浅谈stirling数

任轩笛

绍兴市第一中学

2017年11月29日

上升幂与下降幂

上升幂

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)...(x+n-1)$$

上升幂与下降幂

上升幂

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)...(x+n-1)$$

下降幂

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)(x-2)...(x-n+1)$$

上升幂与下降幂

上升幂

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)...(x+n-1)$$

下降幂

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)(x-2)...(x-n+1)$$

$$x^{\overline{n}} = (x+n-1)^{\underline{n}}$$

上升幂与下降幂

上升幂

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)...(x+n-1)$$

下降幂

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)(x-2)...(x-n+1)$$

$$x^{\overline{n}} = (x+n-1)^{\underline{n}}$$

$$x^{\underline{n}} = (-1)^n(-x)^{\overline{n}}$$

上升幂与下降幂

上升幂

$$x^{\overline{n}} = x(x+1)(x+2)...(x+n-1)$$

下降幂

$$x^{\underline{n}} = x(x-1)(x-2)...(x-n+1)$$

$$x^{\overline{n}} = (x+n-1)^{\underline{n}}$$

$$x^{\underline{n}} = (-1)^n(-x)^{\overline{n}}$$

$$\binom{n}{m} = \frac{n^{\underline{m}}}{m!}$$

第一类stirling数

$s_{n,k}$表示n个点划分成k个环的方案数。部分资料用大方括号表示第一类stirling 数。

第一类stirling数

$s_{n,k}$表示n个点划分成k个环的方案数。部分资料用大方括号表示第一类stirling 数。

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1)s_{n-1,k}$$

第一类stirling数

$s_{n,k}$表示n个点划分成k个环的方案数。部分资料用大方括号表示第一类stirling 数。

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1)s_{n-1,k}$$

$$s_{n,k} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1}(i-1)!s_{n-i,k-1}$$

第一类stirling数

$s_{n,k}$表示n个点划分成k个环的方案数。部分资料用大方括号表示第一类stirling 数。

$$s_{n,k} = s_{n-1,k-1} + (n-1)s_{n-1,k}$$

$$s_{n,k} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} (i-1)! s_{n-i,k-1}$$

$$x^{\overline{n}} = \sum_{i=0}^{n} s_{n,i} x^i$$

第一类stirling数

如何求$s_{n,i}$？

第一类stirling数

如何求$s_{n,i}$？展开

$$x^{\overline{n}}$$

第一类stirling数

如何求$s_{n,i}$？展开

$$x^{\overline{n}}$$

分治FFT？$O(n\log^2 n)$。

第一类stirling数

如何求$s_{n,i}$？展开

$$x^{\overline{n}}$$

分治FFT？$O(n\log^2 n)$。

倍增！

第一类stirling数

如何求$s_{n,i}$？展开

$$x^{\overline{n}}$$

分治FFT？$O(n\log^2 n)$。

倍增！

$$x^{\overline{2n}} = x^{\overline{n}}(x+n)^{\overline{n}}$$

两者都是关于x的n阶多项式，后者可由前者得到。

第一类stirling数

如何求$s_{n,i}$？展开

$$x^{\overline{n}}$$

分治FFT？$O(n\log^2 n)$。

倍增！

$$x^{\overline{2n}} = x^{\overline{n}}(x+n)^{\overline{n}}$$

两者都是关于x的n阶多项式，后者可由前者得到。

$T(n) = T(n/2) + O(n\log n), T(n) = O(n\log n)$

第二类stirling数

$S_{n,k}$表示n个点划分成k个集合的方案数。部分资料用大花括号表示第二类stirling数。

第二类stirling数

$S_{n,k}$表示n个点划分成k个集合的方案数。部分资料用大花括号表示第二类stirling数。

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$$

第二类stirling数

$S_{n,k}$表示n个点划分成k个集合的方案数。部分资料用大花括号表示第二类stirling数。

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$$

$$S_{n,k} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} S_{n-i,k-1}$$

第二类stirling数

$S_{n,k}$表示n个点划分成k个集合的方案数。部分资料用大花括号表示第二类stirling数。

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$$

$$S_{n,k} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} S_{n-i,k-1}$$

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} S_{n,i} x^{\underline{i}}$$

第二类stirling数

$S_{n,k}$表示n个点划分成k个集合的方案数。部分资料用大花括号表示第二类stirling数。

$$S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + kS_{n-1,k}$$

$$S_{n,k} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} S_{n-i,k-1}$$

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} S_{n,i} x^{\underline{i}}$$

$$x^n = \sum_{i=0}^{x} \binom{x}{i} i! S_{n,i}$$

第二类stirling数

如何求$S_{n,i}$？

第二类stirling数

如何求$S_{n,i}$?

根据最后一条式子

$$x^n = \sum_{i=0}^{x} \binom{x}{i} i! S_{n,i}$$

第二类stirling数

如何求$S_{n,i}$?

根据最后一条式子

$$x^n = \sum_{i=0}^{x} \binom{x}{i} i! S_{n,i}$$

二项式反演:

$$x! S_{n,x} = \sum_{i=0}^{x} (-1)^{x-i} \binom{x}{i} i^n$$

第二类stirling数

如何求$S_{n,i}$?

根据最后一条式子

$$x^n = \sum_{i=0}^{x} \binom{x}{i} i! S_{n,i}$$

二项式反演:

$$x! S_{n,x} = \sum_{i=0}^{x} (-1)^{x-i} \binom{x}{i} i^n$$

FFT, $O(n \log n)$。

题意

问有多少$n * m$的矩阵，每个数都在$[1, C]$内，任两行不完全相同，任两列不完全相同。

$n, m, C \leq 4000$。

做法

先保证任意两行不相同，然后对列进行容斥。

做法

先保证任意两行不相同，然后对列进行容斥。

设f_m表示m列时的答案。

$$f_m = \binom{C^m}{n} - \sum_{i=1}^{m-1} S_{m,i} f_i$$

$O(m^2)$。

题意

n幢楼高度分别为1到n，问有多少个排列，从左往右看有x幢楼，从右往左看有y幢楼。

$T \le 10^5, n \le 2000$。

做法

一定是被最高的楼隔开，左边能看到x幢楼，右边能看到y幢楼。

做法

一定是被最高的楼隔开，左边能看到x幢楼，右边能看到y幢楼。

$$Ans = s_{n-1,x+y-2}\binom{x+y-2}{x-1}$$

题意

求

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} S_{i,j} 2^j j!$$

对998244353取模，$n \le 10^5$。

做法

这题做法很多，这里讲一种根据组合意义来求解的做法。

做法

这题做法很多，这里讲一种根据组合意义来求解的做法。

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} S_{i,j} 2^j j!$$

他到底在求什么？

做法

这题做法很多，这里讲一种根据组合意义来求解的做法。

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} S_{i,j} 2^j j!$$

他到底在求什么？

把i个数划成j个集合，乘上$2^j j!$。

做法

这题做法很多，这里讲一种根据组合意义来求解的做法。

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} S_{i,j}2^j j!$$

他到底在求什么？

把i个数划成j个集合，乘上$2^j j!$。设

$$f_i = \sum_{j=0}^{i} S_{i,j}2^j j! = \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} * 2 * f_{i-j}$$

做法

这题做法很多，这里讲一种根据组合意义来求解的做法。

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} S_{i,j}2^j j!$$

他到底在求什么？

把i个数划成j个集合，乘上$2^j j!$。设

$$f_i = \sum_{j=0}^{i} S_{i,j}2^j j! = \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} * 2 * f_{i-j}$$

分治FFT或者多项式求逆。

题意

给出一棵树，对于每个点i，输出$\sum_{j=1}^{n} dis(i,j)^m$。

$n \le 50000, m \le 500$。

做法

树形dp。设f_x表示x子树内的点到x的答案。

做法

树形dp。设f_x表示x子树内的点到x的答案。
dfs一遍更新上来。得到了1号点的答案。

做法

树形dp。设f_x表示x子树内的点到x的答案。

dfs一遍更新上来。得到了1号点的答案。

再用类似的方法dfs下去，得到每个点的答案。

做法

树形dp。设f_x表示x子树内的点到x的答案。

dfs一遍更新上来。得到了1号点的答案。

再用类似的方法dfs下去，得到每个点的答案。

假设我们知道了$\sum dis^m$，如何求$\sum (dis+1)^m$？

做法

对于所有$i \in [0, m]$维护$\sum dis^i$。

做法

对于所有$i \in [0, m]$维护$\sum dis^i$。

$(dis+1)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} dis^i$。

做法

对于所有$i \in [0, m]$维护$\sum dis^i$。

$(dis+1)^m = \sum_{i=0}^{m} \binom{m}{i} dis^i$。

用$O(m^2)$完成一次“加1”操作。$O(nm^2)$。

做法

对于所有$i \in [0, m]$维护$\sum dis^{\underline{i}}$。

做法

对于所有$i \in [0, m]$维护$\sum dis^{\underline{i}}$。

$(dis+1)^{\underline{m}} = (dis+1)dis^{\underline{m-1}}$。

做法

对于所有$i \in [0, m]$维护$\sum dis^{\underline{i}}$。

$(dis+1)^{\underline{m}} = (dis+1)dis^{\underline{m-1}}$。

$= (dis-m+1)dis^{\underline{m-1}} + mdis^{\underline{m-1}}$。

做法

对于所有$i \in [0, m]$维护$\sum dis^{\underline{i}}$。

$(dis+1)^{\underline{m}} = (dis+1)dis^{\underline{m-1}}$。

$= (dis-m+1)dis^{\underline{m-1}} + mdis^{\underline{m-1}}$。

$= dis^{\underline{m}} + mdis^{\underline{m-1}}$。

做法

对于所有$i \in [0, m]$维护$\sum dis^{\underline{i}}$。

$(dis+1)^{\underline{m}} = (dis+1)dis^{\underline{m-1}}$。

$= (dis-m+1)dis^{\underline{m-1}} + m dis^{\underline{m-1}}$。

$= dis^{\underline{m}} + m dis^{\underline{m-1}}$。

用$x^n = \sum_{i=0}^{n} S_{n,i} x^{\underline{i}}$在$O(m)$内还原出答案。

做法

对于所有$i \in [0, m]$维护$\sum dis^{\underline{i}}$。

$(dis+1)^{\underline{m}} = (dis+1)dis^{\underline{m-1}}$。

$= (dis-m+1)dis^{\underline{m-1}} + mdis^{\underline{m-1}}$。

$= dis^{\underline{m}} + mdis^{\underline{m-1}}$。

用$x^n = \sum_{i=0}^{n} S_{n,i} x^{\underline{i}}$在$O(m)$内还原出答案。

复杂度$O(nm)$。

题意

对于一张无向图，它的权值是所有点的权值和，一个点权值是它度数的m次方。

问所有n个点简单无向图的权值和。对FFT模数取模。

$n \le 10^9, m \le 2 * 10^5$。

做法

$$Ans = n * 2^{\binom{n-1}{2}} * \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} i^m$$

做法

$$Ans = n * 2^{\binom{n-1}{2}} * \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} i^m$$

考虑求

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i^m$$

做法

$$Ans = n * 2^{\binom{n-1}{2}} * \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} i^m$$

考虑求

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i^m$$

原式

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{m} S_{m,j} i^{\underline{j}}$$

做法

$$Ans = n * 2^{\binom{n-1}{2}} * \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} i^m$$

考虑求

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} i^m$$

原式

$$= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \sum_{j=0}^{m} S_{m,j} i^{\underline{j}}$$

$$= \sum_{j=0}^{m} S_{m,j} \sum_{i=j}^{n} \binom{n}{i} i^{\underline{j}}$$

做法

$$\sum_{j=0}^{m} S_{m,j} \sum_{i=j}^{n} \binom{n}{i} i^{\underline{j}}$$

做法

$$\sum_{j=0}^{m} S_{m,j} \sum_{i=j}^{n} \binom{n}{i} i^{\underline{j}}$$

组合数与下降幂：

$$\binom{n}{m} = \frac{n^{\underline{m}}}{m!}$$

做法

$$\sum_{j=0}^{m} S_{m,j} \sum_{i=j}^{n} \binom{n}{i} i^{\underline{j}}$$

组合数与下降幂：

$$\binom{n}{m} = \frac{n^{\underline{m}}}{m!}$$

$$\binom{n}{i} i^{\underline{j}} = \frac{n^{\underline{i}}}{(i-j)!} = \frac{(n-j)^{\underline{i-j}}}{(i-j)!} n^{\underline{j}} = \binom{n-j}{i-j} n^{\underline{j}}$$

做法

$$\sum_{j=0}^{m} S_{m,j} \sum_{i=j}^{n} \binom{n}{i} i^{\underline{j}}$$

组合数与下降幂：

$$\binom{n}{m} = \frac{n^{\underline{m}}}{m!}$$

$$\binom{n}{i} i^{\underline{j}} = \frac{n^{\underline{i}}}{(i-j)!} = \frac{(n-j)^{\underline{i-j}}}{(i-j)!} n^{\underline{j}} = \binom{n-j}{i-j} n^{\underline{j}}$$

因此原式

$$= \sum_{j=0}^{m} S_{m,j} \sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} n^{\underline{j}} = \sum_{j=0}^{m} S_{m,j} n^{\underline{j}} 2^{n-j}$$

做法

$$\sum_{j=0}^{m} S_{m,j} \sum_{i=j}^{n} \binom{n}{i} i^{\underline{j}}$$

组合数与下降幂：

$$\binom{n}{m} = \frac{n^{\underline{m}}}{m!}$$

$$\binom{n}{i} i^{\underline{j}} = \frac{n^{\underline{i}}}{(i-j)!} = \frac{(n-j)^{\underline{i-j}}}{(i-j)!} n^{\underline{j}} = \binom{n-j}{i-j} n^{\underline{j}}$$

因此原式

$$= \sum_{j=0}^{m} S_{m,j} \sum_{i=j}^{n} \binom{n-j}{i-j} n^{\underline{j}} = \sum_{j=0}^{m} S_{m,j} n^{\underline{j}} 2^{n-j}$$

一个技巧

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^m$$

一个技巧

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^m$$

考虑由某k个x_i组成的项的系数和。

一个技巧

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^m$$

考虑由某k个x_i组成的项的系数和。

$$\sum_{\sum A_i = m} \frac{m!}{\prod A_i!} = S_{m,k} k!$$

一个技巧

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^m$$

考虑由某k个x_i组成的项的系数和。

$$\sum_{\sum A_i=m} \frac{m!}{\prod A_i!} = S_{m,k}k!$$

m个不同的物品放入k个不同的盒子。

一个技巧

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^m$$

考虑由某k个x_i组成的项的系数和。

$$\sum_{\sum A_i=m} \frac{m!}{\prod A_i!} = S_{m,k}k!$$

m个不同的物品放入k个不同的盒子。

当x_i都取0或者1时，可以考虑若某k个x_i都$=1$（不用管其它x_i的取值），对答案就有$S_{m,k}k!$的贡献。

题意

求所有长度为n的置换的循环个数的m次方之和。

$n \leq 10^5, m, t \leq 500$。

做法

令x_i表示循环i是否存在，一个置换的权值就是$(\sum x_i)^m$。

做法

令x_i表示循环i是否存在，一个置换的权值就是$(\sum x_i)^m$。

对于某k个循环，如果它们同时出现了，不论别的循环是否存在，对答案有贡献$S_{m,k}k!$。

做法

令x_i表示循环i是否存在，一个置换的权值就是$(\sum x_i)^m$。
对于某k个循环，如果它们同时出现了，不论别的循环是否存在，对答案有贡献$S_{m,k}k!$。
怎么枚举所有长为n的排列的若干个循环里的“某k个循环”呢？

做法

令x_i表示循环i是否存在，一个置换的权值就是$(\sum x_i)^m$。
对于某k个循环，如果它们同时出现了，不论别的循环是否存在，对答案有贡献$S_{m,k}k!$。
怎么枚举所有长为n的排列的若干个循环里的“某k个循环”呢？
构造一个长为$n+1$的置换，把那些不要枚举到的循环从小到大穿起来。那么这个数量就是$s_{n+1,k+1}$。

做法

令x_i表示循环i是否存在，一个置换的权值就是$(\sum x_i)^m$。
对于某k个循环，如果它们同时出现了，不论别的循环是否存在，对答案有贡献$S_{m,k}k!$。
怎么枚举所有长为n的排列的若干个循环里的“某k个循环”呢？
构造一个长为$n+1$的置换，把那些不要枚举到的循环从小到大穿起来。那么这个数量就是$s_{n+1,k+1}$。

$$Ans = \sum_k s_{n+1,k+1} S_{m,k} k!$$

题意

给出一张无向图，定义$f(S)$为：两端都在点集S中的边数。

求S取遍2^n个集合，$f(S)^m$之和。

$n, m \leq 100000, 1 \leq m \leq 3$。

做法

令$x_{i,S}$表示i这条边是否存在于点集S中，要求的就是

$$\sum_{S}\left(\sum x_{i,S}\right)^{k}$$

做法

令$x_{i,S}$表示i这条边是否存在于点集S中，要求的就是

$$\sum_S \left(\sum x_{i,S}\right)^k$$

考虑某k条边，它们同时存在，对答案就有$S_{m,k}k!$的贡献。

做法

令$x_{i,S}$表示i这条边是否存在于点集S中，要求的就是

$$\sum_S \left(\sum x_{i,S}\right)^k$$

考虑某k条边，它们同时存在，对答案就有$S_{m,k}k!$的贡献。
什么情况下某k条边会同时存在呢？当且仅当集合S囊括了它们端点的并集。亦即，若这k条边端点并集大小为w，方案数就是2^{n-w}。

做法

令$x_{i,S}$表示i这条边是否存在于点集S中，要求的就是

$$\sum_{S}\left(\sum x_{i,S}\right)^{k}$$

考虑某k条边，它们同时存在，对答案就有$S_{m,k}k!$的贡献。

什么情况下某k条边会同时存在呢？当且仅当集合S囊括了它们端点的并集。亦即，若这k条边端点并集大小为w，方案数就是2^{n-w}。

那么分情况算下“k条边，w个点”这样的方案数，乘上相应系数加起来就行了。

题意

有一个k面的骰子，扔n次，记A_i表示数字i出现的次数。求所有方案中

$$\prod_{i=1}^{L} A_i^F$$

的和。对2003取模。$n, k \leq 10^9, F \leq 1000, F * L \leq 50000$。

做法

令$x_{i,j}$表示第i次是否扔出了j。要求的就是

$$\prod_{i=1}^{L}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{j,i}\right)^{F}$$

做法

令$x_{i,j}$表示第i次是否扔出了j。要求的就是

$$\prod_{i=1}^{L}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{j,i}\right)^{F}$$

对于一个i，若某k个$x_{j,i}$都是1，就有$S_{F,k}k!$的贡献。

做法

令$x_{i,j}$表示第i次是否扔出了j。要求的就是

$$\prod_{i=1}^{L}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{j,i}\right)^{F}$$

对于一个i，若某k个$x_{j,i}$都是1，就有$S_{F,k}k!$的贡献。

不同的$x_{i,j}$之间并非独立，要满足每行只有1个1。因此要一列列dp过去，枚举每列强制有几个1，做一个背包。最后算出的是f_i表示总共强制i个1的系数和。

做法

令$x_{i,j}$表示第i次是否扔出了j。要求的就是

$$\prod_{i=1}^{L}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{j,i}\right)^{F}$$

对于一个i，若某k个$x_{j,i}$都是1，就有$S_{F,k}k!$的贡献。

不同的$x_{i,j}$之间并非独立，要满足每行只有1个1。因此要一列列dp过去，枚举每列强制有几个1，做一个背包。最后算出的是f_i表示总共强制i个1的系数和。

$n^{\underline{2003}} \equiv 0 \pmod{2003}$，因此背包容量只要做到2003。

做法

令$x_{i,j}$表示第i次是否扔出了j。要求的就是

$$\prod_{i=1}^{L}\left(\sum_{j=1}^{n} x_{j,i}\right)^{F}$$

对于一个i，若某k个$x_{j,i}$都是1，就有$S_{F,k}k!$的贡献。

不同的$x_{i,j}$之间并非独立，要满足每行只有1个1。因此要一列列dp过去，枚举每列强制有几个1，做一个背包。最后算出的是f_i表示总共强制i个1的系数和。

$n^{\underline{2003}} \equiv 0 \pmod{2003}$，因此背包容量只要做到2003。

直接做是$O(LFp)$的。倍增FFT是$O(p\log p\log L)$。

QAQ

Questions are welcomed.

一些等式

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} S_{n,i} x^{\underline{i}}$$

一些等式

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} S_{n,i} x^{\underline{i}}$$

$$(-1)^n x^n = \sum_{i=0}^{n} S_{n,i} (-1)^{n-i} (-1)^i x^{\underline{i}}$$

一些等式

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} S_{n,i} x^{\underline{i}}$$

$$(-1)^n x^n = \sum_{i=0}^{n} S_{n,i} (-1)^{n-i} (-1)^i x^{\underline{i}}$$

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} S_{n,i} (-1)^{n-i} x^{\overline{i}}$$

一些等式

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} S_{n,i} x^{\underline{i}}$$

$$(-1)^n x^n = \sum_{i=0}^{n} S_{n,i} (-1)^{n-i} (-1)^i x^{\underline{i}}$$

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} S_{n,i} (-1)^{n-i} x^{\overline{i}}$$

类似的，

$$x^{\underline{n}} = \sum_{i=0}^{n} s_{n,i} (-1)^{n-i} x^i$$

一些等式

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} S_{n,i} x^{\underline{i}}$$

$$(-1)^n x^n = \sum_{i=0}^{n} S_{n,i} (-1)^{n-i} (-1)^i x^{\underline{i}}$$

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} S_{n,i} (-1)^{n-i} x^{\overline{i}}$$

类似的，

$$x^{\underline{n}} = \sum_{i=0}^{n} s_{n,i} (-1)^{n-i} x^i$$

何时要乘$(-1)^{n-i}$？用大的幂表示小的幂的时候。

一些等式

现在我们有4个等式：

$$x^{\overline{n}} = \sum_{i=0}^{n} s_{n,i} x^i$$

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} S_{n,i} x^{\underline{i}}$$

$$x^n = \sum_{i=0}^{n} S_{n,i} (-1)^{n-i} x^{\overline{i}}$$

$$x^{\underline{n}} = \sum_{i=0}^{n} s_{n,i} (-1)^{n-i} x^i$$

一些等式

从中挑两个等式，展开一下，对比两边的系数，可以得到

一些等式

从中挑两个等式，展开一下，对比两边的系数，可以得到

$$\forall 1 \le m \le n, \sum_{i=m}^{n} S_{n,i} s_{i,m} (-1)^{i+m\text{或}n+i} = [n = m]$$

一些等式

从中挑两个等式，展开一下，对比两边的系数，可以得到

$$\forall 1 \le m \le n, \sum_{i=m}^{n} S_{n,i} s_{i,m} (-1)^{i+m\text{或}n+i} = [n = m]$$

$$\forall 1 \le m \le n, \sum_{i=m}^{n} s_{n,i} S_{i,m} (-1)^{i+m\text{或}n+i} = [n = m]$$

一些等式

从中挑两个等式，展开一下，对比两边的系数，可以得到

$$\forall 1 \le m \le n, \sum_{i=m}^{n} S_{n,i} s_{i,m} (-1)^{i+m\text{或}n+i} = [n = m]$$

$$\forall 1 \le m \le n, \sum_{i=m}^{n} s_{n,i} S_{i,m} (-1)^{i+m\text{或}n+i} = [n = m]$$

由于$s_{n,1} = (n-1)!$，所以有时候你见到的是这个式子：

一些等式

从中挑两个等式，展开一下，对比两边的系数，可以得到

$$\forall 1 \le m \le n, \sum_{i=m}^{n} S_{n,i} s_{i,m} (-1)^{i+m\text{或}n+i} = [n = m]$$

$$\forall 1 \le m \le n, \sum_{i=m}^{n} s_{n,i} S_{i,m} (-1)^{i+m\text{或}n+i} = [n = m]$$

由于$s_{n,1} = (n-1)!$，所以有时候你见到的是这个式子：

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} S_{n,i} (i-1)! = [n = 1]$$

一些等式

从中挑两个等式，展开一下，对比两边的系数，可以得到

$$\forall 1 \le m \le n, \sum_{i=m}^{n} S_{n,i} s_{i,m} (-1)^{i+m \text{或} n+i} = [n = m]$$

$$\forall 1 \le m \le n, \sum_{i=m}^{n} s_{n,i} S_{i,m} (-1)^{i+m \text{或} n+i} = [n = m]$$

由于$s_{n,1} = (n-1)!$，所以有时候你见到的是这个式子：

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} S_{n,i} (i-1)! = [n = 1]$$

看起来好像很奇妙！但是有什么用呢？来看道题。

题意

给你m张n个点的无向图，定义两张无向图的xor运算，结果还是张无向图，保留了在两张图中只出现一次的边。
问有多少种方案选一些无向图，它们异或起来的图连通。
$n \leq 9, m \leq 50$。

做法

最小表示枚举连通性，只强制不同的连通块之间不准有边。这样就规定了一些边的出现次数为偶数，高斯消元一波算下方案。

做法

最小表示枚举连通性，只强制不同的连通块之间不准有边。这样就规定了一些边的出现次数为偶数，高斯消元一波算下方案。

由于没有保证同一个连通块是连通的，一个图实际的连通块会比我们以为的连通块要多。

做法

最小表示枚举连通性，只强制不同的连通块之间不准有边。这样就规定了一些边的出现次数为偶数，高斯消元一波算下方案。
由于没有保证同一个连通块是连通的，一个图实际的连通块会比我们以为的连通块要多。
事实上，

做法

最小表示枚举连通性，只强制不同的连通块之间不准有边。这样就规定了一些边的出现次数为偶数，高斯消元一波算下方案。

由于没有保证同一个连通块是连通的，一个图实际的连通块会比我们以为的连通块要多。

事实上，一个n个连通块的图，会在我们计算k个连通块的图时，被算到$S_{n,k}$次！

做法

而我们想让1个连通块的图系数是1，其它系数都是0。想到了什么？

做法

而我们想让1个连通块的图系数是1，其它系数都是0。想到了什么？

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}S_{n,i}(i-1)! = [n=1]$$

做法

而我们想让1个连通块的图系数是1，其它系数都是0。想到了什么？

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}S_{n,i}(i-1)! = [n=1]$$

把我们粗略计算的k个连通块的方案数乘上$(-1)^{k-1}(k-1)!$加入答案就可以了。

做法

而我们想让1个连通块的图系数是1，其它系数都是0。想到了什么？

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}S_{n,i}(i-1)! = [n=1]$$

把我们粗略计算的k个连通块的方案数乘上$(-1)^{k-1}(k-1)!$加入答案就可以了。

当然，这题把求连通图改成求w个连通块的图也是能做的。道理都是一样的。

题意

有n座岛屿，初始时没有边。每座岛屿都有一个概率值p_i和一个友好列表A_i。

小c站在1号岛屿，依次执行以下操作：

1、设现在在岛屿x，有p_x的概率产生一条图中尚未存在的随机无向边，不会产生自环。

2、如果此时所有岛屿仍未连通，她会在当前点的友好列表中，随机选择一个，走到那座岛屿上。并把不满意度+1，然后重复第1步。否则就结束这个过程。

求她的期望不满意度，模10^9+7。$n \le 50$。

来源：集训队作业2017，Auther:任轩笛，改编自HDU某题

指数级做法

设$f_{mask,x}$表示现在连边状态是$mask$，处在的位置是x，期望还要多少步到达最后。列出转移方程，高斯消元一波。复杂度$O((2^{\frac{n*(n-1)}{2}} * n)^3)$。

指数级做法

设$f_{mask,x}$表示现在连边状态是$mask$，处在的位置是x，期望还要多少步到达最后。列出转移方程，高斯消元一波。复杂度$O((2^{\frac{n*(n-1)}{2}}*n)^3)$。

观察到一个$f_{mask,x}$只可能从$mask \geq$它的状态转移过来，即这个转移是分层的。那么可以把更高层的值视为常数，按$mask$从大到小，分层高斯消元。复杂度$O(2^{\frac{n*(n-1)}{2}}*n^3)$。

多项式做法

之前的做法的瓶颈都在连通性的状压上，有没有不用考虑连通性的多项式算法呢？

多项式做法

之前的做法的瓶颈都在连通性的状压上，有没有不用考虑连通性的多项式算法呢？
一个很自然的想法是把当前图中有多少条边放入状态。

多项式做法

之前的做法的瓶颈都在连通性的状压上，有没有不用考虑连通性的多项式算法呢？

一个很自然的想法是把当前图中有多少条边放入状态。

设$f_{m,x}$表示当前图有m条边，尚未连通，即所有m条边不连通的图都是等概率的，人在x点，到最后的期望步数。

多项式做法

之前的做法的瓶颈都在连通性的状压上，有没有不用考虑连通性的多项式算法呢？
一个很自然的想法是把当前图中有多少条边放入状态。
设$f_{m,x}$表示当前图有m条边，尚未连通，即所有m条边不连通的图都是等概率的，人在x点，到最后的期望步数。
如果这个状态加一条边仍然不连通，可以方便地转移。

多项式做法

之前的做法的瓶颈都在连通性的状压上，有没有不用考虑连通性的多项式算法呢？

一个很自然的想法是把当前图中有多少条边放入状态。

设$f_{m,x}$表示当前图有m条边，尚未连通，即所有m条边不连通的图都是等概率的，人在x点，到最后的期望步数。

如果这个状态加一条边仍然不连通，可以方便地转移。

如果加了一条边连通了，我们需要考虑这个概率。

多项式做法

多项式做法

“一个m条边不连通的图，在加了一条边后连通了”的概率，等于

$$\frac{\text{所有}m+1\text{条边连通图的桥边个数和}}{(n*(n-1)/2-m)*m\text{条边不连通图的方案数}}$$

多项式做法

“一个m条边不连通的图，在加了一条边后连通了”的概率，等于

$$\frac{\text{所有}m+1\text{条边连通图的桥边个数和}}{(n*(n-1)/2-m)*m\text{条边不连通图的方案数}}$$

高斯消元每一层只有$O(n)$个状态了，总共$O(n^2)$层，复杂度$O(n^5)$。

多项式做法

“一个m条边不连通的图，在加了一条边后连通了”的概率，等于

$$\frac{\text{所有}m+1\text{条边连通图的桥边个数和}}{(n*(n-1)/2-m)*m\text{条边不连通图的方案数}}$$

高斯消元每一层只有$O(n)$个状态了，总共$O(n^2)$层，复杂度$O(n^5)$。

让我们考虑那两部分怎么计算。

n个点m条边的连通图桥边数之和

n个点m条边的连通图桥边数之和

强制一条边成为桥边，枚举1号点那一侧连通块的点数和边数，乘个组合数，再乘个对应点数和边数的连通图方案数。

n个点m条边的连通图桥边数之和

强制一条边成为桥边，枚举1号点那一侧连通块的点数和边数，乘个组合数，再乘个对应点数和边数的连通图方案数。

复杂度$O(n^5)$。

n个点m条边连通图方案数

n个点m条边连通图方案数

考虑总数减去不合法的方案数。

n个点m条边连通图方案数

考虑总数减去不合法的方案数。

总数就是$\binom{n*(n-1)/2}{m}$。

n个点m条边连通图方案数

考虑总数减去不合法的方案数。

总数就是$\binom{n*(n-1)/2}{m}$。

不合法的方案可以枚举1号点所在连通块的点数和边数，乘个组合数算一下。

n个点m条边连通图方案数

考虑总数减去不合法的方案数。

总数就是$\binom{n*(n-1)/2}{m}$。

不合法的方案可以枚举1号点所在连通块的点数和边数，乘个组合数算一下。

复杂度$O(n^6)$。太慢了。考虑优化。

n个点m条边连通图方案数

n个点m条边连通图方案数

仍然是算出f_k表示：n个点划分成k个“连通块”，只强制不同的连通块之间不能有边，同一个连通块不一定要连通，总共有m条边的方案数。

n个点m条边连通图方案数

仍然是算出f_k表示：n个点划分成k个“连通块”，只强制不同的连通块之间不能有边，同一个连通块不一定要连通，总共有m条边的方案数。

一个n个连通块的图，会在我们的f_k中被算到$S_{n,k}$次。

n个点m条边连通图方案数

仍然是算出f_k表示：n个点划分成k个“连通块”，只强制不同的连通块之间不能有边，同一个连通块不一定要连通，总共有m条边的方案数。
一个n个连通块的图，会在我们的f_k中被算到$S_{n,k}$次。
只要在f_k前乘上$(k-1)!(-1)^{k-1}$，全部累加起来，就能得到连通图的答案。

n个点m条边连通图方案数

n个点m条边连通图方案数

“n个点k个连通块，不同的连通块不能有边，同一个连通块不一定要连通，总共有m条边”的方案数，可以枚举连通块的划分，每个连通块里给他连成完全图，然后在这么多边中选择m条。

n个点m条边连通图方案数

“n个点k个连通块，不同的连通块不能有边，同一个连通块不一定要连通，总共有m条边”的方案数，可以枚举连通块的划分，每个连通块里给他连成完全图，然后在这么多边中选择m条。

所以现在要求的就是

$$\sum_{G}(-1)^{c(G)-1}(c(G)-1)!\binom{e(G)}{m}$$

其中G每个连通块都是完全图，$c(G)$是G的连通块数，$e(G)$是边数，即$\sum \frac{sz_i(sz_i-1)}{2}$。

n个点m条边连通图方案数

n个点m条边连通图方案数

$$\sum_G (-1)^{c(G)-1}(c(G)-1)!\binom{e(G)}{m}$$

n个点m条边连通图方案数

$$\sum_G (-1)^{c(G)-1}(c(G)-1)!\binom{e(G)}{m}$$

设$f_{n,k,e(G)}$表示：n个点，k个连通块，$\sum \frac{sz_i(sz_i-1)}{2}=e(G)$的方案数。

n个点m条边连通图方案数

$$\sum_G (-1)^{c(G)-1}(c(G)-1)!\binom{e(G)}{m}$$

设$f_{n,k,e(G)}$表示：n个点，k个连通块，$\sum \frac{sz_i(sz_i-1)}{2} = e(G)$的方案数。

转移枚举1号点所在的连通块大小：

n个点m条边连通图方案数

$$\sum_G (-1)^{c(G)-1}(c(G)-1)!\binom{e(G)}{m}$$

设$f_{n,k,e(G)}$表示：n个点，k个连通块，$\sum \frac{sz_i(sz_i-1)}{2} = e(G)$的方案数。
转移枚举1号点所在的连通块大小：

$$f_{n,k,e(G)} \Leftarrow f_{n-i,k-1,e(G)-\frac{i(i-1)}{2}}$$

n个点m条边连通图方案数

$$\sum_G (-1)^{c(G)-1}(c(G)-1)!\binom{e(G)}{m}$$

设$f_{n,k,e(G)}$表示：n个点，k个连通块，$\sum \frac{sz_i(sz_i-1)}{2} = e(G)$的方案数。
转移枚举1号点所在的连通块大小：

$$f_{n,k,e(G)} \Leftarrow f_{n-i,k-1,e(G)-\frac{i(i-1)}{2}}$$

答案就是

$$\sum_{k,e(G)} (-1)^k(k-1)!\binom{e(G)}{m} f_{n,k,e(G)}$$

n个点m条边连通图方案数

n个点m条边连通图方案数

再来回顾这个式子。

$$\sum_{G}(-1)^{c(G)-1}(c(G)-1)!\binom{e(G)}{m}$$

n个点m条边连通图方案数

再来回顾这个式子。

$$\sum_G (-1)^{c(G)-1}(c(G)-1)!\binom{e(G)}{m}$$

设$f_{n,m}$表示

$$\sum_{G,e(G)=m} (-1)^{c(G)-1}(c(G)-1)!$$

n个点m条边连通图方案数

再来回顾这个式子。

$$\sum_G (-1)^{c(G)-1}(c(G)-1)!\binom{e(G)}{m}$$

设$f_{n,m}$表示

$$\sum_{G,e(G)=m} (-1)^{c(G)-1}(c(G)-1)!$$

则答案就是

$$\sum_i f_{n,i}\binom{i}{m}$$

n个点m条边连通图方案数

n个点m条边连通图方案数

$f_{n,m}$表示

$$\sum_{G,e(G)=m}(-1)^{c(G)-1}(c(G)-1)!$$

n个点m条边连通图方案数

$f_{n,m}$表示

$$\sum_{G,e(G)=m}(-1)^{c(G)-1}(c(G)-1)!$$

怎么计算$f_{n,m}$呢？枚举1号点所在的连通块？有个$(c(G)-1)!$比较麻烦。

n个点m条边连通图方案数

$f_{n,m}$表示

$$\sum_{G,e(G)=m}(-1)^{c(G)-1}(c(G)-1)!$$

怎么计算$f_{n,m}$呢？枚举1号点所在的连通块？有个$(c(G)-1)!$比较麻烦。

考虑不要枚举1号点所在的连通块，而是任意枚举一个连通块，这样一张图会被计算到$c(G)!$次。

n个点m条边连通图方案数

$f_{n,m}$表示

$$\sum_{G,e(G)=m}(-1)^{c(G)-1}(c(G)-1)!$$

怎么计算$f_{n,m}$呢？枚举1号点所在的连通块？有个$(c(G)-1)!$比较麻烦。

考虑不要枚举1号点所在的连通块，而是任意枚举一个连通块，这样一张图会被计算到$c(G)!$次。

那么如果我们枚举1号点以外的任意连通块，一张图就会被算到恰好$(c(G)-1)!$次了。

n个点m条边连通图方案数

$f_{n,m}$表示

$$\sum_{G,e(G)=m}(-1)^{c(G)-1}(c(G)-1)!$$

怎么计算$f_{n,m}$呢？枚举1号点所在的连通块？有个$(c(G)-1)!$比较麻烦。

考虑不要枚举1号点所在的连通块，而是任意枚举一个连通块，这样一张图会被计算到$c(G)!$次。

那么如果我们枚举1号点以外的任意连通块，一张图就会被算到恰好$(c(G)-1)!$次了。

这一步的复杂度变成了$O(n^4)$。

题意

在n个点之间给出m条带权无向边，权值是$[0, p = 17)$，问有多少种方案选择一些边（不选重边），使得整张图连通，并且边权和为x？对于$x \in [0, p)$都要求答案。

$n \leq 17, m \leq 10^5$。

来源：集训队胡策2017，Auther：杨家齐

循环卷积

首先注意到的是：卷积是个循环卷积，而模数998244353是有17次单位根的，那么肯定是先DFT，中间要算什么全都用点值算，最后再IDFT回去。只有这样复杂度才乘的是一个17而不是17^2。

循环卷积

首先注意到的是：卷积是个循环卷积，而模数998244353是有17次单位根的，那么肯定是先DFT，中间要算什么全都用点值算，最后再IDFT回去。只有这样复杂度才乘的是一个17而不是17^2。
考虑总数减掉不连通的方案数。随便选的方案数很简单，直接背包就行了。

循环卷积

首先注意到的是：卷积是个循环卷积，而模数998244353是有17次单位根的，那么肯定是先DFT，中间要算什么全都用点值算，最后再IDFT回去。只有这样复杂度才乘的是一个17而不是17^2。

考虑总数减掉不连通的方案数。随便选的方案数很简单，直接背包就行了。

然后子集枚举1号点所在的连通块，减一下。复杂度$O(3^n p)$。

做法

这种连通图计数，有两种套路。

做法

这种连通图计数，有两种套路。

第一种套路是：设f_S是在S中随便选的方案数，g_S是S连通的方案数($g_0 = 0$)，显然有$f = e^g$。$g = \ln f$。这里的乘法定义为子集卷积。

做法

这种连通图计数，有两种套路。

第一种套路是：设f_S是在S中随便选的方案数，g_S是S连通的方案数($g_0 = 0$)，显然有$f = e^g$。$g = \ln f$。这里的乘法定义为子集卷积。

那么考虑子集卷积的过程，先做莫比乌斯变换，然后把占位多项式用$O(n^2)$的做法求个ln，再莫比乌斯反演回去就可以了。复杂度$O(2^n n^2 p)$。

做法

第二种套路是：考虑斯特林数，如果枚举一个连通块划分，强制不同连通块之间没有边，同一个连通块不一定要连通，一个n个连通块的图会在k个连通块的地方算$S_{n,k}$次。根据

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(i-1)!S_{n,i}=[n=1]$$

做法

第二种套路是：考虑斯特林数，如果枚举一个连通块划分，强制不同连通块之间没有边，同一个连通块不一定要连通，一个n个连通块的图会在k个连通块的地方算$S_{n,k}$次。根据

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(i-1)!S_{n,i}=[n=1]$$

我们想让一个i个连通块的图被枚举到$(-1)^{i-1}(i-1)!$次。

做法

第二种套路是：考虑斯特林数，如果枚举一个连通块划分，强制不同连通块之间没有边，同一个连通块不一定要连通，一个n个连通块的图会在k个连通块的地方算$S_{n,k}$次。根据

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}(i-1)!S_{n,i}=[n=1]$$

我们想让一个i个连通块的图被枚举到$(-1)^{i-1}(i-1)!$次。那么只要乱序枚举除1号点以外点的连通块就行了。

做法

换句话说，设f_S表示包含1号点的方案数，g_S类似，只不过系数带了个-1。

做法

换句话说，设f_S表示包含1号点的方案数，g_S类似，只不过系数带了个-1。

那么我们要求的是$f*(1+g+g^2...+g^\infty)=\frac{f}{1-g}$。乘法定义为子集卷积。

做法

换句话说，设f_S表示包含1号点的方案数，g_S类似，只不过系数带了个-1。

那么我们要求的是$f*(1+g+g^2...+g^\infty)=\frac{f}{1-g}$。乘法定义为子集卷积。

那么同样先做莫比乌斯变换，把占位多项式求逆，再莫比乌斯反演回去。$O(2^n n^2 p)$。

撒花OvO!

Questions are welcomed.