

ALGEBRA 2

ZESTAW 5

Grupy rozwiązalne

Zadanie 1 Udowodnij, że w dowolnej grupie G dla każdych $a, b, g \in G$ spełnione są równości:

- $[a, b]^{-1} = [b, a]$
- $g[a, b]g^{-1} = [gag^{-1}, bgb^{-1}]$

Zadanie 2 Udowodnij, że $G' \triangleleft G$ dla dowolnej grupy G (w dowodzie można wykorzystać zadanie 1).

Zadanie 3 Udowodnij, że grupa G jest przemienna wtedy i tylko wtedy gdy $G' = \{1\}$.

Zadanie 4 Udowodnij, że każda grupa przemienna jest rozwiązalna.

Zadanie 5 Które z poniższych grup są rozwiązalne?

- (a) S_2 (b) S_3 (c) S_4 (d) D_n

Zadanie 6 Udowodnij, że jeśli G jest grupą, $F \triangleleft G$ i $H \triangleleft G$ wówczas $F \cap H \triangleleft G$.

Zadanie 7 Wykaż, że jeśli H jest cykliczną i normalną podgrupą grupy G , wówczas każda podgrupa grupy H jest normalną podgrupą G .

Zadanie 8 Udowodnij, że jeśli $H \triangleleft G$ i grupa G/H jest abelowa, wówczas $G' \subset H$.

Zadanie 9 Wykorzystaj zadanie 8 do wykazania, że $S'_4 = A_4$.

Zadanie 10 Czy komutant każdej grupy rozwiązalnej jest grupą abelową?

Zadanie 11 Udowodnij, że każda grupa rzędu p^2q , gdzie p i q są liczbami pierwszymi, jest rozwiązalna.

Zadanie 12 Dla dowolnej liczby pierwszej p udowodnij, że każda p -grupa jest rozwiązalna.

Zadanie 13 Udowodnij, że dla $n \geq 5$ grupa S_n nie jest rozwiązalna.

Zadanie 14 Udowodnij, że grupa A_5 nie ma podgrupy rzędu 15, choć jej rząd jest podzielny przez 15.

Zadanie 15 Czy relacja R zdefiniowana przez: " H jest w relacji R z G jeśli H jest podgrupą normalną G " jest przechodnia?

Zadanie 16 Rozstrzygnij, prawdziwość zdań:

- Iloczyn prosty dowolnych grup rozwiązalnych jest grupą rozwiązalną.
- Każda prosta grupa rozwiązalna jest przemienna.
- Każda prosta grupa rozwiązalna jest cykliczna.
- Każda grupa rozwiązalna jest cykliczna.
- Każda grupa S_n dla $n \geq 5$ jest prosta.

Zadanie 17 Wskaż przykład grupy nierozwiązalnej, której każda podgrupa Sylowa jest abelowa.

Zadanie 18 Udowodnij, że każda grupa nierozwiązalna minimalnego rzędu jest prosta.

Zadanie 19 Udowodnij, że grupa G jest rozwiązalna wtedy i tylko wtedy, gdy grupa $G/Z(G)$ jest rozwiązalna.