# Repaso I1

Clase 13

IIC 2133 - Sección 1

Prof. Yadran Eterovic

## Sumario

#### Interrogación 1

Algoritmos de ordenación

Dividir para conquistar

Árboles de búsqueda

Jn ejemplo de pruebas

Cierre

Objetivos a evaluar en la I1

☐ Comprender y comparar algoritmos de ordenación clásicos

- ☐ Comprender y comparar algoritmos de ordenación clásicos
- ☐ Modificar algoritmos conocidos para resolver problemas

- ☐ Comprender y comparar algoritmos de ordenación clásicos
- ☐ Modificar algoritmos conocidos para resolver problemas
- ☐ Diseñar algoritmos usando técnicas e ideas estudiadas

- ☐ Comprender y comparar algoritmos de ordenación clásicos
- ☐ Modificar algoritmos conocidos para resolver problemas
- Diseñar algoritmos usando técnicas e ideas estudiadas
- Demostrar correctitud y complejidad de algoritmos

- Comprender y comparar algoritmos de ordenación clásicos
- Modificar algoritmos conocidos para resolver problemas
- Diseñar algoritmos usando técnicas e ideas estudiadas
- Demostrar correctitud y complejidad de algoritmos
- Comprender el funcionamiento de EDDs de árboles

- Comprender y comparar algoritmos de ordenación clásicos
- Modificar algoritmos conocidos para resolver problemas
- Diseñar algoritmos usando técnicas e ideas estudiadas
- Demostrar correctitud y complejidad de algoritmos
- Comprender el funcionamiento de EDDs de árboles
- ☐ Comparar estructuras basadas en árboles

#### Objetivos a evaluar en la 11

- ☐ Comprender y comparar algoritmos de ordenación clásicos
- ☐ Modificar algoritmos conocidos para resolver problemas
- Diseñar algoritmos usando técnicas e ideas estudiadas
- Demostrar correctitud y complejidad de algoritmos
- Comprender el funcionamiento de EDDs de árboles
- ☐ Comparar estructuras basadas en árboles

Varios objetivos pueden incluirse en cada pregunta

Formato de la prueba

2 horas de tiempo

- 2 horas de tiempo
- Pool de 4 preguntas para elegir 3

- 2 horas de tiempo
- Pool de 4 preguntas para elegir 3
- Cada pregunta incluye un título que describe sus temas

- 2 horas de tiempo
- Pool de 4 preguntas para elegir 3
- Cada pregunta incluye un título que describe sus temas
- ¡SOLO se entregan 3 preguntas respondidas!

#### Formato de la prueba

- 2 horas de tiempo
- Pool de 4 preguntas para elegir 3
- Cada pregunta incluye un título que describe sus temas
- ¡SOLO se entregan 3 preguntas respondidas!

Nota de la I1: promedio de las 3 preguntas entregadas

#### Material adicional

■ Pueden usar un formulario/apuntes durante la prueba

- Pueden usar un formulario/apuntes durante la prueba
- Debe estar escrito a mano

- Pueden usar un formulario/apuntes durante la prueba
- Debe estar escrito a mano
- Una hoja carta (por ambos lados)

- Pueden usar un formulario/apuntes durante la prueba
- Debe estar escrito a mano
- Una hoja carta (por ambos lados)
- Sugerencia: incluyan los pseudocódigos vistos

#### Material adicional

- Pueden usar un formulario/apuntes durante la prueba
- Debe estar escrito a mano
- Una hoja carta (por ambos lados)
- Sugerencia: incluyan los pseudocódigos vistos

No se aceptarán diapositivas impresas

## Sumario

Interrogación 1

Algoritmos de ordenación

Dividir para conquistar

Árboles de búsqueda

Jn ejemplo de pruebas

Cierre

Lema:

Lema: seleccionar de forma ordenada

Lema: seleccionar de forma ordenada

Funcionamiento a alto nivel

Lema: seleccionar de forma ordenada

Funcionamiento a alto nivel

1. Seleccionar menor elemento

Lema: seleccionar de forma ordenada

Funcionamiento a alto nivel

- 1. Seleccionar menor elemento
- 2. Ubicarlo como último elemento en zona ordenada

Lema: seleccionar de forma ordenada

Funcionamiento a alto nivel

- 1. Seleccionar menor elemento
- 2. Ubicarlo como último elemento en zona ordenada
- 3. Repetir hasta seleccionar **todos** los elementos

Lema: seleccionar de forma ordenada

Funcionamiento a alto nivel

- 1. Seleccionar menor elemento
- 2. Ubicarlo como último elemento en zona ordenada
- 3. Repetir hasta seleccionar todos los elementos

Desempeño en casos

Lema: seleccionar de forma ordenada

Funcionamiento a alto nivel

- 1. Seleccionar menor elemento
- 2. Ubicarlo como último elemento en zona ordenada
- 3. Repetir hasta seleccionar **todos** los elementos

Desempeño en casos

No distingue secuencias por su orden a priori

Lema: seleccionar de forma ordenada

Funcionamiento a alto nivel

- 1. Seleccionar menor elemento
- 2. Ubicarlo como último elemento en zona ordenada
- 3. Repetir hasta seleccionar **todos** los elementos

#### Desempeño en casos

- No distingue secuencias por su orden a priori
- Mismo número de comparaciones en todas las secuencias

Lema: seleccionar de forma ordenada

Funcionamiento a alto nivel

- 1. Seleccionar menor elemento
- 2. Ubicarlo como último elemento en zona ordenada
- 3. Repetir hasta seleccionar todos los elementos

#### Desempeño en casos

- No distingue secuencias por su orden a priori
- Mismo número de comparaciones en todas las secuencias

Complejidad en la secuencia A[0...n-1]

Lema: seleccionar de forma ordenada

Funcionamiento a alto nivel

- 1. Seleccionar menor elemento
- 2. Ubicarlo como último elemento en zona ordenada
- 3. Repetir hasta seleccionar todos los elementos

#### Desempeño en casos

- No distingue secuencias por su orden a priori
- Mismo número de comparaciones en todas las secuencias

Complejidad en la secuencia A[0...n-1]

■ Versión original: tiempo  $\mathcal{O}(n^2)$  y memoria  $\mathcal{O}(n)$ 

Lema: seleccionar de forma ordenada

Funcionamiento a alto nivel

- 1. Seleccionar menor elemento
- 2. Ubicarlo como último elemento en zona ordenada
- 3. Repetir hasta seleccionar todos los elementos

#### Desempeño en casos

- No distingue secuencias por su orden a priori
- Mismo número de comparaciones en todas las secuencias

Complejidad en la secuencia A[0...n-1]

- Versión original: tiempo  $\mathcal{O}(n^2)$  y memoria  $\mathcal{O}(n)$
- Versión in place:

### SelectionSort

Lema: seleccionar de forma ordenada

Funcionamiento a alto nivel

- 1. Seleccionar menor elemento
- 2. Ubicarlo como último elemento en zona ordenada
- 3. Repetir hasta seleccionar todos los elementos

### Desempeño en casos

- No distingue secuencias por su orden a priori
- Mismo número de comparaciones en todas las secuencias

- Versión original: tiempo  $\mathcal{O}(n^2)$  y memoria  $\mathcal{O}(n)$
- Versión *in place*: tiempo  $\mathcal{O}(n^2)$  y memoria  $\mathcal{O}(1)$

### SelectionSort

Versión in place en tiempo  $\mathcal{O}(n^2)$ 

Lema:

Lema: insertar de forma ordenada

Lema: insertar de forma ordenada

Funcionamiento a alto nivel

Lema: insertar de forma ordenada

Funcionamiento a alto nivel

1. Seleccionar el primer elemento no revisado

Lema: insertar de forma ordenada

Funcionamiento a alto nivel

- 1. Seleccionar el primer elemento no revisado
- 2. Moverlo hasta su posición correcta

Lema: insertar de forma ordenada

Funcionamiento a alto nivel

- 1. Seleccionar el primer elemento no revisado
- 2. Moverlo hasta su posición correcta
- 3. Repetir hasta ubicar todos los elementos

Lema: insertar de forma ordenada

Funcionamiento a alto nivel

- 1. Seleccionar el primer elemento no revisado
- 2. Moverlo hasta su posición correcta
- 3. Repetir hasta ubicar todos los elementos

Desempeño en casos

Lema: insertar de forma ordenada

Funcionamiento a alto nivel

- 1. Seleccionar el primer elemento no revisado
- 2. Moverlo hasta su posición correcta
- 3. Repetir hasta ubicar todos los elementos

### Desempeño en casos

Como revisa si el elemento está bien insertado...

Lema: insertar de forma ordenada

Funcionamiento a alto nivel

- 1. Seleccionar el primer elemento no revisado
- 2. Moverlo hasta su posición correcta
- 3. Repetir hasta ubicar todos los elementos

### Desempeño en casos

- Como revisa si el elemento está bien insertado...
- ... se da cuenta cuando un elemento está ordenado

Lema: insertar de forma ordenada

Funcionamiento a alto nivel

- 1. Seleccionar el primer elemento no revisado
- 2. Moverlo hasta su posición correcta
- 3. Repetir hasta ubicar todos los elementos

Desempeño en casos

- Como revisa si el elemento está bien insertado...
- ... se da cuenta cuando un elemento está ordenado

Lema: insertar de forma ordenada

Funcionamiento a alto nivel

- 1. Seleccionar el primer elemento no revisado
- 2. Moverlo hasta su posición correcta
- 3. Repetir hasta ubicar todos los elementos

### Desempeño en casos

- Como revisa si el elemento está bien insertado...
- ... se da cuenta cuando un elemento está ordenado

Complejidad en la secuencia A[0...n-1]

■ Mejor caso: secuencia ordenada

Lema: insertar de forma ordenada

Funcionamiento a alto nivel

- 1. Seleccionar el primer elemento no revisado
- 2. Moverlo hasta su posición correcta
- 3. Repetir hasta ubicar todos los elementos

### Desempeño en casos

- Como revisa si el elemento está bien insertado...
- ... se da cuenta cuando un elemento está ordenado

- Mejor caso: secuencia ordenada
  - Versión in place: tiempo  $\mathcal{O}(n)$  y memoria  $\mathcal{O}(1)$

Lema: insertar de forma ordenada

Funcionamiento a alto nivel

- 1. Seleccionar el primer elemento no revisado
- 2. Moverlo hasta su posición correcta
- 3. Repetir hasta ubicar todos los elementos

### Desempeño en casos

- Como revisa si el elemento está bien insertado...
- ... se da cuenta cuando un elemento está ordenado

- Mejor caso: secuencia ordenada
  - Versión in place: tiempo  $\mathcal{O}(n)$  y memoria  $\mathcal{O}(1)$
- Todos los demás casos:

Lema: insertar de forma ordenada

#### Funcionamiento a alto nivel

- 1. Seleccionar el primer elemento no revisado
- 2. Moverlo hasta su posición correcta
- 3. Repetir hasta ubicar todos los elementos

### Desempeño en casos

- Como revisa si el elemento está bien insertado...
- ... se da cuenta cuando un elemento está ordenado

- Mejor caso: secuencia ordenada
  - Versión in place: tiempo  $\mathcal{O}(n)$  y memoria  $\mathcal{O}(1)$
- Todos los demás casos:
  - Versión in place: tiempo  $\mathcal{O}(n^2)$  y memoria  $\mathcal{O}(1)$

Versión in place: mejor caso  $\mathcal{O}(n)$ , e.o.c.  $\mathcal{O}(n^2)$ 

Lema:

Lema: mezclar mitades ordenadas

Lema: mezclar mitades ordenadas

Funcionamiento a alto nivel

Lema: mezclar mitades ordenadas

Funcionamiento a alto nivel

1. Recursivamente dividir secuencia en mitades

Lema: mezclar mitades ordenadas

Funcionamiento a alto nivel

- 1. Recursivamente dividir secuencia en mitades
- 2. Caso base: secuencias de largo 1

Lema: mezclar mitades ordenadas

Funcionamiento a alto nivel

- 1. Recursivamente dividir secuencia en mitades
- 2. Caso base: secuencias de largo 1
- 3. Mezclar ordenadamente subsecuencias ordenadas (Merge)

Lema: mezclar mitades ordenadas

Funcionamiento a alto nivel

- 1. Recursivamente dividir secuencia en mitades
- 2. Caso base: secuencias de largo 1
- 3. Mezclar ordenadamente subsecuencias ordenadas (Merge)

Desempeño

Lema: mezclar mitades ordenadas

Funcionamiento a alto nivel

- 1. Recursivamente dividir secuencia en mitades
- 2. Caso base: secuencias de largo 1
- 3. Mezclar ordenadamente subsecuencias ordenadas (Merge)

### Desempeño

Cantidad de llamados recursivos siempre logarítmica

Lema: mezclar mitades ordenadas

#### Funcionamiento a alto nivel

- 1. Recursivamente dividir secuencia en mitades
- 2. Caso base: secuencias de largo 1
- 3. Mezclar ordenadamente subsecuencias ordenadas (Merge)

### Desempeño

- Cantidad de llamados recursivos siempre logarítmica
- Mezcla lineal en todos los casos

Lema: mezclar mitades ordenadas

Funcionamiento a alto nivel

- 1. Recursivamente dividir secuencia en mitades
- 2. Caso base: secuencias de largo 1
- 3. Mezclar ordenadamente subsecuencias ordenadas (Merge)

### Desempeño

- Cantidad de llamados recursivos siempre logarítmica
- Mezcla lineal en todos los casos

Lema: mezclar mitades ordenadas

#### Funcionamiento a alto nivel

- 1. Recursivamente dividir secuencia en mitades
- 2. Caso base: secuencias de largo 1
- 3. Mezclar ordenadamente subsecuencias ordenadas (Merge)

### Desempeño

- Cantidad de llamados recursivos siempre logarítmica
- Mezcla lineal en todos los casos

Complejidad en la secuencia A[0...n-1]

■ Versión in place: tiempo  $\mathcal{O}(n\log(n))$  y memoria  $\mathcal{O}(n)$ 

```
Merge(A, B):
  input : Secuencia A
                                                            Iniciar C vacía
  output: Secuencia ordenada B
                                                           while |A| > 0 \land |B| > 0:
                                                     2
                                                                if A[1] \le B[1]:
                                                     3
  MergeSort (A):
                                                                    e \leftarrow \text{Extraer}(A[1])
      if |A| = 1: return A
                                                                else:
      Dividir A en A_1 y A_2
2
                                                                    e \leftarrow \text{Extraer}(B[1])
     B_1 \leftarrow \texttt{MergeSort}(A_1)
3
                                                                Insertar e al final de C
      B_2 \leftarrow \text{MergeSort}(A_2)
     B \leftarrow \text{Merge}(B_1, B_2)
                                                            Concatenar C con la
5
                                                     7
      return B
                                                             secuencia restante
                                                            return C
                                                     8
```

### Tiempo $\mathcal{O}(n\log(n))$ y memoria $\mathcal{O}(n)$

Lema:

Lema: ordenar pivotes de forma recursiva

Lema: ordenar pivotes de forma recursiva

Funcionamiento a alto nivel

Lema: ordenar pivotes de forma recursiva

Funcionamiento a alto nivel

1. Recursivamente ordenar un elemento arbitrario (pivote)

Lema: ordenar pivotes de forma recursiva

Funcionamiento a alto nivel

- 1. Recursivamente ordenar un elemento arbitrario (pivote)
- 2. Caso base: secuencias de largo 0

Lema: ordenar pivotes de forma recursiva

Funcionamiento a alto nivel

- 1. Recursivamente ordenar un elemento arbitrario (pivote)
- 2. Caso base: secuencias de largo 0
- 3. No requiere mezclar: Partition ordena elementos

Lema: ordenar pivotes de forma recursiva

Funcionamiento a alto nivel

- 1. Recursivamente ordenar un elemento arbitrario (pivote)
- 2. Caso base: secuencias de largo 0
- 3. No requiere mezclar: Partition ordena elementos

Desempeño

Lema: ordenar pivotes de forma recursiva

Funcionamiento a alto nivel

- 1. Recursivamente ordenar un elemento arbitrario (pivote)
- 2. Caso base: secuencias de largo 0
- 3. No requiere mezclar: Partition ordena elementos

### Desempeño

Depende de la elección del pivote

Lema: ordenar pivotes de forma recursiva

#### Funcionamiento a alto nivel

- 1. Recursivamente ordenar un elemento arbitrario (pivote)
- 2. Caso base: secuencias de largo 0
- No requiere mezclar: Partition ordena elementos

#### Desempeño

- Depende de la elección del pivote
- De antemano no podemos anticipar el desempeño: probabilístico

Lema: ordenar pivotes de forma recursiva

Funcionamiento a alto nivel

- 1. Recursivamente ordenar un elemento arbitrario (pivote)
- 2. Caso base: secuencias de largo 0
- 3. No requiere mezclar: Partition ordena elementos

### Desempeño

- Depende de la elección del pivote
- De antemano no podemos anticipar el desempeño: probabilístico

Complejidad en la secuencia A[0...n-1]

Lema: ordenar pivotes de forma recursiva

#### Funcionamiento a alto nivel

- 1. Recursivamente ordenar un elemento arbitrario (pivote)
- 2. Caso base: secuencias de largo 0
- 3. No requiere mezclar: Partition ordena elementos

### Desempeño

- Depende de la elección del pivote
- De antemano no podemos anticipar el desempeño: probabilístico

### Complejidad en la secuencia A[0...n-1]

Mejor caso y promedio

Lema: ordenar pivotes de forma recursiva

#### Funcionamiento a alto nivel

- 1. Recursivamente ordenar un elemento arbitrario (pivote)
- 2. Caso base: secuencias de largo 0
- 3. No requiere mezclar: Partition ordena elementos

#### Desempeño

- Depende de la elección del pivote
- De antemano no podemos anticipar el desempeño: probabilístico

### Complejidad en la secuencia A[0...n-1]

- Mejor caso y promedio
  - Versión in place: tiempo  $\mathcal{O}(n \log(n))$  y memoria  $\mathcal{O}(1)$

Lema: ordenar pivotes de forma recursiva

#### Funcionamiento a alto nivel

- 1. Recursivamente ordenar un elemento arbitrario (pivote)
- 2. Caso base: secuencias de largo 0
- No requiere mezclar: Partition ordena elementos

#### Desempeño

- Depende de la elección del pivote
- De antemano no podemos anticipar el desempeño: probabilístico

### Complejidad en la secuencia A[0...n-1]

- Mejor caso y promedio
  - Versión in place: tiempo  $\mathcal{O}(n\log(n))$  y memoria  $\mathcal{O}(1)$
- Peor caso: pivote mágicamente malo siempre

Lema: ordenar pivotes de forma recursiva

#### Funcionamiento a alto nivel

- 1. Recursivamente ordenar un elemento arbitrario (pivote)
- 2. Caso base: secuencias de largo 0
- No requiere mezclar: Partition ordena elementos

#### Desempeño

- Depende de la elección del pivote
- De antemano no podemos anticipar el desempeño: probabilístico

## Complejidad en la secuencia $A[0 \dots n-1]$

- Mejor caso y promedio
  - Versión in place: tiempo  $\mathcal{O}(n\log(n))$  y memoria  $\mathcal{O}(1)$
- Peor caso: pivote mágicamente malo siempre
  - Versión in place: tiempo  $\mathcal{O}(n^2)$  y memoria  $\mathcal{O}(1)$

```
Partition (A, i, f):
  input : Secuencia
                                                            x \leftarrow índice aleatorio en
            A[0,\ldots,n-1],
                                                              \{i,\ldots,f\}; p \leftarrow A[x]
             índices i, f
                                                      a = A[x] \rightleftarrows A[f]
  output: Ø
                                                      j \leftarrow i
                                                      4 for k = i \dots f - 1:
  QuickSort (A, i, f):
                                                                 if A[k] < p:
      if i < f :
1
                                                                     A[j] \rightleftarrows A[k]
           p \leftarrow \text{Partition}(A, i, f)
2
                                                                  j \leftarrow j + 1
           Quicksort(A, i, p-1)
                                                      7
3
           Quicksort(A, p + 1, f)
                                                      8 A[j] \rightleftharpoons A[f]
                                                             return i
                                                      9
```

Caso promedio y mejor caso: tiempo  $\mathcal{O}(n\log(n))$  y memoria  $\mathcal{O}(1)$ 

■ Para sub-secuencias pequeñas (e.g.  $n \le 20$ ) podemos usar InsertionSort

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g.  $n \le 20$ ) podemos usar InsertionSort
  - A pesar de no tener una complejidad mejor

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g.  $n \le 20$ ) podemos usar InsertionSort
  - A pesar de no tener una complejidad mejor
  - Eso es solo cuando hablamos asintóticamente

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g.  $n \le 20$ ) podemos usar InsertionSort
  - A pesar de no tener una complejidad mejor
  - Eso es solo cuando hablamos asintóticamente
  - En la práctica, en instancias pequeñas tiene mejor desempeño

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g. n ≤ 20) podemos usar InsertionSort
  - A pesar de no tener una complejidad mejor
  - Eso es solo cuando hablamos asintóticamente
  - En la práctica, en instancias pequeñas tiene mejor desempeño
  - No olvidar que Quicksort es recursivo... eso cuesta recursos

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g.  $n \le 20$ ) podemos usar InsertionSort
  - A pesar de no tener una complejidad mejor
  - · Eso es solo cuando hablamos asintóticamente
  - En la práctica, en instancias pequeñas tiene mejor desempeño
  - No olvidar que Quicksort es recursivo... eso cuesta recursos
- Usar la mediana de tres elementos como pivote

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g.  $n \le 20$ ) podemos usar InsertionSort
  - A pesar de no tener una complejidad mejor
  - · Eso es solo cuando hablamos asintóticamente
  - En la práctica, en instancias pequeñas tiene mejor desempeño
  - No olvidar que Quicksort es recursivo... eso cuesta recursos
- Usar la mediana de tres elementos como pivote
  - Informar la elección de pivote

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g.  $n \le 20$ ) podemos usar InsertionSort
  - A pesar de no tener una complejidad mejor
  - Eso es solo cuando hablamos asintóticamente
  - En la práctica, en instancias pequeñas tiene mejor desempeño
  - No olvidar que Quicksort es recursivo... eso cuesta recursos
- Usar la mediana de tres elementos como pivote
  - Informar la elección de pivote
  - Dado A, escogemos 3 elementos  $A[k_1], A[k_2], A[k_3]$

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g.  $n \le 20$ ) podemos usar InsertionSort
  - A pesar de no tener una complejidad mejor
  - Eso es solo cuando hablamos asintóticamente
  - En la práctica, en instancias pequeñas tiene mejor desempeño
  - No olvidar que Quicksort es recursivo... eso cuesta recursos
- Usar la mediana de tres elementos como pivote
  - Informar la elección de pivote
  - Dado A, escogemos 3 elementos  $A[k_1], A[k_2], A[k_3]$
  - En  $\mathcal{O}(1)$  encontramos la mediana entre ellos

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g.  $n \le 20$ ) podemos usar InsertionSort
  - A pesar de no tener una complejidad mejor
  - Eso es solo cuando hablamos asintóticamente
  - En la práctica, en instancias pequeñas tiene mejor desempeño
  - No olvidar que Quicksort es recursivo... eso cuesta recursos
- Usar la mediana de tres elementos como pivote
  - Informar la elección de pivote
  - Dado A, escogemos 3 elementos  $A[k_1], A[k_2], A[k_3]$
  - En  $\mathcal{O}(1)$  encontramos la mediana entre ellos
- Particionar la secuencia en 3 sub-secuencias: menores, iguales y mayores

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g. n ≤ 20) podemos usar InsertionSort
  - A pesar de no tener una complejidad mejor
  - Eso es solo cuando hablamos asintóticamente
  - En la práctica, en instancias pequeñas tiene mejor desempeño
  - No olvidar que Quicksort es recursivo... eso cuesta recursos
- Usar la mediana de tres elementos como pivote
  - Informar la elección de pivote
  - Dado A, escogemos 3 elementos  $A[k_1], A[k_2], A[k_3]$
  - En  $\mathcal{O}(1)$  encontramos la mediana entre ellos
- Particionar la secuencia en 3 sub-secuencias: menores, iguales y mayores
  - Mejora para caso con datos repetidos

- Para sub-secuencias pequeñas (e.g.  $n \le 20$ ) podemos usar InsertionSort
  - A pesar de no tener una complejidad mejor
  - · Eso es solo cuando hablamos asintóticamente
  - En la práctica, en instancias pequeñas tiene mejor desempeño
  - No olvidar que Quicksort es recursivo... eso cuesta recursos
- Usar la mediana de tres elementos como pivote
  - Informar la elección de pivote
  - Dado A, escogemos 3 elementos  $A[k_1], A[k_2], A[k_3]$
  - En  $\mathcal{O}(1)$  encontramos la mediana entre ellos
- Particionar la secuencia en 3 sub-secuencias: menores, iguales y mayores
  - Mejora para caso con datos repetidos
  - Evita que Partition particione innecesariamente sub-secuencias en que todos los valores son iguales

Definición

Un heap binario H es un árbol binario tal que

#### Definición

Un heap binario H es un árbol binario tal que

H.left y H.right son heaps binarios

#### Definición

Un heap binario H es un árbol binario tal que

- H.left y H.right son heaps binarios
- H.value > H.left.value

### Definición

Un heap binario H es un árbol binario tal que

- H.left y H.right son heaps binarios
- H.value > H.left.value
- H.value > H.right.value

### Definición

Un heap binario H es un árbol binario tal que

- H.left y H.right son heaps binarios
- H.value > H.left.value
- H.value > H.right.value

A estas condiciones les llamamos propiedad de heap

### Definición

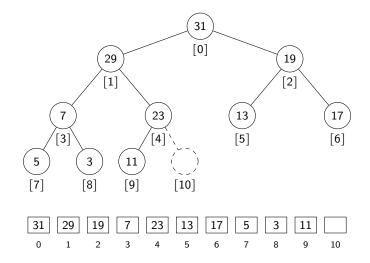
Un heap binario H es un árbol binario tal que

- H.left y H.right son heaps binarios
- H.value > H.left.value
- H.value > H.right.value

A estas condiciones les llamamos propiedad de heap

Esta es la definición de un MAX heap

# Heaps binarios: representación compacta



Aspectos esenciales

Aspectos esenciales

Propiedad de heap

### Aspectos esenciales

Propiedad de heap

descendientes < nodo < ancestros

#### Aspectos esenciales

Propiedad de heap

descendientes < nodo < ancestros

■ Se asegura balance mediante sus operaciones

#### Aspectos esenciales

Propiedad de heap

descendientes < nodo < ancestros

- Se asegura balance mediante sus operaciones
  - Inserción al final del arreglo, reubicando (SiftUp)

#### Aspectos esenciales

Propiedad de heap

descendientes < nodo < ancestros

- Se asegura balance mediante sus operaciones
  - Inserción al final del arreglo, reubicando (SiftUp)
  - Extracción de la raíz, reemplazando con el último y reubicando (SiftDown)

#### Aspectos esenciales

Propiedad de heap

descendientes < nodo < ancestros

- Se asegura balance mediante sus operaciones
  - Inserción al final del arreglo, reubicando (SiftUp)
  - Extracción de la raíz, reemplazando con el último y reubicando (SiftDown)
  - Actualización de prioridad (SiftUp)

#### Aspectos esenciales

Propiedad de heap

descendientes < nodo < ancestros

- Se asegura balance mediante sus operaciones
  - Inserción al final del arreglo, reubicando (SiftUp)
  - Extracción de la raíz, reemplazando con el último y reubicando (SiftDown)
  - Actualización de prioridad (SiftUp)

Operaciones logarítmicas en la cantidad de nodos

#### Operaciones

■ Inserción: agregar un nuevo elemento

- Inserción: agregar un nuevo elemento
  - Se inserta al final del arreglo

- Inserción: agregar un nuevo elemento
  - Se inserta al final del arreglo
  - Se reubica con SiftUp

- Inserción: agregar un nuevo elemento
  - Se inserta al final del arreglo
  - Se reubica con SiftUp
- Extracción: sacar y retornar el más prioritario

- Inserción: agregar un nuevo elemento
  - Se inserta al final del arreglo
  - Se reubica con SiftUp
- Extracción: sacar y retornar el más prioritario
  - Se saca el primer elemento y se reemplaza con el último

- Inserción: agregar un nuevo elemento
  - Se inserta al final del arreglo
  - Se reubica con SiftUp
- Extracción: sacar y retornar el más prioritario
  - Se saca el primer elemento y se reemplaza con el último
  - Se reubica la nueva raíz con SiftDown

- Inserción: agregar un nuevo elemento
  - Se inserta al final del arreglo
  - Se reubica con SiftUp
- Extracción: sacar y retornar el más prioritario
  - Se saca el primer elemento y se reemplaza con el último
  - Se reubica la nueva raíz con SiftDown
- Actualización: aumentarle la prioridad a un nodo

- Inserción: agregar un nuevo elemento
  - Se inserta al final del arreglo
  - Se reubica con SiftUp
- Extracción: sacar y retornar el más prioritario
  - Se saca el primer elemento y se reemplaza con el último
  - Se reubica la nueva raíz con SiftDown
- Actualización: aumentarle la prioridad a un nodo
  - Se reubica el nodo con SiftUp

#### Operaciones

- Inserción: agregar un nuevo elemento
  - Se inserta al final del arreglo
  - Se reubica con SiftUp
- Extracción: sacar y retornar el más prioritario
  - Se saca el primer elemento y se reemplaza con el último
  - Se reubica la nueva raíz con SiftDown
- Actualización: aumentarle la prioridad a un nodo
  - Se reubica el nodo con SiftUp

Todas estas son operaciones  $\mathcal{O}(\log(n))$ 

#### Operaciones

- Inserción: agregar un nuevo elemento
  - Se inserta al final del arreglo
  - Se reubica con SiftUp
- Extracción: sacar y retornar el más prioritario
  - Se saca el primer elemento y se reemplaza con el último
  - Se reubica la nueva raíz con SiftDown
- Actualización: aumentarle la prioridad a un nodo
  - Se reubica el nodo con SiftUp

Todas estas son operaciones  $\mathcal{O}(\log(n))$ 

Los heaps no se usan para buscar, sino para informar el elemento más prioritario

Orientaciones para el estudio

Orientaciones para el estudio

☐ Comprender la representación compacta de heaps

Orientaciones para el estudio

- ☐ Comprender la representación compacta de heaps
- ☐ Comprender operaciones y su uso para mantener una cola de prioridad

#### Orientaciones para el estudio

- ☐ Comprender la representación compacta de heaps
- ☐ Comprender operaciones y su uso para mantener una cola de prioridad
- □ Considerar casos borde: ¿qué pasa si la prioridad es el orden de llegada? ¿Qué se puede hacer más rápido y cómo?

#### Orientaciones para el estudio

- ☐ Comprender la representación compacta de heaps
- ☐ Comprender operaciones y su uso para mantener una cola de prioridad
- □ Considerar casos borde: ¿qué pasa si la prioridad es el orden de llegada? ¿Qué se puede hacer más rápido y cómo?

Incluyan en el formulario el pseudocódigo de los métodos de heaps

Aspectos esenciales de los algoritmos de orden lineal

Operan sobre naturales (índices para un arreglo)

- Operan sobre naturales (índices para un arreglo)
- Counting Sort permite ordenar naturales de un conjunto acotado

- Operan sobre naturales (índices para un arreglo)
- Counting Sort permite ordenar naturales de un conjunto acotado
- La idea se generaliza a Radix para ordenar palabras cualesquiera

- Operan sobre naturales (índices para un arreglo)
- Counting Sort permite ordenar naturales de un conjunto acotado
- La idea se generaliza a Radix para ordenar palabras cualesquiera
  - Cada símbolo se asocia con un natural

- Operan sobre naturales (índices para un arreglo)
- Counting Sort permite ordenar naturales de un conjunto acotado
- La idea se generaliza a Radix para ordenar palabras cualesquiera
  - Cada símbolo se asocia con un natural
  - Requiere un algoritmo estable como Counting Sort

Aspectos esenciales de los algoritmos de orden lineal

- Operan sobre naturales (índices para un arreglo)
- Counting Sort permite ordenar naturales de un conjunto acotado
- La idea se generaliza a Radix para ordenar palabras cualesquiera
  - Cada símbolo se asocia con un natural
  - Requiere un algoritmo estable como Counting Sort

Estos algoritmos ordenan n datos en tiempo  $\mathcal{O}(n)$  si la cantidad de símbolos diferentes es  $\mathcal{O}(n)$ 

Orientaciones para el estudio

Orientaciones para el estudio

☐ Comprender cuándo se pueden ocupar los algoritmos lineales

#### Orientaciones para el estudio

- ☐ Comprender cuándo se pueden ocupar los algoritmos lineales
- ☐ Comprender pseudocódigo de Counting Sort y Radix para potenciales modificaciones

## Complejidad de algoritmos de ordenación

Resumimos los resultados de complejidad por caso hasta el momento

Algoritmo	Mejor caso	Caso promedio	Peor caso	Memoria adicional
Selection Sort	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Insertion Sort	$\mathcal{O}(n)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Merge Sort	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(n)$
Quick Sort	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(n^2)$	$\mathcal{O}(1)$
Heap Sort	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(n\log(n))$	$\mathcal{O}(1)$

# Sumario

Interrogación 1

Algoritmos de ordenación

Dividir para conquistar

Árboles de búsqueda

Jn ejemplo de pruebas

Cierre

## Estrategias algorítmicas

Además de estudiar algoritmos iterativos, vimos dos ejemplos recursivos de la estrategia **dividir para conquistar** 

## Estrategias algorítmicas

Además de estudiar algoritmos iterativos, vimos dos ejemplos recursivos de la estrategia **dividir para conquistar** 

A saber,

- MergeSort
- QuickSort

## Dividir para conquistar

La estrategia sigue los siguientes pasos

## Dividir para conquistar

La estrategia sigue los siguientes pasos

1. Dividir el problema original en dos (o más) sub-problemas del mismo tipo

### Dividir para conquistar

La estrategia sigue los siguientes pasos

- 1. Dividir el problema original en dos (o más) sub-problemas del mismo tipo
- 2. Resolver recursivamente cada sub-problema

### Dividir para conquistar

La estrategia sigue los siguientes pasos

- 1. Dividir el problema original en dos (o más) sub-problemas del mismo tipo
- 2. Resolver recursivamente cada sub-problema
- Encontrar solución al problema original combinando las soluciones a los sub-problemas

### Dividir para conquistar

La estrategia sigue los siguientes pasos

- Dividir el problema original en dos (o más) sub-problemas del mismo tipo
- 2. Resolver recursivamente cada sub-problema
- Encontrar solución al problema original combinando las soluciones a los sub-problemas

Los sub-problemas son instancias más pequeñas del problema a resolver

### Un ejemplo adicional: Búsqueda binaria

El algoritmo de búsqueda binaria está basado en la estrategia dividir para conquistar

```
BSearch (A, x, i, f):

1 if f < i: return -1

2 m \leftarrow \left\lfloor \frac{i+f}{2} \right\rfloor

3 if A[m] = x: return m

4 if A[m] > x:

5 return BSearch (A, x, i, m-1)

6 return BSearch (A, x, m+1, f)
```

### Un ejemplo adicional: Búsqueda binaria

El algoritmo de búsqueda binaria está basado en la estrategia dividir para conquistar

```
BSearch (A, x, i, f):

1 if f < i: return -1

2 m \leftarrow \left\lfloor \frac{i+f}{2} \right\rfloor

3 if A[m] = x: return m

4 if A[m] > x:

5 return BSearch (A, x, i, m-1)

6 return BSearch (A, x, m+1, f)
```

Recordar: ciertos algoritmos D.P.C. no resuelven todos los subproblemas

## Sumario

Interrogación 1

Algoritmos de ordenación

Dividir para conquistar

Árboles de búsqueda

Un ejemplo de pruebas

Cierre

#### Definición

#### Definición

Un diccionario es una estructura de datos con las siguientes operaciones

Asociar un valor a una llave

#### Definición

- Asociar un valor a una llave
- Actualizar el valor asociado a una llave

#### Definición

- Asociar un valor a una llave
- Actualizar el valor asociado a una llave
- Obtener el valor asociado a una llave

#### Definición

- Asociar un valor a una llave
- Actualizar el valor asociado a una llave
- Obtener el valor asociado a una llave
- En ciertos casos, eliminar de la estructura una asociación llave-valor

#### Definición

Un diccionario es una estructura de datos con las siguientes operaciones

- Asociar un valor a una llave
- Actualizar el valor asociado a una llave
- Obtener el valor asociado a una llave
- En ciertos casos, eliminar de la estructura una asociación llave-valor

Objetivo central: búsqueda eficiente

Vimos dos instancias de diccionarios

1. Árboles de búsqueda

- 1. Árboles de búsqueda
  - Árbol Binario
  - Binarios AVL

- 1. Árboles de búsqueda
  - Árbol Binario
  - Binarios AVL

- 1. Árboles de búsqueda
  - Árbol Binario
  - Binarios AVL

Tipos estudiados: binarios, AVL Aspectos esenciales

Tipos estudiados: binarios, AVL

Aspectos esenciales

■ Todos los tipos tienen la propiedad de búsqueda: valores ordenados en

Tipos estudiados: binarios, AVL

Aspectos esenciales

■ Todos los tipos tienen la propiedad de búsqueda: valores ordenados en

hijo izquierdo < padre < hijo derecho

Tipos estudiados: binarios, AVL

Aspectos esenciales

- Todos los tipos tienen la propiedad de búsqueda: valores ordenados en hijo izquierdo < padre < hijo derecho</p>
- AVL tipo tiene una noción de balance dada por sus operaciones

Tipos estudiados: binarios, AVL

Aspectos esenciales

- Todos los tipos tienen la propiedad de búsqueda: valores ordenados en hijo izquierdo < padre < hijo derecho
- AVL tipo tiene una noción de balance dada por sus operaciones
  - AVL cuida la altura de sus hijos recursivamente

Tipos estudiados: binarios, AVL

Aspectos esenciales

- Todos los tipos tienen la propiedad de búsqueda: valores ordenados en hijo izquierdo < padre < hijo derecho
- AVL tipo tiene una noción de balance dada por sus operaciones
  - AVL cuida la altura de sus hijos recursivamente

Tipos estudiados: binarios, AVL

Aspectos esenciales

- Todos los tipos tienen la propiedad de búsqueda: valores ordenados en hijo izquierdo < padre < hijo derecho
- AVL tipo tiene una noción de balance dada por sus operaciones
  - AVL cuida la altura de sus hijos recursivamente

Importancia del balance: mantener el árbol con profundidad logarítmica

#### Operaciones

Búsqueda gracias a la propiedad de búsqueda

- Búsqueda gracias a la propiedad de búsqueda
- Inserción

- Búsqueda gracias a la propiedad de búsqueda
- Inserción
  - AVL: involucra posibles rotaciones

- Búsqueda gracias a la propiedad de búsqueda
- Inserción
  - AVL: involucra posibles rotaciones
- Eliminación: en general compleja y recursiva

#### Operaciones

- Búsqueda gracias a la propiedad de búsqueda
- Inserción
  - AVL: involucra posibles rotaciones
- Eliminación: en general compleja y recursiva

Todas estas son operaciones  $\mathcal{O}(\log(n))$  cuando  $h \in \mathcal{O}(\log(n))$ 

#### Operaciones

- Búsqueda gracias a la propiedad de búsqueda
- Inserción
  - AVL: involucra posibles rotaciones
- Eliminación: en general compleja y recursiva

Todas estas son operaciones  $\mathcal{O}(\log(n))$  cuando  $h \in \mathcal{O}(\log(n))$ 

Las operaciones se benefician del balance

- ☐ Comprender la estrategia de balance
- ☐ Construir árboles pequeños con inserción de llaves sucesivas

- ☐ Comprender la estrategia de balance
- ☐ Construir árboles pequeños con inserción de llaves sucesivas
- ☐ Definir pequeñas secuencias de inserción que generan árboles más/menos desbalanceados

- ☐ Comprender la estrategia de balance
- ☐ Construir árboles pequeños con inserción de llaves sucesivas
- Definir pequeñas secuencias de inserción que generan árboles más/menos desbalanceados
- ☐ Comparar el desempeño de los árboles en posibles situaciones prácticas.
  - ¿Cuál se puede portar mejor?

- ☐ Comprender la estrategia de balance
- ☐ Construir árboles pequeños con inserción de llaves sucesivas
- Definir pequeñas secuencias de inserción que generan árboles más/menos desbalanceados
- ☐ Comparar el desempeño de los árboles en posibles situaciones prácticas.
  - ¿Cuál se puede portar mejor?

# Sumario

Interrogación 1

Algoritmos de ordenación

Dividir para conquistar

Árboles de búsqueda

Un ejemplo de pruebas

Cierre

# Ejemplo 1: Análisis de algoritmos

```
For v3.9
                                             input: Arreglo A[0, \ldots, n-1],
                                                      índices i, f
                                             output: Arreglo ordenado
                                           1 LeftRight (A, i, f):
                                           2 begin
                                          4 i ← i
                                          6 for m = i ... f:
                                                begin
                                                    if A[m] > A[m+1]:
  For v3.9
                                          10
                                                    begin
  input : Arr A[0,\ldots,n-1]
                                                        A[m] \rightleftarrows A[m+1]
                                          12
  output: Arreglo ordenado
                                                       i ← m
                                          14
1 CocktailShakerSort (A):
                                                    end
                                          15
2 begin
                                          16
                                                end
     i \leftarrow 0
                                                return i
                                          17
  f \leftarrow n-2
                                          18 end
     while i < f:
                                             For v3.9
     begin
9
                                             input · \Delta rreglo \Delta [0 	 n-1]
```

29 / 40

#### Ejercicio (I1 P2 - 2022-2)

Un archivo contiene datos de todos los estudiantes que han rendido cursos del DCC desde 1980 hasta la fecha. El formato cada registro en el archivo es

RUT	primer_apellido	segundo_apellido	nombre
-----	-----------------	------------------	--------

y los registros se encuentran ordenados por RUT.

Proponga el pseudocódigo de un algoritmo para ordenar los registros alfabéticamente, i.e. según (primer\_apellido, segundo\_apellido, nombre). Especifique qué estructura básica usará (listas o arreglos). Si p es un registro, puede acceder a sus atributos con p.primer\_apellido, p.nombre, etc. Además, puede asumir que todo algoritmo de ordenación visto en clase puede ordenar respecto a un atributo específico.

```
Ejemplo 1: Aplicación de algoritmos
      For v3.9
      input: Arreglo A[0, ..., n-1] e índices i, f
      output: Lista de pares de índices L
    1 FirstLastNameReps (A, i, f):
    2 begin
         L ← lista vacía
    4 k \leftarrow i
    j \leftarrow i
      for m = 1 ... f :
         begin
             if A[m].primer_apellido = A[k].primer_apellido:
             begin
    9
                 i \leftarrow m
   10
   11
             end
             else:
   12
             begin
   13
                 if k < j:
   14
                 begin
   15
                    añadir a L el par (k, j)
   16
```

FirstLastNameReps (A, i, f) entrega una lista con los rangos entre los cuales hay repeticiones de primer apellido entre los índices i y f. De forma similar se define la rutina SecondLastNameReps que entrega rangos de repetidos de segundo apellido.

```
For v3.9
   input: Arreglo A[0, ..., n-1]
   output: Arreglo ordenado alfabéticamente
1 AlphaSort (A):
2 begin
       MergeSort(A, 0, n-1, primer\_apellido) \triangleright A según 1^{\circ} apellido
4
       F \leftarrow \text{FirstLastNameReps}(A, 0, n-1)
6
      for (k, j) \in F:
8
9
      begin
          MergeSort(A, k, j, segundo_apellido)
11
           S \leftarrow \text{SecondLastNameReps}(A, k, i)
13
          for (s, t) \in S:
15
          begin
16
              MergeSort(A, s, t, nombre)
18
          end
19
       end
20
21 end
```

Ejercicio (I1 P2 - 2022-2)

Determine la complejidad de peor caso de su algoritmo en función del número de estudiantes en el archivo.

El peor caso corresponde a una cantidad  $\mathcal{O}(n)$  de repetidos en primer y segundo apellido. Luego, el análisis de complejidad puede resumirse en

- Línea 1 en  $\mathcal{O}(n\log(n))$
- Línea 2 en  $\mathcal{O}(n)$
- for de línea 3 se ejecuta  $\mathcal{O}(n)$  veces
  - Línea 4 en  $\mathcal{O}(n\log(n))$
  - Línea 5 en  $\mathcal{O}(n)$
  - for de línea 6 se ejecuta  $\mathcal{O}(n)$  veces
    - Línea 7 en  $\mathcal{O}(n\log(n))$

Con esto, la complejidad sería

$$\mathcal{O}(n\log(n) + n + n \cdot [n\log(n) + n + n \cdot (n\log(n))]) \Rightarrow \mathcal{O}(n^3\log(n))$$

## Ejemplo 2: Dividir para conquistar

### Ejercicio (I1 P3 - 2022-2)

Dada una secuencia  $A[0 \dots n-1]$  de números enteros, se define un **índice mágico** como un índice  $0 \le i \le n-1$  tal que A[i] = i. Por ejemplo, en la siguiente secuencia

existen dos índices mágicos: el 2 y el 9.

Dada una secuencia A[0...n-1] <u>ordenada</u>, sin elementos repetidos e implementada como arreglo,

proponga el pseudocódigo de un algoritmo que retorne un índice mágico en A si existe y que retorne null en caso contrario. Su algoritmo debe ser más eficiente que simplemente revisar el arreglo elemento por elemento, i.e. mejor que  $\mathcal{O}(n)$ .

Ejemplo 2: Dividir para conquistar

```
Ejemplo 2: Dividir para conquistar
      For v3.9
      input: Arreglo A[0, ..., n-1], índices i, f
      output: Índice mágico o null
    1 Magic (A, i, f):
    2 begin
        if (f - i) = 0:
        begin
            if A[i] = i:
    7
            begin
    8
                return i
   10
   11
            end
             return null
   13
         end
   14
       p \leftarrow |(f-i)/2|
   16
       if A[p] = p:
   18
         begin
   19
             return p
   21
         end
   22
         if A[p] > p:
   24
```

39 / 40

# Sumario

Interrogación 1

Algoritmos de ordenación

Dividir para conquistar

Árboles de búsqueda

Un ejemplo de pruebas

Cierre

Para los algoritmos vistos en clase

Comprender las demostraciones de correctitud

- Comprender las demostraciones de correctitud
- Replicarlas por su cuenta

- Comprender las demostraciones de correctitud
- Replicarlas por su cuenta
- Asegurarse de poder motivar el ¿por qué se plantea esta propiedad para demostrar?

- Comprender las demostraciones de correctitud
- Replicarlas por su cuenta
- Asegurarse de poder motivar el ¿por qué se plantea esta propiedad para demostrar?
- Ser capaz de determinar su complejidad y casos

Para los algoritmos vistos en clase

- Comprender las demostraciones de correctitud
- Replicarlas por su cuenta
- Asegurarse de poder motivar el ¿por qué se plantea esta propiedad para demostrar?
- Ser capaz de determinar su complejidad y casos

Guías de ejercicios y pautas anteriores

#### Para los algoritmos vistos en clase

- Comprender las demostraciones de correctitud
- Replicarlas por su cuenta
- Asegurarse de poder motivar el ¿por qué se plantea esta propiedad para demostrar?
- Ser capaz de determinar su complejidad y casos

#### Guías de ejercicios y pautas anteriores

Hay harto material resuelto en el repo!

#### Para los algoritmos vistos en clase

- Comprender las demostraciones de correctitud
- Replicarlas por su cuenta
- Asegurarse de poder motivar el ¿por qué se plantea esta propiedad para demostrar?
- Ser capaz de determinar su complejidad y casos

#### Guías de ejercicios y pautas anteriores

- Hay harto material resuelto en el repo!
- No se aprendan pautas... seleccionen y aprovéchenlas

#### Para los algoritmos vistos en clase

- Comprender las demostraciones de correctitud
- Replicarlas por su cuenta
- Asegurarse de poder motivar el ¿por qué se plantea esta propiedad para demostrar?
- Ser capaz de determinar su complejidad y casos

#### Guías de ejercicios y pautas anteriores

- Hay harto material resuelto en el repo!
- No se aprendan pautas... seleccionen y aprovéchenlas
- Planifiquen su solución antes de verla, y luego consulten la pauta