ESCUELA DE INGENIERÍA
FACULTAD DE INGENIERÍA

ICM2813 Control de Sistemas Mecánicos
Departamento de Ingeniería Mecánica y Metalúrgica
Profesor: David Acuña Ureta
Fecha: 16 de Junio, 2025

Laboratorio 2

"Péndulo invertido rotatorio"

Instrucciones

- Ante cualquier duda consulte con el profesor o el ayudante del curso.
- Este taller es grupal.
- El objetivo de este laboratorio es poner en práctica los conceptos de control clásico para equilibrar un péndulo invertido rotatorio.
- El desarrollo de las actividades deberá ser registrado en Canvas.

1. Introducción

Uno de los sistemas clásicos para la enseñanza en sistemas de control, es el control de péndulo invertido. En este laboratorio se considera un péndulo invertido rotatorio, tal como se ilustra en la Figura 1. En ella puede observarse un brazo que rota horizontalmente (plano $z-x$) en torno al eje vertical y por la acción de un torque τ producido por un motor, siendo este movimiento rotacional caracterizado por la dinámica del ángulo ϕ. Por otro lado, se tiene un péndulo que puede rotar libremente en torno a un extremo el brazo, describiendo un ángulo rotación θ respecto de la vertical.

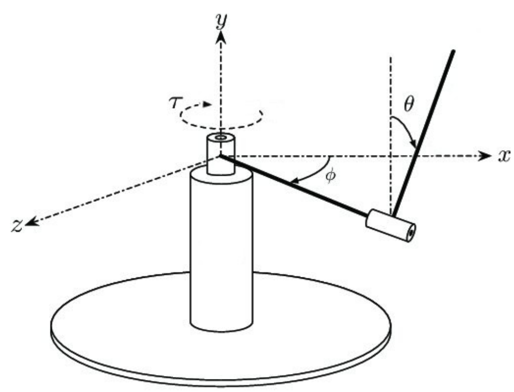

Figura 1: Péndulo invertido rotatorio.

El objetivo de esta experiencia de laboratorio es controlar el péndulo manipulando τ, de modo que se mantenga un equilibrio haciendo que $\theta = 0$.

La dinámica del sistema está dada por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$J_p\ddot{\theta} - m_p r\ell\ddot{\phi}\cos(\theta) - J_p\dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta) - m_p g\ell\sin(\theta) = 0 \tag{1}$$

$$\big(J_a + J_p\sin^2(\theta)\big)\ddot{\phi} - m_p r\ell\ddot{\theta}\cos(\theta) + 2J_p\dot{\phi}\dot{\theta}\sin(\theta)\cos(\theta) + m_p r\ell\dot{\theta}^2\sin(\theta) = \tau. \tag{2}$$

Si definimos

$$v = \frac{\left(m_p\ell r J_p\dot{\phi}^2\cos(\theta) + m_p^2\ell^2 rg - 2J_p^2\dot{\theta}\dot{\phi}\right)\sin(\theta)\cos(\theta) - m_p\ell r J_p\dot{\theta}^2\sin(\theta) + J_p\tau}{J_aJ_p + J_p^2\sin^2(\theta) - m_p^2\ell^2r^2\cos^2(\theta)}, \tag{3}$$

Entonces las ecuaciones del péndulo invertido rotatorio pueden reescribirse despejando $\ddot{\theta}$ y $\ddot{\phi}$:

$$\ddot{\theta} = \dot{\phi}^2\sin(\theta)\cos(\theta) + \frac{m_p\ell g}{J_p}\sin(\theta) + \frac{m_p\ell r}{J_p}v\cos(\theta) \tag{4}$$

$$\ddot{\phi} = v. \tag{5}$$

Los parámetros del sistema se muestran en una tabla a continuación:

Parámetro	Descripción	Valor
m_a	Masa del brazo rotatorio	0.095 Kg
r	Largo del brazo rotatorio	0.085 m
J_a	Momento de inercia del brazo rotatorio en torno a un extremo	2.288e-4 Kg $\cdot$ m^2
m_p	Masa del péndulo	0.024 Kg
ℓ	Mitad del largo del péndulo (distancia en un extremo y centro de masa)	0.129 m
J_p	Momento de inercia del péndulo en torno a un extremo	1.331e-4 Kg $\cdot$ m^2

2. Actividades

2.1. Parte A: Torque como variable manipulada

De acuerdo a la Fig. 1, a lo largo de este apartado se asumirá que el péndulo invertido rotatorio es controlado mediante la manipulación del torque τ.

1. Explique con sus palabras cómo funciona la función `odeint`, que se encuentra disponible en la librería SciPy de Python.

2. Escriba un script en Python para simular la dinámica de tiempo-continuo resolviendo las ecuaciones diferenciales del péndulo invertido rotatorio numéricamente mediante la función `odeint`. Realice al menos tres simulaciones en lazo abierto bajo distintas condiciones que le permitan verificar la correctitud de su implementación. Grafique y analice sus resultados asumiendo que puede sensar las variables relevantes del sistema a una tasa de muestreo $T_s = 0{,}002$ segundos.

3. Suponiendo que $\theta \approx 0$, $\dot{\theta} \approx 0$, $\phi \approx 0$, y $\dot{\phi} \approx 0$, la Ec. (4) puede aproximarse como

$$\left(J_p - \frac{m_p^2 r^2\ell^2}{J_a}\right)\ddot{\theta} - m_p g l\theta = \frac{m_p r\ell}{J_a}\tau. \tag{6}$$

   Realice un diagrama de Bode para esta aproximación. ¿Cuáles son los márgenes de ganancia y de fase? ¿Qué se puede decir sobre la estabilidad del sistema? Justifique sus respuestas.

4. Utilice esta aproximación lineal para diseñar un controlador para mantener equilibrado el péndulo invertido rotatorio asumiendo como condición inicial que $\theta \approx 0$, $\dot{\theta} \approx 0$, $\phi \approx 0$, y $\dot{\phi} \approx 0$. Justifique su diseño argumentando con conceptos vistos en los capítulos de *"Lugar Geométrico de las Raíces (LGR)"* y *"Análisis en Frecuencia."* Implemente una versión discretizada (para tiempo-discreto) del controlador con un tiempo de muestreo $T_s = 0{,}002$ segundos, aplicándolo sobre el péndulo invertido rotatorio simulado en tiempo-continuo con la función `odeint`.

2.2. Parte B: Voltaje sobre motor DC como variable manipulada

El lazo de control anterior asume que la variable manipulada del sistema es el torque τ, y que puede variarse instantáneamente por el controlador según se necesite. Sin embargo, esto en la práctica no es cierto. En realidad el torque es ejercido por un motor DC, y la variable manipulada es el voltaje que se aplica al motor.

Notar que suponiendo que $\theta \approx 0$, $\dot{\theta} \approx 0$, $\phi \approx 0$, y $\dot{\phi} \approx 0$, la Ec. (5) puede aproximarse como

$$\ddot{\phi} = \frac{J_p}{J_a J_p - m_p^2 r^2 \ell^2} \tau, \tag{7}$$

y así, la función de transferencia que relaciona torque con voltaje de un motor DC quedada dada por:

$$\frac{\mathcal{T}(s)}{V_m(s)} = \frac{k_t}{s R_m + k_t k_m \left(\frac{J_p}{J_a J_p - m_p^2 r^2 \ell^2} \right)}, \tag{8}$$

donde $R_m = 7{,}5\Omega$, $k_t = 0{,}0422 Nm/A$, y $k_m = 0{,}0422 V/(rad/s)$.

1. Encuentre la función de transferencia $\frac{\Theta(s)}{V_m(s)}$ y utilísela para diseñar un controlador que mantenga equilibrado el péndulo invertido rotatorio asumiendo como condición inicial que $\theta \approx 0$, $\dot{\theta} \approx 0$, $\phi \approx 0$, y $\dot{\phi} \approx 0$. Justifique su diseño argumentando con conceptos vistos en los capítulos de *"Lugar Geométrico de las Raíces (LGR)"* y *"Análisis en Frecuencia."* Implemente una versión discretizada (para tiempo-discreto) del controlador con un tiempo de muestreo $T_s = 0{,}002$ segundos, aplicándolo sobre el péndulo invertido rotatorio simulado en tiempo-continuo con la función `odeint`.

2. Habiendo controlado satisfactoriamente el péndulo invertido rotatorio en simulación de acuerdo al inciso anterior, pruebe su controlador con un péndulo real en laboratorio bajo distintas condiciones iniciales. Registre sus resultados, grafíquelos y analícelos. Compare el desempeño de su controlador con estudios previos reportados en literatura científica. A partir de esta comparación, discuta los aciertos y limitaciones de su estrategia de control, así como las posibles causas de las diferencias encontradas.