莫比乌斯反演

上海交通大学 方泓杰

前置技能0：一些表示方法

$a|b$表示a是b的因数，也就是$b \bmod a = 0$。

$$[\text{operator}] = \begin{cases} 1 & \text{operator} = true \\ 0 & \text{operator} = false \end{cases}$$

我们讨论的函数均为数论函数（定义域为ℕ）。

积性函数：数论函数$g(n)$，且若$(n,m) = 1$，$g(nm) = g(n)g(m)$，则称$g(n)$为积性函数。

完全积性函数：数论函数$g(n)$，对于任意n,m，均满足$g(nm) = g(n)g(m)$。

前置技能0：埃氏筛 & 枚举因数

埃氏筛相信大家都会。

枚举因数就是在已知$g(n)$的情况下，要以$O(n\log n)$的时间复杂度，求出类似于：

$$f(n)=\sum_{d|n} g(d)$$

的$f(n)$值。

用类似于埃氏筛法的方法，我们枚举因数d，分别给$d,2d,\ldots,td$增加贡献。

时间复杂度$O\left(n+\frac{n}{2}+\frac{n}{3}+\cdots+\frac{n}{n}\right)=O\left(n\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\right)=O(n\ln n)\approx O(n\log n)$

前置技能1：线性筛

关键：当$i \bmod p_j = 0$时跳出循环，保证每个合数被其最小素因子筛掉。

理解：如果没有退出，下一个为$i \times p_{j+1}$，能被p_j整除，而$p_j \le i$，一定能被前面筛掉。

在筛出所有合数的同时也可以找出其最小质因子。

```
for (int i=2; i<=n; ++i) {
  if(!vis[i]) p[++pn] = i;
  for (int j=1; j<=pn && i*p[j]<=n; ++j) {
    vis[i*p[j]] = 1;
    if(i%p[j] == 0) break;
  }
}
```

前置技能1：线性筛

如何推导线性筛？分三步！设我们要筛$f(x)$为积性函数。

1. 若p是质数，那么$f(p) = ?$

2. 若p是质数，那么$f\left(p^k\right) = ?\,(k \geq 2)$

3. 若$(a, p) = 1$，那么$f(ap) = f(a)f(p)$。（**积性函数性质**）

如何发现是积性函数？

观察 & 打表归纳

前置技能2：重要引理

【引理1】设正整数x, y, a, b，其中$a, b \le x, \boldsymbol{y} = \left[\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}}\right]$，那么有$\left[\frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{b}}\right] = \left[\frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{ab}}\right]$。

前置技能2：重要引理

【引理1】设正整数x, y, a, b，其中$a, b \leq x, \boldsymbol{y} = \left\lfloor \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{a}} \right\rfloor$，那么有$\left\lfloor \frac{\boldsymbol{y}}{\boldsymbol{b}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{ab}} \right\rfloor$。

【证明】设$x = kab + c$，其中$k, c \geq 0$且$c < ab$，即$k = \left\lfloor \frac{x}{ab} \right\rfloor$

$y = \left\lfloor \frac{x}{a} \right\rfloor = kb + \left\lfloor \frac{c}{a} \right\rfloor$，其中$\left\lfloor \frac{c}{a} \right\rfloor < b$，所以$\left\lfloor \frac{y}{b} \right\rfloor = k$。

后文会遇到许多该引理的应用。

前置技能3：ϕ

$\phi(n)$：欧拉函数，表示在$[1,n]$中有多少个数k，满足$(k,n)=1$。

前置技能3：ϕ

$\phi(n)$：欧拉函数，表示在$[1,n]$中有多少个数k，满足$(k,n)=1$。

一些关于ϕ的性质：

1. $\phi(p)=p-1$（p是质数）；

2. $\phi\left(p^k\right)=(p-1)p^{k-1}$（$p$是质数）；

3. 若$(n,m)=1$，则$\phi(nm)=\phi(n)\phi(m)$；

前置技能3：ϕ

$\phi(n)$：欧拉函数，表示在$[1,n]$中有多少个数k，满足$(k,n)=1$。

一些关于ϕ的性质：

1. $\phi(p)=p-1$（p是质数）；

2. $\phi\left(p^k\right)=(p-1)p^{k-1}$（$p$是质数）；

3. 若$(n,m)=1$，则$\phi(nm)=\phi(n)\phi(m)$；（积性函数）

【证明】

2. $\phi\left(p^k\right)=p^k-p^{k-1}=(p-1)p^{k-1}$

$[1,p^k]$的整数中，和p^k不互质的有$p,2p,\ldots,p^{k-1}\times p$，共$p^{k-1}$个。

前置技能3：ϕ的性质总结

关于ϕ的一些需要知道的性质

4. 若$n = \prod p_i^{k_i}$，那么$\phi(n) = n \prod \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$

5. $\sum_{d|n} \phi(d) = n$；

引入

假如我们有这样一个式子：

$$F(n)=\sum_{d|n}f(d)$$

引入

假如我们有这样一个式子：

$$F(n)=\sum_{d|n} f(d)$$

列出一些项：

$F(1)=f(1), F(2)=f(1)+f(2)$

$F(3)=f(1)+f(3), F(4)=f(1)+f(2)+f(4)$

$F(5)=f(1)+f(5), F(6)=f(1)+f(2)+f(3)+f(6)$

$F(7)=f(1)+f(7), F(8)=f(1)+f(2)+f(4)+f(8)$

引入

通过反解，我们可以解得（其中一种表示方法）：

$f(1)=F(1), f(2)=F(2)-F(1)$

$f(3)=F(3)-F(1), f(4)=F(4)-F(2)$

$f(5)=F(5)-F(1), f(6)=F(6)-F(3)-F(2)+F(1)$

$f(7)=F(7)-F(1), f(8)=F(8)-F(4)$

引入

通过反解，我们可以解得（其中一种表示方法）：

$f(1) = F(1), f(2) = F(2) - F(1)$

$f(3) = F(3) - F(1), f(4) = F(4) - F(2)$

$f(5) = F(5) - F(1), f(6) = F(6) - F(3) - F(2) + F(1)$

$f(7) = F(7) - F(1), f(8) = F(8) - F(4)$

观察我们可以发现，似乎都能写成：

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right)$$

其中，$\mu(d)$的取值仅为$\pm 1, 0$，称为**莫比乌斯函数**。

莫比乌斯函数

直接地，我们给出莫比乌斯函数的定义：

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1 \\ (-1)^r & \text{if } n = p_1 p_2 \dots p_r (p_1, p_2, \dots, p_r \text{ are distinct primes}) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

莫比乌斯函数

直接地，我们给出莫比乌斯函数的定义：

$$\mu(n)=\begin{cases}1 & \text{if } n=1\\ (-1)^r & \text{if } n=p_1p_2\dots p_r (p_1,p_2,\dots,p_r \text{ are distinct primes})\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

【定理1】莫比乌斯函数是一个积性函数。

根据积性函数定义$\mu(mn)=\mu(m)\mu(n)\quad (\text{if } (m,n)=1)$分类讨论可以证明。

【结论】如果一个函数$\boldsymbol{f(n)}$是积性函数，那么它的*summatory function*也是积性函数。

$F(n)=\sum_{d|n} f(d)$称为$f(n)$的*summatory function*。

可以根据积性函数定义验证。

莫比乌斯函数的性质

【定理2】

$$F(n)=\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1 & \text{if } n=1\\ 0 & \text{if } n>1\end{cases}$$

莫比乌斯函数的性质

【定理2】

$$F(n)=\sum_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}1 & \text{if } n=1\\ 0 & \text{if } n>1\end{cases}$$

证明：根据【结论】，显然$F(n)$为积性函数。

当$n=1$时显然$F(1)=\mu(1)=1$；

当$n=p^k$时（p质数），

$$F\left(p^k\right)=\sum_{d|n^k}\mu(d)=\mu(1)+\mu(p)+\mu(p^2)+\cdots+\mu\left(p^k\right)=1+(-1)+0+\cdots+0=0$$

当$n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_k^{a_k}$，利用积性函数性质易知$F(n)=0$。

莫比乌斯反演公式

【定理（莫比乌斯反演公式1）】如果$F(n)$是$f(n)$的*summatory function*，那么有：

$$F(n)=\sum_{d|n} f(d) \quad \Leftrightarrow \quad f(n)=\sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right)$$

莫比乌斯反演公式

【定理（莫比乌斯反演公式1）】如果$F(n)$是$f(n)$的summatory function，那么有：

$$F(n)=\sum_{d|n} f(d) \quad \Leftrightarrow \quad f(n)=\sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right)$$

证明：

$$f(n)=\sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right)=\sum_{d|n}\left(\mu(d) \sum_{e|(n/d)} f(e)\right)=\sum_{d|n}\left(\sum_{e|(n/d)} \mu(d) f(e)\right)$$

交换求和顺序，

$$f(n)=\sum_{d|n}\left(\sum_{e|(n/d)} \mu(d) f(e)\right)=\sum_{e|n}\left(f(e) \sum_{d|(n/e)} \mu(d)\right)$$

莫比乌斯反演公式

$$f(n)=\sum_{e|n}\left(f(e)\sum_{d|(n/e)}\mu(d)\right)$$

根据【定理2】，当且仅当$n=e$时，$\sum_{d|(n/e)}\mu(d)=1$，其余时刻$\sum_{d|(n/e)}\mu(d)=0.$

故$f(n)=f(e)\times 1=f(n)\ (e=n)$。证毕。

莫比乌斯反演公式

$$f(n)=\sum_{e|n}\left(f(e)\sum_{d|(n/e)}\mu(d)\right)$$

根据【定理2】，当且仅当$n=e$时，$\sum_{d|(n/e)}\mu(d)=1$，其余时刻$\sum_{d|(n/e)}\mu(d)=0.$

故$f(n)=f(e)\times 1=f(n)\ (e=n)$。证毕。

【定理3】如果$\boldsymbol{f(n)}$的*summatory function* $\boldsymbol{F(n)}$为积性函数，则$\boldsymbol{f(n)}$也为积性函数。

莫比乌斯反演公式

【公式1】

$$F(n)=\sum_{d|n} f(d) \iff f(n)=\sum_{d|n}\mu(d)F\left(\frac{n}{d}\right)$$

【公式2】（**常用**，证明类似）

$$F(n)=\sum_{n|d} f(d) \iff f(n)=\sum_{n|d}\mu\left(\frac{d}{n}\right)F(d)$$

参考资料： *Kenneth H. Rosen* 《*Elementary Number Theory and Its Applications (6th edition)*》

后置技能4：μ的性质总结

关于μ的一些需要知道的性质

1. μ的定义。

2. $\sum_{d|n}\mu(d)=[n=1]$

3. $\phi(n)=\sum_{d|n}\mu(d)\times\frac{n}{d}$

BZOJ 2301 Problem b

q次询问，每次询问有多少个(x,y)满足：$a \le x \le b, c \le y \le d, (x,y) = k$。

$1 \le q, a, b, c, d, k \le 50000, a \le b, c \le d$

BZOJ 2301 Problem b

类似二维前缀和转化为求有多少组(x, y)满足$1 \le x \le n, 1 \le y \le m, (x, y) = k$。

BZOJ 2301 Problem b

类似二维前缀和转化为求有多少组(x,y)满足$1 \le x \le n, 1 \le y \le m, (x,y)=k$。

令$f(i)$表示$1 \le x \le n, 1 \le y \le m, (x,y)=i$的数对对数

令$F(i)$表示$1 \le x \le n, 1 \le y \le m, i|(x,y)$的数对个数，显然有：

BZOJ 2301 Problem b

类似二维前缀和转化为求有多少组(x, y)满足$1 \le x \le n, 1 \le y \le m, (x, y) = k$。

令$f(i)$表示$1 \le x \le n, 1 \le y \le m, (x, y) = i$的数对对数

令$F(i)$表示$1 \le x \le n, 1 \le y \le m, i|(x, y)$的数对个数，显然有：

$$F(i) = \left[\frac{n}{i}\right]\left[\frac{m}{i}\right], F(i) = \sum_{i|d} f(d) \Rightarrow f(i) = \sum_{i|d} \mu\left(\frac{d}{i}\right) F(d) = \sum_{i|d} \mu\left(\frac{d}{i}\right)\left[\frac{n}{d}\right]\left[\frac{m}{d}\right]$$

枚举原题中k的每一个倍数就能在$O(n)$复杂度处理单次询问。

优化？

BZOJ 2301 Problem b

分析$\left[\frac{n}{d}\right]$的取值：

1. 当$1 \le d \le [\sqrt{n}]$时，$\left[\frac{n}{d}\right]$最多$[\sqrt{n}]$种不同取值；

2. 当$[\sqrt{n}] + 1 \le d \le n$时，由于$\left[\frac{n}{d}\right] \le [\sqrt{n}]$，所以最多有$[\sqrt{n}]$种不同取值。

BZOJ 2301 Problem b

分析$\left[\frac{n}{d}\right]$的取值：

1. 当$1 \le d \le [\sqrt{n}]$时，$\left[\frac{n}{d}\right]$最多$[\sqrt{n}]$种不同取值；

2. 当$[\sqrt{n}] + 1 \le d \le n$时，由于$\left[\frac{n}{d}\right] \le [\sqrt{n}]$，所以最多有$[\sqrt{n}]$种不同取值。

综上，$\left[\frac{n}{d}\right]$最多有$2[\sqrt{n}]$种不同取值。

同理，$\left[\frac{m}{d}\right]$最多有$2[\sqrt{m}]$种不同取值。

所以，$\left[\frac{n}{d}\right]\left[\frac{m}{d}\right]$最多有多少个不同的取值呢？

BZOJ 2301 Problem b

是$2[\sqrt{n}]\times 2[\sqrt{m}]=4[\sqrt{n}][\sqrt{m}]$个吗？

BZOJ 2301 Problem b

是$2[\sqrt{n}] \times 2[\sqrt{m}] = 4[\sqrt{n}][\sqrt{m}]$个吗？错！

只有$2[\sqrt{n}] + 2[\sqrt{m}]$个！（间断点合并！）

BZOJ 2301 Problem b

是$2[\sqrt{n}] \times 2[\sqrt{m}] = 4[\sqrt{n}][\sqrt{m}]$个吗？错！

只有$2[\sqrt{n}] + 2[\sqrt{m}]$个！（间断点合并！）

对莫比乌斯函数维护前缀和，每一段我们就可以直接回答了。

对于每次询问，复杂度为$O(\sqrt{n})$。

总复杂度$O(q\sqrt{n})$。

枚举不同的值的代码见右边。

这里的last指下一个间断点。

这个方法又被称为<u>**数论分块**</u>。

```
if(n>m) swap(n, m);
for (int i=1, last; i<=n; i=last+1) {
    last = min(n/(n/i), m/(m/i));
    ret += (n/i)*(m/i)*(sum[last]-sum[i-1]);
}
return ret;
```

前置技能应用：筛莫比乌斯函数

1. 若p是质数，$\mu(p) = -1$；

2. 若p是质数，$\mu\left(p^k\right) = 0(k \geq 2)$；

3. 若$(a, p) = 1$，$\mu(ap) = \mu(a)\mu(p)$。

BZOJ 2820 YY的GCD

求有多少个数对(x, y)满足$1 \leq x \leq n, 1 \leq y \leq m$且$(x, y)$是素数。多组数据。

$1 \leq n \leq 10^7, 1 \leq Case \leq 10000$

BZOJ 2820 YY的GCD

设$(x,y)=p$，问题转化为对每个质数p，求出有多少个数对(x,y)满足：

$1 \le x \le \left[\frac{n}{p}\right], 1 \le y \le \left[\frac{m}{p}\right], (x,y)=1$

BZOJ 2820 YY的GCD

设$(x,y)=p$，问题转化为对每个质数p，求出有多少个数对(x,y)满足：

$1 \le x \le \left[\frac{n}{p}\right], 1 \le y \le \left[\frac{m}{p}\right], (x,y)=1$

$f(i)$表示$1 \le x \le \left[\frac{n}{p}\right], 1 \le y \le \left[\frac{m}{p}\right], (x,y)=i$的数对对数；

$F(i)$表示$1 \le x \le \left[\frac{n}{p}\right], 1 \le y \le \left[\frac{m}{p}\right], i|(x,y)$的数对对数。

BZOJ 2820 YY的GCD

设$(x,y)=p$，问题转化为对每个质数p，求出有多少个数对(x,y)满足：

$1 \le x \le \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor, 1 \le y \le \left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor, (x,y)=1$

$f(i)$表示$1 \le x \le \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor, 1 \le y \le \left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor, (x,y)=i$的数对对数；

$F(i)$表示$1 \le x \le \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor, 1 \le y \le \left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor, i|(x,y)$的数对对数。

那么要求$f(1)$，反演得：$f(1)=\sum_{d=1}^{\min(n,m)} \mu(d)F(d)=\sum_{d=1}^{\min(n,m)} \mu(d)\left\lfloor \frac{n}{pd} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{pd} \right\rfloor$，那么：

$$ans=\sum_{p=1}^{\min(n,m)} \sum_{d=1}^{\min(n,m)} \mu(d)\left\lfloor \frac{n}{pd} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{pd} \right\rfloor$$

BZOJ 2820 YY的GCD

$$ans = \sum_{p=1}^{\min(n,m)} \sum_{d=1}^{\min(n,m)} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{pd} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{pd} \right\rfloor$$

令$T = pd$，则有：

$$ans = \sum_{T=1}^{\min(n,m)} \left\lfloor \frac{n}{T} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{T} \right\rfloor \sum_{p|T} \mu\left(\frac{T}{p}\right)$$

BZOJ 2820 YY的GCD

$$ans = \sum_{p=1}^{\min(n,m)} \sum_{d=1}^{\min(n,m)} \mu(d) \left\lfloor \frac{n}{pd} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{pd} \right\rfloor$$

令$T = pd$，则有：

$$ans = \sum_{T=1}^{\min(n,m)} \left\lfloor \frac{n}{T} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{T} \right\rfloor \sum_{p|T} \mu\left(\frac{T}{p}\right)$$

要是能预处理$\sum_{p|T} \mu\left(\frac{T}{p}\right)$的前缀和，询问可在$O(\sqrt{n})$解决。

枚举质数，暴力更新即可。质数$O\left(\frac{n}{\log n}\right)$个，枚举均摊$O(\log n)$，预处理总复杂度$O(n)$。

总复杂度$O(n + Case\sqrt{n})$。

BZOJ 3529 数表

令$F(i)$为i的约数和，q次给定n, m, a，求:

$$\sum_{1\le i\le n, 1\le j\le m, F(\gcd(i,j))\le a} F(\gcd(i,j)) \mod 2^{31}$$

$1 \le n, m \le 10^5, 1 \le q \le 2000, 1 \le a \le 10^9$

BZOJ 3529 数表

先不管a的限制。

$g(i)$表示$1 \le x \le \left[\frac{n}{p}\right], 1 \le y \le \left[\frac{m}{p}\right], (x, y) = i$的数对对数；

根据前两题的经验，有$g(i) = \sum_{i|d} \mu\left(\frac{d}{i}\right)\left[\frac{n}{d}\right]\left[\frac{m}{d}\right]$

BZOJ 3529 数表

先不管a的限制。

$g(i)$表示$1 \le x \le \left[\frac{n}{p}\right], 1 \le y \le \left[\frac{m}{p}\right], (x, y) = i$的数对对数；

根据前两题的经验，有$g(i) = \sum_{i|d} \mu\left(\frac{d}{i}\right)\left[\frac{n}{d}\right]\left[\frac{m}{d}\right]$

$$ans = \sum_{i=1}^{\min(n,m)} F(i)g(i) = \sum_{i=1}^{\min(n,m)} F(i)\sum_{i|d} \mu\left(\frac{d}{i}\right)\left[\frac{n}{d}\right]\left[\frac{m}{d}\right] = \sum_{i=1}^{\min(n,m)} \sum_{i|d} F(i)\mu\left(\frac{d}{i}\right)\left[\frac{n}{d}\right]\left[\frac{m}{d}\right]$$

BZOJ 3529 数表

先不管a的限制。

$g(i)$表示$1 \le x \le \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor, 1 \le y \le \left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor, (x, y) = i$的数对对数；

根据前两题的经验，有$g(i) = \sum_{i|d} \mu\left(\frac{d}{i}\right)\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor$

$$ans = \sum_{i=1}^{\min(n,m)} F(i)g(i) = \sum_{i=1}^{\min(n,m)} F(i)\sum_{i|d} \mu\left(\frac{d}{i}\right)\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor = \sum_{i=1}^{\min(n,m)} \sum_{i|d} F(i)\mu\left(\frac{d}{i}\right)\left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor$$

交换i和d，仍有：

$$ans = \sum_{d=1}^{\min(n,m)} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor \sum_{i|d} F(i)\mu\left(\frac{d}{i}\right)$$

BZOJ 3529 数表

$$ans = \sum_{d=1}^{\min(n,m)} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{d} \right\rfloor \sum_{i|d} F(i)\mu\left(\frac{d}{i}\right)$$

预处理出来$\sum_{i|d} F(i)\mu\left(\frac{d}{i}\right)$的前缀和，就可以在$O(\sqrt{n})$回答询问了。

而$\sum_{i|d} F(i)\mu\left(\frac{d}{i}\right)$前缀和可以通过与上题类似的办法在$O(n\log n)$内求出来。

现在考虑加了$F(i) \le a$的限制。

BZOJ 3529 数表

$$ans = \sum_{d=1}^{\min(n,m)} \left[\frac{n}{d}\right]\left[\frac{m}{d}\right]\sum_{i|d} F(i)\mu\left(\frac{d}{i}\right)$$

预处理出来$\sum_{i|d} F(i)\mu\left(\frac{d}{i}\right)$的前缀和，就可以在$O(\sqrt{n})$回答询问了。

而$\sum_{i|d} F(i)\mu\left(\frac{d}{i}\right)$前缀和可以通过与上题类似的办法在$O(n\log n)$内求出来。

现在考虑加了$F(i) \le a$的限制。

离线，对a排序，按照$F(i)$将i排序，用树状数组维护即可。

时间复杂度$O(n\log^2 n + q\sqrt{n}\log n)$。

BZOJ 2693 jzptab

给出n,m，求：$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\operatorname{lcm}(i,j)$。多组数据。

$1 \le T \le 10^4, 1 \le n,m \le 10^7$

弱化版：无多组询问（BZOJ 2154）

BZOJ 2693 jzptab

推导公式时间~

$$ans = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{ij}{(i,j)}$$

BZOJ 2693 jzptab

推导公式时间~

$$ans = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{ij}{(i,j)}$$

令$d = (i,j), F(x,y) = \sum_{1\le i\le x,1\le j\le y}^{(i,j)=1} ij$，那么，

$$ans = \sum_{d=1}^{\min(n,m)} \frac{d^2F\left(\left[\frac{n}{d}\right],\left[\frac{m}{d}\right]\right)}{d} = \sum_{d=1}^{\min(n,m)} dF\left(\left[\frac{n}{d}\right],\left[\frac{m}{d}\right]\right)$$

BZOJ 2693 jzptab

推导公式时间~

$$ans=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{ij}{(i,j)}$$

令$d=(i,j),F(x,y)=\sum_{1\le i\le x,1\le j\le y}^{(i,j)=1}ij$，那么，

$$ans=\sum_{d=1}^{\min(n,m)}\frac{d^2F\left(\left[\frac{n}{d}\right],\left[\frac{m}{d}\right]\right)}{d}=\sum_{d=1}^{\min(n,m)}dF\left(\left[\frac{n}{d}\right],\left[\frac{m}{d}\right]\right)$$

令$S(x,y,p)=\sum_{1\le i\le x,1\le j\le y}pi\times pj=p^2\frac{xy(x+1)(y+1)}{4}$，特别地$S(x,y)=S(x,y,1)$

那么按照前面的做法，$F(x,y)=\sum_{i=1}^{\min(x,y)}\mu(i)S\left(\left[\frac{x}{i}\right],\left[\frac{y}{i}\right],i\right)$

BZOJ 2693 jzptab

$$ans = \sum_{d=1}^{\min(n,m)} dF\left(\left[\frac{n}{d}\right], \left[\frac{m}{d}\right]\right), \qquad F(x, y) = \sum_{i=1}^{\min(x,y)} i^2\mu(i)S\left(\left[\frac{x}{i}\right], \left[\frac{y}{i}\right]\right)$$

$$ans = \sum_{d=1}^{\min(n,m)} d \sum_{i=1}^{\min([n/d],[m/d])} i^2\mu(i)S\left(\left[\frac{n}{di}\right], \left[\frac{m}{di}\right]\right)$$

BZOJ 2693 jzptab

$$ans=\sum_{d=1}^{\min(n,m)} dF\left(\left[\frac{n}{d}\right],\left[\frac{m}{d}\right]\right),\qquad F(x,y)=\sum_{i=1}^{\min(x,y)} i^2\mu(i)S\left(\left[\frac{x}{i}\right],\left[\frac{y}{i}\right]\right)$$

$$ans=\sum_{d=1}^{\min(n,m)} d\sum_{i=1}^{\min([n/d],[m/d])} i^2\mu(i)S\left(\left[\frac{n}{di}\right],\left[\frac{m}{di}\right]\right)$$

令$D=di$，则

$$ans=\sum_{D=1}^{\min(n,m)} S\left(\left[\frac{n}{D}\right],\left[\frac{m}{D}\right]\right)\sum_{i|D} Di\mu(i)$$

容易发现，前面$S\left(\left[\frac{n}{D}\right],\left[\frac{m}{D}\right]\right)$是分段的，只要筛出$\sum_{i|D} Di\mu(i)$，并维护前缀和即可。

BZOJ 2693 jzptab

筛$g(D)=\sum_{i|D} Di\mu(i)$。容易证明/发现g为积性函数

1. 若p为质数，$g(p)=p\big(1\times 1+p\times(-1)\big)=-p^2+p$

2. 若p为质数，$g\left(p^k\right)=p^k\big(1\times 1+p\times(-1)\big)=-p^{k+1}+p^k=pg\left(p^{k-1}\right)(k\geq 2)$

3. 积性函数：若$(a,p)=1$，则$g(ap)=g(a)g(p)$

预处理$O(n)$，单次询问$O(\sqrt{n})$，总复杂度$O(n+T\sqrt{n})$。

欧拉心算

求

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\phi\big(\gcd(i,j)\big)$$

多组数据。

$1 \le T \le 5000, 1 \le n \le 10^7$

BZOJ 4804 欧拉心算

令$d = (i, j)$，有：

$$ans = \sum_{d=1}^{n} \phi(d) \sum_{i=1}^{[n/d]} \sum_{j=1}^{[n/d]} [(i, j) = 1] = \sum_{d=1}^{n} \phi(d) \sum_{i=1}^{n} \mu(i) \left[\frac{n}{di}\right]^2$$

BZOJ 4804 欧拉心算

令$d = (i, j)$，有：

$$ans = \sum_{d=1}^{n} \phi(d) \sum_{i=1}^{[n/d]} \sum_{j=1}^{[n/d]} [(i,j) = 1] = \sum_{d=1}^{n} \phi(d) \sum_{i=1}^{n} \mu(i) \left[\frac{n}{di}\right]^2$$

令$D = di$，则

$$ans = \sum_{D=1}^{n} \left[\frac{n}{D}\right]^2 \sum_{d|D} \phi(d)\mu\left(\frac{D}{d}\right)$$

转变为筛$\sum_{d|D} \phi(d)\mu\left(\frac{D}{d}\right)$。观察/打表/证明可知其是一个积性函数。

BZOJ 4804 欧拉心算

$$h(D)=\sum_{d|D}\phi(d)\mu\left(\frac{D}{d}\right)$$

BZOJ 4804 欧拉心算

$$h(D)=\sum_{d|D}\phi(d)\mu\left(\frac{D}{d}\right)$$

筛的时候也比较特殊，我们一样分类：

1. 当p为质数时，$h(p)=\phi(1)\mu(p)+\phi(p)\mu(1)=-1+p-1=p-2$

2. 当p为质数时，$h(p^2)=\phi(1)\mu(p^2)+\phi(p)\mu(p)+\phi(p^2)\mu(1)=p^2-2p+1$

3. 当p为质数时，$h\left(p^k\right)=\phi\left(p^k\right)\mu(1)+\phi\left(p^{k-1}\right)\mu(p)=p^{k-1}(p-1)-p^{k-2}(p-1)$

$h\left(p^k\right)=p^{k-2}(p-1)^2=p^{k-2}h(p^2)=ph\left(p^{k-1}\right)$

4. 若$(a,p)=1$，那么$h(ap)=h(a)h(p)$

时间复杂度$O(n+T\sqrt{n})$。

小总结

我们发现，很多题目都要用到这个式子：

$$\sum_{i=1}^{A}\sum_{j=1}^{B}[(i,j)=1]=\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\left[\frac{A}{d}\right]\left[\frac{B}{d}\right]$$

可以记下来作为结论。（当然记不住了也要会推导，回归莫比乌斯反演的本质）

于神之怒加强版

求

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(i,j)^k \mod (10^9+7)$$

多组数据。

$1 \le T \le 2000, 1 \le n, m, k \le 5 \times 10^6$

BZOJ 4407 于神之怒加强版

令$d = (i, j)$，

$$ans = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(i, j)^k = \sum_{d=1}^{\min(n,m)} d^k \sum_{i=1}^{[n/d]} \sum_{j=1}^{[m/d]} [(i, j) = 1] = \sum_{d=1}^{\min(n,m)} d^k \sum_{i=1}^{n} \mu(i) \left[\frac{n}{di}\right]\left[\frac{m}{di}\right]$$

BZOJ 4407 于神之怒加强版

令$d=(i,j)$，

$$ans=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(i,j)^k=\sum_{d=1}^{\min(n,m)}d^k\sum_{i=1}^{[n/d]}\sum_{j=1}^{[m/d]}[(i,j)=1]=\sum_{d=1}^{\min(n,m)}d^k\sum_{i=1}^{n}\mu(i)\left[\frac{n}{di}\right]\left[\frac{m}{di}\right]$$

令$D=di$，

$$ans=\sum_{D=1}^{\min(n,m)}\left[\frac{n}{D}\right]\left[\frac{m}{D}\right]\sum_{d|D}d^k\mu\left(\frac{D}{d}\right)$$

筛出积性函数$\sum_{d|D}d^k\mu\left(\frac{D}{d}\right)$即可。可以自行推导一下线性筛过程。

约数个数和

求

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} d(ij)$$

其中$d(i)$表示i的约数个数。多组数据

$1 \le n, m, T \le 50000$

BZOJ 3994 SDOI 2015 约数个数和

首先，这个$d(ij)$有一个公式：

$$d(ij)=\sum_{a|i}\sum_{b|j}[(a,b)=1]$$

因为ij的约数一定可以表示成$a\times\frac{j}{b}$，其中a,b分别为i,j的约数。

如果不加入$[(a,b)=1]$，可能会有重复，比如若$(a,b)=p$，$ap\times\frac{j}{b/p}$会产生重复。

BZOJ 3994 SDOI 2015 约数个数和

首先，这个$d(ij)$有一个公式：

$$d(ij)=\sum_{a|i}\sum_{b|j}[(a,b)=1]$$

因为ij的约数一定可以表示成$a\times\frac{j}{b}$，其中a,b分别为i,j的约数。

如果不加入$[(a,b)=1]$，可能会有重复，比如若$(a,b)=p$，$ap\times\frac{j}{b/p}$会产生重复。

有了上述式子，下面进入套路化简过程：

$$ans=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{a|i}\sum_{b|j}[(a,b)=1]=\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{m}[(a,b)=1]\left\lfloor\frac{n}{a}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{b}\right\rfloor$$

BZOJ 3994 SDOI 2015 约数个数和

$$ans=\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{m}[(a,b)=1]\left\lfloor\frac{n}{a}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{b}\right\rfloor=\sum_{d=1}^{\min(n,m)}\mu(d)\sum_{a=1}^{\lfloor n/d\rfloor}\sum_{b=1}^{\lfloor m/d\rfloor}\left\lfloor\frac{n}{da}\right\rfloor\left\lfloor\frac{m}{db}\right\rfloor$$

$$ans=\sum_{d=1}^{\min(n,m)}\mu(d)\left(\sum_{a=1}^{\lfloor n/d\rfloor}\left\lfloor\frac{\lfloor n/d\rfloor}{a}\right\rfloor\right)\left(\sum_{b=1}^{\lfloor m/d\rfloor}\left\lfloor\frac{\lfloor m/d\rfloor}{b}\right\rfloor\right)$$

BZOJ 3994 SDOI 2015 约数个数和

$$ans=\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{m}[(a,b)=1]\left[\frac{n}{a}\right]\left[\frac{m}{b}\right]=\sum_{d=1}^{\min(n,m)}\mu(d)\sum_{a=1}^{[n/d]}\sum_{b=1}^{[m/d]}\left[\frac{n}{da}\right]\left[\frac{m}{db}\right]$$

$$ans=\sum_{d=1}^{\min(n,m)}\mu(d)\left(\sum_{a=1}^{[n/d]}\left[\frac{[n/d]}{a}\right]\right)\left(\sum_{b=1}^{[m/d]}\left[\frac{[m/d]}{b}\right]\right)$$

令$F(n)=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{n}{i}\right]$，可以预处理出来。

$$ans=\sum_{d=1}^{\min(n,m)}\mu(d)F([n/d])F([m/d])$$

预处理μ前缀和后分段即可。

时间复杂度$O(T\sqrt{n})$

Hillan and the girl

给出n,m，求

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[(i,j)\text{不是完全平方数}]$$

多组数据。

$1 \le n,m \le 10^7, 1 \le T \le 10000$

HDU 5663 Hillan and the girl

常规反演套路，可得（略去过程）

$$ans = \sum_{T=1}^{\min(n,m)} \left\lfloor \frac{n}{T} \right\rfloor \left\lfloor \frac{m}{T} \right\rfloor \sum_{d|T} \mu\left(\frac{T}{d}\right) [d\text{不是完全平方数}]$$

$\sum_{d|T} \mu\left(\frac{T}{d}\right) [d\text{不是完全平方数}]$怎么筛？

HDU 5663 Hillan and the girl

常规反演套路，可得（略去过程）

$$ans = \sum_{T=1}^{\min(n,m)} \left\lfloor\frac{n}{T}\right\rfloor \left\lfloor\frac{m}{T}\right\rfloor \sum_{d|T} \mu\left(\frac{T}{d}\right)[d\text{不是完全平方数}]$$

$\sum_{d|T} \mu\left(\frac{T}{d}\right)[d\text{不是完全平方数}]$怎么筛？

先不管d的限制，直接做，则$\sum_{d|T} \mu\left(\frac{T}{d}\right) = \sum_{d|T} \mu(d) = [d = 1]$

那么，由于完全平方数不多，直接$O(\sqrt{n}\log n)$暴力扣掉即可。

总复杂度$O(n + \sqrt{n}\log n + T\sqrt{n})$。

未命名

给出n，求：

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(i,j)$$

多组数据。

$1 \le n \le 4 \times 10^6, 1 \le T \le 5000$

UVA 11426

于神之怒弱化版。

计算出$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(i,j)$后减去$\sum_{i=1}^{n} i$除以2即可。

时间复杂度$O(n+T\sqrt{n})$。

数字表格

给出n,m，求：

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m} f\big(\gcd(i,j)\big) \mod (10^9+7)$$

其中$f(i)$表示斐波那契数列第i项。

多组数据。

$1 \le T \le 1000, 1 \le n,m \le 10^6$

BZOJ 4816 SDOI 2017 数字表格

令$d = (i, j)$，则

$$ans = \prod_{d=1}^{\min(n,m)} f(d)^{\sum_{i=1}^{n/d} \sum_{j=1}^{m/d} [(i,j)==1]} = \prod_{d=1}^{\min(n,m)} f(d)^{\sum_{i=1}^{[n/d]} \mu(i) \left[\frac{n}{di}\right]\left[\frac{m}{di}\right]}$$

BZOJ 4816 SDOI 2017 数字表格

令$d=(i,j)$，则

$$ans=\prod_{d=1}^{\min(n,m)} f(d)^{\sum_{i=1}^{n/d}\sum_{j=1}^{m/d}[(i,j)==1]}=\prod_{d=1}^{\min(n,m)} f(d)^{\sum_{i=1}^{[n/d]}\mu(i)\left[\frac{n}{di}\right]\left[\frac{m}{di}\right]}$$

令$D=di$，那么

$$ans=\prod_{d=1}^{\min(n,m)} f(d)^{\sum_{i=1}^{[n/d]}\mu(i)\left[\frac{n}{di}\right]\left[\frac{m}{di}\right]}=\prod_{D=1}^{\min(n,m)}\prod_{d|D} f(d)^{\mu\left(\frac{D}{d}\right)\left[\frac{n}{D}\right]\left[\frac{m}{D}\right]}$$

$$ans=\prod_{D=1}^{\min(n,m)}\left(\prod_{d|D} f(d)^{\mu\left(\frac{D}{d}\right)}\right)^{\left[\frac{n}{D}\right]\left[\frac{m}{D}\right]}$$

下面我们要来求$\prod_{d|D} f(d)^{\mu\left(\frac{D}{d}\right)}$！

BZOJ 4816 SDOI 2017 数字表格

然后你兴高采烈地去写线性筛，发现这个函数筛不出来，因为他<u>**不是积性函数**</u>！

$$\prod_{d|D} f(d)^{\mu\left(\frac{D}{d}\right)}$$

陷入迷茫……

BZOJ 4816 SDOI 2017 数字表格

然后你兴高采烈地去写线性筛，发现这个函数筛不出来，因为他**不是积性函数**！

$$\prod_{d|D} f(d)^{\mu\left(\frac{D}{d}\right)}$$

陷入迷茫……

然后你发现，题目中n不是特别大，预处理$O(n\log n)$也没什么问题……

枚举因数，直接暴力更新！（由于$\mu=\pm 1,0$，先预处理斐波那契数列及其逆元）

然后就同样套路，做完啦！

时间复杂度$O(n\log n + T\sqrt{n})$

Ideal Puzzle Bobble

求从(1,1,1)可以看见多少整点(x, y, z)，其中$1 \le x \le L, 1 \le y \le W, 1 \le z \le H$

多组数据。

$1 \le T \le 200, 2 \le L, W, H \le 10^6$

ZOJ 3435 Ideal Puzzle Bobble

将$(1,1,1)$先平移至$(0,0,0)$得到新的L,W,H。

从两维类推，答案为：

$$\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{W}\sum_{k=1}^{H}[(i,j,k)=1]+\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{W}[(i,j)=1]+\sum_{i=1}^{L}\sum_{j=1}^{H}[(i,j)=1]+\sum_{i=1}^{W}\sum_{j=1}^{H}[(i,j)=1]+3$$

同样的套路，反演即可。

时间复杂度$O(n+T\sqrt{n})$，其中$n=\max(L,W,H)$。

重新理解莫比乌斯反演

狄利克雷卷积：设有函数$f(x), g(x)$，则

$$(f * g)(x) = \sum_{d|x} f(d)g(\frac{x}{d})$$

简单性质：

1. 交换律：$f * g = g * f$
2. 结合律：$(f * g) * h = f * (g * h)$
3. 分配律：$f * (g + h) = f * g + f * h$
4. 单位元：$f * \epsilon = f$，其中$\epsilon(x) = [x = 1]$。
5. 若f, g为积性函数，那么$f * g$也是积性函数。

莫比乌斯反演

【**定理2的不同表述**】$\boldsymbol{\mu} * \mathbf{1} = \boldsymbol{\epsilon}$，即$\epsilon(n) = \sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{if } n = 1 \\ 0 & \text{if } n > 1 \end{cases}$（其中1为常数函数）

【**莫比乌斯反演公式1**】如果有两个函数f, g满足$f(n) = \sum_{d|n} g(d)$，那么

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right)$$

反之亦然，即$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g} * \mathbf{1} \Leftrightarrow \boldsymbol{g} = \boldsymbol{\mu} * \boldsymbol{f}$

【证明】$f = g * 1 \Leftrightarrow \mu * f = \mu * g * 1 = \epsilon * g = g$

一个简单性质的证明

试证明：$\mu * Id = \phi$，其中$Id(n) = n$。

一个简单性质的证明

试证明：$\mu * Id = \phi$，其中$Id(n) = n$。

【证明】首先，我们有$\phi * 1 = Id$（前置技能），那么：

$$\mu * Id = \mu * \phi * 1 = (\mu * 1) * \phi = \epsilon * \phi = \phi$$

同时证明了“后置技能4”中的性质3。

杜教筛

主要形式：设$f(n)$为数论函数，需要计算：

$$S(n)=\sum_{i=1}^{n}f(i)$$

根据$f(n)$性质，构造一个$S(n)$关于$S\left(\left[\frac{n}{i}\right]\right)$的递推式，如：

找到一个合适的数论函数$g(n)$使得：

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{d|i}f(d)g\left(\frac{i}{d}\right)=\sum_{i=1}^{n}g(i)S\left(\left[\frac{n}{i}\right]\right)$$

那么，我们就可以操作一波：

$$\sum_{i=1}^{n}(f*g)(i)=\sum_{i=1}^{n}g(i)S\left(\left[\frac{n}{i}\right]\right)=\sum_{i=2}^{n}g(i)S\left(\left[\frac{n}{i}\right]\right)+g(1)S(n)$$

杜教筛

$$g(1)S(n) = \sum_{i=1}^{n}(f * g)(i) - \sum_{i=2}^{n} g(i)S\left(\left[\frac{n}{i}\right]\right)$$

那么，在计算$S(n)$时，需要被计算的$S\left(\left[\frac{n}{i}\right]\right)$只有$O(\sqrt{n})$种。

如果能够快速对$(f * g)(i)$和$g(i)$求和，就可以根据$\left[\frac{n}{i}\right]$取值分段。

这样计算一个$S(n)$复杂度即为$O(\sqrt{n})$。

根据一波复杂度分析，最后总复杂度$O\left(n^{3/4}\right)$。

如何构造$g(n)$？找特殊的函数，根据经验分析。

莫比乌斯函数的前缀和

【例】计算

$$S(n)=\sum_{i=1}^{n}\mu(i)$$

其中$n\le 10^{11}$。

【解】由于$\mu*1=\epsilon$，那么：

$$S(n)=\sum_{i=1}^{n}\epsilon(i)-\sum_{i=2}^{n}S\left(\left[\frac{n}{i}\right]\right)=1-\sum_{i=2}^{n}S\left(\left[\frac{n}{i}\right]\right)$$

直接计算的复杂度为$O(n^{3/4})$，我们稍稍优化一下。

我们可以线性筛出前$n^{2/3}$项，然后仔细分析下，递推部分的复杂度就变成了$O\left(n^{2/3}\right)$。

练习（BZOJ 3944）

【例】计算

$$S(n)=\sum_{i=1}^{n}\phi(i)$$

其中$n\le 10^{11}$。

【解】由于$\phi*1=id$，其中$id(n)=n$，那么：

$$S(n)=\frac{n(n+1)}{2}-\sum_{i=2}^{n}S\left(\left\lfloor\frac{n}{i}\right\rfloor\right)$$

直接计算的复杂度为$O(n^{3/4})$，我们稍稍优化一下。

我们可以线性筛出前$n^{2/3}$项，然后仔细分析下，递推部分的复杂度就变成了$O\left(n^{2/3}\right)$。

Lucas的数论

求

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} d(ij)$$

其中$d(i)$表示i的约数个数。对10^9+7取模。

$1 \le n \le 10^9$

BZOJ 4176 Lucas的数论

$$ans = \sum_{d=1}^{\min(n,m)} \mu(d) \left(\sum_{a=1}^{[n/d]} \left[\frac{[n/d]}{a} \right] \right) \left(\sum_{b=1}^{[m/d]} \left[\frac{[m/d]}{b} \right] \right)$$

令$F(n) = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{n}{i} \right]$，可以预处理出来。

$$ans = \sum_{d=1}^{\min(n,m)} \mu(d) F([n/d]) F([m/d])$$

预处理μ前缀和后分段即可。

时间复杂度$O(\sqrt{n})$。

问题来了，预处理要$O(n)$。加个杜教筛就完了。

习题

统一提交地址：https://vjudge.net/contest/283006

密码：hailiangC0211