ALGEBRA 2 Zestaw 1
Grupy. Rozgrzewka

+ Fundamentalne Tw. o Skończonych Grupach Abelowych

Zadanie 1 Udowodnij, że jeśli G i H są podgrupami pewnej grupy abelowej, $G \cap H = \{e\}$, wówczas $G \oplus H$ także jest grupą.

Zadanie 2 Wykaż, że grupa Kleina jest izomorficzna z $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$.

Zadanie 3 Wykaż, że dla dowolnych podgrup G, H i F pewnej grupy przemiennej, spełniających warunek $G \cap H = G \cap F = \{e\}$ prawdziwa jest równoważność:

$$GH \sim GF \Leftrightarrow H \simeq F$$

Zadanie 4 Podaj rząd elementu a w grupie G.

- $a = (2, 5)$, $G = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_7$,
- $a = ((1, 2)(3, 4, 5), (1, 2, 3, 4))$, $G = S_5 \oplus S_6$.

Zadanie 5 Wskaż przykład grupy G i podgrup H_1, H_2 takich, że $H_1 \cdot H_2$ nie jest podgrupą.

Zadanie 6 Niech p będzie liczbą pierwszą. Udowodnij, że jeśli G jest p-grupą, wówczas

- Każda podgrupa grupy G jest p-podgrupą.
- Dla dowolnej podgrupy normalnej H grupy G grupa ilorazowa G/H jest p-grupą.

Zadanie 7 Wykaż, że jeśli G jest skończoną grupą przemienną, $H, F \leq G$, $H \cap F = \{e\}$, wówczas $|H \otimes F| = |H| \cdot |F|$.

Zadanie 8 Niech G będzie grupą abelową. Wykaż, że $G^n := \{x^n | x \in G\} \leq G$.

Zadanie 9 Wykaż, że dla dowolnego $n \in \mathbb{Z}$ i dla dowolnej grupy abelowej G

$$\{x \in G | \ x^n = e\} \leq G$$

.

Zadanie 10 Niech G będzie p-grupą abelową, gdzie p jest pewną liczbą pierwszą. Udowodnij, że $G^p < G$.

Zadanie 11 Udowodnij, że jeśli p jest liczbą pierwszą, G grupą, $x \in G$, $x \neq e$ i $x^p = e$ wówczas $|x| = p$.

Zadanie 12 (Kwaterniony.) Niech $G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ będzie zbiorem z działaniem multiplikatywnym określonym wzorami $i^2 = j^2 = k^2 = -1, (-1)i = -i, (-1)j = -j, (-1)k = -k, (-1)^2 = 1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$, 1 jest elementem neutralnym.

- Utwórz tablicę Cayleya dla G.
- Wykaż, że G jest grupą (zwaną **grupą kwaternionów** (W. Hamilton 1943)).
- Wykaż, że $H = \{1, -1\}$ jest podgrupą normalną G.
- Skonstruuj tabelę Cayleya grupy G/H. Czy G/H jest izomorficzna z $\mathbb{Z}_4$ lub $\mathbb{Z}_2\mathbb{Z}_2$?

Zadanie 13 Udowodnij, ż jeśli H jest normalną podgrupą grupy G i $F \leq G$, to $HF \leq G$.

Zadanie 14 Wykaż, że jeśli G jest grupą przemienną, $H, F \leq G, H \cap F = \{e\}$, wówczas $|H \otimes F| = |H| \cdot |F|$.

Zadanie 15 Niech G będzie grupą (niekoniecznie abelową) i niech $H \trianglelefteq G$. Udowodnij, że dla dowolnej podgrupy K' grupy G/H zbiór $K = \{g \in G : gH \in K'\}$ jest podgrupą grupy G.

Zadanie 16 Znajdź rząd grupy $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_9 / < (3, 5) >$.

Zadanie 17 Udowodnij, że iloczyn prosty $G \oplus H$ skończonych grup cyklicznych G i H jest grupą cykliczną wtedy i tylko wtedy gdy rzędy grup G i H są względnie pierwsze.

Wykaż twierdzenie **??**. Podaj przykład dowodzący, że założenie przemienności jest istotne a więc, że przez opuszczenie tego założenia otrzymujemy zdanie nieprawdziwe.

Zadanie 18 Dla grup:

$$\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_8 \qquad \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \qquad \mathbb{Z}_{32}$$

wskaż podgrupy rzędów 2, 4, 8, 16 i 32.

Zadanie 19 Niech p będzie liczbą pierwszą, $k, l \in \mathbb{N}, l \leq k$. Udowodnij, że w $\mathbb{Z}_{p^k}$ element p^{k-l} generuje grupę rzędu p^l.

Zadanie 20 Wskaż wszystkie, z dokładnością do izomorfizmu, grupy rzędu 225.

Zadanie 21 Udowodnij, że istnieją dokładnie 2, z dokładnością do izomorfizmu, grupy rzędu 6.

Zadanie 22 Wskaż iloczyny proste grup cyklicznych izomorficznych z $\mathbb{Z}_{18}^*$, $\mathbb{Z}_{20}^*$, $\mathbb{Z}_{24}^*$, $\mathbb{Z}_{36}^*$, $\mathbb{Z}_{72}^*$.

Zadanie 23 Niech $k, l \in N, (k, l) = 1$. Wykaż, że $Z_k \oplus Z_l$ jest izomorficzna z Z_{kl}.

Zadanie 24 Z jakim iloczynem prostym grup cyklicznych jest izomorficzna poniższa skończona grupa abelowa

1. Z_9^*,Z_{15}^*,Z_{20}^*
2. $G = \{1, 8, 12, 14, 18, 21, 27, 31, 34, 38, 44, 47, 51, 53, 57, 64\}$ z działaniem mnożenie modulo 65
3. $G = \{1, 8, 17, 19, 26, 28, 37, 44, 46, 53, 62, 64, 71, 73, 82, 89, 91, 98, 107, 109, 116, 118, 127, 134\}$ z działaniem mnożenia modulo 135
4. $G = \{1, 7, 43, 49, 51, 57, 93, 99, 101, 107, 143, 149, 151, 157, 193, 199\}$ z działaniem mnożenia modulo 200
5. $G = \{1, 4, 11, 14, 16, 19, 26, 29, 31, 34, 41, 44\}$ z działaniem mnożenia modulo 45

Zadanie 25 Oblicz liczbę wszystkich (z dokładnością do izomorfizmu) grup abelowych rzędu:

a) 200, b) 125, c) 35, d) 64

Zadanie 26 Niech G będzie skończoną grupą abelową taką, że $g \in G \Rightarrow 3g = 0$. Z jakim iloczynem prostym grup cyklicznych grupa G może być izmorficzna?

Zadanie 27 Niech $|G| = 120$ będzie grupą abelową taką, że w grupie G nie ma elementów rzędu 4 ani 8. Z jakim iloczynem prostym grup cyklicznych grupa G może być izmorficzna?

Zadanie 28 Niech $|G| = 36$ będzie grupą abelową taką, że w grupie G nie ma elementów rzędu 9. Z jakim iloczynem prostym cyklicznych grupa G może być izmorficzna?

Zadanie 29 Wykaż, istnieją 4 nieizomorficzne grupy abelowe rzędu 36.

Zadanie 30 Wykaż, że każda grupa abelowa rzędu 45 ma element rzędu 15. Czy każda grupa abelowa rzędu 45 ma element rzędu 9?

Zadanie 31 Wykaż, że istnieją 2 grupy abelowe rzędu 108 które mają dokładnie 4 podgrupy rzędu 3.

Wykaż, że każda skończona grupa abelowa może być przedstawiona jako iloczyn prosty grup rzędu $n_1, n_2, n_3, ..., n_t$ takich, że n_{i+1} dzieli n_i dla $i = 1, 2, ..., t-1$.

Zadanie 32 Element rzędu 2 nazywamy inwolucją. Oblicz liczbę inwolucji w $Z_{16}, Z_8 \oplus Z_4, Z_4 \oplus Z_4, Z_4 \oplus Z_2 \oplus Z_4$

Udowodnij, że liczba inwolucji w dowolnej skończonej grupie abelowej jest postaci $2^t - 1$ dla pewnego $t \in N$

Zadanie 33 Niech G będzie skończoną grupą abelową taką, że G ma k inwolucji $\{i_1, i_2, ...i_k\}$. Udowodnij, że

$$\sum_{g \in G} g = \begin{cases} 0, & k \neq 1; \\ i_1, & k = 1. \end{cases}$$