ALGEBRA 2 - Zestaw 4
Rozszerzenia ciał

Zadanie 1 Dla liczby a równej:
a) $\sqrt{3}+1$ b) $\sqrt[6]{3}$ c) $\sqrt[4]{2}-2\sqrt{2}$ d) $\sqrt{3}-2i$
znajdź wielomian minimalny v (nad $\mathbb{Q}$). Podaj stopień rozszerzenia $\mathbb{Q}(a):\mathbb{Q}$.

Zadanie 2 Niech a będzie pierwiastkiem wielomianu
a) $v = \mathbf{x}^2+1 \in \mathbb{Z}_3[\mathbf{x}]$ b) $w = \mathbf{x}^3+\mathbf{x}+4 \in \mathbb{Z}_5[\mathbf{x}]$
Znajdź ciało $F(a)$.

Zadanie 3 Wykaż, że pierścień ilorazowy $\mathbb{R}[\mathbf{x}]/(\mathbf{x}^2+1)$ jest ciałem izomorficznym z ciałem liczb zespolonych.

Zadanie 4 W $\mathbb{R}^2$ zdefiniuj działania dodawania dodawania i mnożenia tak, by otrzymać ciało izomorficzne z $\mathbb{R}[\mathbf{x}]/(x^2+\mathbf{x}+2)$.
Podobnie dla $\mathbb{Q}^3$ i $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]/(\mathbf{x}^3-2\mathbf{x}+2)$.

Zadanie 5 **Automorfizmem ciała** F nazywamy izomorfizm ciała F na F. Wskaż nietrywialny (to znaczy różny od identyczności) automorfizm ciała:
a) $\mathbb{C}$ b) $\mathbb{R}(\sqrt{2})$ c) $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ d) $\mathbb{R}(\sqrt{-3})$

Zadanie 6 W zbiorze liczb rzeczywistych wskaż 7-elementowy zbiór liniowo niezależny nad $\mathbb{Q}$.

Zadanie 7 Udowodnij, że $\mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt[5]{2}+2\sqrt[5]{8})$.

Zadanie 8 Udowodnij, że rozszerzenia $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})$ i $\mathbb{Q}(\sqrt{2-\sqrt{2}})$ są identyczne. Wskaż nietrywialny automorfizm ciała $\mathbb{Q}(\sqrt{2+\sqrt{2}})$.

Zadanie 9 Znajdź ciała: $\mathbb{GF}(5)$, $\mathbb{GF}(8)$, $\mathbb{GF}(25)$.

Zadanie 10 Uzasadnij, że wielomian $v = \mathbf{x}^3-2$ jest nierozkładalny nad Q. Znajdź ciało E rozkładu v oraz ciała $\mathbb{Q}(a_i)$ dla pierwiastków a_1, a_2, a_3 wielomianu v. Zilustruj na przykładzie ciał $\mathbb{Q}, \mathbb{Q}(a_i)$ oraz E twierdzenie o (niskiej) wieży.

Zadanie 11 Dla podanego ciała F zbadaj, czy element a jest algebraiczny czy przestępny? (Zakładamy, że wiemy, że π jest liczbą przestępną.)

$a)$	$F = \mathbb{Q}$	$a = \sqrt[3]{\pi^2}$	$b)$	$F = \mathbb{Q}(\pi)$	$a = \sqrt[3]{\pi^2}$
$c)$	$F = \mathbb{C}$	$a = i\sqrt[3]{\pi^2}$	$d)$	$F = \mathbb{C}(\pi)$	$a = i\sqrt[3]{\pi^2}$
$e)$	$F = \mathbb{Q}$	$a = 2 + \sqrt{\pi}$	$f)$	$F = \mathbb{Q}(\pi)$	$a = 2 + \sqrt{\pi}$
$g)$	$F = \mathbb{Q}$	$a = \pi^3$	$h)$	$F = \mathbb{Q}(\pi)$	$a = \pi^3$
$i)$	$F = \mathbb{Q}(\pi)$	$a = \sqrt[3]{\pi}$			

Wskazówka (do zad. (a) i (b), inne podobnie).
(a) Udowodnimy, że $\sqrt[3]{\pi^2}$ jest elemtem przestępnym nad $\mathbb{Q}$ (czyli liczbą przestępną).
Niech F będzie dowolnym ciałem. Dla każdego elementu $a \in E : F$ mamy $a^3 \in F(a)$. Stąd i na mocy twierdzenia z wykładu (chodzi tu o twierdzenie, które mówi, że jeśli a jest el. algebraicznym nad F to każdy el. $b \in F(a)$ jest także algebraiczny nad F), gdyby $\sqrt[3]{\pi^2}$ było elementem algebraicznym nad $\mathbb{Q}$ (czyli liczbą algebraiczną), wówczas $(\sqrt[3]{\pi^2})^3 = \pi^2$ byłoby liczbą algebraiczną. Wówczas istniałby wielomian $v = a_0 + ... + a_n\mathbf{x}^n \in \mathbb{Q}[\mathbf{x}]$ taki, którego pierwiastkiem jest π^2. Wtedy π byłoby pierwiastkiem wielomianu $w = \sum_{k=0}^{2n} b_k\mathbf{x}^k$, gdzie

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{dla } k \text{ nieparzystych,} \\ a_{k/2} & \text{dla } k \text{ parzystych.} \end{cases}$$

(b) $a = \sqrt[3]{\pi^2}$ jest elementem algebraicznym nad $\mathbb{Q}(\pi)$, bowiem jest pierwiastkiem wielomianu $\mathbf{x}^3 - \pi^2 \in \mathbb{Q}(\pi)$.

Zadanie 12 Znajdź wymiar $[E : F]$ i bazę rozszerzenia jeśli

$a)$	$F = \mathbb{Q}$	$E = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt[3]{2})$	$b)$	$F = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$	$E = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, \sqrt{2})$
$c)$	$F = \mathbb{Q}$	$E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, i)$	$d)$	$F = \mathbb{Q}(i)$	$E = \mathbb{Q}(\sqrt{5}, i)$
$d)$	$F = \mathbb{Q}$	$E = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$	$e)$	$F = \mathbb{Q}$	$E = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, e^{2\pi i/3})$

Zadanie 13 Udowodnij, że jeśli $[F(a) : F] = m$ i $F((b) : F] = n$ wówczas

$$[F(a, b) : F] \leq mn \tag{1}$$

Wskaż przykłady, w których (1) jest równością i takie, w których nierówność (1) jest ostra.

Zadanie 14 Udowodnij, że $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\pi)$.
Rozumowanie, którym się posłużysz uogólnij, by wykazać, że jeśli b jest elementem przestępnym ciała F, to żaden element algebraiczny F nie należy do $F(b) - F$.

Zadanie 15 Udowodnij, że π jest elementem algebraicznym ciała $\mathbb{Q}(\pi^3)$. Znajdź bazę i wymiar rozszerzenia $\mathbb{Q}(\pi)$ nad $\mathbb{Q}(\pi^3)$.

Zadanie 16 W ciele $\mathbb{Q}[\mathbf{x}]/(\mathbf{x}^2+\mathbf{x}+1)$ znajdź następujące elementy:

$$a)\quad (\mathbf{x}+2)^2(\mathbf{x}-1)^3 \quad b)\quad \frac{x^2+1}{\mathbf{x}-2}$$

Zadanie 17 Wykaż, że nad $\mathbb{Z}_3$ wielomian $\mathbf{x}^3+2\mathbf{x}+1$ jest nierozkładalny.
W ciele $\mathbb{Z}_3[\mathbf{x}]/(\mathbf{x}^3+2\mathbf{x}+\mathbf{x}+1)$ znajdź element $\frac{1}{\mathbf{x}^2+1}$.

Zadanie 18 Wskaż ciała rzędów 125 i 121.