… previamente en IIC2133

Complejidad de algoritmos de ordenación

Resumimos los resultados de complejidad por caso hasta el momento

Algoritmo	Mejor caso	Caso promedio	Peor caso	Memoria adicional
Selection Sort	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Insertion Sort	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Merge Sort	$\mathcal{O}(n \log(n))$	$\mathcal{O}(n \log(n))$	$\mathcal{O}(n \log(n))$	$\mathcal{O}(n)$
Quick Sort	?	?	?	?
Heap Sort	?	?	?	?

Notemos la mejora en tiempo con `MergeSort`
a cambio de memoria adicional


divide and conquer...

Particiones

Si suponemos que no hay elementos iguales al pivote, elegir un pivote p **particiona** la secuencia en

- Elementos mayores al pivote, $M = \{a_i \mid a_i > p\}$
- Elementos menores al pivote, $m = \{a_i \mid a_i < p\}$

Luego, si reubicamos los elementos de la secuencia de forma que

- Primero se colocan los elementos de m
- Luego se coloca p
- Finalmente se colocan los elementos de M

es claro que p está en su posición ordenada

Ordenar con `Partition`

Nuevamente podemos usar la estrategia dividir para conquistar

1. División del problema en dos sub-problemas con `Partition`
2. Aplicar recursivamente `Partition` para cada sub-secuencia
3. No necesitamos combinar nada: la secuencia queda ordenada

Llamaremos **Quicksort** a este algoritmo

Quicksort

input : Secuencia $A[0, \ldots, n-1]$, índices i, f
output: $\varnothing$

```
QuickSort (A, i, f):
    if i ≤ f :
        p ← Partition(A, i, f)
        Quicksort(A, i, p − 1)
        Quicksort(A, p + 1, f)
```

El llamado inicial es $\texttt{Quicksort}(A, 0, n-1)$

Versión *in place* de `Partition`

input : Arreglo $A[0, \dots, n-1]$, índices i, f
output: Índice del pivote aleatorio en la secuencia ordenada

```
Partition (A, i, f):
    x ← índice aleatorio en {i, ..., f}
    p ← A[x]
    A[x] ⇄ A[f]
    j ← i
    for k = i ... f − 1 :
        if A[k] < p :
            A[j] ⇄ A[k]
            j ← j + 1
    A[j] ⇄ A[f]
    return j
```

Con este cambio, `Quicksort` usa memoria adicional $\mathcal{O}(1)$

Quick Sort

- Atributos generales
  - O(¿?)
  - O(1) en memoria
  - Inventado por Sir Tony Hoare - 1959
  - Aplica Dividir para Conquistar
  - ¿Estable?
  - ¿Envenenable?

¿Cuándo usar Quick Sort?

QuickSort y sus propiedades

Clase 05

IIC 2133 - Sección 2

Prof. Mario Droguett

Sumario

Versión *in place* de `Partition`

input : Arreglo $A[0, \ldots, n-1]$, índices i, f
output: Índice del pivote aleatorio en la secuencia ordenada

`Partition` (A, i, f)**:**

$\quad x \leftarrow$ índice aleatorio en $\{i, \ldots, f\}$
$\quad p \leftarrow A[x]$
$\quad A[x] \rightleftarrows A[f]$
$\quad j \leftarrow i$
$\quad$ **for** $k = i \ldots f - 1$ **:**
$\quad\quad$ **if** $A[k] < p$ **:**
$\quad\quad\quad A[j] \rightleftarrows A[k]$
$\quad\quad\quad j \leftarrow j + 1$
$\quad A[j] \rightleftarrows A[f]$
$\quad$ **return** j

```
Partition (A, i, f):
    x ← índice aleatorio en {i, ..., f};    p ← A[x]
    A[x] ⇄ A[f]
    j ← i
    for k = i ... f − 1 :
        if A[k] < p :
            A[j] ⇄ A[k]
            j ← j + 1
    A[j] ⇄ A[f]
    return j
```

								p ↓		
7	3	5	2	1	9	7	8	6	4	3

										p ↓
7	3	5	2	1	9	7	8	3	4	6

```
Partition (A, i, f):
    x ← índice aleatorio en {i, ..., f};   p ← A[x]
    A[x] ⇄ A[f]
    j ← i
    for k = i ... f − 1 :
        if A[k] < p :
            A[j] ⇄ A[k]
            j ← j + 1
    A[j] ⇄ A[f]
    return j
```

j, k										p
↓										↓
7	3	5	2	1	9	7	8	3	4	6

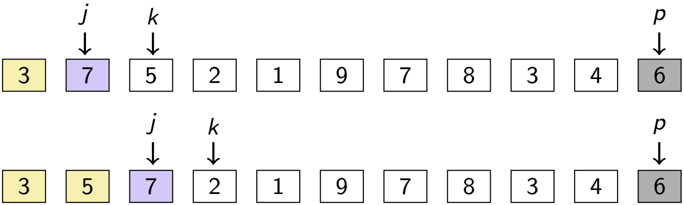
j	k									p
↓	↓									↓
7	3	5	2	1	9	7	8	3	4	6

```
Partition (A, i, f):
    x ← índice aleatorio en {i, . . . , f};    p ← A[x]
    A[x] ⇄ A[f]
    j ← i
    for k = i . . . f − 1 :
        if A[k] < p :
            A[j] ⇄ A[k]
            j ← j + 1
    A[j] ⇄ A[f]
    return j
```

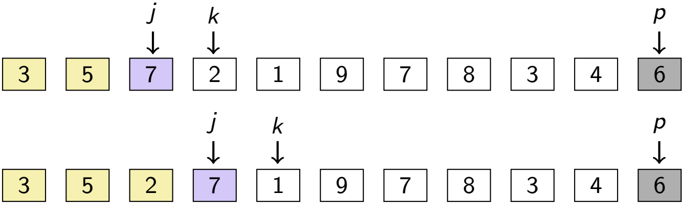
j ↓	k ↓									p ↓
7	3	5	2	1	9	7	8	3	4	6

	j ↓	k ↓								p ↓
3	7	5	2	1	9	7	8	3	4	6

```
Partition (A, i, f):
    x ← índice aleatorio en {i, ..., f};    p ← A[x]
    A[x] ⇄ A[f]
    j ← i
    for k = i ... f − 1 :
        if A[k] < p :
            A[j] ⇄ A[k]
            j ← j + 1
    A[j] ⇄ A[f]
    return j
```



```
Partition (A, i, f):
    x ← índice aleatorio en {i, ..., f};   p ← A[x]
    A[x] ⇄ A[f]
    j ← i
    for k = i ... f − 1 :
        if A[k] < p :
            A[j] ⇄ A[k]
            j ← j + 1
    A[j] ⇄ A[f]
    return j
```



`Partition` (A, i, f):

$x \leftarrow$ índice aleatorio en $\{i, \ldots, f\}$; $\quad p \leftarrow A[x]$

$A[x] \rightleftarrows A[f]$

$j \leftarrow i$

for $k = i \ldots f - 1$ **:**

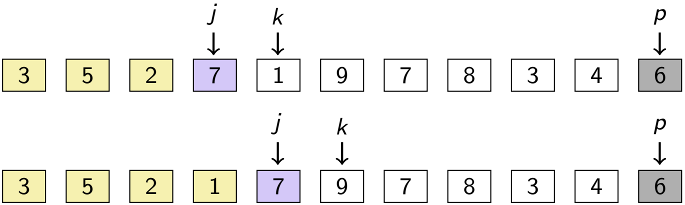
    if $A[k] < p$ **:**

        $A[j] \rightleftarrows A[k]$

        $j \leftarrow j + 1$

$A[j] \rightleftarrows A[f]$

return j



`Partition` (A, i, f):

$x \leftarrow$ índice aleatorio en $\{i, \ldots, f\}$; $\quad p \leftarrow A[x]$

$A[x] \rightleftarrows A[f]$

$j \leftarrow i$

for $k = i \ldots f - 1$ **:**

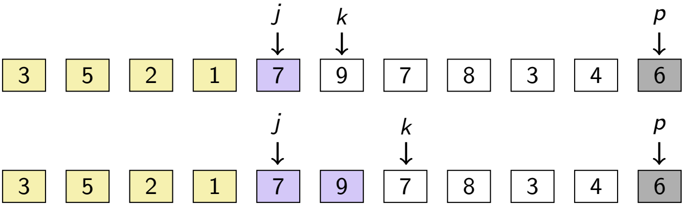
 if $A[k] < p$ **:**

  $A[j] \rightleftarrows A[k]$

  $j \leftarrow j + 1$

$A[j] \rightleftarrows A[f]$

return j



`Partition` (A, i, f):

$x \leftarrow$ índice aleatorio en $\{i, \ldots, f\}$; $\quad p \leftarrow A[x]$

$A[x] \rightleftarrows A[f]$

$j \leftarrow i$

for $k = i \ldots f - 1$ **:**

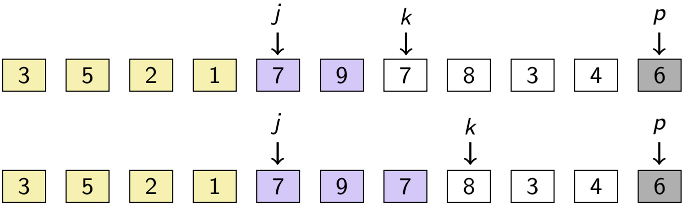
  if $A[k] < p$ **:**

    $A[j] \rightleftarrows A[k]$

    $j \leftarrow j + 1$

$A[j] \rightleftarrows A[f]$

return j



`Partition` (A, i, f):

$\quad x \leftarrow$ índice aleatorio en $\{i, \ldots, f\}$; $\quad p \leftarrow A[x]$

$\quad A[x] \rightleftarrows A[f]$

$\quad j \leftarrow i$

$\quad$ **for** $k = i \ldots f - 1$ **:**

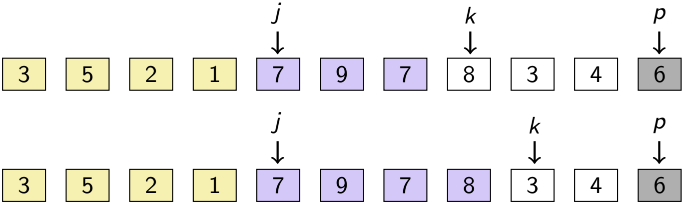
$\qquad$ **if** $A[k] < p$ **:**

$\qquad\quad A[j] \rightleftarrows A[k]$

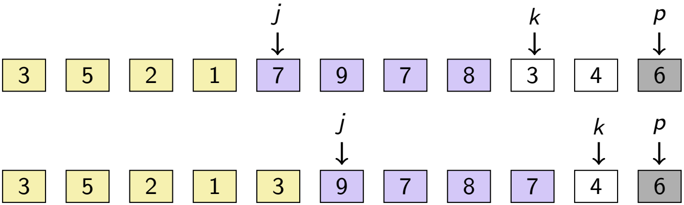
$\qquad\quad j \leftarrow j + 1$

$\quad A[j] \rightleftarrows A[f]$

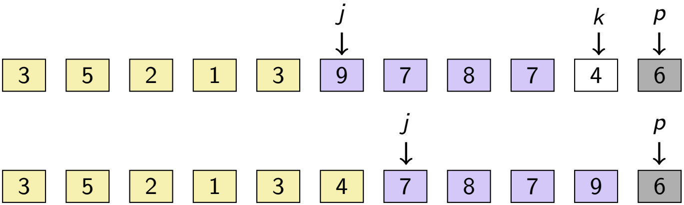
$\quad$ **return** j



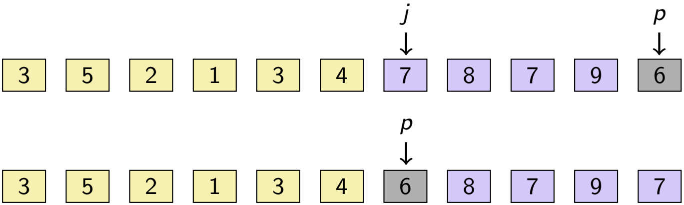
```
Partition (A, i, f):
    x ← índice aleatorio en {i, ..., f};   p ← A[x]
    A[x] ⇄ A[f]
    j ← i
    for k = i ... f − 1 :
        if A[k] < p :
            A[j] ⇄ A[k]
            j ← j + 1
    A[j] ⇄ A[f]
    return j
```



```
Partition (A, i, f):
    x ← índice aleatorio en {i, ..., f};    p ← A[x]
    A[x] ⇄ A[f]
    j ← i
    for k = i ... f − 1 :
        if A[k] < p :
            A[j] ⇄ A[k]
            j ← j + 1
    A[j] ⇄ A[f]
    return j
```



```
Partition (A, i, f):
    x ← índice aleatorio en {i, ..., f};    p ← A[x]
    A[x] ⇄ A[f]
    j ← i
    for k = i ... f − 1 :
        if A[k] < p :
            A[j] ⇄ A[k]
            j ← j + 1
    A[j] ⇄ A[f]
    return j
```



Ordenar con `Partition`

Podemos usar la estrategia dividir para conquistar

1. División del problema en dos sub-problemas con `Partition`
2. Aplicar recursivamente `Partition` para cada sub-secuencia
3. No necesitamos combinar nada: la secuencia queda ordenada

Llamaremos **Quicksort** a este algoritmo

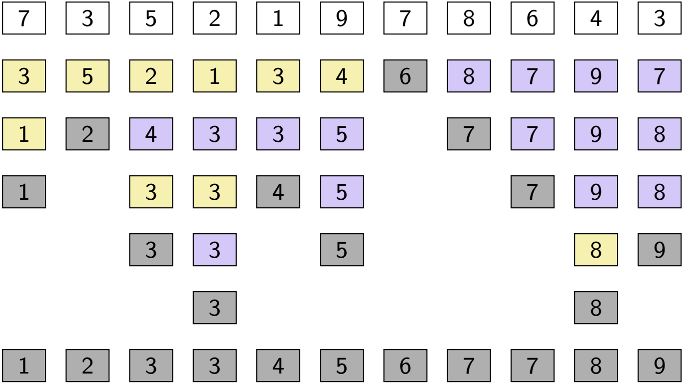
Quicksort

input : Secuencia $A[0, \ldots, n-1]$, índices i, f
output: $\varnothing$

```
QuickSort (A, i, f):
    if i ≤ f :
        p ← Partition(A, i, f)
        Quicksort(A, i, p − 1)
        Quicksort(A, p + 1, f)
```

El llamado inicial es `Quicksort`$(A, 0, n-1)$

Quicksort: Ejemplo de ejecución



Objetivos de la clase

- ☐ Demostrar correctitud de `Partition`
- ☐ Demostrar correctitud de `Quicksort`
- ☐ Determinar la complejidad de tiempo de `Quicksort`
- ☐ Comprender posibles mejoras para `Quicksort`

Sumario

Correctitud de Partition

Ejercicio

Demuestre que Partition es correcto

input : Arreglo $A[0, \ldots, n-1]$, índices i, f
output: Índice del pivote aleatorio en la secuencia ordenada

Partition (A, i, f)**:**

$\quad x \leftarrow$ índice aleatorio en $\{i, \ldots, f\}$
$\quad p \leftarrow A[x]$
$\quad A[x] \rightleftarrows A[f]$
$\quad j \leftarrow i$
$\quad$ **for** $k = i \ldots f-1$ **:**
$\qquad$ **if** $A[k] < p$ **:**
$\qquad\quad A[j] \rightleftarrows A[k]$
$\qquad\quad j \leftarrow j + 1$
$\quad A[j] \rightleftarrows A[f]$
$\quad$ **return** j

Correctitud de `Partition`

Correctitud de `Partition`

Demostración (finitud)

Correctitud de `Partition`

Demostración (finitud)

Dado que para la llamada `Partition`(A, i, f) se itera el **for** $f - 1 - i$ veces, haciendo a lo más un intercambio en cada iteración, el **for** es finito. Los pasos adicionales son trivialmente finitos. $\square$

Correctitud de `Partition`

Demostración (finitud)

Dado que para la llamada $\texttt{Partition}(A, i, f)$ se itera el **for** $f - 1 - i$ veces, haciendo a lo más un intercambio en cada iteración, el **for** es finito. Los pasos adicionales son trivialmente finitos. □

Demostración (posición del pivote)

Correctitud de `Partition`

Demostración (finitud)

Dado que para la llamada `Partition`(A, i, f) se itera el **for** $f - 1 - i$ veces, haciendo a lo más un intercambio en cada iteración, el **for** es finito. Los pasos adicionales son trivialmente finitos. □

Demostración (posición del pivote)

Probaremos que el pivote se encuentra en su posición ordenada en la secuencia.

Correctitud de `Partition`

Demostración (finitud)

Dado que para la llamada $\texttt{Partition}(A, i, f)$ se itera el **for** $f - 1 - i$ veces, haciendo a lo más un intercambio en cada iteración, el **for** es finito. Los pasos adicionales son trivialmente finitos. □

Demostración (posición del pivote)

Probaremos que el pivote se encuentra en su posición ordenada en la secuencia. Para esto, dado que en la línea final se pone el pivote en la posición j, demostraremos la siguiente propiedad para un pivote p dado

Correctitud de `Partition`

Demostración (finitud)

Dado que para la llamada $\texttt{Partition}(A, i, f)$ se itera el **for** $f - 1 - i$ veces, haciendo a lo más un intercambio en cada iteración, el **for** es finito. Los pasos adicionales son trivialmente finitos. $\square$

Demostración (posición del pivote)

Probaremos que el pivote se encuentra en su posición ordenada en la secuencia. Para esto, dado que en la línea final se pone el pivote en la posición j, demostraremos la siguiente propiedad para un pivote p dado

$\mathbf{P}(\mathbf{n})$:= Luego de la n-ésima iteración, $A[i \dots j-1]$ contiene solo elementos menores a p y $A[j \dots k-1]$ solo elementos mayores o iguales a p

Correctitud de `Partition`

Demostración (posición del pivote)

$$\mathbf{P}(\mathbf{n}) \quad := \quad \text{Luego de la } n\text{-ésima iteración, } A[i \ldots j-1] \text{ contiene solo elementos menores a } p \text{ y } A[j \ldots k-1] \text{ solo elementos mayores o iguales a } p$$

Correctitud de `Partition`

Demostración (posición del pivote)

$$\mathbf{P(n)} \quad := \quad \text{Luego de la } n\text{-ésima iteración, } A[i \ldots j-1] \text{ contiene solo elementos menores a } p \text{ y } A[j \ldots k-1] \text{ solo elementos mayores o iguales a } p$$

1. **Caso base.** $\mathbf{P(1)}$

Correctitud de `Partition`

Demostración (posición del pivote)

$$\mathbf{P}(\mathbf{n}) \quad := \quad \text{Luego de la } n\text{-ésima iteración, } A[i \ldots j-1] \text{ contiene solo elementos menores a } p \text{ y } A[j \ldots k-1] \text{ solo elementos mayores o iguales a } p$$

1. **Caso base.** $\mathbf{P}(\mathbf{1})$ es el estado de $A[i \ldots k-1]$ luego de la primera iteración. Tenemos dos casos

Correctitud de `Partition`

Demostración (posición del pivote)

$$\mathbf{P(n)} \quad := \quad \text{Luego de la } n\text{-ésima iteración, } A[i \ldots j-1] \text{ contiene solo elementos menores a } p \text{ y } A[j \ldots k-1] \text{ solo elementos mayores o iguales a } p$$

1. **Caso base.** $\mathbf{P(1)}$ es el estado de $A[i \ldots k-1]$ luego de la primera iteración. Tenemos dos casos
   - Si $A[i] < p$,

Correctitud de `Partition`

Demostración (posición del pivote)

$$\mathbf{P(n)} \quad := \quad \text{Luego de la } n\text{-ésima iteración, } A[i \dots j-1] \text{ contiene solo elementos menores a } p \text{ y } A[j \dots k-1] \text{ solo elementos mayores o iguales a } p$$

1. **Caso base.** $\mathbf{P(1)}$ es el estado de $A[i \dots k-1]$ luego de la primera iteración. Tenemos dos casos
   - Si $A[i] < p$, como $i = j$, se mantiene $A[i]$ en su posición y j, k aumentan en 1. Luego, $A[i \dots j-1]$ tiene solo el elemento $A[i]$, el cual es menor a p y $A[j \dots k-1]$ no tiene elementos pues $j = k$.

Correctitud de `Partition`

Demostración (posición del pivote)

$$\mathbf{P(n)} \quad := \quad \text{Luego de la } n\text{-ésima iteración, } A[i \ldots j-1] \text{ contiene solo elementos menores a } p \text{ y } A[j \ldots k-1] \text{ solo elementos mayores o iguales a } p$$

1. **Caso base.** $\mathbf{P(1)}$ es el estado de $A[i \ldots k-1]$ luego de la primera iteración. Tenemos dos casos
   - Si $A[i] < p$, como $i = j$, se mantiene $A[i]$ en su posición y j, k aumentan en 1. Luego, $A[i \ldots j-1]$ tiene solo el elemento $A[i]$, el cual es menor a p y $A[j \ldots k-1]$ no tiene elementos pues $j = k$.
   - Si $A[i] \geq p$,

Correctitud de `Partition`

Demostración (posición del pivote)

$$\mathbf{P(n)} \quad := \quad \text{Luego de la } n\text{-ésima iteración, } A[i \ldots j-1] \text{ contiene solo elementos menores a } p \text{ y } A[j \ldots k-1] \text{ solo elementos mayores o iguales a } p$$

1. **Caso base.** $\mathbf{P(1)}$ es el estado de $A[i \ldots k-1]$ luego de la primera iteración. Tenemos dos casos
   - Si $A[i] < p$, como $i = j$, se mantiene $A[i]$ en su posición y j, k aumentan en 1. Luego, $A[i \ldots j-1]$ tiene solo el elemento $A[i]$, el cual es menor a p y $A[j \ldots k-1]$ no tiene elementos pues $j = k$.
   - Si $A[i] \geq p$, no se aumenta j y sí k, por lo tanto $A[i \ldots j-1]$ considera 0 elementos y $A[j \ldots k-1]$ tiene un elemento mayor o igual a p.

Correctitud de `Partition`

Demostración (posición del pivote)

2. **Hipótesis inductiva (H.I.)**

Correctitud de `Partition`

Demostración (posición del pivote)

2. **Hipótesis inductiva (H.I.)** Suponemos se cumple luego de la *n*-ésima iteración, $A[i \dots j-1]$ contiene solo elementos menores a p y $A[j \dots k-1]$ solo mayores o iguales.

Correctitud de `Partition`

Demostración (posición del pivote)

2. **Hipótesis inductiva (H.I.)** Suponemos se cumple luego de la n-ésima iteración, $A[i \dots j-1]$ contiene solo elementos menores a p y $A[j \dots k-1]$ solo mayores o iguales.

   Al término de la $(n+1)$-ésima iteración, nuevamente pueden haber ocurrido dos casos

Correctitud de `Partition`

Demostración (posición del pivote)

2. **Hipótesis inductiva (H.I.)** Suponemos se cumple luego de la n-ésima iteración, $A[i \dots j-1]$ contiene solo elementos menores a p y $A[j \dots k-1]$ solo mayores o iguales.

   Al término de la $(n+1)$-ésima iteración, nuevamente pueden haber ocurrido dos casos

   - Si $A[k] < p$,

Correctitud de `Partition`

Demostración (posición del pivote)

2. **Hipótesis inductiva (H.I.)** Suponemos se cumple luego de la n-ésima iteración, $A[i \ldots j-1]$ contiene solo elementos menores a p y $A[j \ldots k-1]$ solo mayores o iguales.

   Al término de la $(n+1)$-ésima iteración, nuevamente pueden haber ocurrido dos casos

   - Si $A[k] < p$, este elemento se pone en la posición j antes de aumentarla en 1. Por **H.I.** todos los anteriores a él también son menores a p.

Correctitud de `Partition`

Demostración (posición del pivote)

2. **Hipótesis inductiva (H.I.)** Suponemos se cumple luego de la n-ésima iteración, $A[i \ldots j-1]$ contiene solo elementos menores a p y $A[j \ldots k-1]$ solo mayores o iguales.

   Al término de la $(n+1)$-ésima iteración, nuevamente pueden haber ocurrido dos casos

   - Si $A[k] < p$, este elemento se pone en la posición j antes de aumentarla en 1. Por **H.I.** todos los anteriores a él también son menores a p. Además, como los datos de $A[j \ldots k-1]$ eran mayores o iguales a p antes de aumentar los índices, con el intercambio se mantiene la condición.

Correctitud de Partition

Demostración (posición del pivote)

2. **Hipótesis inductiva (H.I.)** Suponemos se cumple luego de la n-ésima iteración, $A[i \dots j-1]$ contiene solo elementos menores a p y $A[j \dots k-1]$ solo mayores o iguales.

   Al término de la $(n+1)$-ésima iteración, nuevamente pueden haber ocurrido dos casos

   - Si $A[k] < p$, este elemento se pone en la posición j antes de aumentarla en 1. Por **H.I.** todos los anteriores a él también son menores a p. Además, como los datos de $A[j \dots k-1]$ eran mayores o iguales a p antes de aumentar los índices, con el intercambio se mantiene la condición.
   - Si $A[k] \geq p$,

Correctitud de `Partition`

Demostración (posición del pivote)

2. **Hipótesis inductiva (H.I.)** Suponemos se cumple luego de la n-ésima iteración, $A[i \ldots j-1]$ contiene solo elementos menores a p y $A[j \ldots k-1]$ solo mayores o iguales.

   Al término de la $(n+1)$-ésima iteración, nuevamente pueden haber ocurrido dos casos

   - Si $A[k] < p$, este elemento se pone en la posición j antes de aumentarla en 1. Por **H.I.** todos los anteriores a él también son menores a p. Además, como los datos de $A[j \ldots k-1]$ eran mayores o iguales a p antes de aumentar los índices, con el intercambio se mantiene la condición.
   - Si $A[k] \geq p$, no se aumenta j y no se hacen intercambios. Por **H.I.** los elementos en $A[i \ldots j-1]$ son menores a p

Correctitud de `Partition`

Demostración (posición del pivote)

2. **Hipótesis inductiva (H.I.)** Suponemos se cumple luego de la n-ésima iteración, $A[i \dots j-1]$ contiene solo elementos menores a p y $A[j \dots k-1]$ solo mayores o iguales.

   Al término de la $(n+1)$-ésima iteración, nuevamente pueden haber ocurrido dos casos

   - Si $A[k] < p$, este elemento se pone en la posición j antes de aumentarla en 1. Por **H.I.** todos los anteriores a él también son menores a p. Además, como los datos de $A[j \dots k-1]$ eran mayores o iguales a p antes de aumentar los índices, con el intercambio se mantiene la condición.
   - Si $A[k] \geq p$, no se aumenta j y no se hacen intercambios. Por **H.I.** los elementos en $A[i \dots j-1]$ son menores a p y como $A[k]$ al igual que los elementos de $A[j \dots k-1]$ son mayores o iguales, luego de aumentar k el rango $A[j \dots k-1]$ sigue cumpliendo la propiedad. □

Correctitud de Quicksort

Correctitud de `Quicksort`

Ejercicio

Demuestre que `Quicksort` es correcto

input : Secuencia $A[0,\ldots,n-1]$, índices i, f
output: $\emptyset$

`QuickSort` (A, i, f)**:**

    if $i \leq f$ **:**
        $p \leftarrow \texttt{Partition}(A, i, f)$
        $\texttt{Quicksort}(A, i, p-1)$
        $\texttt{Quicksort}(A, p+1, f)$

Correctitud de `Quicksort`

Demostración (finitud)

Correctitud de `Quicksort`

Demostración (finitud)

Para demostrar que `Quicksort` termina, primero usamos el hecho de que `Partition` termina y por ello la línea 2 toma una cantidad finita de pasos.

Correctitud de `Quicksort`

Demostración (finitud)

Para demostrar que `Quicksort` termina, primero usamos el hecho de que `Partition` termina y por ello la línea 2 toma una cantidad finita de pasos.

Ahora, notamos que cada llamado recursivo de `Quicksort` se hace a una instancia de tamaño estrictamente menor al original.

Correctitud de `Quicksort`

Demostración (finitud)

Para demostrar que `Quicksort` termina, primero usamos el hecho de que `Partition` termina y por ello la línea 2 toma una cantidad finita de pasos.

Ahora, notamos que cada llamado recursivo de `Quicksort` se hace a una instancia de tamaño estrictamente menor al original.

En efecto, la llamada `Quicksort`(A, i, f) establece el *tamaño* de la instancia analizada como

Correctitud de `Quicksort`

Demostración (finitud)

Para demostrar que `Quicksort` termina, primero usamos el hecho de que `Partition` termina y por ello la línea 2 toma una cantidad finita de pasos.

Ahora, notamos que cada llamado recursivo de `Quicksort` se hace a una instancia de tamaño estrictamente menor al original.

En efecto, la llamada `Quicksort`(A, i, f) establece el *tamaño* de la instancia analizada como

$$d = f - i$$

Tenemos dos casos según el valor de d

Correctitud de Quicksort

Demostración (finitud)

Para demostrar que `Quicksort` termina, primero usamos el hecho de que `Partition` termina y por ello la línea 2 toma una cantidad finita de pasos.

Ahora, notamos que cada llamado recursivo de `Quicksort` se hace a una instancia de tamaño estrictamente menor al original.

En efecto, la llamada $\texttt{Quicksort}(A, i, f)$ establece el *tamaño* de la instancia analizada como

$$d = f - i$$

Tenemos dos casos según el valor de d

- Si $d < 0$,

Correctitud de `Quicksort`

Demostración (finitud)

Para demostrar que `Quicksort` termina, primero usamos el hecho de que `Partition` termina y por ello la línea 2 toma una cantidad finita de pasos.

Ahora, notamos que cada llamado recursivo de `Quicksort` se hace a una instancia de tamaño estrictamente menor al original.

En efecto, la llamada `Quicksort`(A, i, f) establece el *tamaño* de la instancia analizada como

$$d = f - i$$

Tenemos dos casos según el valor de d

- Si $d < 0$, `Quicksort` termina sin hacer más llamados recursivos

Correctitud de `Quicksort`

Demostración (finitud)

El otro caso es

- Si $d \geq 0$,

Correctitud de `Quicksort`

Demostración (finitud)

El otro caso es

- Si $d \geq 0$, se hacen dos llamados recursivos de tamaños respectivos

Correctitud de `Quicksort`

Demostración (finitud)

El otro caso es

- Si $d \geq 0$, se hacen dos llamados recursivos de tamaños respectivos

$$d_1 = p - 1 - i < d \qquad d_2 = f - p - 1 < d \quad \text{para } i \leq p \leq f$$

  Es decir, con cada llamado resursivo d disminuye al menos en 1.

Correctitud de `Quicksort`

Demostración (finitud)

El otro caso es

- Si $d \geq 0$, se hacen dos llamados recursivos de tamaños respectivos

$$d_1 = p - 1 - i < d \qquad d_2 = f - p - 1 < d \quad \text{para } i \leq p \leq f$$

  Es decir, con cada llamado resursivo d disminuye al menos en 1.

Con ambos casos, tenemos que en cada llamado se reduce al menos en 1 el tamaño de la instancia y el algoritmo termina al llegar a tamaño 0.

Correctitud de `Quicksort`

Demostración (finitud)

El otro caso es

- Si $d \geq 0$, se hacen dos llamados recursivos de tamaños respectivos

$$d_1 = p - 1 - i < d \qquad d_2 = f - p - 1 < d \quad \text{para } i \leq p \leq f$$

  Es decir, con cada llamado resursivo d disminuye al menos en 1.

Con ambos casos, tenemos que en cada llamado se reduce al menos en 1 el tamaño de la instancia y el algoritmo termina al llegar a tamaño 0.

Como el llamado inicial es $\texttt{Quicksort}(A, 0, n-1)$, la profundidad máxima de la recursión es $n - 1$ y por lo tanto, el algoritmo termina. □

Correctitud de `Quicksort`

Demostración (ordenación)

Correctitud de `Quicksort`

Demostración (ordenación)

Debido a que probamos la correctitud de `Partition` y que `Quicksort` divide en sub-problemas con `Partition`, esta demostración será más sencilla.

Correctitud de `Quicksort`

Demostración (ordenación)

Debido a que probamos la correctitud de `Partition` y que `Quicksort` divide en sub-problemas con `Partition`, esta demostración será más sencilla.

Sabemos que `Partition` ubica correctamente el pivote al terminar.

Correctitud de `Quicksort`

Demostración (ordenación)

Debido a que probamos la correctitud de `Partition` y que `Quicksort` divide en sub-problemas con `Partition`, esta demostración será más sencilla.

Sabemos que `Partition` ubica correctamente el pivote al terminar. Basta demostrar que todo elemento de $A[0\ldots,n-1]$ es elegido como pivote en algún llamado de `Quicksort`.

Correctitud de `Quicksort`

Demostración (ordenación)

Debido a que probamos la correctitud de `Partition` y que `Quicksort` divide en sub-problemas con `Partition`, esta demostración será más sencilla.

Sabemos que `Partition` ubica correctamente el pivote al terminar. Basta demostrar que todo elemento de $A[0\ldots, n-1]$ es elegido como pivote en algún llamado de `Quicksort`.

El llamado `Quicksort`(A, i, f) verifica si hay elementos en el rango $i \ldots f$

Correctitud de `Quicksort`

Demostración (ordenación)

Debido a que probamos la correctitud de `Partition` y que `Quicksort` divide en sub-problemas con `Partition`, esta demostración será más sencilla.

Sabemos que `Partition` ubica correctamente el pivote al terminar. Basta demostrar que todo elemento de $A[0\ldots, n-1]$ es elegido como pivote en algún llamado de `Quicksort`.

El llamado $\texttt{Quicksort}(A, i, f)$ verifica si hay elementos en el rango $i \ldots f$

- Si $i > f$,

Correctitud de `Quicksort`

Demostración (ordenación)

Debido a que probamos la correctitud de `Partition` y que `Quicksort` divide en sub-problemas con `Partition`, esta demostración será más sencilla.

Sabemos que `Partition` ubica correctamente el pivote al terminar. Basta demostrar que todo elemento de $A[0 \ldots, n-1]$ es elegido como pivote en algún llamado de `Quicksort`.

El llamado `Quicksort`(A, i, f) verifica si hay elementos en el rango $i \ldots f$

- Si $i > f$, no hay elementos que puedan ser escogidos como pivote

Correctitud de `Quicksort`

Demostración (ordenación)

Debido a que probamos la correctitud de `Partition` y que `Quicksort` divide en sub-problemas con `Partition`, esta demostración será más sencilla.

Sabemos que `Partition` ubica correctamente el pivote al terminar. Basta demostrar que todo elemento de $A[0\dots,n-1]$ es elegido como pivote en algún llamado de `Quicksort`.

El llamado `Quicksort`(A,i,f) verifica si hay elementos en el rango $i\dots f$

- Si $i > f$, no hay elementos que puedan ser escogidos como pivote
- Si $i \leq f$ el rango es de $f - i > 0$ elementos,

Correctitud de `Quicksort`

Demostración (ordenación)

Debido a que probamos la correctitud de `Partition` y que `Quicksort` divide en sub-problemas con `Partition`, esta demostración será más sencilla.

Sabemos que `Partition` ubica correctamente el pivote al terminar. Basta demostrar que todo elemento de $A[0\ldots,n-1]$ es elegido como pivote en algún llamado de `Quicksort`.

El llamado $\texttt{Quicksort}(A, i, f)$ verifica si hay elementos en el rango $i\ldots f$

- Si $i > f$, no hay elementos que puedan ser escogidos como pivote
- Si $i \leq f$ el rango es de $f - i > 0$ elementos, se escoge un pivote y se realizan dos llamados cuyos rangos suman $f - i - 1$ elementos

Correctitud de `Quicksort`

Demostración (ordenación)

Debido a que probamos la correctitud de `Partition` y que `Quicksort` divide en sub-problemas con `Partition`, esta demostración será más sencilla.

Sabemos que `Partition` ubica correctamente el pivote al terminar. Basta demostrar que todo elemento de $A[0\ldots, n-1]$ es elegido como pivote en algún llamado de `Quicksort`.

El llamado `Quicksort`(A, i, f) verifica si hay elementos en el rango $i \ldots f$

- Si $i > f$, no hay elementos que puedan ser escogidos como pivote
- Si $i \leq f$ el rango es de $f - i > 0$ elementos, se escoge un pivote y se realizan dos llamados cuyos rangos suman $f - i - 1$ elementos

Dado que en cada llamado no vacío se escoge un pivote, los llamados siempre reducen su tamaño y el algoritmo solo deja de hacer recursión cuando el llamado es vacío, todo elemento es escogido pivote en algún llamado.

Correctitud de `Quicksort`

Demostración (ordenación)

Debido a que probamos la correctitud de `Partition` y que `Quicksort` divide en sub-problemas con `Partition`, esta demostración será más sencilla.

Sabemos que `Partition` ubica correctamente el pivote al terminar. Basta demostrar que todo elemento de $A[0\ldots,n-1]$ es elegido como pivote en algún llamado de `Quicksort`.

El llamado $\texttt{Quicksort}(A,i,f)$ verifica si hay elementos en el rango $i\ldots f$

- Si $i>f$, no hay elementos que puedan ser escogidos como pivote
- Si $i\leq f$ el rango es de $f-i>0$ elementos, se escoge un pivote y se realizan dos llamados cuyos rangos suman $f-i-1$ elementos

Dado que en cada llamado no vacío se escoge un pivote, los llamados siempre reducen su tamaño y el algoritmo solo deja de hacer recursión cuando el llamado es vacío, todo elemento es escogido pivote en algún llamado. Como `Partition` es correcto, todo elemento queda ordenado. □

Sumario

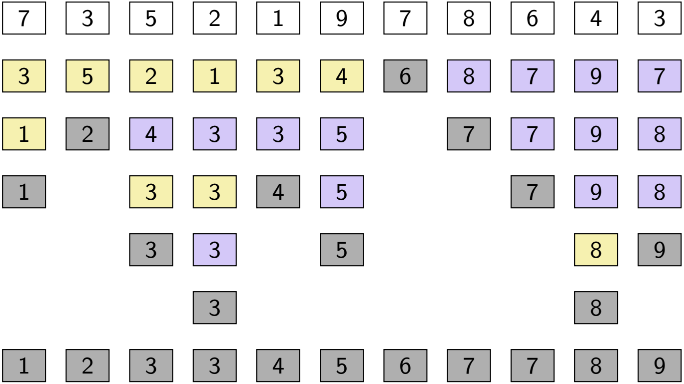
Quicksort

input : Secuencia $A[0, \ldots, n-1]$, índices i, f
output: $\varnothing$

```
QuickSort (A, i, f):
    if i ≤ f :
        p ← Partition(A, i, f)
        Quicksort(A, i, p − 1)
        Quicksort(A, p + 1, f)
```

¿Cuál es la complejidad de `Quicksort` en los distintos casos?

Quicksort: Ejemplo de ejecución



Complejidad de tiempo de `Quicksort`

Complejidad de tiempo de `Quicksort`

Tal como con `Median`, la complejidad depende de la elección del pivote: es **probabilística**

Complejidad de tiempo de `Quicksort`

Tal como con `Median`, la complejidad depende de la elección del pivote: es **probabilística**

Mejor caso

Complejidad de tiempo de `Quicksort`

Tal como con `Median`, la complejidad depende de la elección del pivote: es **probabilística**

Mejor caso

- `Partition` genera sub-secuencias del *mismo* tamaño

Complejidad de tiempo de `Quicksort`

Tal como con `Median`, la complejidad depende de la elección del pivote: es **probabilística**

Mejor caso

- `Partition` genera sub-secuencias del *mismo* tamaño
- Ecuación de recurrencia $T(n) = n + 2T(n/2)$ (como en `MergeSort`)

Complejidad de tiempo de `Quicksort`

Tal como con `Median`, la complejidad depende de la elección del pivote: es **probabilística**

Mejor caso

- `Partition` genera sub-secuencias del *mismo* tamaño
- Ecuación de recurrencia $T(n) = n + 2T(n/2)$ (como en `MergeSort`)
- Complejidad $\mathcal{O}(n \log(n))$

Complejidad de tiempo de `Quicksort`

Tal como con `Median`, la complejidad depende de la elección del pivote: es **probabilística**

Mejor caso

- `Partition` genera sub-secuencias del *mismo* tamaño
- Ecuación de recurrencia $T(n) = n + 2T(n/2)$ (como en `MergeSort`)
- Complejidad $\mathcal{O}(n \log(n))$

Peor caso

Complejidad de tiempo de `Quicksort`

Tal como con `Median`, la complejidad depende de la elección del pivote: es **probabilística**

Mejor caso

- `Partition` genera sub-secuencias del *mismo* tamaño
- Ecuación de recurrencia $T(n) = n + 2T(n/2)$ (como en `MergeSort`)
- Complejidad $\mathcal{O}(n \log(n))$

Peor caso

- `Partition` genera sub-secuencias de tamaño 0 y $n - 1$

Complejidad de tiempo de `Quicksort`

Tal como con `Median`, la complejidad depende de la elección del pivote: es **probabilística**

Mejor caso

- `Partition` genera sub-secuencias del *mismo* tamaño
- Ecuación de recurrencia $T(n) = n + 2T(n/2)$ (como en `MergeSort`)
- Complejidad $\mathcal{O}(n \log(n))$

Peor caso

- `Partition` genera sub-secuencias de tamaño 0 y $n - 1$
- Ecuación de recurrencia $T(n) = n + T(n - 1)$

Complejidad de tiempo de `Quicksort`

Tal como con `Median`, la complejidad depende de la elección del pivote: es **probabilística**

Mejor caso

- `Partition` genera sub-secuencias del *mismo* tamaño
- Ecuación de recurrencia $T(n) = n + 2T(n/2)$ (como en `MergeSort`)
- Complejidad $\mathcal{O}(n \log(n))$

Peor caso

- `Partition` genera sub-secuencias de tamaño 0 y $n-1$
- Ecuación de recurrencia $T(n) = n + T(n-1)$
- Complejidad resultante: $\mathcal{O}(n^2)$

Complejidad de tiempo de `Quicksort`

Tal como con `Median`, la complejidad depende de la elección del pivote: es **probabilística**

Mejor caso

- `Partition` genera sub-secuencias del *mismo* tamaño
- Ecuación de recurrencia $T(n) = n + 2T(n/2)$ (como en `MergeSort`)
- Complejidad $\mathcal{O}(n \log(n))$

Peor caso

- `Partition` genera sub-secuencias de tamaño 0 y $n - 1$
- Ecuación de recurrencia $T(n) = n + T(n - 1)$
- Complejidad resultante: $\mathcal{O}(n^2)$

¿Qué hay del caso promedio?

Caso promedio de `Quicksort`

Caso promedio de `Quicksort`

En nuestro análisis de **caso promedio** supondremos que el pivote queda en cualquiera de las n posiciones con igual probabilidad

Caso promedio de `Quicksort`

En nuestro análisis de **caso promedio** supondremos que el pivote queda en cualquiera de las n posiciones con igual probabilidad

`Partition` (A, i, f):

$x \leftarrow$ índice aleatorio en $\{i, \ldots, f\}$; $\quad p \leftarrow A[x]$
$A[x] \rightleftarrows A[f]$
$j \leftarrow i$
for $k = i \ldots f - 1$ **:**
  if $A[k] < p$ **:**
    $A[j] \rightleftarrows A[k]$
    $j \leftarrow j + 1$
$A[j] \rightleftarrows A[f]$
return j

Caso promedio de `Quicksort`

En nuestro análisis de **caso promedio** supondremos que el pivote queda en cualquiera de las n posiciones con igual probabilidad

`Partition` (A, i, f):

1 $x \leftarrow$ índice aleatorio en $\{i, \ldots, f\}$; $p \leftarrow A[x]$
2 $A[x] \rightleftarrows A[f]$
3 $j \leftarrow i$
4 **for** $k = i \ldots f - 1$ **:**
5 　**if** $A[k] < p$ **:**
6 　　$A[j] \rightleftarrows A[k]$
7 　　$j \leftarrow j + 1$
8 $A[j] \rightleftarrows A[f]$
9 **return** j

Contaremos el número de comparaciones de la línea 5 de `Partition`, pues mide cuántas iteraciones debe hacer este método

Caso promedio de `Quicksort`

En nuestro análisis de **caso promedio** supondremos que el pivote queda en cualquiera de las n posiciones con igual probabilidad

```
Partition (A, i, f):
1    x ← índice aleatorio en {i, ..., f};   p ← A[x]
2    A[x] ⇄ A[f]
3    j ← i
4    for k = i ... f − 1 :
5        if A[k] < p :
6            A[j] ⇄ A[k]
7            j ← j + 1
8    A[j] ⇄ A[f]
9    return j
```

Contaremos el número de comparaciones de la línea 5 de `Partition`, pues mide cuántas iteraciones debe hacer este método

Definimos

$$C(n) := \quad \#\ \text{comp. } A[k] < p \text{ en } \texttt{Quicksort}$$

Caso promedio de `Quicksort`

En nuestro análisis de **caso promedio** supondremos que el pivote queda en cualquiera de las n posiciones con igual probabilidad

`Partition` (A, i, f):

1. $x \leftarrow$ índice aleatorio en $\{i, \ldots, f\}$; $\quad p \leftarrow A[x]$
2. $A[x] \rightleftarrows A[f]$
3. $j \leftarrow i$
4. **for** $k = i \ldots f - 1$ **:**
5.   **if** $A[k] < p$ **:**
6. $A[j] \rightleftarrows A[k]$
7. $j \leftarrow j + 1$
8. $A[j] \rightleftarrows A[f]$
9. **return** j

Contaremos el número de comparaciones de la línea 5 de `Partition`, pues mide cuántas iteraciones debe hacer este método

Definimos

$$C(n) := \quad \begin{array}{c} \#\ \text{comp. } A[k] < p \\ \text{en } \texttt{Quicksort} \end{array}$$

Encontraremos una ecuación de recurrencia para $C(n)$

Caso promedio de `Quicksort`

`Partition` (A, i, f):

$x \leftarrow$ índice aleatorio en $\{i, \ldots, f\}$; $\quad p \leftarrow A[x]$
$A[x] \rightleftarrows A[f]$
$j \leftarrow i$
for $k = i \ldots f - 1$ **:**
  if $A[k] < p$ **:**
    $A[j] \rightleftarrows A[k]$
    $j \leftarrow j + 1$
$A[j] \rightleftarrows A[f]$
return j

- En la primera llamada se hacen $n - 1$ comparaciones, pues $i = 0$ y $f = n - 1$

Caso promedio de `Quicksort`

`Partition` (A, i, f)**:**

$x \leftarrow$ índice aleatorio en $\{i, \ldots, f\}$; $\quad p \leftarrow A[x]$
$A[x] \rightleftarrows A[f]$
$j \leftarrow i$
for $k = i \ldots f - 1$ **:**
  if $A[k] < p$ **:**
    $A[j] \rightleftarrows A[k]$
    $j \leftarrow j + 1$
$A[j] \rightleftarrows A[f]$
return j

- En la primera llamada se hacen $n - 1$ comparaciones, pues $i = 0$ y $f = n - 1$
- Supongamos que `Partition` termina retornando q, i.e. deja al pivote en $A[q]$

Caso promedio de `Quicksort`

`Partition` (A, i, f)**:**

$x \leftarrow$ índice aleatorio en $\{i, \ldots, f\}$; $\quad p \leftarrow A[x]$
$A[x] \rightleftarrows A[f]$
$j \leftarrow i$
for $k = i \ldots f - 1$ **:**
  if $A[k] < p$ **:**
    $A[j] \rightleftarrows A[k]$
    $j \leftarrow j + 1$
$A[j] \rightleftarrows A[f]$
return j

- En la primera llamada se hacen $n - 1$ comparaciones, pues $i = 0$ y $f = n - 1$
- Supongamos que `Partition` termina retornando q, i.e. deja al pivote en $A[q]$
- Las llamadas recursivas de `Quicksort` se harán sobre los

Caso promedio de `Quicksort`

`Partition` (A, i, f):

    $x \leftarrow$ índice aleatorio en $\{i, \ldots, f\}$; $p \leftarrow A[x]$
    $A[x] \rightleftarrows A[f]$
    $j \leftarrow i$
    for $k = i \ldots f - 1$ **:**
        if $A[k] < p$ **:**
            $A[j] \rightleftarrows A[k]$
            $j \leftarrow j + 1$
    $A[j] \rightleftarrows A[f]$
    return j

- En la primera llamada se hacen $n - 1$ comparaciones, pues $i = 0$ y $f = n - 1$
- Supongamos que `Partition` termina retornando q, i.e. deja al pivote en $A[q]$
- Las llamadas recursivas de `Quicksort` se harán sobre los
  - q elementos a la izq

Caso promedio de `Quicksort`

`Partition` (A, i, f)**:**

  $x \leftarrow$ índice aleatorio en $\{i, \ldots, f\}$; $\quad p \leftarrow A[x]$
  $A[x] \rightleftarrows A[f]$
  $j \leftarrow i$
  for $k = i \ldots f - 1$ **:**
    if $A[k] < p$ **:**
      $A[j] \rightleftarrows A[k]$
      $j \leftarrow j + 1$
  $A[j] \rightleftarrows A[f]$
  return j

- En la primera llamada se hacen $n - 1$ comparaciones, pues $i = 0$ y $f = n - 1$
- Supongamos que `Partition` termina retornando q, i.e. deja al pivote en $A[q]$
- Las llamadas recursivas de `Quicksort` se harán sobre los
  - q elementos a la izq
  - $n - q - 1$ elementos a la der

Caso promedio de `Quicksort`

```
Partition (A, i, f):
    x ← índice aleatorio en {i, ..., f};   p ← A[x]
    A[x] ⇄ A[f]
    j ← i
    for k = i ... f − 1 :
        if A[k] < p :
            A[j] ⇄ A[k]
            j ← j + 1
    A[j] ⇄ A[f]
    return j
```

- En la primera llamada se hacen $n-1$ comparaciones, pues $i = 0$ y $f = n - 1$
- Supongamos que `Partition` termina retornando q, i.e. deja al pivote en $A[q]$
- Las llamadas recursivas de `Quicksort` se harán sobre los
  - q elementos a la izq
  - $n - q - 1$ elementos a la der
- Los llamados recursivos aportan

$$C(q) + C(n - q - 1)$$

Caso promedio de `Quicksort`

Con lo anterior, las comparaciones ecuando el pivote queda en $A[q]$ son

Caso promedio de Quicksort

Con lo anterior, las comparaciones ecuando el pivote queda en $A[q]$ son

$$n - 1 + C(q) + C(n - q - 1)$$

Caso promedio de `Quicksort`

Con lo anterior, las comparaciones ecuando el pivote queda en $A[q]$ son

$$n - 1 + C(q) + C(n - q - 1)$$

Para ver el caso promedio, ponderamos para todos los q posibles obteniendo

$$C(n) \;=\; n - 1 +$$

Caso promedio de `Quicksort`

Con lo anterior, las comparaciones ecuando el pivote queda en $A[q]$ son

$$n - 1 + C(q) + C(n - q - 1)$$

Para ver el caso promedio, ponderamos para todos los q posibles obteniendo

$$C(n) \;=\; n - 1 + \frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1}\left(C(q) + C(n - q - 1)\right)$$

Caso promedio de `Quicksort`

Con lo anterior, las comparaciones ecuando el pivote queda en $A[q]$ son

$$n - 1 + C(q) + C(n - q - 1)$$

Para ver el caso promedio, ponderamos para todos los q posibles obteniendo

$$C(n) \; = \; n - 1 + \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} \left(C(q) + C(n - q - 1) \right)$$

Además, notando que

$$\sum_{q=0}^{n-1} C(n - q - 1) \; =$$

Caso promedio de `Quicksort`

Con lo anterior, las comparaciones ecuando el pivote queda en $A[q]$ son

$$n-1+C(q)+C(n-q-1)$$

Para ver el caso promedio, ponderamos para todos los q posibles obteniendo

$$C(n) \;=\; n-1+\frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1}\left(C(q)+C(n-q-1)\right)$$

Además, notando que

$$\sum_{q=0}^{n-1} C(n-q-1) \;=\; C(n-1)+C(n-2)+\cdots+C(0)$$

Caso promedio de Quicksort

Con lo anterior, las comparaciones ecuando el pivote queda en $A[q]$ son

$$n - 1 + C(q) + C(n - q - 1)$$

Para ver el caso promedio, ponderamos para todos los q posibles obteniendo

$$C(n) = n - 1 + \frac{1}{n}\sum_{q=0}^{n-1}\left(C(q) + C(n - q - 1)\right)$$

Además, notando que

$$\sum_{q=0}^{n-1} C(n - q - 1) = C(n-1) + C(n-2) + \cdots + C(0) = \sum_{q=0}^{n-1} C(q)$$

Caso promedio de `Quicksort`

Con lo anterior, las comparaciones ecuando el pivote queda en $A[q]$ son

$$n - 1 + C(q) + C(n - q - 1)$$

Para ver el caso promedio, ponderamos para todos los q posibles obteniendo

$$C(n) \;=\; n - 1 + \frac{1}{n} \sum_{q=0}^{n-1} \left(C(q) + C(n - q - 1) \right)$$

Además, notando que

$$\sum_{q=0}^{n-1} C(n - q - 1) \;=\; C(n-1) + C(n-2) + \cdots + C(0) \;=\; \sum_{q=0}^{n-1} C(q)$$

obtenemos la regla simplificada

$$C(n) \;=\; n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{q=0}^{n-1} C(q)$$

Caso promedio de `Quicksort`

Para la ecuación de recurrencia

$$C(n) = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{q=0}^{n-1} C(q)$$

tenemos dos casos base

Caso promedio de `Quicksort`

Para la ecuación de recurrencia

$$C(n) \;=\; n - 1 + \frac{2}{n}\sum_{q=0}^{n-1} C(q)$$

tenemos dos casos base

- $C(0) = 0$,

Caso promedio de `Quicksort`

Para la ecuación de recurrencia

$$C(n) = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{q=0}^{n-1} C(q)$$

tenemos dos casos base

- $C(0) = 0$, pues corresponde al caso base de `Quicksort`

Caso promedio de `Quicksort`

Para la ecuación de recurrencia

$$C(n) \;=\; n - 1 + \frac{2}{n}\sum_{q=0}^{n-1} C(q)$$

tenemos dos casos base

- $C(0) = 0$, pues corresponde al caso base de `Quicksort`
- $C(1) = 0$,

Caso promedio de `Quicksort`

Para la ecuación de recurrencia

$$C(n) = n - 1 + \frac{2}{n} \sum_{q=0}^{n-1} C(q)$$

tenemos dos casos base

- $C(0) = 0$, pues corresponde al caso base de `Quicksort`
- $C(1) = 0$, pues `Partition` no itera si hay un solo elemento

Caso promedio de `Quicksort`

Amplificamos por n la recurrencia y la reescribimos para $n-1$

$$nC(n) \quad = \quad n(n-1) + 2\sum_{q=0}^{n-1} C(q)$$

Caso promedio de `Quicksort`

Amplificamos por n la recurrencia y la reescribimos para $n-1$

$$\begin{aligned} nC(n) &= n(n-1) + 2\sum_{q=0}^{n-1} C(q) \\ (n-1)C(n-1) &= (n-1)(n-2) + 2\sum_{q=0}^{n-2} C(q) \end{aligned}$$

Caso promedio de `Quicksort`

Amplificamos por n la recurrencia y la reescribimos para $n-1$

$$\begin{aligned} nC(n) &= n(n-1) + 2\sum_{q=0}^{n-1} C(q) \\ (n-1)C(n-1) &= (n-1)(n-2) + 2\sum_{q=0}^{n-2} C(q) \end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos

Caso promedio de `Quicksort`

Amplificamos por n la recurrencia y la reescribimos para $n-1$

$$\begin{aligned} nC(n) &= n(n-1) + 2\sum_{q=0}^{n-1} C(q) \\ (n-1)C(n-1) &= (n-1)(n-2) + 2\sum_{q=0}^{n-2} C(q) \end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos

$$nC(n) = (n+1)C(n-1) + 2n - 2$$

Caso promedio de `Quicksort`

Amplificamos por n la recurrencia y la reescribimos para $n-1$

$$
\begin{aligned}
nC(n) &= n(n-1) + 2\sum_{q=0}^{n-1} C(q) \\
(n-1)C(n-1) &= (n-1)(n-2) + 2\sum_{q=0}^{n-2} C(q)
\end{aligned}
$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos

$$nC(n) = (n+1)C(n-1) + 2n - 2$$

Dividimos por $n(n+1)$ y comenzamos una serie de inecuaciones

Caso promedio de `Quicksort`

Amplificamos por n la recurrencia y la reescribimos para $n-1$

$$\begin{aligned} nC(n) &= n(n-1) + 2\sum_{q=0}^{n-1} C(q) \\ (n-1)C(n-1) &= (n-1)(n-2) + 2\sum_{q=0}^{n-2} C(q) \end{aligned}$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos

$$nC(n) = (n+1)C(n-1) + 2n - 2$$

Dividimos por $n(n+1)$ y comenzamos una serie de inecuaciones

$$\frac{C(n)}{n+1} = \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n(n+1)}$$

Caso promedio de `Quicksort`

Amplificamos por n la recurrencia y la reescribimos para $n-1$

$$
\begin{aligned}
nC(n) &= n(n-1) + 2\sum_{q=0}^{n-1} C(q) \\
(n-1)C(n-1) &= (n-1)(n-2) + 2\sum_{q=0}^{n-2} C(q)
\end{aligned}
$$

Restando ambas ecuaciones obtenemos

$$
nC(n) = (n+1)C(n-1) + 2n - 2
$$

Dividimos por $n(n+1)$ y comenzamos una serie de inecuaciones

$$
\begin{aligned}
\frac{C(n)}{n+1} &= \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n(n+1)} \\
&\leq \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1}
\end{aligned}
$$

Caso promedio de `Quicksort`

$$\frac{C(n)}{n+1} \quad \leq \quad \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1}$$

Caso promedio de `Quicksort`

$$\begin{aligned}\frac{C(n)}{n+1} &\leq \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} \\ &\leq \frac{C(n-2)}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1}\end{aligned}$$

Caso promedio de `Quicksort`

$$
\begin{aligned}
\frac{C(n)}{n+1} &\leq \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} \\
&\leq \frac{C(n-2)}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\
&\leq \frac{C(n-3)}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1}
\end{aligned}
$$

Caso promedio de `Quicksort`

$$
\begin{aligned}
\frac{C(n)}{n+1} &\leq \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} \\
&\leq \frac{C(n-2)}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\
&\leq \frac{C(n-3)}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\
&\dots
\end{aligned}
$$

Caso promedio de `Quicksort`

$$
\begin{aligned}
\frac{C(n)}{n+1} &\leq \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} \\
&\leq \frac{C(n-2)}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\
&\leq \frac{C(n-3)}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\
& \dots \\
&\leq \frac{C(1)}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k+1}
\end{aligned}
$$

Caso promedio de `Quicksort`

$$
\begin{aligned}
\frac{C(n)}{n+1} &\leq \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} \\
&\leq \frac{C(n-2)}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\
&\leq \frac{C(n-3)}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\
&\dots \\
&\leq \frac{C(1)}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k+1} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k}
\end{aligned}
$$

Caso promedio de `Quicksort`

$$
\begin{aligned}
\frac{C(n)}{n+1} &\leq \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} \\
&\leq \frac{C(n-2)}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\
&\leq \frac{C(n-3)}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\
&\dots \\
&\leq \frac{C(1)}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k+1} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} \leq \int_{1}^{n} \frac{2}{x} dx
\end{aligned}
$$

Caso promedio de `Quicksort`

$$
\begin{aligned}
\frac{C(n)}{n+1} &\leq \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} \\
&\leq \frac{C(n-2)}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\
&\leq \frac{C(n-3)}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\
&\dots \\
&\leq \frac{C(1)}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k+1} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} \leq \int_{1}^{n} \frac{2}{x} dx = 2\log(n)
\end{aligned}
$$

Concluimos que una cota superior para el número de comparaciones es

Caso promedio de `Quicksort`

$$
\begin{aligned}
\frac{C(n)}{n+1} &\leq \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} \\
&\leq \frac{C(n-2)}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\
&\leq \frac{C(n-3)}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\
&\dots \\
&\leq \frac{C(1)}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k+1} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} \leq \int_{1}^{n} \frac{2}{x} dx = 2\log(n)
\end{aligned}
$$

Concluimos que una cota superior para el número de comparaciones es

$$C(n) \leq 2(n+1)\log(n)$$

Caso promedio de Quicksort

$$
\begin{aligned}
\frac{C(n)}{n+1} &\leq \frac{C(n-1)}{n} + \frac{2}{n+1} \\
&\leq \frac{C(n-2)}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\
&\leq \frac{C(n-3)}{n-2} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{2}{n+1} \\
&\dots \\
&\leq \frac{C(1)}{2} + \sum_{k=2}^{n} \frac{2}{k+1} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k} \leq \int_1^n \frac{2}{x} dx = 2\log(n)
\end{aligned}
$$

Concluimos que una cota superior para el número de comparaciones es

$$C(n) \leq 2(n+1)\log(n)$$

Quicksort es $\mathcal{O}(n\log(n))$ en el caso promedio

Mejoras en `Quicksort`

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g. $n \leq 20$) podemos usar `InsertionSort`

Mejoras en `Quicksort`

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g. $n \leq 20$) podemos usar `InsertionSort`
  - A pesar de no tener una complejidad mejor

Mejoras en Quicksort

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g. $n \leq 20$) podemos usar `InsertionSort`
  - A pesar de no tener una complejidad mejor
  - Eso es solo cuando hablamos asintóticamente

Mejoras en `Quicksort`

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g. $n \leq 20$) podemos usar `InsertionSort`
  - A pesar de no tener una complejidad mejor
  - Eso es solo cuando hablamos asintóticamente
  - En la práctica, en instancias pequeñas tiene mejor desempeño

Mejoras en `Quicksort`

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g. $n \leq 20$) podemos usar `InsertionSort`
  - A pesar de no tener una complejidad mejor
  - Eso es solo cuando hablamos asintóticamente
  - En la práctica, en instancias pequeñas tiene mejor desempeño
  - No olvidar que `Quicksort` es **recursivo**… eso cuesta recursos

Mejoras en `Quicksort`

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g. $n \leq 20$) podemos usar `InsertionSort`
  - A pesar de no tener una complejidad mejor
  - Eso es solo cuando hablamos asintóticamente
  - En la práctica, en instancias pequeñas tiene mejor desempeño
  - No olvidar que `Quicksort` es **recursivo**... eso cuesta recursos
- Usar la mediana de tres elementos como pivote

Mejoras en `Quicksort`

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g. $n \leq 20$) podemos usar `InsertionSort`
  - A pesar de no tener una complejidad mejor
  - Eso es solo cuando hablamos asintóticamente
  - En la práctica, en instancias pequeñas tiene mejor desempeño
  - No olvidar que `Quicksort` es **recursivo**... eso cuesta recursos
- Usar la mediana de tres elementos como pivote
  - *Informar* la elección de pivote

Mejoras en `Quicksort`

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g. $n \leq 20$) podemos usar `InsertionSort`
  - A pesar de no tener una complejidad mejor
  - Eso es solo cuando hablamos asintóticamente
  - En la práctica, en instancias pequeñas tiene mejor desempeño
  - No olvidar que `Quicksort` es **recursivo**... eso cuesta recursos
- Usar la mediana de tres elementos como pivote
  - *Informar* la elección de pivote
  - Dado A, escogemos 3 elementos $A[k_1], A[k_2], A[k_3]$

Mejoras en `Quicksort`

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g. $n \leq 20$) podemos usar `InsertionSort`
  - A pesar de no tener una complejidad mejor
  - Eso es solo cuando hablamos asintóticamente
  - En la práctica, en instancias pequeñas tiene mejor desempeño
  - No olvidar que `Quicksort` es **recursivo**... eso cuesta recursos

- Usar la mediana de tres elementos como pivote
  - *Informar* la elección de pivote
  - Dado A, escogemos 3 elementos $A[k_1], A[k_2], A[k_3]$
  - En $\mathcal{O}(1)$ encontramos la mediana entre ellos

Mejoras en `Quicksort`

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g. $n \leq 20$) podemos usar `InsertionSort`
  - A pesar de no tener una complejidad mejor
  - Eso es solo cuando hablamos asintóticamente
  - En la práctica, en instancias pequeñas tiene mejor desempeño
  - No olvidar que `Quicksort` es **recursivo**... eso cuesta recursos

- Usar la mediana de tres elementos como pivote
  - *Informar* la elección de pivote
  - Dado A, escogemos 3 elementos $A[k_1], A[k_2], A[k_3]$
  - En $\mathcal{O}(1)$ encontramos la mediana entre ellos

- Particionar la secuencia en 3 sub-secuencias: menores, iguales y mayores

Mejoras en `Quicksort`

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g. $n \leq 20$) podemos usar `InsertionSort`
  - A pesar de no tener una complejidad mejor
  - Eso es solo cuando hablamos asintóticamente
  - En la práctica, en instancias pequeñas tiene mejor desempeño
  - No olvidar que `Quicksort` es **recursivo**... eso cuesta recursos

- Usar la mediana de tres elementos como pivote
  - *Informar* la elección de pivote
  - Dado A, escogemos 3 elementos $A[k_1], A[k_2], A[k_3]$
  - En $\mathcal{O}(1)$ encontramos la mediana entre ellos

- Particionar la secuencia en 3 sub-secuencias: menores, iguales y mayores
  - Mejora para caso con datos repetidos

Mejoras en `Quicksort`

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g. $n \leq 20$) podemos usar `InsertionSort`
  - A pesar de no tener una complejidad mejor
  - Eso es solo cuando hablamos asintóticamente
  - En la práctica, en instancias pequeñas tiene mejor desempeño
  - No olvidar que `Quicksort` es **recursivo**... eso cuesta recursos

- Usar la mediana de tres elementos como pivote
  - *Informar* la elección de pivote
  - Dado A, escogemos 3 elementos $A[k_1], A[k_2], A[k_3]$
  - En $\mathcal{O}(1)$ encontramos la mediana entre ellos

- Particionar la secuencia en 3 sub-secuencias: menores, iguales y mayores
  - Mejora para caso con datos repetidos
  - Evita que `Partition` particione innecesariamente sub-secuencias en que todos los valores son iguales

Complejidad de algoritmos de ordenación

Resumimos los resultados de complejidad por caso hasta el momento

Algoritmo	Mejor caso	Caso promedio	Peor caso	Memoria adicional
Selection Sort	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Insertion Sort	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Merge Sort	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(n)$
Quick Sort	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Heap Sort	?	?	?	?

Sumario

Objetivos de la clase

Objetivos de la clase

- ☐ Demostrar correctitud de `Partition`

Objetivos de la clase

- ☐ Demostrar correctitud de `Partition`
- ☐ Demostrar correctitud de `Quicksort`

Objetivos de la clase

- ☐ Demostrar correctitud de `Partition`
- ☐ Demostrar correctitud de `Quicksort`
- ☐ Determinar la complejidad de tiempo de `Quicksort`

Objetivos de la clase

- ☐ Demostrar correctitud de `Partition`
- ☐ Demostrar correctitud de `Quicksort`
- ☐ Determinar la complejidad de tiempo de `Quicksort`
- ☐ Comprender posibles mejoras para `Quicksort`