КОМП'ЮТЕРНИЙ ПРАКТИКУМ №1
«ПЕРЕВІРКА ГЕНЕРАТОРА ВИПАДКОВИХ ЧИСЕЛ НА ВІДПОВІСТЬ ЗАКОНУ РОЗПОДІЛУ»

1.1 Завдання до практичної роботи

- ✓ Згенерувати 10000 випадкових чисел трьома вказаними нижче способами. **45 балів**.
  - Згенерувати випадкове число за формулою $x_i = -\frac{1}{\lambda}\ln\xi_i$, де ξ_i - випадкове число, рівномірно розподілене в інтервалі (0;1). Числа ξ_i можна створювати за допомогою вбудованого в мову програмування генератора випадкових чисел. Перевірити на відповідність експоненційному закону розподілу $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$. Перевірку зробити при різних значеннях λ.
  - Згенерувати випадкове число за формулами:
$$x_i = \sigma\mu_i + a$$
$$\mu_i = \sum_{i=1}^{12}\xi_i - 6,$$
де ξ_i - випадкове число, рівномірно розподілене в інтервалі (0;1). Числа ξ_i можна створювати за допомогою убудованого в мову програмування генератора випадкових чисел. Перевірити на відповідність нормальному закону розподілу:
$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right).$$
Перевірку зробити при різних значеннях a і σ.
  - Згенерувати випадкове число за формулою $z_{i+1} = az_i(\mathrm{mod}\,c)$, $x_{+1i} = z_{i+1}/c$, де a=5^{13}, c=2^{31}. Перевірити на відповідність рівномірному закону розподілу в інтервалі (0;1). Перевірку зробити при різних значеннях параметрів a і c.

- ✓ Для кожного побудованого генератора випадкових чисел побудувати гістограму частот, знайти середнє і дисперсію цих випадкових чисел. По виду гістограми частот визначити вид закону розподілу. **20 балів.**
- ✓ Відповідність заданому закону розподілу перевірити за допомогою критерію згоди χ^2. **30 балів**
- ✓ Зробити висновки щодо запропонованих способів генерування випадкових величин. **5 балів**

1.2 Теоретичні відомості з генерування випадкових чисел

1.2.1 Способи генерування випадкових величин

Імітаційні моделі складних систем містять випадкові величини, що мають різні закони розподілу. При побудові алгоритму імітації ці випадкові величини реалізуються генераторами випадкових чисел. Від якості генераторів випадкових чисел, що використовуються, залежить точність результатів імітаційного моделювання.

Відомі наступні способи генерування випадкових величин:

- зберігання у комп'ютері таблиці випадкових чисел і отримання потім з неї даних для імітаційного моделювання;
- використання деякого фізичного пристрою, наприклад електронної лампи, для генерації випадкового шуму;
- застосування рекурсивних формул коли на підставі і-того випадкового числа обчислюється $i+1$-ше випадкове число.

Недоліком першого способу є зберігання великого обсягу інформації та повільна швидкість. Недоліком другого способу - неможливість направленого експерименту з параметрами моделі. Третій спосіб не має недоліків попередніх способів і в теперішній час є найбільш прийнятним.

1.2.2 Генерування рівномірно розподілених в інтервалі (0;1) випадкових величин на основі рекурсивних формул

Генератори випадкових чисел, що рівномірно розподілені на інтервалі (0; 1), зазвичай є вбудованими в програмне забезпечення. Тому досліднику, як правило, не доводиться самостійно будувати такі генератори. Але розуміти, як побудовані такі генератори випадкових чисел і уміти перевірити, чи задовольняють вбудовані генератори властивостям, які йому потрібні для цілей моделювання, необхідно.

До генераторів випадкових чисел, що використовуються у цілях імітаційного моделювання, висуваються наступні вимоги:

1) числа рівномірно розподілені на інтервалі (0;1) і незалежні;
2) генерується достатньо велика кількість чисел, що не повторюються;
3) послідовність випадкових чисел може бути відтворена;
4) швидкодія;
5) обсяг пам'яті, що використовується, достатньо малий.

Очевидно, що комп'ютер може генерувати хоч і велику, але обмежену кількість чисел на інтервалі (0;1). Розглянемо, як той факт, що генеровані за допомогою комп'ютера числа не досить щільно займають заданий інтервал, впливає на основні характеристики випадкової величини.

Неперервна випадкова величина ξ, яка рівномірно розподілена на інтервалі (0;1) має:

щільність розподілу $f(x) = \begin{cases} 1, 0 \le x \le 1, \\ 0, x < 0, x > 1; \end{cases}$

математичне сподівання $M(\xi) = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$;

дисперсію $D(\xi) = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{12}$.

Комп'ютер оперує з n-розрядними числами, тому замість неперервної сукупності рівномірних випадкових чисел інтервал (0;1) використовується дискретна послідовність 2^n випадкових чисел ζ_i :

$$\zeta_i = \frac{i}{2^n - 1}, \quad i=0, \ldots 2^n-1.$$

Випадкові числа ζ_i приймають i-те значення з ймовірністю $p_i = \frac{1}{2^n}$.

Обчислимо математичне сподівання і дисперсію випадкової величини ζ:

$$M(\varsigma) = \sum_{i=1}^{2^n-1} \frac{i}{2^n - 1} \cdot \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n\left(2^n - 1\right)} \cdot \frac{\left(2^n - 1\right)2^n}{2} = \frac{1}{2}, \tag{1.1}$$

$$D(\varsigma) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{1}{2^n}\left(\frac{i}{2^n - 1} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^n}\left(\sum_{i=0}^{2^n-1}\left(\frac{i^2}{\left(2^n - 1\right)^2} - \frac{i}{2^n - 1} + \frac{1}{n}\right)\right) = \frac{1}{12} \cdot \frac{2^n + 1}{2^n - 1} \tag{1.2}$$

Отже, математичне сподівання дискретної випадкової величини ζ співпадає з математичним сподіванням неперервної випадкової величини ξ, а дисперсія відрізняється множником, який при достатньо великих n близький до 1:

$$\frac{2^n + 1}{2^n - 1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 1.$$

Таким чином, основні характеристики генерованої за допомогою комп'ютера випадкової величини співпадають з основними характеристиками неперервної випадкової величини, що являється підґрунтям використання таких генераторів випадкових чисел для цілей імітації.

Розглянемо алгоритми генерування випадкових величин. Широко поширений конгруентний метод, що використовує такі рекурсивні рівняння:

$$z_{i+1} = \left(az_i + b\right)\left(\operatorname{mod} c\right), \; i=1, \ldots \tag{1.3}$$

$$\zeta_{i+1} = z_{i+1} / c.$$

де a, b, c – параметри генератора, z_0-початкове значення генератора, (mod$c$) – операція розрахунку залишку від ділення на число c.

З формул (1.3) видно, що генероване випадкове число z_i не перевищує число c, тому при діленні його на c отримуємо випадкове число ζ_i , яке міститься в інтервалі (0;1). Зручно покласти $c=S^B$, де S=2 для двійкової системи числення, B - кількість біт в машинному слові. Тоді обчислення залишку від ділення на c зводиться до виділення c молодших розрядів дільника, а перетворення цілого числа $z_i \leq c$ в нормоване випадкове число ζ_i здійснюється постановкою ліворуч від z_i двійкової коми.

Вибір констант a, b, c являється об'єктом постійних досліджень. Для цілей імітаційного моделювання важливо, щоб генератор випадкових чисел забезпечував якнайдовшу послідовність різних випадкових чисел. Дійсно, з формули (1.3) випливає, що як тільки в послідовності значень z_i зустрінеться число, яке спостерігалось раніше, уся послідовність значень повторюється. Тобто спостерігається циклічність значень z_i . Кількість неповторюваних чисел в одному циклі називається *періодом* генератора випадкових величин.

Припустимо в (1.3) b=0, тоді максимальний період циклу, рівний 2^{B-2}

чисел, буде отриманий на B-бітовому комп'ютері у випадку, якщо $c=2^B$, $a=1+4k$, для цілих додатних k та непарних z_0. Нехай $b\neq 0$, тоді період циклу рівний 2^B, b - просте число відносно c, $a=1+4k$, , для цілих додатних k.

Перевірку генератора випадкових чисел на періодичність виконують, визначаючи довжину періоду P псевдовипадкової послідовності. Розглянемо для простоти прикладу генератор $z_{i+1}=5z_i(\mathrm{mod}\,16)$, який забезпечує відповідно теорії довжину періоду $2^{4-2}=4$. Нехай $z_0=9$, тоді маємо наступну послідовність значень z_i : 9, 13, 1, 5, 9, 13, 1, 5, 9, ... Звідси, $P=4$. Нехай $z_0=11$, тоді послідовність значень z_i така: 11, 7, 3, 15, 11, 5, 7, 3, 15... Знову маємо $P=4$. Для визначення довжини періоду запам'ятовують одне з випадкових значень. Потім продовжують генерувати випадкові числа і порівнюють з числом, яке запам'ятовано. Підрахована кількість випадкових чисел до першого збігу з числом, яке запам'ятовано, дорівнює довжині періоду.

1.2.3 Тестування генераторів рівномірно розподілених в інтервалі (0,1) випадкових чисел

Якість генератора випадкових чисел перевіряють за допомогою машинного експерименту. Розрізняють тести двох типів - емпіричні та теоретичні. *Емпіричні тести* основані на перевірці випадкових чисел, які сформував генератор, за допомогою статистичних тестів. Найбільш поширеними є перевірки на рівномірність, на випадковість та на кореляцію. *Теоретичні тести* виконують перевірку генератора випадкових величин ґрунтуючись тільки на значеннях параметрів, які використовуються при генеруванні.

Перевірку на рівномірність виконують методами ідентифікації закону розподілу з використанням критерію узгодження χ^2 (див. п. 1.3). Весь інтервал (0;1) розбивається на m рівних частин і спостерігається кількість влучень в j-тий інтервал N_j, $j = 1,\dots m$ ($\Sigma N_j = N$). За критерієм χ^2 оцінюється узгодження з теоретично очікуваною кількістю влучень в інтервал N/m. Рекомендована кількість інтервалів $m=20\div 50$, кількість генерованих випадкових чисел $N=(10^2\div 10^5)m$.

Перевірку на випадковість виконують за *критерієм серій.* За цим критерієм перевіряється незалежність випадкових значень, але не їх рівномірність. Нехай маємо послідовність значень z_i. Будемо спостерігати довжину зростаючої послідовності випадкових значень. Наприклад, для послідовності генерованих значень 0,23; 0,05; 0,35; 0,37; 0,89; 0,54; 0,98; 0,13; 0,46;... маємо на початку серію довжиною 1, потім серію довжиною 4, потім серію довжиною 2 і т.д. Підрахована кількість серій довжиною 1 складає значення r_1, кількість серій довжиною 2 - значення r_2, кількість серій довжиною 3 - значення r_3, і т.д., кількість серій довжиною не менше 6 - значення r_6. Значення статистичного критерію R розраховується за формулою [Кельтон, Лоу]:

$$R=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{6}\sum_{j=1}^{6}a_{ij}\left(r_i-Nb_i\right)\left(r_j-Nb_j\right), \tag{1.4}$$

де a_{ij} елементи матриці

$$A=\begin{pmatrix} 4529,4 & 9044,9 & 13568 & 18091 & 22617 & 27892 \\ 9044,9 & 18097 & 27139 & 36187 & 45234 & 55789 \\ 13568 & 27139 & 40721 & 54281 & 67852 & 83685 \\ 18091 & 38187 & 54281 & 72414 & 90470 & 111580 \\ 22615 & 45234 & 67852 & 90470 & 113262 & 139476 \\ 27892 & 55789 & 83685 & 111580 & 139476 & 172860 \end{pmatrix},$$

а b_i елементи матриці

$$b=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{24} & \frac{11}{120} & \frac{19}{720} & \frac{29}{5040} & \frac{1}{840} \end{pmatrix}.$$

При достатньо великій кількості спостережуваних значень (більше 4000) значення статистичного критерію R має бути меншим за значення критерію χ^2 з 6 ступенями вільності і довірчою ймовірністю 0,9 (χ^2=10,6).

Перевірка кореляції полягає у визначенні кореляції між послідовностями випадкових значень, що розділені інтервалом довжиною j, тобто послідовностями $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3 \ldots \zeta_h$ і $\zeta_{1+j}, \zeta_{2+j}, \zeta_{3+j} \ldots \zeta_{h+j}$. Оцінка кореляції для кожного j=1,2...v виконується за формулою:

$$\rho_j=\left(\frac{1}{h}\sum_{i=1}^{h}\zeta_i\zeta_{i+j}-M(\zeta)\cdot M(\zeta)\right)\cdot\frac{1}{D(\zeta)}. \tag{1.5}$$

Оскільки $M(\zeta)=1/2$, $D(\zeta)=1/12$ (див. (5.1), (5.2)), то (5.5) приймає наступний вид:

$$\rho_j=\frac{12}{h}\sum_{i=1}^{h}\zeta_i\zeta_{i+j}-3, \qquad j=1,2...v \tag{1.6}$$

Теоретично очікуване значення кореляції дорівнює нулю, оскільки послідовності випадкових чисел повинні бути незалежними. Для перевірки гіпотези ρ_j=0 використовують статистичний критерій [Кельтон, Лоу]:

$$A_j=\frac{\rho_j}{\sqrt{D(\rho_j)}}, \qquad j=1,2...v \tag{1.7}$$

де $D(\rho_j)=\dfrac{13h-6}{h^2}$ - оцінка дисперсії значення ρ_j.

Якщо усі спостережувані значення $|A_j|$<1,645, то гіпотеза приймається, а значить послідовності випадкових чисел можна вважати незалежними.

У такому випадку теоретичного тесту дослідженню підлягають формули генерування випадкових значень (5.3). Наприклад, досліджується значення математичного сподівання та дисперсії і порівнюється з $\frac{1}{2}$ та $\frac{1}{12}$ відповідно. Рівномірність випадкових значень перевіряється у теоретичних тестах за допомогою зображення пар випадкових чисел (ζ_i, ζ_{i+1}) в одиничному квадраті координатної площини (або трійок чисел (ζ_i, ζ_{i+1}, ζ_{i+2}) в одиничному кубі). Якщо числа рівномірно заповнюють площу квадрата (простір кубу), то параметри генератора випадкових чисел задовільні.

Наприкінці зауважимо, що не існує кінцевого набору тестів, що гарантує придатність кінцевої випадкової послідовності взагалі. Для даного набору тестів завжди існує послідовність, що задовольняє йому, але повністю непридатна для ряду окремих випадків. Однак проблем у зв’язку з цим не виникає, тому що дослідник не потребує додаткових властивостей випадковості. Тестуванню генераторів випадкових чисел потрібно приділити увагу рівно настільки, наскільки статична змістовність результатів імітаційного моделювання залежить від якості генератора випадкових чисел.

1.2.4 Методи генерування випадкової величини із заданим розподілом

Для генерування випадкового числа *r*, розподіленого за заданим закону *F*(*x*), використовують такі методи (рисунок 5.1):

- метод оберненої функції;
- табличний метод;
- метод, оснований на функціональних властивостях законів розподілу.

ГЕНЕРУВАННЯ ВИПАДКОВОЇ ВЕЛИЧИНИ

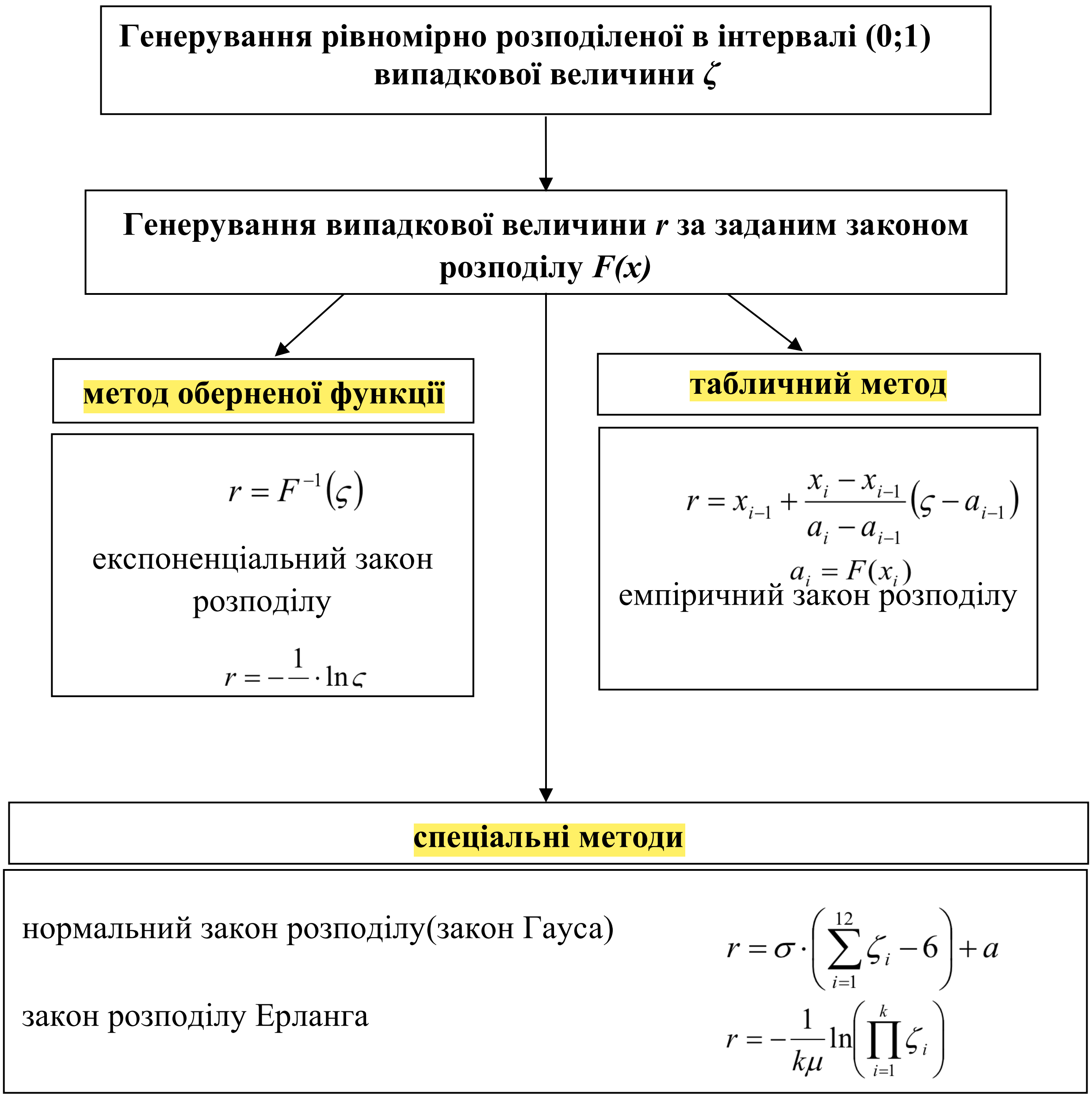


Рисунок 1.1 - Генерування випадкової величини

В основі *методу оберненої функції* лежить той факт, що випадкова величина $\zeta=F(r)$ є рівномірно розподіленою величиною на інтервалі (0;1). Доведемо це. Нехай є послідовність випадкових чисел $r_1,\ldots r_n$, що мають закон розподілу:

$$F(x)=P(r\le x). \tag{1.7}$$

Сформуємо нову послідовність випадкових чисел $\varsigma_i=F(r_1),\ldots,\varsigma_n=F(r_n)$. Оскільки значення функції розподілу належать інтервалу (0;1), то $\varsigma\in(0,1)$. Знайдемо закон розподілу $G(y)$ випадкової величини ς:

$$G(y)=P(\varsigma\le y)=P(F(r)\le y)=P\left(F^{-1}(F(r))\le F^{-1}(y)\right)=P\left(r\le F^{-1}(y)\right). \tag{1.8}$$

Звідси, приймаючи до уваги (5.7) маємо:

$$G(y)=P\left(r\le F^{-1}(y)\right)=F\left(F^{-1}(y)\right)=y. \tag{1.9}$$

Таким чином доведено, що випадкова величина $\zeta=F(r)$ має рівномірний розподіл $G(y)$ і належить інтервалу (0;1). Звідси, випадкову величину r, розподілену за заданим законом розподілу $F(x)$, можна отримати у такий спосіб: спочатку генерувати випадкову рівномірно розподілену величину ζ, потім перетворити її у випадкову величину $r=F^{-1}(\varsigma)$ (рис. 1.2).

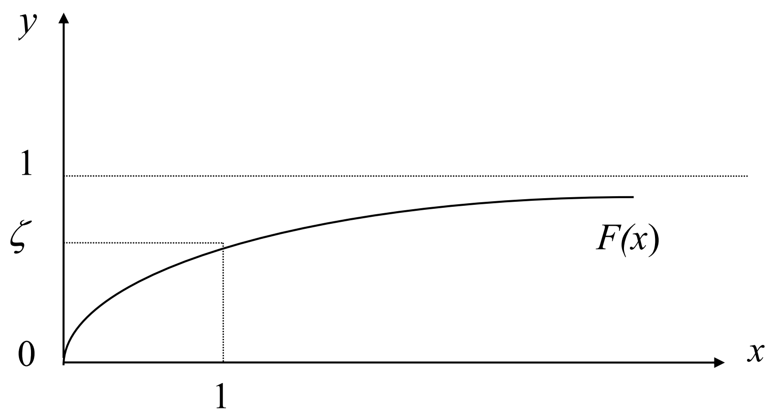


Рисунок 1.2 - Генерування випадкової величини методом оберненої функції

Приклад 1. Для того, щоб отримати випадкову величину, яка розподілена за експоненціальним законом із параметром λ, потрібно розв'язати рівняння $\varsigma=F(r)$:

$$\varsigma=1-e^{-\lambda r}\Leftrightarrow r=-\frac{1}{\lambda}\cdot\ln(1-\varsigma). \tag{1.10}$$

Величина 1-ζ є випадкова величина, рівномірно розподілена на (0,1). Тому цю дію робити не слід. Отже, маємо таку формулу для генерування випадкової величини, що має експоненціальний закон розподілу з параметром λ:

$$r=-\frac{1}{\lambda}\cdot\ln\varsigma. \tag{1.11}$$

Приклад 2. Метод оберненої функції можна використовувати для дискретних розподілів. Нехай, наприклад, випадкова величина r приймає значення $a_1, a_2 \dots a_n$ з ймовірностями відповідно $p_1, p_2 \dots p_n$ ($\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$). Побудуємо функцію закону розподілу $F(x)$ (рис. 1.3).

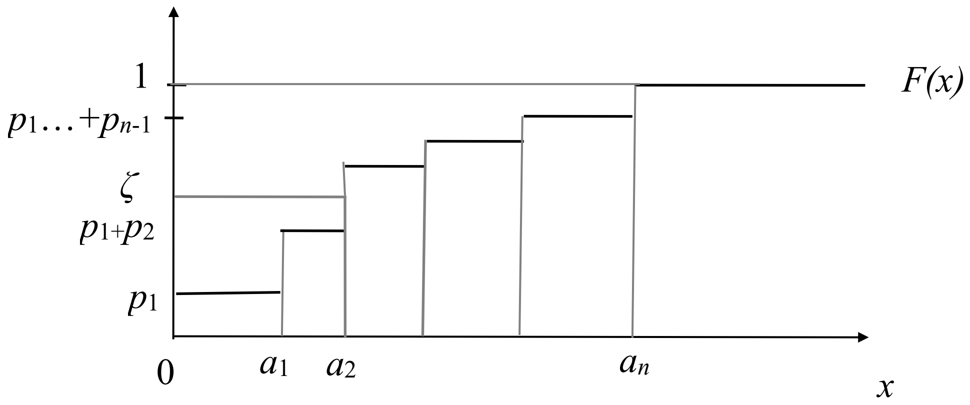


Рисунок 1.3 - Використання методу оберненої функції для генерування дискретної випадкової величини.

Використовуючи метод оберненої функції отримуємо формулу для генерування дискретної випадкової величини r:

$$r = \begin{cases} a_1, & \text{якщо} \quad 0 < \varsigma \le p_1 \\ a_2, & \text{якщо} \quad p_1 < \varsigma \le p_1 + p_2 \\ . \\ . \\ . \\ a_n, & \text{якщо} \quad \sum_{i=1}^{n-1} p_i < \varsigma \le 1 \end{cases} \tag{1.12}$$

Складність у використанні методу оберненої функції полягає у пошуку оберненого перетворення F^{-1}. У деяких випадках, наприклад, у випадку нормального закону розподілу, таке перетворення взагалі не може бути знайдено у вигляді відомих математичних функцій. Крім того, використання складних функцій при обчисленні $F^{-1}(\zeta)$, таких як логарифм, значно впливає на швидкодію генератора випадкових чисел.

Табличний метод являється продовженням методу оберненої функції, який виходить з того, що функція закону розподілу $F(x)$ задається кусково-лінійним наближенням таблицею (x_i, a_i), де $a_i = F(x_i)$ (рис. 5.4). Обернене перетворення F^{-1} також має кусково-лінійний вид. Припустимо, що випадкова величина ζ потрапила в i-тий інтервал. Тоді на підставі подібності трикутників знаходимо відношення:

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{a_i - a_{i-1}} = \frac{r - x_{i-1}}{\varsigma - a_{i-1}}. \tag{1.13}$$

Звідси знаходимо формули для відшукання випадкової величини r:

$$r = x_{i-1} + \frac{x_i - x_{i-1}}{a_i - a_{i-1}}(\varsigma - a_{i-1}), \text{ якщо } \; a_{i-1} < \varsigma \le a_i. \tag{5.14}$$

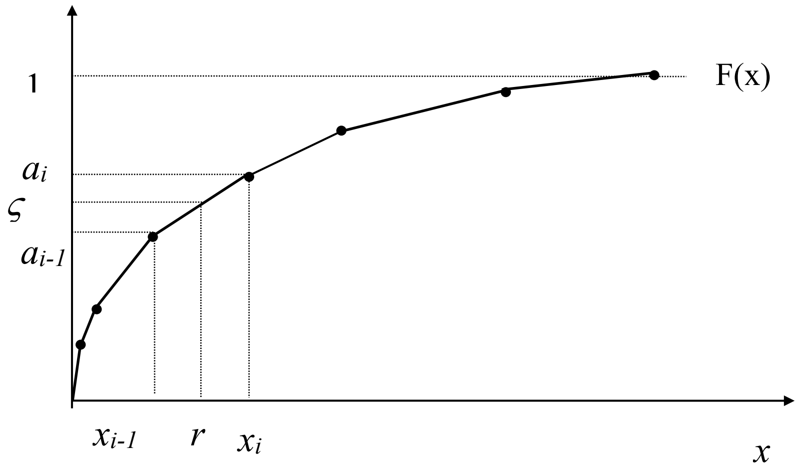


Рисунок 1.4 - Табличний метод генерування випадкового числа *r*, що має закон розподілу *F(x)*

Табличний метод дозволяє генерувати випадкові числа з любим заданим законом розподілу. Задану точність можна отримати при збільшенні кількості інтервалів (x_{i-1}, x_i). Нескладні операції лінійного перетворення забезпечують швидкодію цього методу. Можливо, тому багато мов імітаційного моделювання використовують при генеруванні випадкових чисел табличний метод.

Приклад

Табличний метод використовується для генерування випадкових чисел, що мають емпіричний закон розподілу.

Припустимо, що емпіричний закон розподілу задано парами чисел (x_i, y_i), $i = 1,...n$. З'єднаємо дані пари чисел прямими лініями і отримаємо кусочно-лінійне наближення істинної функції закону розподілу. Для побудованого таким чином наближення функції закону розподілу використовують табличний метод генерування випадкових чисел (див. приклад 2).

Методи, які використовують спеціальні властивості законів розподілу. Наприклад, для генерування нормально розподілених чисел використовується *метод полярних координат* Марсальї і Брея [Кельтон, Лоу]. За цим методом для того, щоб отримати нормально розподілену випадкову величини з математичним сподіванням 0 і дисперсією 1 потрібно виконати наступні кроки:

1) згенерувати дві рівномірно розподілені в інтервалі (0;1) випадкові величини ζ_1, ζ_2,

2) перетворити величини ζ_1, ζ_2 у величини α_1, α_2, які розподілені рівномірно в інтервалі (-1; 1), за допомогою лінійного перетворення:

$$\alpha_i = 2\zeta_i - 1, \quad i = 1,2; \tag{1.15}$$

3) якщо $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 1$, то знову генерувати величини α_1, α_2; якщо величина $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \leq 1$, то формувати величину

$$\beta = \sqrt{\frac{-2\ln\left(\alpha_1^2 + \alpha_2^2\right)}{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}}; \tag{1.16}$$

4) сформувати величини

$$\gamma_i = \alpha_i \cdot \beta, \quad i = 1,2. \tag{1.17}$$

Величини γ_1, γ_2 є незалежними нормально розподіленими випадковими величинами із математичним сподіванням 0 і дисперсією 1.

Для того, щоб отримати нормально розподілену величину з математичним сподіванням a та дисперсією σ^2, потрібно перетворити випадкову величину γ за формулою:

$$r = \sigma \cdot \gamma + a. \tag{1.18}$$

Іншим прикладом застосування метода, основаного на спеціальних властивостях розподілу – є випадкова величина, яка має розподіл Ерланга. За визначенням ця величина є результатом суми k незалежних випадкових величин, розподілених за експоненціальним закон з однаковим параметром. Звідси формула генерування такої випадкової величини:

$$r = -\frac{1}{k\mu}\sum_{i=1}^{k}\ln(\zeta_i) = -\frac{1}{k\mu}\ln\left(\prod_{i=1}^{k}\zeta_i\right). \tag{1.19}$$

Перевірка якості генератора випадкових величин за заданим законом розподілу є складною задачею. Основні перевірки - на відповідність закону розподілу та на періодичність. Оцінку відповідності закону розподілу проводять за допомогою критеріїв узгодження.

Безперечно, якість генераторів випадкових чисел впливає на якість результатів моделювання. Неправильно побудований генератор випадкових чисел спричиняє низку помилок, що призводить не тільки до значної похибки у результатах моделювання, але й до алгоритму імітації, що не відповідає алгоритму функціонування реальної системи.

1.3 Теоретичні відомості з ідентифікації закону розподілу

Найважливішою характеристикою випадкової величини являється її закон розподілу. Знання закону розподілу дозволяє із певною ймовірністю прогнозувати наступне значення випадкової величини, знаходити ймовірність влучення випадкової величини в заданий інтервал, а також моделювати випадкову величину за допомогою генераторів випадкових чисел. Випадкову величину можна замінити в моделі її середнім значенням тільки тоді, коли дослідник упевнений, що це не вплине на результати моделювання. Наприклад, у випадку, коли відхилення випадкової величини від середнього її значення в десятки разів менше за середнє значення, напевно, можна припустити, що випадкова величина є детермінованою із значенням, що дорівнює середньому значенню випадкової величини.

Послідовність дій, що виконують для ідентифікації закону розподілу наведена на рисунку 1.5.

Ідентифікація закону розподілу випадкової величини	Формування масиву значень випадкової величини
	Побудова гістограми частот
	Формування гіпотези про вид закону розподілу
	Оцінка значень параметрів закону розподілу
	Перевірка відповідності за критерієм згоди

Рисунок 1.5 - Послідовність дій, що виконують для ідентифікації закону розподілу випадкової величини

Розглянемо детально кожну дію.

Формування масиву спостережуваних значень випадкової величини

Із попередніх спостережень за випадковою величиною або у ході експериментів отримують певну, бажано велику (більше сотні) кількість значень і запам'ятовують у файлі для проведення подальшого дослідження.

Побудова гістограми частот

Розглянемо, як будується гістограма частот. Спочатку, переглядаючи масив значень випадкової величини ζ знаходять найменше min та найбільше max спостережуване значення випадкової величини:

$$min = \min_i \{\zeta_i\}, \; max = \max_i \{\zeta_i\}. \tag{1.20}$$

Далі, весь інтервал спостережуваних значень випадкової величини від мінімального до максимального значення поділяють на рівні інтервали так, що кожний інтервал має довжину

$$h = \frac{max - min}{k}, \tag{1.21}$$

де, k – кількість інтервалів.

Рекомендована кількість інтервалів k при великій кількості (більше 100) спостережуваних значень складає 20. Потім, переглядаючи масив випадкових значень, для кожного i-ого інтервалу підраховують кількість влучень випадкової величини в цей інтервал n_i. Гістограма частот представляється прямокутниками, що мають висоту рівну кількості влучень n_i та ширину рівну довжині інтервалу (рисунок 1.6).

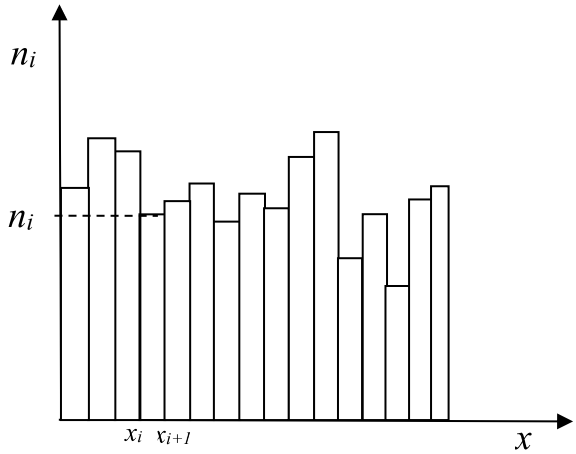


Рисунок 1.6 - Гістограма частот

За видом гістограми частот роблять припущення про вид закону розподілу . Вид гістограми частот порівнюють з відомими законами розподілу випадкових величин. Для зручності наведемо найбільш вживані у цілях моделювання закони розподілу в таблиці (таблиця 1.1 та таблиця 1.2). Прийняті такі позначення: $f(x)$ – щільність закону розподілу випадкової величини ζ, μ – математичне сподівання випадкової величини ζ, σ – середнє квадратичне відхилення випадкової величини ζ. У таблицях крім графічного зображення закону розподілу наведений зв’язок середнього значення та середнього квадратичного відхилення випадкової величини із параметрами закону.

Оцінка значень параметрів закону розподілу

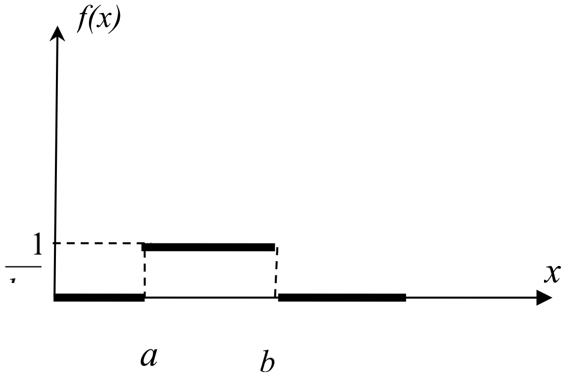
З формули закону розподілу, що наведена у таблицях 1.1 та 1.2, дослідник робить висновок про параметри закону розподілу, які потрібно визначити. Переважна більшість параметрів закону розподілу може бути оцінена на основі фундаментальних статистичних характеристик випадкової величини таких, як максимальне та мінімальне значення, середнє значення, середнє квадратичне відхилення.

Таблиця 1.1

Закони розподілу **неперервних** випадкових величин

<table>
<tr><th>Графічне представлення щільності закону розподілу</th><th>Формульне представлення щільності закону розподілу</th></tr>
<tr><td>

Рівномірний



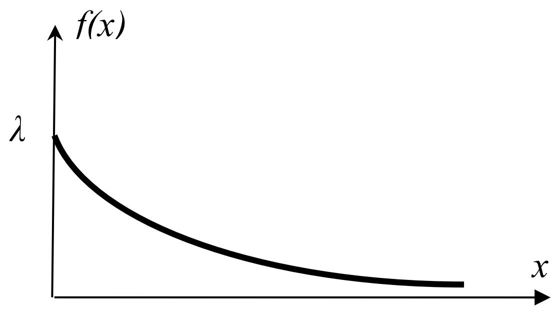
</td><td>

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, a\le x\le b\\ 0, x\le a, x\ge b\end{cases}$$

$$\mu=\frac{a+b}{2},\quad \sigma=\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$$

</td></tr>
<tr><td>

Експоненціальний (показниковий)



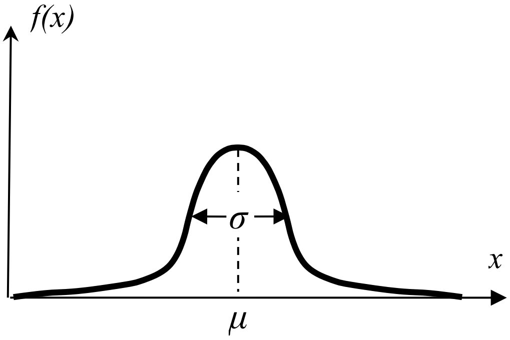
</td><td>

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, 0\le x\le\infty\\ 0, x<0\end{cases}$$

$$\mu=\frac{1}{\lambda},\quad \sigma=\frac{1}{\lambda}$$

</td></tr>
<tr><td>

Нормальний (Гауса)



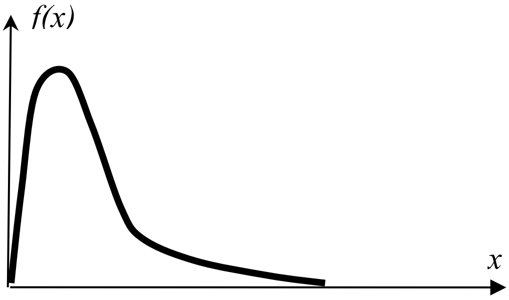
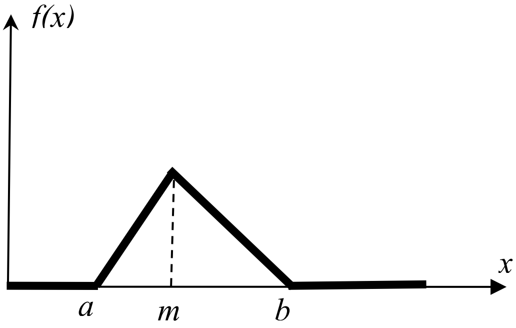
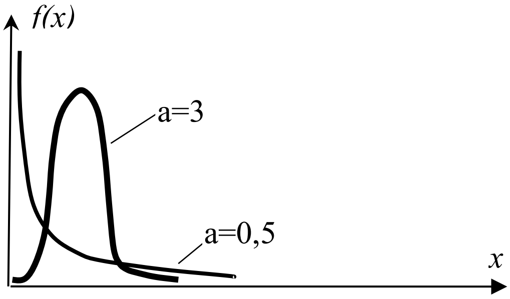
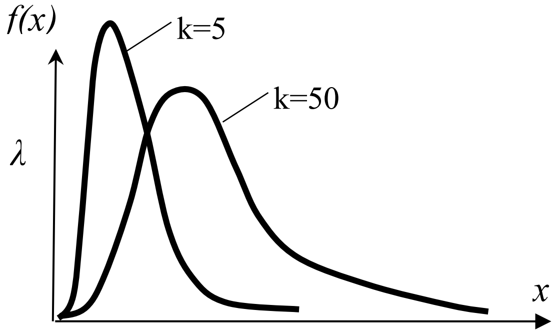
</td><td>

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, -\infty\le x\le\infty$$

$$\mu=\mu,\quad \sigma=\sigma$$

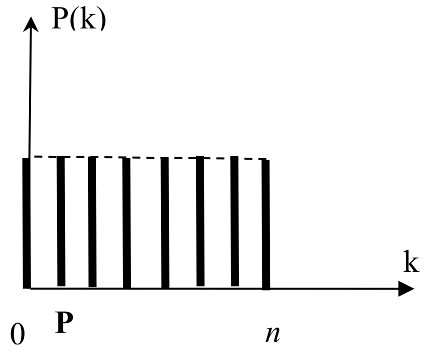
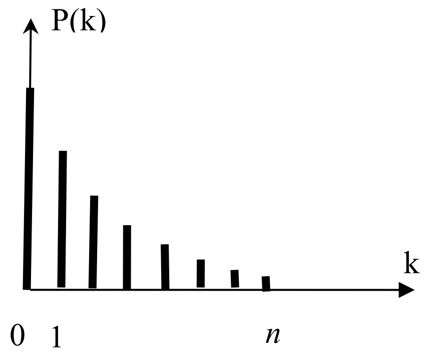
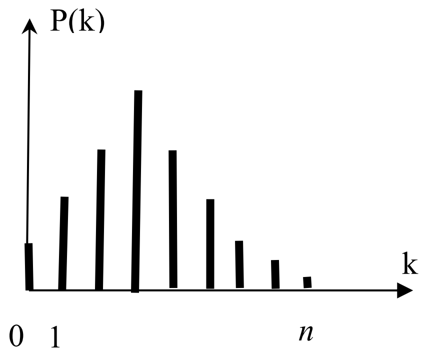
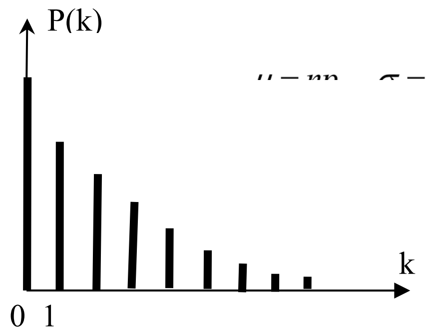
</td></tr>
</table>

Продовження таблиці 1.1

Графічне представлення щільності закону розподілу	Формульне представлення щільності закону розподілу
Логнормальний 	$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{xb\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(\ln x-a)^2}{2b^2}}, & x>0\\ 0, & x\le 0\end{cases}$ $\mu=e^{a+\frac{b^2}{2}}$ $\sigma=\sqrt{e^{2a+b^2}\left(e^{b^2}-1\right)}$
Трикутний 	$f(x)=\begin{cases}\frac{2(x-a)}{(m-a)(b-a)}, & a\le x\le m\\ \frac{2(b-x)}{(b-m)(b-a)}, & m\le x\ge b\end{cases}$ $\mu=\frac{a+m+b}{3}$ $\sigma=\frac{\sqrt{a(a-m)+b(b-a)+m(m-b)}}{3\sqrt{2}}$
Вейбулла 	$f(x)=\begin{cases}ab^{-a}x^{a-1}e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^2}, & x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$ $\mu=\frac{b}{a}\Gamma\left(\frac{1}{\mathrm{a}}\right)$ $\sigma=b\sqrt{\frac{1}{a}\left(2\Gamma\left(\frac{2}{a}\right)-\frac{1}{a}\left(\Gamma\left(\frac{1}{a}\right)\right)^2\right)}$
Ерланга 	$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, 0\le x\le\infty\\ 0, x<0\end{cases}$ $\mu=k\cdot\frac{1}{\lambda},\quad \sigma=\sqrt{k}\cdot\frac{1}{\lambda}$

Таблиця 1.2

Закони розподілу **дискретних** випадкових величин

Графічне представлення закону розподілу	Формульне представлення закону розподілу
Рівномірний 	$P(k)=\frac{1}{n},\quad k=0,1\ldots n$ $\mu=\frac{n}{2},\quad \sigma=\frac{n}{2\sqrt{3}}$
Пуассона 	$P(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\quad k=0,1\ldots n$ $\mu=\lambda,\quad \sigma=\sqrt{\lambda}$
Біноміальний 	$P(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k},\quad k=0,1\ldots n$ $\mu=np,\quad \sigma=\sqrt{np(1-p)}$
Геометричний 	$P(k)=p(1-p)^k,\quad k=0,1\ldots$ $\mu=(1-p)p,\quad \sigma=\frac{\sqrt{(1-p)}}{p}$

Нагадаємо формули оцінки середнього μ та дисперсії σ^2 випадкової величини ζ:

$$\tilde{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\zeta_i \quad , \tag{1.22}$$

$$\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\varsigma_i - \mu))^2 \tag{1.23}$$

де n – кількість генерованих випадкових чисел, а хвиляста лінія підкреслює, що розраховується статистична оцінка величини.

У випадку дискретного закону розподілу теоретичне значення частоти влучення випадкової величини ζ у значення i визначається значенням ймовірності $P(i)$. У випадку неперервного закону розподілу теоретичне значення частоти влучення випадкової величини ζ в i-й інтервал визначається за формулами:

$$p_i^T = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx = F(x_i) - F(x_{i-1}), \tag{1.24}$$

де $f(x)$ – щільність закону розподілу випадкової величини ζ, $F(x)$ – закон розподілу випадкової величини ζ, (x_{i-1}, x_i) – інтервал.

Наприклад, у випадку експоненціального закону розподілу теоретичне значення частоти влучення в інтервал може бути визначене за формулою:

$$p_i^T = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left(e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}}\right), \tag{1.25}$$

де параметр λ має бути оцінений за формулою (див. табл.1.1):

$$\lambda = \frac{1}{\tilde{\mu}} = \frac{1}{\tilde{\sigma}}. \tag{1.26}$$

А у випадку закону розподілу Пуасона – за формулою:

$$p_i^T = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}. \tag{1.27}$$

де параметр λ оцінюється за формулою (див. табл.1.2):

$$\lambda = \tilde{\mu} = \tilde{\sigma}^2 \tag{1.28}$$

Перевірка відповідності досліджуваних випадкових чисел обраному закону розподілу.

Відповідність обраного закону розподілу заданим випадковим числам (при кількості спостережуваних чисел більше ста) перевіряється за критерієм згоди χ^2 [Гмурман]:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_i - np_i^T)^2}{np_i^T}, \tag{1.29}$$

де n_i – спостережувана кількість влучень в i-ий інтервал, np_i^T - очікувана за теоретичним законом розподілу кількість влучень в i-ий інтервал.

З формули (2.10) видно, що основною ідеєю критерію χ^2 є вимірювання розбіжності між спостережуваною та очікуваною за теоретичним законом розподілу кількістю влучень в i-ий інтервал (рис. 1.7).

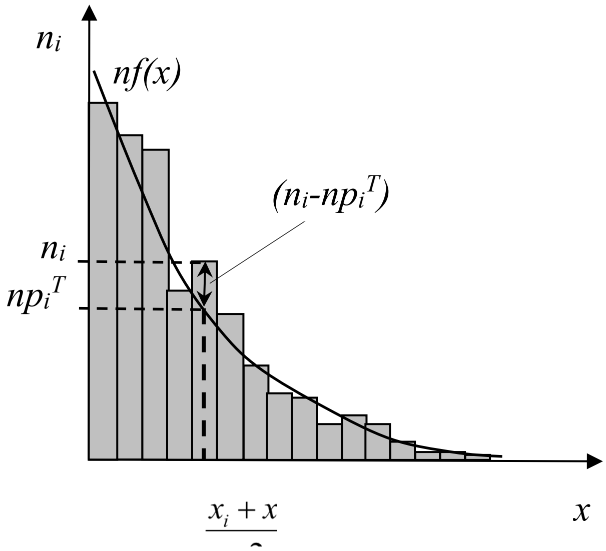


Рисунок 1.7 - До пояснення змісту критерію χ^2

Розраховане значення χ^2 порівнюється з табличним значенням критерію $\chi^2_{кр}$, яке взяте при рівні значимості α=0,05 та кількості степенів свободи, рівній кількості інтервалів у гістограмі частот k мінус 1 мінус кількість параметрів закону розподілу. Якщо $\chi^2<\chi^2_{кр}$, то з довірчою ймовірністю 0,95 можна стверджувати, що знайдений закон розподілу відповідає спостережуваним значенням випадкової величини ζ. Інакше потрібно змінити параметри розподілу або припустити інший закон розподілу.

Довірча ймовірність результату означає, що якщо, наприклад, за допомогою критерію χ^2 з'ясували відповідність закону випадкових чисел закону розподілу, то гарантувати цю відповідність можемо не більше як з ймовірністю 0,95. З ймовірністю 0,05 могло статися, що спостережувані значення випадково виявилися відповідними закону розподілу. Довірча ймовірність означає також, що, якщо провести повторний експеримент із тою ж самою випадковою величиною, то з ймовірністю 0,95 результат ідентифікації закону розподілу співпаде із отриманим попереднім результатом.

Критерій χ^2 має такі обмеження для застосування: по-перше, кількість випадкових чисел повинна бути не менша за 100; по-друге, кількість влучень у кожний інтервал має бути більшою за 5:

$$n \ge 100, \quad n_i \ge 5, \quad i = 1,...k. \tag{1.30}$$

Якщо кількість влучень в якийсь інтервал менша за 5, то потрібно об'єднати сусідні інтервали і добитися, щоб кількість влучень стала більшою або рівною за 5. Допускається об'єднання як двох інтервалів, так і більше.

Якщо кількість досліджуваних чисел надто мала (менше ста), то потрібно застосовувати критерій Колмогорова-Смірнова (або як його ще називають λ-критерій). За критерієм Колмогорова-Смірнова відповідність спостережуваних випадкових чисел обраному закону розподілу оцінюється за значенням найбільшої абсолютної різниці:

$$\lambda = \sqrt{n} \cdot \max_i \left| w_i - w_i^T \right|,$$

$$w_i = \sum_{j=1}^{i} \frac{n_j}{n}, \qquad w_i^T = F(x_i) \tag{1.31}$$

де w_i – спостережувані значення сумарної частоти влучень в i-ий інтервал, n_j – кількість влучень випадкової величини в j-ий інтервал, n – кількість спостережуваних випадкових чисел, $w_i^{\ T}$ – теоретичні значення сумарної частоти влучень в i-ий інтервал, розраховані за законом розподілу $F(x)$ випадкової величини ζ, x_i – середина i-ого інтервалу.

З формули (1.31) слідує, що на відміну від χ^2-критерія λ-критерій порівнює сумарні частоти влучення в i-ий інтервал (рис. 1.8).

Розраховане значення λ-критерію порівнюють з табличним значення критерію $\lambda_{кр}$=1,36, яке взяте при рівні значимості α=0,05 [Бронштейн]. Якщо $\lambda<\lambda_{кр}$, то з довірчою ймовірністю 0,95 можна стверджувати, що спостережувана випадкова величина ζ має закон розподілу $F(x)$.

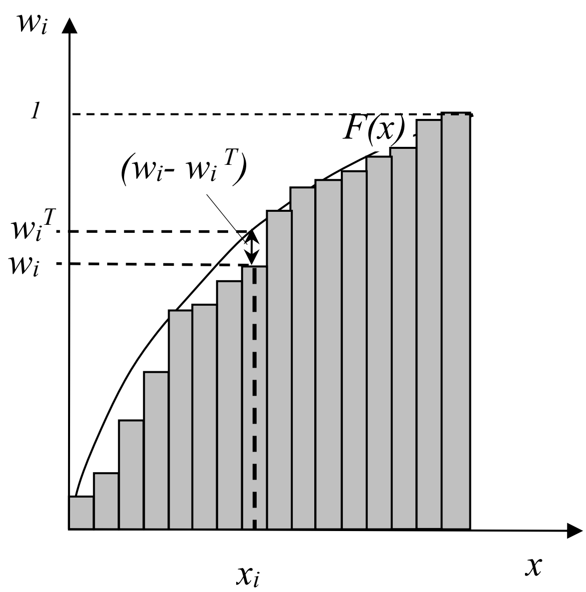


Рисунок 1.8 - До пояснення змісту λ-критерію (Колмогорова-Смірнова)

В [Бронштейн] зауважується, що критерій Колмогорова-Смірнова вимагає, щоб оцінка параметрів розподілу виконувалась за даними, які не використовувались для розрахунку λ-критерію.

1.4 Приклади розв'язання задач

Задача 1. Побудувати генератор випадкової величини, що має експоненціальний закон розподілу з параметром 2.

Розв'язання. Скористаємось методом оберненої функції. За формулою (5.11) отримуємо:

$$r = -\frac{1}{2} \cdot \ln \varsigma,$$

де ς є випадкова величина, рівномірно розподілена на (0;1).

<u>*Відповідь:*</u> $r = -\frac{1}{2} \cdot \ln \varsigma$, де ς є випадкова величина, рівномірно розподілена на (0;1).

Задача 2. Побудувати генератор випадкової величини *r*, що приймає значення 0, 1, 2 з ймовірностями 0,25, 0,5 та 0,25 відповідно.

Розв'язання. За формулою (5.12) для генерування дискретної випадкової величини отримуємо:

$$r = \begin{cases} 0, & якщо \quad 0 < \varsigma \le 0{,}25 \\ 1, & якщо \quad 0{,}25 < \varsigma \le 0{,}75 \\ 2, & якщо \quad 0{,}75 < \varsigma \le 1 \end{cases}$$

де ζ є випадкова величина, рівномірно розподілена на (0;1).

Відповідь: $r = \begin{cases} 0, & якщо \quad 0 < \varsigma \le 0{,}25 \\ 1, & якщо \quad 0{,}25 < \varsigma \le 0{,}75 \\ 2, & якщо \quad 0{,}75 < \varsigma \le 1 \end{cases}$, де ζ є випадкова величина, рівномірно розподілена на (0;1).

Задача 3. Побудувати генератор випадкових чисел, якщо відомі значення закону розподілу випадкової величини: F(0)=0, F(0,5)=0,27, F(1)=0,5, F(1,5)=0,73, F(2)=0,88, F(2,5)=0,96, F(3)=0,98, F(3,5)=0,99, F(4)=1,0

Розв'язання. Для побудови заданого генератору випадкових чисел скористаємось табличним методом. За формулами (5.14) знаходимо:

$$r = \frac{0{,}5}{0{,}27} \cdot \varsigma, \text{ якщо } \; 0 < \varsigma \le 0{,}27;$$

$$r = 0{,}5 + \frac{0{,}5}{0{,}23}(\varsigma - 0{,}27), \text{ якщо } \; 0{,}27 < \varsigma \le 0{,}5;$$

$$r = 1 + \frac{0{,}5}{0{,}23}(\varsigma - 0{,}5), \text{ якщо } \; 0{,}5 < \varsigma \le 0{,}73;$$

$$r = 1{,}5 + \frac{0{,}5}{0{,}15}(\varsigma - 0{,}73), \text{ якщо } \; 0{,}73 < \varsigma \le 0{,}88;$$

$$r = 2 + \frac{0{,}5}{0{,}8}(\varsigma - 0{,}88), \text{ якщо } \; 0{,}88 < \varsigma \le 0{,}96;$$

$$r = 2{,}5 + \frac{0{,}5}{0{,}02}(\varsigma - 0{,}96), \text{ якщо } \; 0{,}96 < \varsigma \le 0{,}98;$$

$$r = 3 + \frac{0{,}5}{0{,}01}(\varsigma - 0{,}98), \text{ якщо } \; 0{,}98 < \varsigma \le 0{,}99;$$

$$r = 3{,}5 + \frac{0{,}5}{0{,}01}(\varsigma - 0{,}99), \text{ якщо } \; 0{,}99 < \varsigma \le 1;$$

Відповідь: відповіддю є вісім отриманих формул.

Задача 4. Побудувати генератор випадкових чисел, нормально розподілених з математичним сподіванням 10 та середнім квадратичним відхиленням 2.

Розв'язання. Скористаємось формулами (5.17), 5.18). За умовами задачі математичне сподівання *a*=10, а середнє квадратичне відхилення σ=2. Тому маємо таку формулу

$$r = 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{12} \zeta_i - 6 \right) + 10,$$

де кожна з величин ζ_i є рівномірно розподіленою в інтервалі (0;1) випадковою величиною. Тобто для отримання одного нормально розподіленого випадкового числа потрібно генерувати 12 рівномірно розподілених випадкових чисел.

Відповідь: генератор нормально розподілених випадкових чисел з математичним сподіванням 10 та середнім квадратичним відхиленням 2 задається формулою $r = 2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{12} \zeta_i - 6 \right) + 10$.

Задача 5. За даними спостережень, які наведені у таблиці 2.5, визначити закон розподілу випадкової величини «кількість телефонних викликів таксі».

Таблиця 1.5

Дані спостережень про кількість телефонних викликів таксі

Кількість викликів, i	Кількість 10-хвилинних інтервалів з кількістю викликів i, n_i	Відносна частота влучень, $p_i=n_i/n$
0	70	0,311
1	85	0,378
2	52	0,231
3	14	0,062
4	3	0,013
5	1	0,004
	$n = \Sigma n_i = 225$	$\Sigma p_i = 1$

Розв'язання. Гістограма частот має вигляд, представлений на рисунку 1.18:

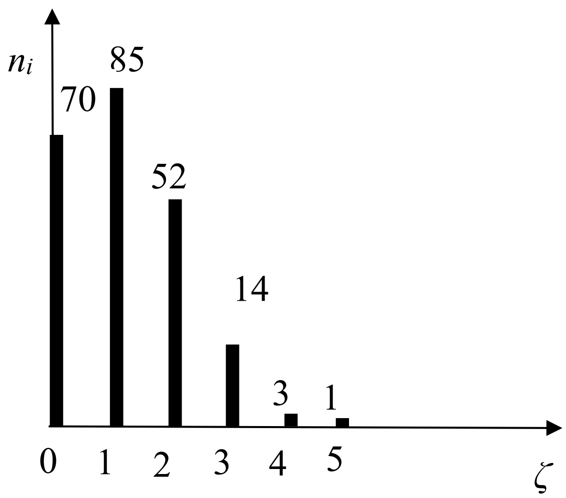


Рисунок 1.18 - Гістограма частот

З вигляду гістограми частот доцільно припустити, що дана випадкова величина має розподіл Пуассона (див. табл. 2.2):

$$P(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad k = 0,1 \dots n,$$

де λ - параметр закону розподілу.

Для оцінки параметру закону розподілу обчислимо середнє та середнє квадратичне відхилення випадкової величини «кількість телефонних викликів таксі»:

$$\bar{\varsigma} = (0\cdot 70 + 1\cdot 85 + 2\cdot 52 + 3\cdot 14 + 4\cdot 3 + 5\cdot 1)/\,225 = 1{,}102 \sim \mu,$$
$$D = \left(70\cdot(0-1{,}102)^2 + 85\cdot(1-1{,}102)^2 + \ldots + 1\cdot(5-1{,}102)^2\right)/(225-1) = 0{,}976 \sim \sigma^2.$$

Оскільки параметр закону розподілу Пуассона $\lambda = \mu = \sigma^2$, то приймемо гіпотезу про значення λ = 1,039=(0,976+1,102)/2. Обчислимо значення ймовірності влучення випадкової величини у значення i за формулою (див. табл. 1.2):

$$p_i^T = \frac{e^{-1.039}\cdot 1{,}039^i}{i!},\ i=0,\ 1,\ldots 5.$$

Результати розрахунків представлені у таблиці 1.6

Таблиця 1.6

Розрахунок очікуваної кількості влучень за теоретичним законом розподілу

Значення випадкової величини, i	Ймовірність влучення випадкової величини, $p_i^T = \frac{e^{-1.039}\cdot 1.039^i}{i!}$	Очікувана кількість влучень у значення, $n\cdot p_i^T$
0	0,354	79
1	0,368	83
2	0,191	43
3	0,066	15
4	0,017	4
5	0,004	1
	$\Sigma p_i = 1$	$\Sigma n_i = 225$

Оскільки кількість спостережуваних значень випадкової величини достатньо велика (225>100), для оцінки відповідності закону розподілу застосуємо критерій χ^2. Критерій χ^2 вимагає, щоб кількість влучень у кожний інтервал була не менша 5, тому об'єднаємо сусідні групи. Розрахунок критерію χ^2 представлений у таблиці 1.7.

Таблиця 1.7.

Розрахунок критерію χ^2

Значення випадкової величини, i	Очікувана кількість влучень у значення, $n\cdot p_i^T$	Спостережувана кількість влучень у значення, n_i	Розрахунок критерію , $\frac{(n_i - n\cdot p_i^T)^2}{n\cdot p_i^T}$
0	79	70	1,025
1	83	85	0,048
2	43	52	1,884
3	15+4+1	14+3+1	0,2
	$\sum$=225	$\sum$=225	$\sum$=3,157

Отже, маємо

$$\chi^2 = \sum \frac{(n_i - n\cdot p_i^T)^2}{n\cdot p_i^T} = 3{,}157\,.$$

Табличне значення $\chi^2_{кр}$ знаходиться з таблиць при кількості груп k=4 та кількості ступенів вільності m=4-1-1=2: $\chi^2_{кр}$ =5,99. Порівнюючи розраховане та табличне значення $\chi^2 < \chi^2_{кр}$ приходимо до висновку, що досліджувана випадкова величина із довірчою ймовірністю 0,95 відповідає закону розподілу Пуассона із параметром 1,039.

Відповідь. Випадкова величина «кількість телефонних викликів таксі» із довірчою ймовірністю 0,95 відповідає закону розподілу Пуассона із параметром 1,039.

Задача 6. Визначити закон розподілу випадкової величини «тривалість обслуговування клієнта» за наступними даними спостережень (табл. 1.8):

Таблиця 1.8

Дані спостережень про тривалість обслуговування клієнта

Інтервал, (x_{i-1}, x_i)	Кількість влучень випадкової величини в інтервал, n_i	Відносна частота влучень, $p_i=n_i/n$	Сумарна частота влучень, h_i
(28;30)	11	0,133	0,133
(30;32)	10	0,120	0,253
(32;34)	7	0,084	0,337
(34;36)	7	0,084	0,421
(36;38)	13	0,157	0,578
(38;40)	16	0,193	0,771
(40;42)	8	0,096	0,867
(42;44)	11	0,133	1,000
	$n = \Sigma n_i = 83$	$\Sigma p_i = 1$	

Розв'язання. Гістограма частот має вигляд, представлений на рисунку 2.19:

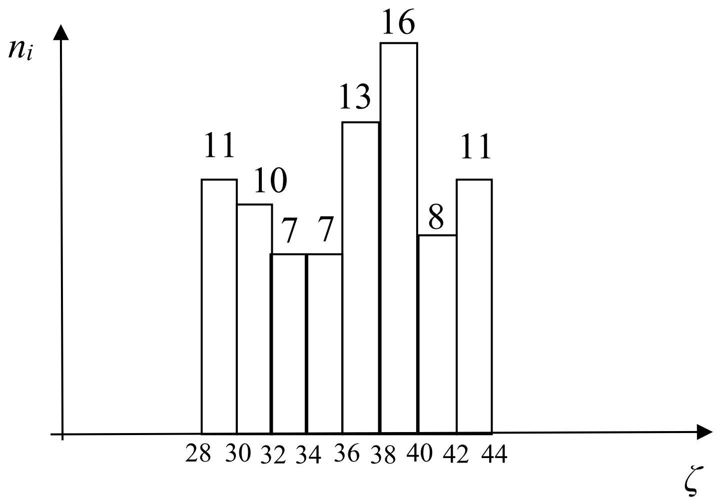


Рисунок 1.19 - Гістограма частот

З виду гістограми частот доцільно припустити, що дана випадкова величина має рівномірний розподіл (див. табл. 1.2). Оцінимо параметри рівномірного закону розподілу:

$$a = floor(\max(\zeta)) = 28,\ b = ceil(\min(\zeta)) = 44,$$

де *floor* – функція наближення до найближчого більшого цілого числа, *ceil* – функція наближення до найближчого меншого цілого числа.

Приймемо гіпотезу про рівномірний закон розподілу із параметрами 28 і 44. Розрахуємо значення ймовірностей влучення випадкової величини у значення *i* за формулою (2.5):

$$p_i^T = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{44-28} dx = \frac{1}{16}(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{16} \cdot 2 = 0{,}125,$$

оскільки довжина інтервалу складає 2.

Результати розрахунків теоретично очікуваної сумарної частоти влучень представлені у таблиці 1.9.

Таблиця 1.9

Розрахунок сумарної частоти влучень за теоретичним законом розподілу

Інтервал	Ймовірність влучення випадкової величини	Очікувана сумарна частота влучень
(28;30)	0,125	0,125
(30;32)	0,125	0,250
(32;34)	0,125	0,375
(34;36)	0,125	0,500
(36;38)	0,125	0,625
(38;40)	0,125	0,750
(40;42)	0,125	0,875
(42;44)	0,125	1,000
	$\Sigma p_i = 1$	

Оскільки кількість спостережуваних значень випадкової величини недостатня (83<100), для оцінки відповідності закону розподілу застосуємо λ-критерій. Розрахунок λ-критерію представлений у таблиці 2.10. За формулою (2.12) розраховуємо спостережуване значення критерію:

$$\lambda = \sqrt{n} \cdot \max_i \left| w_i - w_i^T \right| = \sqrt{83} \cdot 0{,}079 = 0{,}72.$$

Розраховане значення λ-критерію менше за табличне значення критерію $\lambda_{кр}$=1,36 (рівень значимості α=0,05), тому можна стверджувати, що спостережувана випадкова величина ζ із довірчою ймовірністю 0,95 має рівномірний закон розподілу з параметрами 28 і 44.

Таблиця 1.10.

Розрахунок λ-критерію

Інтервал	Очікувана сумарна частота влучень, w^T	Спостережувана сумарна частота влучень, w	Розрахунок λ-критерію, $\|w^T\text{-}w\|$
(28;30)	0,125	0,133	0,008
(30;32)	0,250	0,253	0,003
(32;34)	0,375	0,337	0,038
(34;36)	0,500	0,421	0,079
(36;38)	0,625	0,578	0,047
(38;40)	0,750	0,771	0,021
(40;42)	0,875	0,867	0,008
(42;44)	1,000	1,000	0,000
			max=0,079

Відповідь. Випадкова величина „тривалість обслуговування клієнта” з довірчою ймовірністю 0,95 має рівномірний закон розподілу в інтервалі від 28 до 44.

1.5 Задачі для самостійного розв’язання

1. Побудувати генератор випадкових чисел, які розподілені за експоненціальним законом із математичним сподіванням 30.

2. Побудувати генератор нормально розподілених випадкових чисел з математичним сподіванням 3 та дисперсією 2.

3. Побудувати генератор випадкових чисел, що мають емпіричний закон розподілу із значеннями: F(8)=0,02, F(9)=0,07, F(10)=0,16, F(11)=0,31, F(12)=0,5, F(13)=0,70, F(14)=0,84, F(15)=0,93, F(16)=0,98, F(17)=0,99, F(18)=1,0.

4. Побудувати генератор нормально розподілених випадкових чисел з математичним сподіванням 30 та дисперсією 15, але не менших 1 та не більших 60.

5. Побудувати генератор випадкової величини r, що приймає значення 10, 15, 20, 25, 30 з ймовірностями 0,2, 0,3, 0,1, 0,1 та 0,3 відповідно.

6. Побудувати генератор логнормально розподілених випадкових чисел з математичним сподіванням 12 та дисперсією 3.

7. Побудувати генератор випадкових чисел, які мають трикутний закон розподілу на інтервалі (1;12) з модою 3.

8. З’ясуйте, чи є випадкові числа рівномірно розподіленими на інтервалі (0,1), якщо гістограма частот представляється наступними значеннями кількості влучень в інтервали (табл. 1.15):

Таблиця 1.15

Частота влучень в інтервали випадкової величини

Інтервал	Кількість влучень
(0;0,1)	54
(0,1;0,2)	46

(0,2;0,3)	52
(0,3;0,4)	71
(0,4;0,5)	43
(0,5;0,6)	28
(0,6;0,7)	60
(0,7;0,8)	51
(0,8;0,9)	55
(0,9;1)	47

9. Визначте закон розподілу випадкової величини, якщо ряд спостережуваних значень випадкової величини наступний:

10, 7, 8, 8, 8 ,8, 10,10, 9, 10, 7, 10, 7, 10, 9, 9, 8, 8, 8, 9, 6, 6, 5, 8, 7, 8, 8, 7, 8, 9, 9, 9, 8, 7, 8, 7, 6, 9, 9, 9.

10. Визначте закон розподілу випадкової величини, якщо гістограма частот представлена наступними значеннями:

Значення	Кількість влучень
0	61
1	33
2	11
3	3
4	1

11. Визначте закон розподілу випадкової величини, якщо ряд спостережуваних значень випадкової величини наступний:

121, 76, 65, 252, 85, 36 ,137, 80, 40, 48, 99, 101, 113, 124, 111, 66, 19, 170, 148, 42, 107, 184, 83, 0, 29, 34 ,74, 103, 70 ,83, 127, 111, 120, 42, 45, 45, 80, 34, 0, 163, 139, 107, 49, 53, 56, 113, 80, 165, 31 ,119.