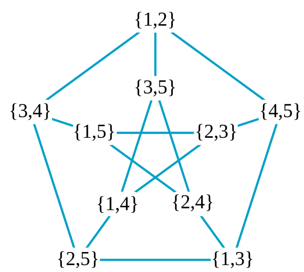
I Exemples de graphes

Le graphe de **Kneser** $KG_{n,k}$ a pour sommets les sous-ensembles de taille k de $\{0, ..., n-1\}$ et une arête entre 2 sommets si ceux-ci sont disjoints.

1. Dessiner $KG_{5,2}$ (ce graphe particulier est appelé graphe de **Petersen**).



2. Quel est le nombre de sommets et d'arêtes de $KG_{n,k}$?
   ▶ Il a $\binom{n}{k}$ sommets chacun de degré $\binom{n-k}{k}$ donc, d'après la formule des degrés, $|E| = \frac{\binom{n}{k}\binom{n-k}{k}}{2}$.

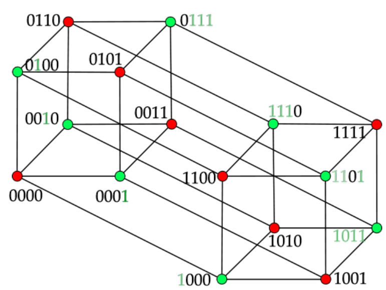
Un **hypercube** Q_n a pour sommets les mots binaires de taille n, 2 sommets étant reliés si ils différent d'un bit.

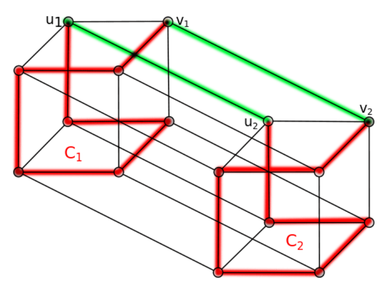
3. Dessiner Q_3.

4. Quel est le nombre de sommets et d'arêtes de Q_n?
   ▶ Il a 2^n sommets chacun de degré n donc, d'après la formule des degrés, $|E| = n2^{n-1}$.

5. Montrer que l'on peut aussi définir Q_n par récurrence.
   ▶ On peut obtenir Q_n à partir de deux copies de Q_{n-1} en reliant chaque sommet à sa « copie ».

6. Montrer que Q_n est **biparti** (ou **2-coloriable**) : on peut colorier ses sommets avec 2 couleurs de façon à ce que toute arête ait ses extrémités de couleurs différentes. Dessiner une telle coloration de Q_3.
   ▶ On peut colorier les sommets en fonction de la parité du nombre de 1. Par exemple pour Q_4 (fig. gauche) :





7. Montrer que Q_n est **hamiltonien** : il existe un cycle (**hamiltonien**) qui visite tous les sommets exactement une fois. Dessiner un tel cycle de Q_3.
   ▶ Par récurrence sur n. C'est évident pour $n = 1$. Supposons que Q_n soit Hamiltonien. D'après 5., Q_{n+1} peut être construit à partir de deux Q_n qui possèdent des cycles hamiltoniens C_1 et C_2, qui sont des copies l'un de l'autre. Soient $e_1 = (u_1, v_1)$ et $e_2 = (u_2, v_2)$ deux arêtes copies l'une de l'autre, dans C_1 et C_2. Alors on peut remplacer, dans $C_1 \cup C_2$, e_1 et e_2 par (u_1, u_2) et (v_1, v_2) afin d'obtenir un cycle Hamiltonien de Q_{n+1} (fig. droite au dessus), ce qui achève la récurrence.

II Petites questions

1. Montrer que dans tout graphe avec au moins 2 sommets, il existe 2 sommets de même degré.
   ▶ S'il y a n sommets, les degrés sont compris entre 0 et $n-1$. Mais il est impossible d'avoir à la fois un sommet de degré 0 (relié à aucun autre) et un de degré $n-1$ (relié à tous les autres). Donc il y a seulement $n-1$ possibilités pour n sommets : 2 sommets ont le même degré (principe des tiroirs).

2. Montrer qu'un arbre avec un sommet de degré 2017 possède au moins 2017 feuilles (une feuille est un sommet de degré 1).
   ▶ <u>1ère solution</u> : notons n le nombre de sommets et f le nombre de feuilles. D'après la formule des degrés et comme un arbre a $n-1$ arêtes : $2(n-1) = \sum \deg(v) \geq 2017 + f + \underbrace{2(n-f-1)}_{\text{autres sommets}}$. D'où $f \geq 2017$.

   <u>2ème solution</u> : lorsqu'on retire le sommet u de degré 2017, on obtient 2017 composantes connexes sans cycles. Celles avec

un seul sommet sont en fait des feuilles. Les autres ont au moins 2 sommets de degré 1 (cf cours : un chemin de longueur maximum a deux extrémités de degré 1) et l'un d'eux au moins est non adjacent à u donc est une feuille dans l'arbre initial. Il y a donc bien au moins 1 feuille dans chaque composante connexe, pour un total de 2017.

3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Quel est le nombre minimum de composantes connexes d'un graphe à n sommets et $n-k$ arêtes?
   ▶ Fixons n et montrons par récurrence sur k qu'un graphe à n sommets et $n-k$ arêtes possède au moins k composantes connexes. C'est évident pour $k=1$.
   Soit $k \geq 2$ fixé et G un graphe à n sommets et $n-k$ arêtes. Notons c son nombre de composantes connexes. D'après le cours, G ne peut pas être connexe donc $c \geq 2$. Rajoutons une arête entre deux composantes connexes de G : ce nouveau graphe G' a alors $n-k+1 = n-(k-1)$ arêtes. Par hypothèse de récurrence, G' a $\geq k-1$ composantes connexes d'où $c \geq (k-1)+1 = k$.

4. Montrer que si $G=(V,E)$ est un graphe alors G ou $\overline{G} := (V, \overline{E})$ est connexe. Est-il possible que les deux soient connexes?
   ▶ Supposons G non connexe. Alors V peut être séparé en deux ensembles A et B sans aucune arête entre les deux (si C_1, ..., C_p sont les composantes connexes de G, $A := C_1$ et $B := C_2 \cup ... \cup C_p$ font l'affaire).
   $\overline{G}$ contient donc toutes les arêtes possibles entre A et B. Soit alors $u, v \in V$.
   Si $u \in A$ et $v \in B$, il existe une arête entre les deux dans $\overline{G}$. De même si $u \in B$ et $v \in A$.
   Si $u \in A$ et $v \in A$: soit $w \in B$. $(u,w) \in \overline{E}$ et $(w,v) \in \overline{E}$. De même si $u \in B$ et $v \in B$.
   Donc dans tous les cas, il existe bien un chemin de u à v dans $\overline{G}$.
   Il est possible que G et $\overline{G}$ soient connexes, par exemple les graphes suivants :

5. (Théorie de Ramsey) Montrer que dans tout graphe à 6 sommets, on peut trouver 3 sommets tous adjacents ou 3 sommets sans adjacence.
   ▶ Soit v un sommet.
   Si $\deg(v) \geq 3$: soient v_1, v_2, v_3 trois voisins de v. Si deux d'entre eux sont adjacents, disons v_i et v_j, alors v, v_i, v_j sont tous adjacents. Sinon v_1, v_2, v_3 sont sans adjacence.
   Si $\deg(v) < 3$: on se ramène au cas précédent en raisonnant avec les « non-arêtes ».

III Théorème de Mantel (graphe sans triangle)

Soit $G=(V,E)$ un graphe sans cycle de longueur 3 (un triangle).

1. Montrer que $\forall (u,v) \in E$, $\deg(u) + \deg(v) \leq |V|$.
   ▶ Si $\deg(u)+\deg(v) > |V|$ alors l'ensemble $\mathcal{V}(u)$ des voisins de u ne peut pas être disjoint de $\mathcal{V}(v)$ (sinon $|\mathcal{V}(u) \cup \mathcal{V}(v)| = \deg(u)+\deg(v) > |V|$) donc il existe un sommet adjacent à u et v, ce qui forme un triangle.

2. En déduire que $\displaystyle\sum_{v \in V} \deg(v)^2 \leq |V||E|$.
   ▶ D'après la question précédente, $\displaystyle\sum_{(u,v)\in E} (\deg(u)+\deg(v)) \leq |V||E|$.
   De plus, $\forall v \in V$, $\deg(v)$ apparaît $\deg(v)$ fois dans $\displaystyle\sum_{(u,v)\in E} (\deg(u)+\deg(v))$ (une fois pour tous les voisins u de v).
   Donc $\displaystyle\sum_{(u,v)\in E} (\deg(u)+\deg(v)) = \sum_{v\in V} \deg(v)^2$ ce qui donne le résultat.

3. En déduire que $|E| \leq \dfrac{|V|^2}{4}$ (théorème de Mantel).
   ▶ 1ère solution : $f : x \longmapsto x^2$ est convexe donc, d'après l'inégalité de Jensen (inégalité de convexité avec un nombre quelconque de λ_i) :
   $$f\left(\sum_{v\in V} \frac{\deg(v)}{|V|}\right) \leq \sum_{v\in V} \frac{f(\deg(v))}{|V|}$$
   On obtient alors le résultat en utilisant $\displaystyle\sum_{v\in V} \deg(v) = 2|E|$ et la question 2.

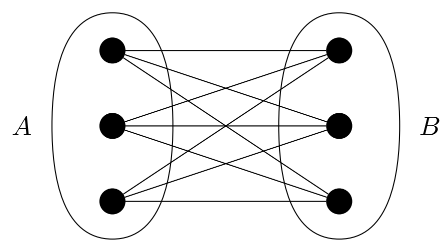
2ème solution : appliquer Cauchy-Schwarz sur $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \deg(v_1) \\ \vdots \\ \deg(v_n) \end{pmatrix}$, où $V = \{v_1, ..., v_n\}$:

$$\sum_{i=1}^{n} \deg(v_i) = \left| \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \deg(v_1) \\ \vdots \\ \deg(v_n) \end{pmatrix} \right| \leq \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \left\| \begin{pmatrix} \deg(v_1) \\ \vdots \\ \deg(v_n) \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{|V|} \sqrt{\sum_{v \in V} \deg(v)^2}$$

On obtient alors le résultat en utilisant $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$ et la question 2.

Remarque : on peut utiliser l'une de ces 2 méthodes pour montrer plus généralement que, si $p \geq 1$, le minimum de $\sum_{i=1}^{n} x_i^p$ sous la contrainte $\sum_{i=1}^{n} x_i = K$ est atteint pour $x_1 = ... = x_n = \frac{K}{n}$.

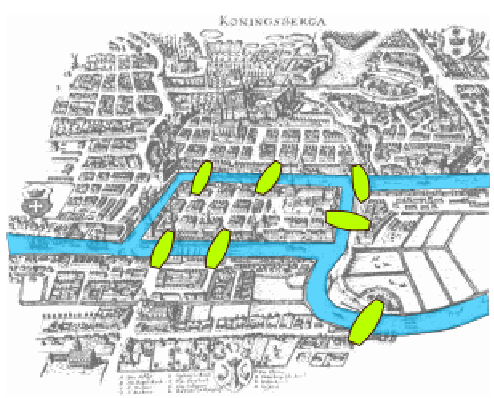
4. Donner un exemple de graphe sans cycle de longueur 3 et vérifiant $|E| = \frac{|V|^2}{4}$.
   ► Si $|V|$ est pair, on partage V en deux ensembles A et B de même taille et on considère le graphe (**biparti**) avec toutes les arêtes possibles entre A et B mais aucune à l'intérieur de A ou B :

   Chaque sommet de A est adjacent à $\frac{|V|}{2}$ arêtes, donc le nombre total d'arêtes est $\frac{|V|^2}{4}$. De plus un graphe biparti n'a pas de cycle de longueur impair (un chemin de longueur impair commençant en A doit finir en B).

Remarque : le théorème de Turán donne, plus généralement, le nombre maximum d'arêtes que peut contenir un graphe sans sous-graphe complet de taille p. Pour $p = 3$ on retrouve le théorème de Mantel.

IV Graphe eulérien



Euler (1736) s'est demandé s'il était possible de traverser tous les ponts de la ville de Königsberg exactement une fois.
Un **tour eulérien** dans un graphe est un cycle qui passe une fois exactement par chaque arête. Un graphe est **eulérien** s'il possède un tour eulérien.

1. Montrer que tous les sommets d'un graphe eulérien sont de degrés pairs.
   ► Soit v un sommet et $\mathcal{C}$ un cycle eulérien. $\mathcal{C}$ rentre autant de fois dans v (disons p fois) qu'il n'en sort. Comme de plus $\mathcal{C}$ utilise toutes les arêtes une fois, $\deg(v) = 2p$, ce qui est bien pair.

2. Réciproquement, montrer qu'un graphe connexe $G = (V, E)$ dont les sommets sont de degrés pairs est eulérien.
   Écrire en pseudo-code un algorithme pour trouver un cycle eulérien. Quelle est sa complexité?

► Preuve par récurrence sur le nombre d'arêtes. Évident si G n'a pas d'arête.
Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe avec $|E| \geq 1$ et faisons une promenade depuis un sommet quelconque $v_0 \in V$: comme v_0 a un degré pair qui ne peut pas être 0 (sinon G ne serait pas connexe) il a un voisin v_1, qui lui même possède un voisin v_2... comme G a un nombre fini de sommets, cette promenade revient sur un sommet déjà visité. Notons v_k la première fois que cela arrive, disons $v_i = v_j$ avec $i < j$. Alors $v_i - v_{i+1} - ...v_{j-1} - v_j$ est un cycle, noté C. Supprimons alors les arêtes de C afin d'obtenir un graphe G' avec moins d'arêtes. Les sommets dans G' sont de degré pair (car un cycle visite chaque sommet un nombre pair de fois) mais G' n'est pas forcément connexe.
Considérons les composantes connexes $G_1, ..., G_k$ de G'. On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence pour obtenir des cycles eulériens C_1, ..., C_k dans $G_1, ..., G_k$. On peut enfin concaténer ces cycles avec C pour obtenir un cycle eulérien de G et achever la récurrence.
L'algorithme correspondant serait linéaire en le nombre d'arêtes du graphe : on visite chaque arête exactement une fois.

3. Est-il possible de traverser tous les ponts de Königsberg exactement une fois?
   ► Non d'après la question 1 : il y a des sommets de degré impair.

4. À quelle condition nécessaire et suffisante un graphe orienté contient un cycle eulérien?
   ► « $\deg^+(v) = \deg^-(v)$ pour tout sommet v ». Démonstration similaire au cas non-orienté.

Application : une liste de **De Bruijn** d'ordre p est une liste cyclique de bits contenant chaque mot binaire de longueur p exactement une fois.

5. Donner des listes de De Bruijn d'ordres 2 et 3.
   ► On peut trouver par exemple, par tâtonnement : 1100 et 01011100. Il y a d'autres possibilités : une liste de De Bruijn d'ordre fixé n'est pas unique, a priori.

6. Quelle est la longueur d'une liste de De Bruijn d'ordre p?
   ► $\boxed{2^p}$: chaque indice de la liste doit être le début d'un mot de taille p, et il y a 2^p tels mots (il y a une bijection des indices de la liste vers les mots binaires de longueur p).

7. Comment déterminer en $O(n)$ si une liste de taille n est De Bruijn d'ordre p? Implémenter cette méthode dans votre projet, en utilisant par exemple une liste chaînée cyclique.
   ► On peut mémoriser chaque mot binaire rencontré dans un tableau `t` : `t.(i)` est `true` ssi la représentation en base 2 du nombre i a été rencontré. On parcourt ensuite la liste et, si on rencontre un mot déjà rencontré, on renvoie `false`. Si à la fin tous les éléments de `t` sont `true`, on a bien une liste de De Bruijn.

On veut montrer l'existence d'une liste de De Bruijn pour tout $p \in \mathbb{N}$. Pour cela on considère le **graphe orienté de De Bruijn** dont les sommets sont les mots de longueurs $p - 1$ et avec un arc de u à v si $u = b_1m$ et $v = mb_2$, où b_1 et b_2 sont des bits.

8. Dessiner le graphe de De Bruijn pour $p = 3$.

9. Montrer que ce graphe est eulérien et en déduire l'existence d'une liste de De Bruijn pour tout $p \in \mathbb{N}$.