Grupy - twierdzenia Sylowa

Zadanie 1 Udowodnij, że w dowolnej grupie G relacja sprzężenia:

$$aRb \text{ jeśli } b = gag^{-1} \text{ dla pewnego elementu } g \in G$$

jest relacją równoważności. Klasy równoważności dla tej relacji nazywamy **klasami sprzężeń** i oznaczamy przez $\mathrm{cl}(a)$.

Wyznacz klasy sprzężoności w grupach D_3, S_3 i A_4.

Zadanie 2 Udowodnij twierdzenie: Jeżeli H jest podgrupą grupy G i H jest sumą klas sprzężoności to $H \triangleleft G$. Korzystając z tego twierdzenia wyznacz podgrupy normalne S_3, S_4, A_4, Q.

Zadanie 3 Podgrupy H_1, H_2 grupy G nazywamy sprzężonymi jeśli istnieje $g \in G$ takie, że $H_1 = gH_2g^{-1}$. Które podgrupy grup S_3, S_4, A_4, Q są sprzężone?

Zadanie 4 Niech G będzie grupą a X dowolnym jej niepustym podzbiorem. Wykaż, że $N_G(X) = \{g \in G; gXg^{-1} = X\}$ jest podgrupą G.
Wyznacz $N_{D_3}(H)$, gdzie $|H|$ jest podgrupą rzędu 2.

Zadanie 5 Centralizatorem elementu $a \in G$ (gdzie G jest pewną grupą) nazywamy zbiór

$$Z(a) = \{b \in G : ab = ba\}$$

Udowodnij, że odwzorowanie

$$f : G/Z(a) \ni xZ(a) \to xax^{-1} \in \mathrm{cl}(a)$$

jest bijekcją (pamiętaj, że wpierw należy wykazać, że f jest dobrze określona czyli, że jeśli $xZ(a) = yZ(a)$ wówczas $f(xZ(a)) = f(yZ(a))$).
Zwróć uwagę na fakt, że jeśli grupa G jest skończona, wówczas w konsekwencji prawdziwy jest wzór $|\mathrm{cl}(a)| = |G|/|Z(a)|$.
Sprawdź ten wzór na przykładzie grupy D_3.

Zadanie 6 Niech G będzie grupą. Wykaż, że $a \in Z(G)$ wtedy i tylko wtedy gdy $N(a) = G$ (gdzie $N(a) = N_G(\{a\})$). Jak można opisać $Z(G)$ za pomocą klas sprzężoności? Korzystając z tego opisu wyznacz $Z(S_3)$, $Z(A_4)$, $Z(S_4)$ i $Z(Q)$.

Zadanie 7 Na wykładzie zostało udowodnione następujące twierdzenie: Jeżeli G jest grupą $|G| = p^2$ gdzie p jest liczbą pierwszą to grupa G jest abelowa. W niniejszym zadaniu wskazany zostanie przykład nieprzemiennej grupy rzędu p^3. Niech $p \geq 3$ będzie liczbą pierwszą. Niech $G = Z_p \times Z_p \times Z_p$. Działanie określamy następująco:
$(x, y, z) * (x_1, y_1, z_1) = (x + x_1, y + y_1, z + z_1 - yx_1)$
Wykaż, że $(G, *)$ jest nieabelową grupą rzędu p^3 oraz rząd każdego elementu różnego od neutralnego wynosi p.

Zadanie 8 Niech p będzie liczbą pierwszą. Wykaż, że jeśli G jest p-grupą skończoną i $G \neq \{1\}$, wówczas $Z(G) \neq \{1\}$.

Zadanie 9 Niech G będzie dowolną grupą. Udowodnij, że jeśli $H, K \leq G$ wówczas:

$$HK \leq G \Leftrightarrow HK = KH \Leftrightarrow KH \leq G$$

Zadanie 10 Jeżeli H i K są podgrupami normalnymi grupy G, wówczas:

- $HK = KH$
- HK i KH są podgrupami normalnymi G.

Zadanie 11 Udowodnij, że jeśli G jest grupą, $H \trianglelefteq G$ oraz $K \leq G$, wówczas $HK \leq G$. Jeśli G jest grupą skończoną i $H \cap K = \{e\}$, wówczas $|HK| = |H||K|$.

Zadanie 12 Niech K będzie cykliczną i normalną podgrupą grupy G. Udowodnij, że każda podgrupa H grupy K jest normalną podgrupą grupy G.

Zadanie 13 Dla wszystkich liczb pierwszych p wyznacz wszystkie p-podgrupy Sylowa grup D_3, S_3, S_4, A_4, Q, D_4, Z_{12}.

Zadanie 14 Oblicz

1. n_5 w A_5
2. n_{11} w G, takiej, że $|G| = 396$ i wiemy, że $n_{11} \neq 1$

Zadanie 15 Udowodnij, że jeśli H i K są normalnymi podgrupami grupy G takimi, że $H \cap K = \{e\}$, wówczas $hk = kh$ dla dowolnych $h \in H$ i $k \in K$.

Zadanie 16 Wykaż, że

1. Każda grupa rzędu 15 jest cykliczna.
2. Każda grupa rzędu 245 jest izomorficzna z $\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{49}$ lub $\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}_7$.

Zadanie 17 Udowodnij, że każda grupa rzędu 30 ma podgrupę cykliczną rzędu 15.

Zadanie 18 Wykaż, że żadna grupa rzędu 40 nie jest prosta.

Zadanie 19 Czy w dowolnej grupie G rzędu 45 istnieje element rzędu 15?

Zadanie 20 Wykaż, że jeżeli p, q są liczbami pierwszymi to grupa rzędu pq nie jest prosta.

Zadanie 21 Wykaż, że grupy następujących rzędów nie są proste:

1. 36
2. 72
3. 56
4. p^2q^2 (gdzie p, q są liczbami pierwszymi).

Zadanie 22 Wykaż,że istnieją, z dokładnością do izomorfizmu,

1. dokładnie 2 grupy rzędu 99
2. dokładnie 1 grupa rzędu 1001

Zadanie 23 Wykaż, że jeśli $|G| = pm$, gdzie p jest liczbą pierwszą oraz $p > m$ to p-podgrupa Sylowa grupy G jest normalna.