\min} = 1$. Kolejnym krokiem jest iteracyjne obliczenie kolejnych przybliżeń przy pomocy wzoru:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Należy powtarzać ten krok, aż do uzyskania wymaganej dokładności.

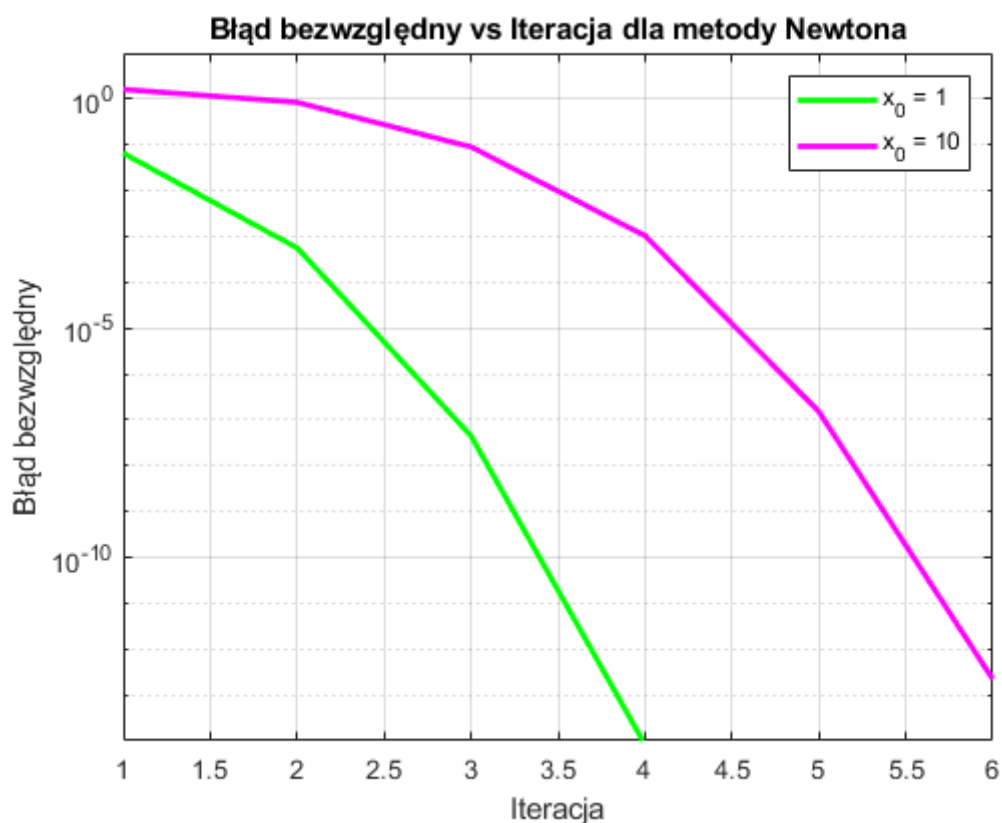
Iteration	x	f(x)
1	1.6741	-0.1776
2	1.7391	-0.0015
3	1.7397	-1.1931e-07
4	1.7397	2.1316e-14

Rysunek 8: Tabela zawierająca poszczególne wyniki dla metody Newtona dla $x_0 = 1$

Iteration	x	f(x)
1	0.1179	-5.9675
2	0.8943	-2.5249
3	1.6498	-0.2441
4	1.7386	-0.0028
5	1.7397	-4.0459e-07
6	1.7397	-5.9064e-13

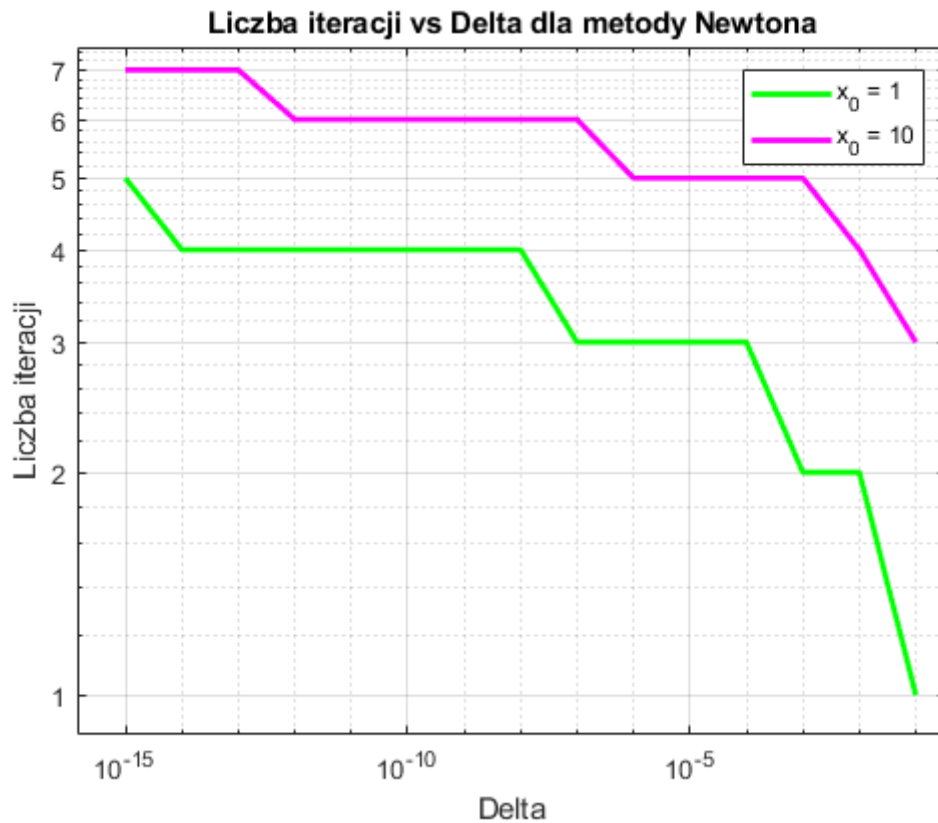
Rysunek 9: Tabela zawierająca poszczególne wyniki dla metody Newtona dla $x_0 = 10$

Z rysunków 8 i 9 można zauważyć, że liczba iteracji funkcji zależy od punktu startowego. Im wartość początkowa znajduje się bliżej wartości zerowej, tym mniejsza jest liczba wymaganych iteracji.



Rysunek 10: Wykres przedstawiający zależność błędu bezwzględnego od numeru iteracji dla metody Newtona

Z rysunku 10 można zauważyć, że wartości błędu bezwzględnego maleją wykładniczo wraz ze wzrostem numeru iteracji. W zależności od punktu startowego wartość błędu bezwzględnego będzie naturalnie różna, jednak sam kształt funkcji wykresu błędu bezwzględnego będzie niemal identyczny.



Rysunek 11: Wykres przedstawiający zależność liczby iteracji od wartości delty dla metody Newtona

Z rysunku 11 można zauważyć, że wartość punktu startowego ma ogromne znaczenie dla liczby iteracji, tzn. im bliżej punkt startowy jest wartości zerowej funkcji, tym mniejsza liczba wymaganych iteracji, która dodatkowo znacząco maleje dla dużych wartości dopuszczalnego błędu bezwzględnego.

3.6 Metoda Mullera

Metoda Mullera jest zaawansowaną metodą, która używa interpolacji kwadratowej do znalezienia pierwiastka. Ideą metody Mullera jest przybliżanie funkcji za pomocą paraboli, która przebiega przez wybrane trzy punkty wykresu funkcji.

Na początku wybieramy trzy początkowe przybliżenia x_0 , x_1 i x_2 . W naszym przypadku będą to kolejno punkty $x_{\min} = 1$, $x_{\text{mid}} = \frac{x_{\min} + x_{\max}}{2}$ oraz $x_{\max} = 10$. Następnie obliczamy wartości funkcji $f(x_0)$, $f(x_1)$ i $f(x_2)$. Kolejnym krokiem jest użycie interpolacji kwadratowej do znalezienia kolejnego przybliżenia:

- Obliczamy współczynniki kwadratowej funkcji interpolacyjnej:

$$\begin{bmatrix} a_i \\ b_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(x_i - x_{i-1})^2 & (x_i - x_{i-1}) \\ -(x_i - x_{i-2})^2 & (x_i - x_{i-2}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f(x_i) - f(x_{i-1}) \\ f(x_i) - f(x_{i-2}) \end{bmatrix}$$

- Obliczamy współczynnik c_i :

$$c_i = f(x_i)$$

- Znajdujemy pierwiastek tej funkcji za pomocą wzoru iteracyjnego metody Mullera:

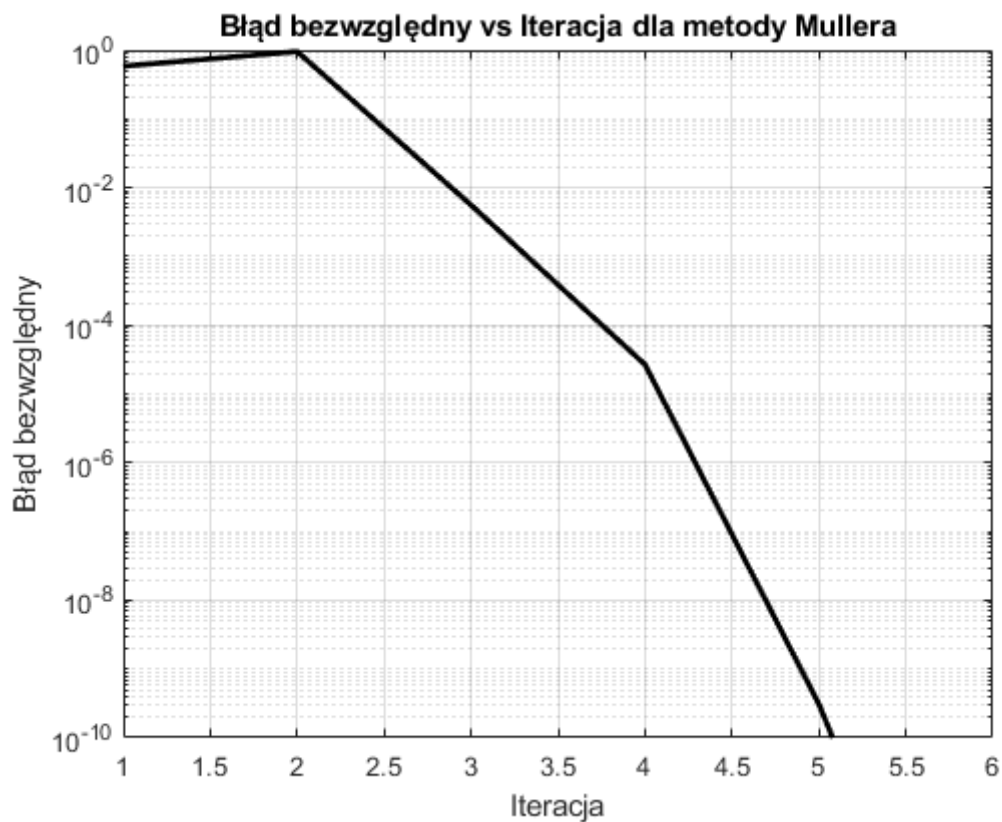
$$x_{i+1} = x_i - \frac{2c_i}{b_i + \operatorname{sgn}(b_i)\sqrt{b_i^2 - 4a_i c_i}}$$

Należy powtarzać te kroki, aktualizując trzy punkty, aż do uzyskania wymaganej dokładności.

Iteration	x	f(x)
1	2.3251	1.4315
2	0.7867	-2.8917
3	1.7341	-0.0150
4	1.7397	7.1760e-05
5	1.7397	-8.2413e-10
6	1.7397	0

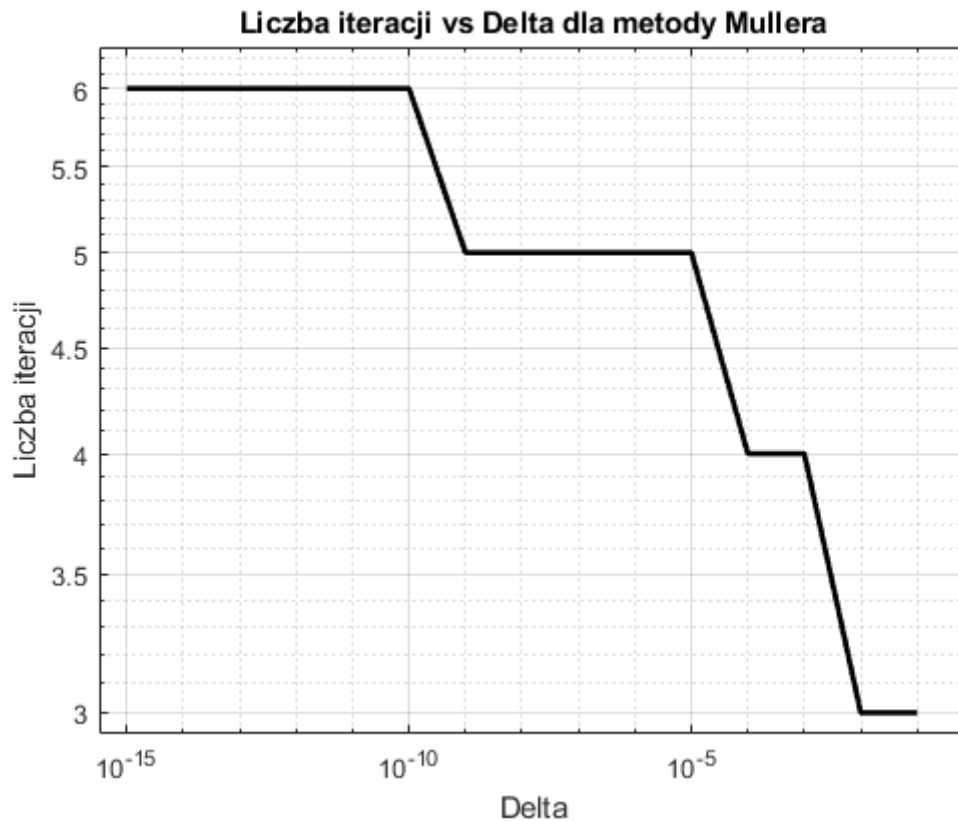
Rysunek 12: Tabela zawierająca poszczególne wyniki dla metody Mullera

Dla wyników ukazanych na rysunku 12 można wywnioskować, że metoda Mullera jest bardzo dokładna i już dla szóstej iteracji (w naszym przypadku) przyjmuje dokładną wartość miejsca zerowego. Należy jednak pamiętać o ograniczonej reprezentacji liczby zmiennoprzecinkowej.



Rysunek 13: Wykres przedstawiający zależność błędu bezwzględnego od numeru iteracji dla metody Mullera

Z rysunku 13 widać, że wartość błędu maleje liniowo (w skali logarytmicznej) dla poszczególnych fragmentów wykresu, jednak od pewnego momentu nachylenie wykresu jeszcze bardziej się zwiększa i również zachowuje się liniowo. Można również zauważyć, że wartość błędu dla dwóch pierwszych iteracji zwiększa się o niewielką wartość, a później gwałtownie maleje.

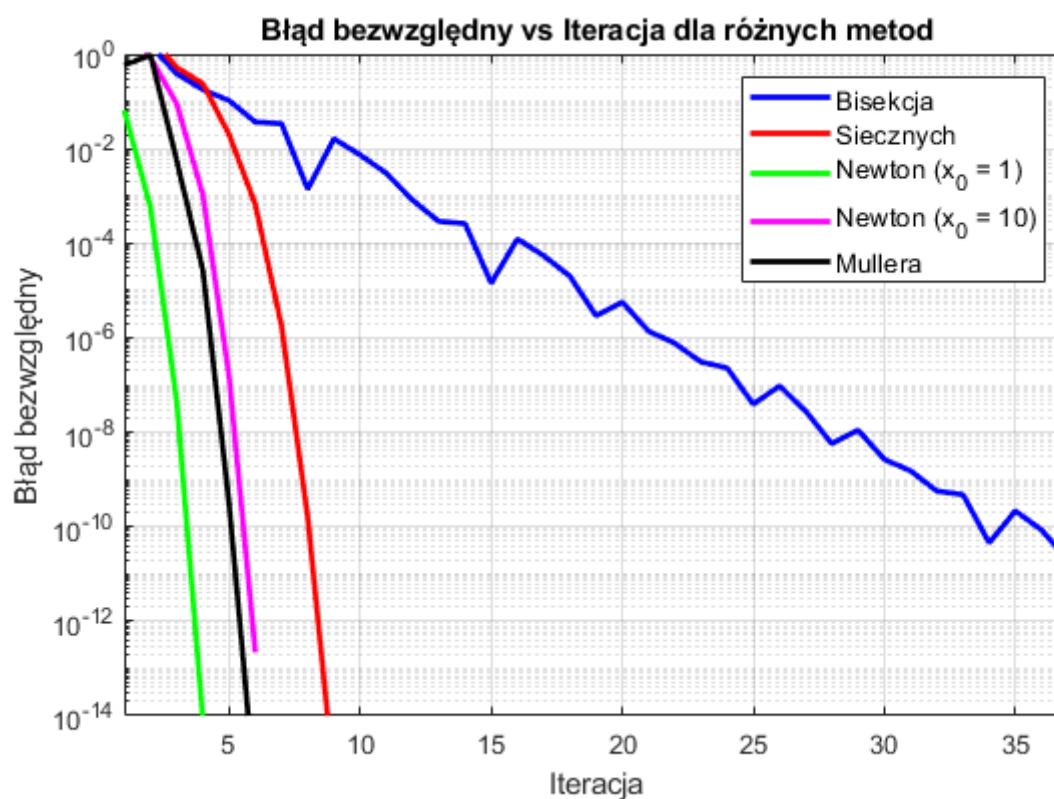


Rysunek 14: Wykres przedstawiający zależność liczby iteracji od wartości delty dla metody Mullera

Obserwując wykres 14, można zauważyć, że liczba iteracji spada wraz ze wzrostem wartości delty. Zwłaszcza dla dużych wartości delty można zauważyć znaczący spadek liczby iteracji.

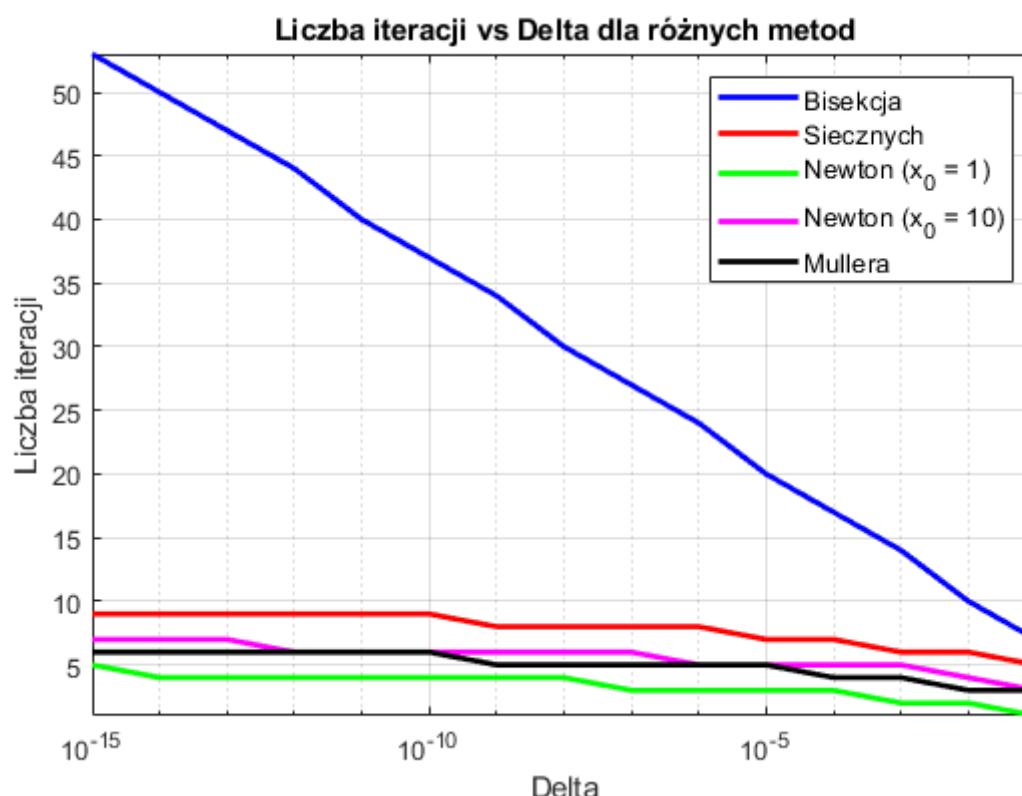
4 Porównanie wyników

Każda z tych metod ma swoje zalety i wady. Metoda bisekcji jest prosta i zawsze konverguje, ale może być powolna. Metoda siecznych konverguje szybciej, ale może być mniej stabilna. Dla metody Newtona wyznaczenia kolejnego przybliżenia pierwiastka x_i potrzebujemy tylko jednego punktu, który został wyznaczony w poprzednim obiegu - w metodzie siecznych potrzebne były dwa punkty, ale dla metody Newtona wymagana jest znajomość pochodnej funkcji. Metoda Mullera różni się głównie tym, iż funkcja jest aproksymowana nie prostą, lecz parabolą, choć bardziej złożona, może oferować jeszcze szybszą konwergencję przy odpowiednich warunkach początkowych, jednak przy odpowiednich warunkach początkowych metoda Newtona może być bardziej wydajna.



Rysunek 15: Wykres przedstawiający porównanie błęd bezwzględnego od numeru iteracji dla różnych metod

Z przedstawionego wykresu 15 widać, że wartość błęd bezwzględnego w stosunku do wzrostu liczby iteracji najszybciej maleje dla metod Newtona oraz Mullera, następnie jest metoda siecznych. Najgorszą metodą z podanych jest metoda bisekcji. Widać jednak, że skuteczność metod może być różna w zależności od wielu czynników, takich jak złożoność oraz rodzaj funkcji $f(x)$ oraz parametrów początkowych, które mogą drastycznie wpłynąć na wynik.



Rysunek 16: Wykres przedstawiający porównanie liczby iteracji od wartości delty dla różnych metod

Z wykresu 16 widać, że najskuteczniejszą metodą dla naszego przypadku pod względem stosunku liczby iteracji do wartości dozwolonego błędu bezwzględnego, jest metoda Newtona wraz z metodą Mullera, następna jest metoda siecznych, a najgorszą w tym przypadku jest metoda bisekcji. Pierwsze 3 metody mają niewielkie różnice w liczbie iteracji, ale metoda bisekcji dla małej wartości delty może mieć nawet 10-krotnie więcej iteracji. Należy zwrócić jednak uwagę na to, że metody zostały użyte dla konkretnego przypadku i konkretnych parametrów początkowych, co wpływa na ich efektywność. Przykładowo: metoda Newtona dla punktu początkowego $x_0 = 1$ jest lepsza od metody Mullera, ale dla punktu początkowego $x_0 = 10$ jest przeważnie od niej gorsza.

Podsumowując porównanie, wybór najbardziej optymalnej metody może się różnić w zależności od danego przypadku. Każda funkcja ma swoje wady i zalety, czasami może nam zależeć na szybkości obliczeń, w innym przypadku od złożoności obliczeń, a jeszcze w najlepszą.

5 Lista użytych źródeł informacji oraz programów

- Overleaf
- ChatGPT
- MATLAB 2024a

- Microsoft Teams
- Wikipedia
- eduinf.waw.pl
- Materiały do zajęć zintegrowanych prowadzonych w semestrze letnim 2023/2024 z przedmiotu Obliczenia inżynierskie - Roman Z. Morawski