海亮信息学奥赛集训 数学专场

2019.2

一、题目概况

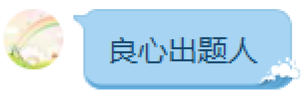
题目名称	亚瑟王	取石子游戏	约数个数和	礼物
题目英文名称	simple	stone	formula	gift
输入文件名	simple.in	stone.in	formula.in	gift.in
输出文件名	simple.out	stone.out	formula.out	gift.out
每个测试点时限	1 秒	1 秒	1 秒	1 秒
测试点数目	10	20	20	10
每个测试点分值	10	5	5	10
结果比较方式	全文比较 忽略行末空格文末回车			实数比较
题目类型	传统型	传统型	传统型	传统型
运行内存上限	256M	256M	256M	256M

二、提交源程序文件名

对于 C 语言	simple.c	stone.c	formula.c	gift.c
对于 C++语言	simple.cpp	stone.cpp	formula.cpp	gift.cpp
对于 pascal 语言	simple.pas	stone.pas	formula.pas	gift.pas

三、注意事项

1. 文件名（程序名和输入输出名）必须用英文小写。
2. C/C++中函数 main 的返回值类型必须为 int，程序正常结束返回值必须是 0。
3. 根据 std 在评测机的运行时间适当放宽时间限制。
4. 祝考试顺利



1. 亚瑟王

(simple.c/cpp/pas)

【问题描述】

亚瑟王掷一枚硬币，概率p正面向上，概率$(1-p)$反面向上。

现在亚瑟王要掷k次正面向上，他想知道期望要投掷多少枚硬币才能掷到k次正面向上。

小 B 觉得这题太简单了，加了一个问题：如果亚瑟王第i次投掷硬币花费为$(2i-1)$，那么期望花费多少才能掷到k次正面向上。不用担心，你只需要对一些特定的测试点回答这个问题即可。

亚瑟王不喜欢小数, 因此他会告诉你$p=\frac{a}{b}$, 你只需要告诉他答案对(10^9+7)取模即可。

【数据规模与约定】

测试点	数据范围
1-2	$T=1,1\le k\le 10$
3-4	$T=1,1\le k\le 10^3$
5-6	$T=1,1\le k\le 10^6$
7-8	$T=1,1\le k\le 10^9$
9	$T=2,1\le k\le 10$
10	$T=2,1\le k\le 10^9$

对于所有的数据，保证$1\le k,a,b\le 10^9$。

【题目来源】POJ 3682 改编

【题解】

设$E(i)$表示期望掷多少次才能掷到i次正面朝上。

那么$E(i)=\big(1+E(i)\big)\times(1-p)+\big(1+E(i-1)\big)\times p$；解得$E(i)=E(i-1)+\frac{1}{p}=\frac{i}{p}$

同时令$F(i)$表示期望花费多少钱才能掷到i次正面朝上。

那么$F(i)=(F(i)+2(E(i)+1)-1)\times(1-p)+(F(i-1)+2(E(i-1)+1)-1)\times p$

从而$F(i)=(1-p)(F(i)+2E(i)+1)+p(F(i-1)+2E(i-1)+1)$

即$F(i)=\frac{(1-p)}{p}(2E(i)+1)+F(i-1)+2E(i-1)+1=\frac{1-p}{p}\left(\frac{2i}{p}+1\right)+F(i-1)+\frac{2(i-1)}{p}+1$

$$F(i)=F(i-1)+\frac{2}{p^2}i-\frac{1}{p}$$

从而,

$$F(k)=\frac{2}{p^2}(1+k)*\frac{k}{2}-\frac{k}{p}=\frac{(1+k)k}{p^2}-\frac{k}{p}$$

带入$p=\frac{a}{b}$，有

$$F(k)=\frac{(1+k)kb^2}{a^2}-\frac{kb}{a},E(k)=\frac{k}{p}=\frac{kb}{a}$$

处理出逆元即可。

2. 取石子游戏

(stone.c/cpp/pas)

【问题描述】

小 A 拿来了一堆 n 个石子，邀请小 B 一起玩取石子游戏，规则是每人每次可以取不超过 3 个石子，谁先取完谁获胜。

小 B 看了一眼石子的个数，在飞快的心算过后，明白了小 A 存心要坑他，于是小 B 提出了一个新的游戏规则:

每个人每步可以将一堆石子分成 k 堆($k \geq 2$)，由于小 B 非常喜欢等差数列，尤其喜欢公差为 1 的等差数列，故要求这 k 堆石子排成一个公差为 1 的等差数列。换句话说，如果分出来的每堆石子有$a_1, a_2, \dots, a_k$个（不妨$a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_k$），那么需要满足:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_k - a_{k-1} = 1$$

无法操作的玩家则失败。

小 B 为了显示出自己的友善，让小 A 先取石子。小 A 觉得小 B 也别有用心，但是他自己并无法一眼看出这个状态是否有必胜方案，于是他找了你，想知道他是否有必胜策略。

小 A 发现，得知是否有必胜策略还不够，他还需要知道先手第一步该如何操作。由于把石头搬来搬去很累，所以小 A 想知道，若有必胜策略，先手第一步最少分成几堆可以必胜?

【数据规模与约定】

测试点	数据范围
1-2	$1 \leq n \leq 10$
3-6	$1 \leq n \leq 100$
7-10	$1 \leq n \leq 1000$
11-14	$1 \leq n \leq 10^4$
15-16	$1 \leq n \leq 10^5$
17-20	$1 \leq n \leq 1.2 \times 10^5$

对于所有的数据，保证$1 \leq n \leq 1.2 \times 10^5$。

【题目来源】CodeForces 87C

【题解】

如果 n 可以分成$k, k+1, \dots, k+j-1$这 j 堆, 那么:$\frac{(2k+j-1)j}{2} = n$, 也就是$j(2k+j-1) = 2n$。

由于$k \geq 1$，那么$j < 2k+j-1$，也就是说 j 一定是 2n 的因子且不超过$\sqrt{2n}$。

那么每次分石子相当于划分成若干个新游戏, 那么就根据 SG 定理和 SG 函数定义计算 SG 值即可，其中根据 SG 定理计算可以使用 xor 前缀和优化。时间复杂度为$O(n\sqrt{n})$。

3. 约数个数和

(formula.c/cpp/pas)

【问题描述】

已知a,b,c，求：

$$\sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c} d(abc) \mod 2^{30}$$

其中，$d(x)$表示x的约数个数。

【数据规模与约定】

测试点	数据范围
1-6	$1 \le a,b,c \le 10$
7-12	$1 \le a,b,c \le 100$
13-20	$1 \le a,b,c \le 2\times 10^3$

【题目来源】CodeForces 235E

【题解】

首先，

$$d(abc) = \sum_{i|a}\sum_{j|b}\sum_{k|c}[(i,j)=1][(i,k)=1][(j,k)=1]$$

可以参考课件上约数个数和那题类似推导即可得到。

所以，

$$ans = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\sum_{I|i}\sum_{J|j}\sum_{K|k}[(I,J)=1][(I,K)=1][(J,K)=1]$$

$$ans = \sum_{I=1}^{a}\sum_{J=1}^{b}\sum_{K=1}^{c}\left[\frac{a}{I}\right]\left[\frac{b}{J}\right]\left[\frac{c}{K}\right][(I,J)=1][(I,K)=1][(J,K)=1]$$

考虑到$\sum_{d|n}\mu(d) = [n=1]$，那么

$$ans = \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{c}\left[\frac{a}{i}\right]\left[\frac{b}{j}\right]\left[\frac{c}{k}\right]\sum_{d|(i,j)}\mu(d)\,[(i,k)=1][(j,k)=1]$$

从而

$$ans = \sum_{k=1}^{c}\left[\frac{c}{k}\right]\sum_{d=1}^{\min(a,b)}\mu(d)\left(\sum_{i=1}^{\left[\frac{a}{d}\right]}\left[\frac{a}{di}\right][(di,k)=1]\right)\left(\sum_{j=1}^{\left[\frac{b}{d}\right]}\left[\frac{b}{dj}\right][(dj,k)=1]\right)$$

首先我们可以枚举 k，枚举 d，再分别直接计算后面两个公式。

思考下复杂度：$n+\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\cdots+\frac{n}{n}$根据调和级数知道是$O(n\log n)$，总复杂度$O(n^2\log n)$。

其他做法可以参考 cf 题解。

4. 礼物

(gift.c/cpp/pas)

【问题描述】

小 A 打算送小 B 一些礼物。

小 A 来到了随机商店，这个商店有 m 种礼物，且第 i 种礼物有k_i个。**同种礼物的价值各不相同不同，但是同种礼物的名字相同。**这个商店的购买物品的方式也非常特别，需要你提供一个礼物清单，然后商店会根据你的礼物清单来按照一定规则挑选物品。

小 A 想买 n 个礼物，他列了一个礼物清单，只包括**这些礼物的名字**，如果第 i 种礼物小 A 要买t_i个，那么他就要写t_i个第 i 种礼物的名字在礼物清单上，显然应该满足$t_i \le k_i$。

商店的挑选规则如下：假设清单上写了 p 种礼物，分别是第$a_1, a_2, \dots, a_p$种，第a_i种礼物需要t_i个，那么就从第a_i种礼物的全部k_{a_i}个种**随机挑选**t_i个礼物给顾客。

由于小 A 是欧洲人抽中了免单资格，因此他想让他的所有礼物的价值和最大。因此他会制定一个**有可能得到礼物的最大价值总和**的方案，如果有 s 种可以达到最大价值的方案，他会**随机选择**一种。求：小 A 得到最大价值的概率。

【数据规模与约定】

测试点	数据范围
1-3	$1 \le n, m \le 10, \sum_{i=1}^{m} k_i \le 100$
4-6	$1 \le n, m \le 100, \sum_{i=1}^{m} k_i \le 1000$
7-10	$1 \le n, m \le 10^3, \sum_{i=1}^{m} k_i \le 3000$

对于所有数据，$1 \le$ 价值 $\le 10^9, \sum_{i=1}^{m} k_i \le 1000$

【题目来源】CodeForces 229E

【题解】

把所有礼物按照价值从大到小排序，那么很显然需要的就是前 n 个礼物。由于礼物可能含有相同的价值，那么我们把排序后第 n 个礼物的价值 p 设定为阈值。我们将一切价值大于 p 的礼物称作必选的，价值刚好等于 p 的礼物称为备选。设有 s 个备选礼物。

首先我们把礼物按组考虑，那么每一组礼物一定有若干必选礼物和备选礼物，把其数量分别称为q_i, r_i。那么对于每组礼物，$r_i = 0$或$r_i = 1$（因为每组礼物中不会出现相同价值的礼物），我们先假定备选礼物都不选，那么就知道概率为$\frac{1}{\prod_{i=1}^{n} C(k_i, q_i)}$。设现在还有 res 个备选礼物需要被选进礼物列表，对于$r_i = 0$的礼物组显然不需要考虑，对于$r_i = 1$的礼物组，我们考虑选了备选礼物和不选备选礼物的系数差为$t_i = \frac{q_i+1}{k_i-q_i}$（两个组合数相除）。

设$f(i,j)$表示考虑到第 i 组$r_i = 1$的礼物组，选了 j 个备选礼物最终概率。

那么$f(i,j) = f(i-1,j) + t_i f(i-1,j-1)$，初始$f(0,0) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n} C(k_i, q_i)} \times \frac{1}{C(s,res)}$。

答案即为$f(s, res)$。用 long double。

时间复杂度$O(m^2)$