KingdomAndCities

求n个点m条边，前k个点的度数均为2的无向连通图个数，无重边自环。

$1 \le n, m \le 50, 0 \le k \le 2$

TopCoder SRM548 KingdomAndCities

考虑$k=0$的情况，就是n个点m条边无向连通图的个数。

为方便，下设$E(i)$表示i个点的无向完全图的边数，那么$E(i)=\frac{i(i-1)}{2}$。

令$f(i,j)$表示i个点j条边无向连通图的个数。

利用~~补集转换~~（容斥原理），则全部方案为$\binom{E(i)}{j}$。

枚举第一个点包含的连通块大小k，以及该联通快内的边数l。

所以一组(k,l)对应的方案数为$\binom{i-1}{k-1}\binom{E(i-k)}{j-l}f(k,l)$

（从1号点以外的i-1个点选出k-1个点，再选择边，不用管其他部分是否连通）

TopCoder SRM548 KingdomAndCities

所以有

$$f(i,j)=\binom{E(i)}{j}-\sum_{k=1}^{i-1}\binom{i-1}{k-1}\left(\sum_{l=k-1}^{\min(E(k),j)}\binom{E(i-k)}{j-l}f(k,l)\right)$$

于是我们就解决了$k=0$的情况。

下面做一些记号解释：

后文图中，红色边为要删除的，黑色边为本来就有，蓝色边为新加入。

TopCoder SRM548 KingdomAndCities

我们来思考一下一个**结论**：

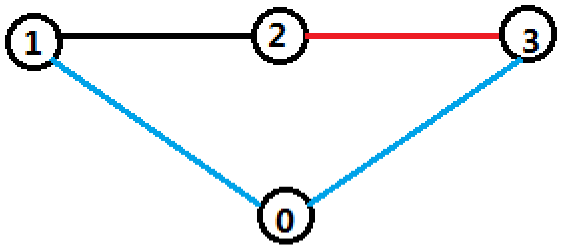
限定度数为2的点只有两种用途:

1. 用来取代一个边从而延长一个链
2. 用来加到一条边两个端点上，形成一个环。

特殊地，当$k = 2$时可以同时加到一个点上，形成三元环。

这是对的吗？

TopCoder SRM548 KingdomAndCities



一开始只有1和2连边，0号点加入，连接1和3。这似乎不属于那三种情况？

等价于“原来1和3有连边，0加入这条边上延长链”！

同时，原来的不连通图转化成了连通图！

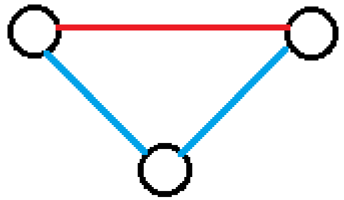
所有不属于这两类的方案都是可以等价的！

TopCoder SRM548 KingdomAndCities

有了这个结论，我们考虑$k = 1$：

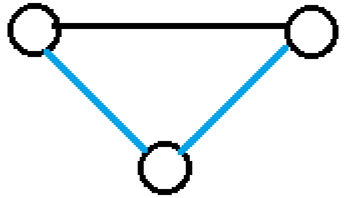
① 延长链：$(m-1)f(n-1,m-1)$

原连通图有$m-1$条边可以当作对象进行改变。



② 构成环：$(m-2)f(n-1,m-2)$

原连通图有$m-2$条边可以当作对象进行改变。

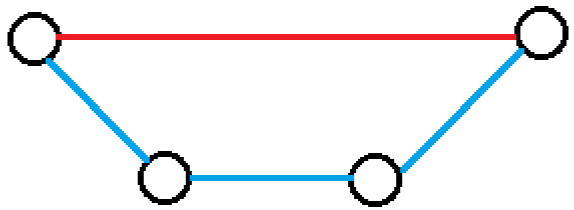


故$k = 1$时，答案为$(m-1)f(n-1,m-1)+(m-2)f(n-1,m-2)$。

TopCoder SRM548 KingdomAndCities

考虑$k = 2$：

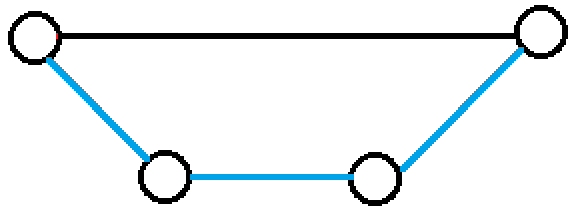
① 两个连一起，延长链：$2(m-2)f(n-2, m-2)$



原连通图有$m-2$条边可以当作对象进行改变。

两个点的顺序可以改变，故乘2。

② 两个连一起，构成环：$2(m-3)f(n-2, m-3)$



原连通图有$m-3$条边可以当作对象进行改变。

两个点的顺序可以改变，故乘2。

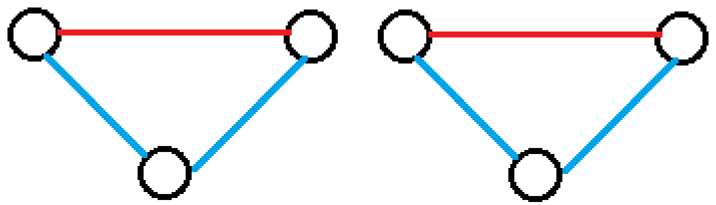
TopCoder SRM548 KingdomAndCities

考虑$k = 2$：

③ 两个分别延长链：$C(m-2,2) \times 2 \times f(n-2, m-2)$

原连通图有$C(m-2,2)$个边组可以当作对象进行改变。

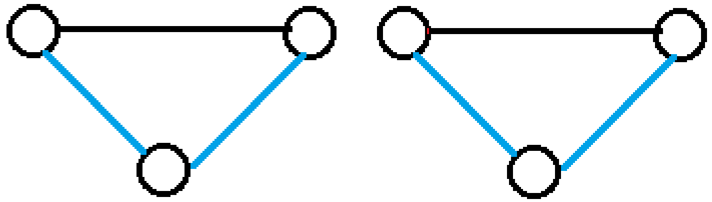
两个点的顺序可以改变，故乘2。



④ 两个分别构成环：$C(m-4,2) \times 2 \times f(n-2, m-4)$

原连通图有$C(m-4,2)$个边组可以当作对象进行改变。

两个点的顺序可以改变，故乘2。



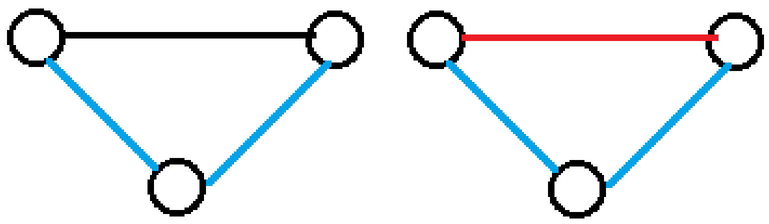
TopCoder SRM548 KingdomAndCities

考虑$k = 2$：

⑤ 一个延长链，一个构成环：$C(m-3,2) \times 2^2 \times f(n-2, m-3)$

原连通图有$C(m-3,2)$个边组可以当作对象进行改变。

两个点的顺序可以改变，故乘2，加入方式（链、环）也可以改变，故再乘2。



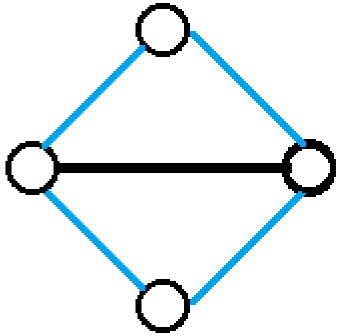
TopCoder SRM548 KingdomAndCities

考虑$k = 2$：

⑥ 在同一条边上构成两个环：$(m-4)f(n-2, m-4)$

原连通图有$m-4$条边可以当作对象进行改变。

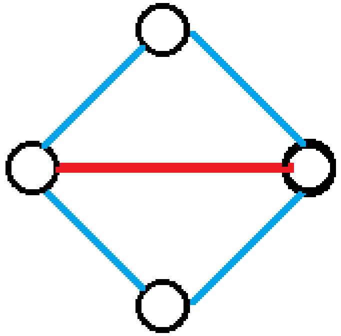
由于对称，不需要乘2。



⑦ 在同一条边上分别延长：$(m-3)f(n-2, m-3)$

原连通图有$m-3$条边可以当作对象进行改变。

由于对称，不需要乘2。



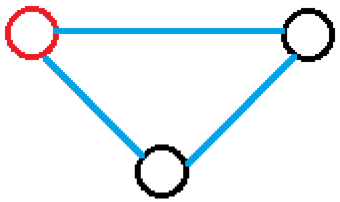
TopCoder SRM548 KingdomAndCities

考虑$k = 2$：

⑧ 同一个点上构成环（假设红点本来存在）：$(n-2)f(n-2, m-3)$

原连通图有$n-2$个点可作为成环对象。

由于对称，不需要乘2。



还有吗……？

没了！所以$k = 2$的情况讨论完了。

时间复杂度$O(n^2m^2)$。

数列

小T最近在学着买股票，他得到内部消息：F公司的股票将会疯涨。

股票每天的价格已知是正整数，并且由于客观上的原因，最多只能为n。

在疯涨的k天中小T观察到：除第一天外每天的股价都比前一天高，且高出的价格（即当天的股价与前一天的股价之差）不会超过m，m为正整数。并且这些参数满足$m(k-1)<n$。

小T忘记了这k天每天的具体股价了，他现在想知道这k天的股价有多少种可能。

$m,k,p \leq 10^9, n \leq 10^{18}$

BZOJ 3142 HNOI 2013 数列

设相邻两项差值为a_i，那么一个给定的长度为$k-1$的$\{a_i\}$贡献为$n-\sum_{i=1}^{k-1} a_i$

这样的序列a有m^{k-1}种，那么

$ans=\sum_{a_1=1}^{m}\sum_{a_2=1}^{m}\dots\sum_{a_{k-1}=1}^{m}(n-a_1-a_2-\cdots-a_{k-1})$

$ans=n\times m^{k-1}-\sum_{a_1=1}^{m}\sum_{a_2=1}^{m}\dots\sum_{a_{k-1}=1}^{m}(a_1+a_2+\cdots+a_{k-1})$

由于有m^{k-1}种序列，每个数列有$(k-1)$个数，那么总共$m^{k-1}(k-1)$个数。

仔细思考可以发现，总共m个数出现次数是相等的，那么每个数$m^{k-2}(k-1)$次。

那么，1~m每个数都出现这么多次，总共$\frac{m(m+1)}{2}m^{k-2}(k-1)$.

故$ans=n\times m^{k-1}-\frac{m(m+1)}{2}m^{k-2}(k-1)$，快速幂即可。